



Fundação

**CECIERJ**

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

## **Métodos Estatísticos I**

**Volume Único**

Ana Maria Lima



**GOVERNO DO  
Rio de Janeiro**

**SECRETARIA DE CIÊNCIA,  
TECNOLOGIA, INOVAÇÃO E  
DESENVOLVIMENTO SOCIAL**

**UNIVERSIDADE  
ABERTA DO BRASIL**

**MINISTÉRIO DA  
EDUCAÇÃO**



Apoio:



**FAPERJ**

Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo  
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

# Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

www.cederj.edu.br

## Presidente

Carlos Eduardo Bielschowsky

## Vice-presidente

Marilvia Dansa de Alencar

## Coordenação do Curso de Administração

Administração (UFRRJ) - Silvestre Prado de Sousa Neto

Administração Pública (UFF) - Carlos Frederico Bom Kraemer

## Material Didático

### Elaboração de Conteúdo

Ana Maria Lima

### Coordenação Geral (Matemática)

Marcelo Corrêa

### Biblioteca

Raquel Cristina da Silva Tiellet

Simone da Cruz Correa de Souza

Vera Vani Alves de Pinho

### Coordenação de Equipe

Marcelo Freitas

### Ilustração

Ronaldo d'Aguiar Silva

### Programação Visual

Aline Madeira Brondani

Cristiane Mota Lourenço

### Revisão Linguística e Tipográfica

Cristiane Mota Lourenço

Patrícia Paula

### Coordenação de Produção

Fábio Rapello Alencar

### Assistente de Produção

Bianca Giacomelli

### Capa

Fernando Romeiro

### Produção Gráfica

Patrícia Esteves

Ulisses Schnaider

Copyright © 2016, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

L732

Lima, Ana Maria.

Métodos estatísticos 1 : volume único / Ana Maria Lima - Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2016.

348p.; 19 x 26,5 cm.

ISBN: 978-85-458-0060-6

1. Estatística matemática. 2. Métodos estatísticos. I. Título.

CDD: 519.9

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.  
Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

# Governo do Estado do Rio de Janeiro

**Governador**

Luiz Fernando de Souza Pezão

**Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia, Inovação e Desenvolvimento Social**

Gabriell Carvalho Neves Franco dos Santos

## Instituições Consorciadas

**CEFET/RJ - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca**

Diretor-geral: Carlos Henrique Figueiredo Alves

**FAETEC - Fundação de Apoio à Escola Técnica**

Presidente: Alexandre Sérgio Alves Vieira

**IFF - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense**

Reitor: Jefferson Manhães de Azevedo

**UENF - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro**

Reitor: Luis César Passoni

**UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Reitor: Ruy Garcia Marques

**UFF - Universidade Federal Fluminense**

Reitor: Sidney Luiz de Matos Mello

**UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro**

Reitor: Roberto Leher

**UFRRJ - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro**

Reitor: Ricardo Luiz Louro Berbara

**UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro**

Reitor: Luiz Pedro San Gil Jutuca



# Sumário

<b>Aula 1 – Apresentação de dados – parte 1 .....</b>	<b>7</b>
<i>Ana Maria Lima</i>	
<b>Aula 2 – Apresentação de dados – parte 2.....</b>	<b>31</b>
<i>Ana Maria Lima</i>	
<b>Aula 3 – Medidas de posição.....</b>	<b>53</b>
<i>Ana Maria Lima</i>	
<b>Aula 4 – Medidas de dispersão .....</b>	<b>81</b>
<i>Ana Maria Lima</i>	
<b>Aula 5 – Outras medidas estatísticas .....</b>	<b>101</b>
<i>Ana Maria Lima</i>	
<b>Aula 6 – Probabilidade – conceitos básicos .....</b>	<b>127</b>
<i>Ana Maria Lima</i>	
<b>Aula 7 – Revisão de análise combinatória.....</b>	<b>149</b>
<i>Ana Maria Lima</i>	
<b>Aula 8 – Probabilidade.....</b>	<b>169</b>
<i>Ana Maria Lima</i>	
<b>Aula 9 – Probabilidade condicional e independência de eventos .....</b>	<b>199</b>
<i>Ana Maria Lima</i>	
<b>Aula 10 – Teorema da probabilidade total e teorema de Bayes .....</b>	<b>237</b>
<i>Ana Maria Lima</i>	
<b>Aula 11 – Variáveis aleatórias discretas.....</b>	<b>267</b>
<i>Ana Maria Lima</i>	
<b>Aula 12 – Esperança e variância de variáveis aleatórias discretas.....</b>	<b>289</b>
<i>Ana Maria Lima</i>	
<b>Aula 13 – Algumas distribuições discretas.....</b>	<b>311</b>
<i>Ana Maria Lima</i>	
<b>Bibliografia .....</b>	<b>347</b>



# Aula 1



## APRESENTAÇÃO DE DADOS – 1ª PARTE

---

### Objetivos

Nesta aula, você aprenderá:

- 1 os conceitos básicos de população e amostra de uma pesquisa estatística;
- 2 a distinção entre variáveis qualitativas e variáveis quantitativas;
- 3 a construir distribuições de frequências para variáveis qualitativas e quantitativas discretas;
- 4 a construir gráficos de colunas e de setores para representar dados qualitativos e quantitativos discretos.

# PESQUISA ESTATÍSTICA – CONCEITOS BÁSICOS

## POPULAÇÃO E AMOSTRA

Estatística é a ciência da aprendizagem a partir dos dados. Em geral, fazemos levantamentos de dados para estudar e compreender características de uma população.

Por exemplo, um grande banco, querendo lançar um novo produto, precisa conhecer o perfil socioeconômico dos seus clientes e, nesse caso, a população de interesse é formada pelos clientes de todas as agências do banco. A Federação das Indústrias do Estado do Rio de Janeiro – FIRJAN – mede o grau de confiança dos empresários industriais através de uma pesquisa junto às empresas industriais, sendo a população de interesse, aqui, o conjunto das empresas industriais do estado do Rio de Janeiro.

Com esses dois exemplos apenas, já podemos ver que o conceito de *população de uma pesquisa estatística* é mais amplo, não se restringindo a seres humanos; ela é definida exatamente a partir dos objetivos da pesquisa.

Embora tenham populações bastante distintas, essas duas pesquisas têm em comum o fato de os resultados desejados serem obtidos a partir de dados levantados junto a um subconjunto da população – uma *amostra*. Há várias razões para se trabalhar com *pesquisas por amostragem* – custo e tempo, em geral, são as mais comuns. Mas, além de serem mais baratas e rápidas, as pesquisas por amostragem, se bem planejadas, podem fornecer resultados quase tão precisos quanto aqueles fornecidos por *pesquisas censitárias*, em que todos os elementos da população são investigados.

Exemplos clássicos de pesquisa censitária são os Censos Demográficos realizados a cada dez anos no Brasil e em outros países. O objetivo desses censos é levantar informações sobre toda a população do país, de modo a fornecer subsídios para os governantes definirem as políticas públicas.

### População

Conjunto de elementos para os quais se deseja estudar determinada(s) característica(s).



## VARIÁVEIS QUALITATIVAS E QUANTITATIVAS

Nas pesquisas estatísticas, as características sobre as quais queremos obter informação são chamadas *variáveis*.

Em uma pesquisa domiciliar sobre emprego e renda, algumas variáveis de interesse são sexo, raça, grau de instrução e valor dos rendimentos do morador. Em uma pesquisa sobre o estado nutricional dos brasileiros, o peso e a altura dos moradores de cada domicílio da amostra são medidos. Para o acompanhamento da atividade industrial no Rio de Janeiro, a FIRJAN obtém informações junto às empresas industriais sobre tipo de atividade econômica, número de empregados, número de horas trabalhadas, valor da folha de pagamento.

É importante diferenciar entre *variáveis qualitativas* e *variáveis quantitativas*.

De fato, sexo, raça, religião e atividade econômica de uma empresa são exemplos de variáveis qualitativas. Já o valor dos rendimentos, peso, altura, número de empregados, valor da folha de pagamento são exemplos de variáveis quantitativas. Podemos ver, então, que as variáveis qualitativas *descrevem* características dos elementos de uma população, enquanto as variáveis quantitativas *mensuram* características desses elementos.

As variáveis quantitativas, por sua vez, podem ser discretas ou contínuas.

Quando a variável puder assumir qualquer valor numérico em um determinado intervalo de variação, ela será uma variável *contínua*. Essas variáveis resultam normalmente de medições: peso, altura, dosagem de hemoglobina, renda etc. A interpretação desse tipo de variável leva à noção de valor aproximado, pois não existe instrumento de medição capaz de fornecer precisão absoluta na informação. Assim, quando uma balança mostra o peso de uma pessoa como 65,5 kg, esse valor, na verdade, é uma aproximação para qualquer valor entre, digamos, 65,495 kg e 65,505 kg. Por outro lado, a variável quantitativa *discreta* só poderá assumir valores pertencentes a um conjunto enumerável; os valores normalmente são obtidos através de algum processo de contagem. Alguns exemplos são o número de filhos de um casal, número de empregados de uma firma de contabilidade etc.

### Exercício 1.1.

O texto a seguir foi extraído da página do Ibope na internet: [www.ibope.com.br](http://www.ibope.com.br). Aí temos parte da descrição da pesquisa sociodemográfica realizada por esse instituto. Identifique as variáveis pesquisadas, classificando-as como qualitativas ou quantitativas.

O Levantamento Socioeconômico (LSE) é a pesquisa do IBOPE Mídia que mapeia as características sociais, demográficas e econômicas das famílias das principais regiões metropolitanas do país. Oferece também outros dados essenciais para traçar a estratégia de marketing para um produto. Com uma base de dados estendida em relação às outras pesquisas do IBOPE Mídia, o LSE serve de base para outros estudos. São levantados dados sobre a condição do domicílio entrevistado (condição da rua, tipo de imóvel) e sobre a condição socioeconômica do domicílio (informações sobre renda e classificação econômica). Também são pesquisados o número de pessoas no domicílio, a presença e a quantidade de crianças e adolescentes, a idade, grau de instrução e condição de atividade do chefe da casa e da dona de casa. A pesquisa levanta também dados sobre a posse de bens, como geladeira, máquina de lavar, automóvel, rádio, computador, telefone, entre outros, e acesso a serviços de mídia, como TV por Assinatura, internet, etc.

## APRESENTAÇÃO DE DADOS QUALITATIVOS

Vamos considerar o seguinte exemplo fictício, mas verossímil. A direção de uma empresa está estudando a possibilidade de fazer um seguro saúde para seus funcionários e respectivos familiares. Para isso, ela faz um levantamento junto a seus 500 funcionários, obtendo informação sobre sexo, estado civil, idade, número de dependentes e salário. Como são 500 funcionários, temos que achar uma forma de resumir os dados. Nesta aula, você irá aprender a resumir dados qualitativos em forma de uma distribuição (ou tabela) de frequência e também em forma gráfica. Você verá que os gráficos complementam a apresentação tabular.

## DISTRIBUIÇÕES DE FREQUÊNCIA

Consideremos inicialmente a variável qualitativa sexo. O que interessa saber sobre essa variável não é que João é do sexo masculino e Maria é do sexo feminino, mas sim quantos funcionários e quantas funcionárias há na empresa. Esse resultado pode ser resumido em uma tabela ou distribuição de frequências da seguinte forma:

Sexo	Número de funcionários
Masculino	270
Feminino	230
Total	500

Os números 270 e 230 resultaram da contagem das frequências de ocorrência de cada uma das categorias da variável sexo. Essa contagem é também chamada de *frequência simples absoluta* ou simplesmente *frequência*. O total de 500 é obtido somando-se o número de homens e de mulheres.

É interessante também expressar esses resultados em forma relativa (*frequência relativa*), isto é, considerar a frequência de cada categoria em relação ao total:

$$\frac{270}{500} = 0,54$$

ou seja, 54% dos funcionários da empresa são do sexo masculino e

$$\frac{230}{500} = 0,46$$

isto quer dizer que 46% dos funcionários são mulheres. A **Tabela 1.1:** apresenta a versão completa.

**Tabela 1.1:** Distribuição do número de funcionários por sexo

Sexo	Frequência simples	
	absoluta	relativa
Masculino	270	0,54
Feminino	230	0,46
Total	500	1,00

Note que a soma das frequências relativas é sempre 1, enquanto a soma das frequências absolutas deve ser igual ao número total de elementos sendo investigados.

De maneira análoga, obteríamos a **Tabela 1.2** para a variável estado civil. Note que aí a frequência relativa está apresentada em forma percentual. Para os casados, por exemplo, temos:

$$\frac{280}{500} = 0,56 = \frac{56}{100} = 56\%$$

Em geral, essa é a forma mais usual de se apresentarem as frequências relativas e, neste caso, a soma deve dar 100%.

**Tabela 1.2:** Distribuição do número de funcionários por estado civil

Estado civil	Frequência simples	
	absoluta	relativa %
Solteiro	125	25,0
Casado	280	56,0
Divorciado	85	17,0
Viúvo	10	2,0
Total	500	100,0

Exemplo 1.1.

Consideremos que na situação descrita anteriormente, os dados tenham sido levantados por departamento, para depois serem totalizados. Para o Departamento de Recursos Humanos, foram obtidas as seguintes informações:

Nome	Sexo	Estado civil	Número de dependentes
João da Silva	M	Casado	3
Pedro Fernandes	M	Viúvo	1
Maria Freitas	F	Casada	0
Paula Gonçalves	F	Solteira	0
Ana Freitas	F	Solteira	1
Luiz Costa	M	Casado	3
André Souza	M	Casado	4
Patrícia Silva	F	Divorciada	2
Regina Lima	F	Casada	2
Alfredo Souza	M	Casado	3
Margarete Cunha	F	Solteira	0
Pedro Barbosa	M	Divorciado	2
Ricardo Alves	M	Solteiro	0
Márcio Rezende	M	Solteiro	1
Ana Carolina Chaves	F	Solteira	0

Para pequenos conjuntos de dados, podemos construir a tabela à mão e, para isso, precisamos contar o número de ocorrências de cada categoria de cada uma das variáveis. Varrendo o conjunto de dados a partir da primeira linha, podemos ir marcando as ocorrências da seguinte forma:

Masculino		Solteiro	
Feminino		Casado	
		Divorciado	
		Viúvo	

Obtemos, então, as seguintes tabelas:

Sexo	Frequência simples	
	absoluta	relativa %
Masculino	8	53,33
Feminino	7	46,67
Total	15	100,0

Estado civil	Frequência simples	
	absoluta	relativa %
Solteiro	6	40,00
Casado	6	40,00
Divorciado	2	13,33
Viúvo	1	6,67
Total	15	100,00

## ARREDONDAMENTO DE NÚMEROS

No exemplo anterior, a divisão de algumas frequências absolutas pelo total de 15 resultou em dízimas. Nesses casos, torna-se necessário arredondar os resultados, mas esse arredondamento deve ser feito com cautela para se evitarem problemas tais como a soma não ser igual a 1 ou 100%.

A primeira etapa no processo de arredondamento consiste em se decidir o número de casas decimais desejado. Em geral, frequências relativas percentuais são apresentadas com, no máximo, 2 casas decimais. Isso significa que temos que descartar

as demais casas decimais. Existe a seguinte regra de arredondamento:



### Arredondamento de Números

Quando o primeiro algarismo a ser suprimido é menor ou igual a 4 (ou seja, é igual a 0, 1, 2, 3 ou 4), o último algarismo a ser mantido permanece inalterado. Quando o primeiro algarismo a ser suprimido é igual a 5, 6, 7, 8 ou 9, o último algarismo a ser mantido é acrescido de 1.

Na distribuição de frequências da variável sexo, temos os seguintes resultados:

$$\frac{8}{15} \times 100 = 53,33333 \dots$$

$$\frac{7}{15} \times 100 = 46,66666 \dots$$

No primeiro caso, o primeiro algarismo a ser suprimido é 3; logo, o último algarismo a ser mantido (3) não se altera e o resultado é 53,33. No segundo caso, o primeiro algarismo a ser suprimido é 6. Logo, o último algarismo a ser mantido (6) deve ser acrescido de 1 e o resultado é 46,67. Tente sempre usar essa regra em seus arredondamentos; com ela, você evitará erros grosseiros.

Na apresentação de tabelas de frequências relativas, é possível que essas frequências não somem 100%, ou seja, é possível que, ao somarmos as frequências relativas, obtenhamos resultados como 99,9% ou 100,01%. Esses pequenos erros são devidos a arredondamentos e nem sempre é possível evitá-los; no entanto, aceita-se implicitamente que a soma das frequências seja 100%. Veja a tabela de frequências apresentada na **Figura 1.7**, relativa à solução do Exercício 1 - a soma das frequências relativas é 99,99%. Se trabalhássemos com 3 casas decimais, obedecendo à regra de arredondamento, a soma daria 100,001. Isso não significa que as contas estejam erradas!

**Exercício 1.2.**

Para o Departamento Financeiro, obteve-se a seguinte informação sobre o sexo dos 23 funcionários:

M F F M M M F F M M M M  
M F M M F F M M M F F

onde M = Masculino e F = Feminino. Construa uma tabela de frequências para esses dados.

**GRÁFICOS**

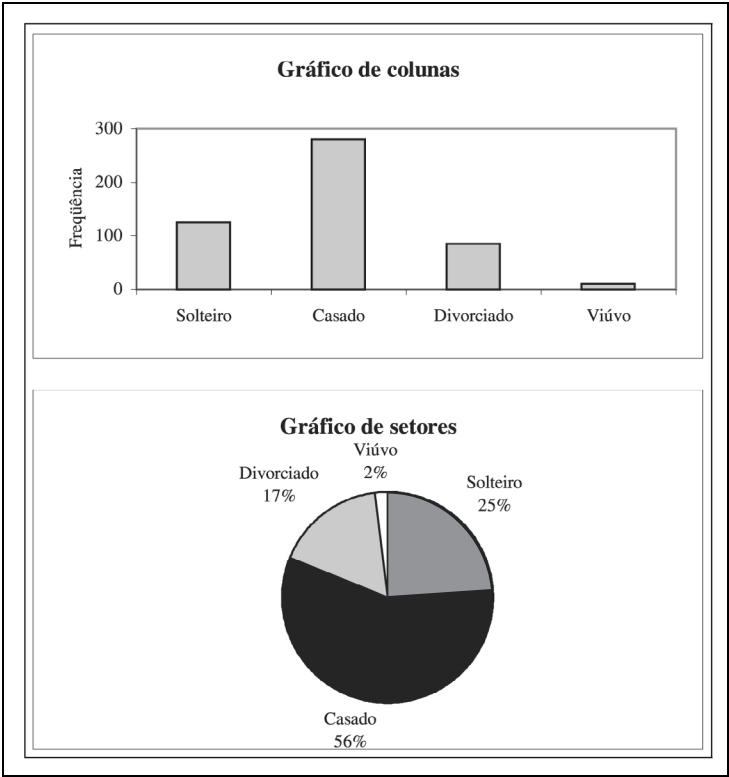
As distribuições de frequência para dados qualitativos também podem ser ilustradas graficamente através de gráficos de colunas ou gráficos de setores, também conhecidos como gráficos de pizza. Na **Figura 1.1**, temos os gráficos de coluna e de setores para os dados da **Tabela 1.2**, referentes ao estado civil dos funcionários.

No *gráfico de colunas*, a altura de cada coluna representa a frequência da respectiva classe e o gráfico pode ser construído com base nas frequências absolutas ou relativas. Para diferenciar um do outro, coloca-se no título do eixo o tipo de frequência utilizada. Note que, no eixo horizontal, não há escala, uma vez que aí se representam as categorias da variável, que devem ser equi-espaçadas.

No *gráfico de setores*, a frequência de cada categoria é representada pelo tamanho (ângulo) do setor (ou fatia da pizza). Para construir um gráfico de setores à mão, você precisa de um compasso para fazer um círculo de raio qualquer. Em seguida, trace um raio qualquer no círculo e a partir daí, comece a marcar os raios de acordo com os ângulos de cada setor, utilizando um transferidor. Para determinar o ângulo de cada setor, você deve usar a seguinte regra de proporcionalidade: o ângulo total – 360° – corresponde ao número total de observações; o ângulo de cada setor corresponde à frequência da respectiva classe. Dessa forma, você obtém a seguinte regra de três para os solteiros:

$$\frac{360^\circ}{500} = \frac{x}{125} \Rightarrow x = 90^\circ$$

Esses gráficos podem ser construídos facilmente com auxílio de programas de computador, como, por exemplo, o programa de planilhas Excel da Microsoft ®.



**Figura 1.1** Distribuição do número de funcionários por estado civil.

**Exercício 1.3.**

Construa os gráficos de setores e de colunas para os dados do Exercício 1.2:

**APRESENTAÇÃO DE DADOS QUANTITATIVOS DISCRETOS**

Quando uma variável quantitativa discreta assume poucos valores distintos, é possível construir uma distribuição de frequências da mesma forma que fizemos para as variáveis qualitativas. A diferença é que, em vez de termos categorias nas linhas da tabela, teremos os distintos valores da variável. Continuando com o nosso exemplo, vamos trabalhar agora com a variável



número de dependentes. Suponha que alguns funcionários não tenham dependentes e que o número máximo de dependentes seja 7. Obteríamos, então, a seguinte distribuição de frequências:

Número de dependentes	Frequência simples	
	absoluta	relativa %
0	120	24,0
1	95	19,0
2	90	18,0
3	95	19,0
4	35	7,0
5	30	6,0
6	20	4,0
7	15	3,0
Total	500	100,0

O processo de construção é absolutamente o mesmo, mas dada a natureza quantitativa da variável, é possível acrescentar mais uma informação à tabela.

Suponha, por exemplo, que a empresa esteja pensando em limitar o seu projeto a 4 dependentes, de modo que funcionários com mais de 4 dependentes terão que arcar com as despesas extras. Quantos funcionários estão nessa situação?

Para responder a perguntas desse tipo é costume acrescentar à tabela de frequências uma coluna com as *frequências acumuladas*. Essas frequências são calculadas da seguinte forma: para cada valor da variável (número de dependentes), contamos quantas ocorrências correspondem a valores menores ou iguais a esse valor.

Por exemplo, valores da variável menores ou iguais a 0 correspondem aos funcionários sem dependentes. Logo, a frequência acumulada para o valor 0 é igual à frequência simples: 120. Analogamente, valores da variável menores ou iguais a 1 correspondem aos funcionários sem dependentes mais os funcionários com 1 dependente. Logo, a frequência acumulada para o valor 1 é igual a  $120 + 95 = 215$ . Para o valor 2, a frequência acumulada é igual a  $120 + 95 + 90 = 215 + 90 = 305$ . Repetindo esse procedimento, obtemos a **Tabela 1.3**.

Tabela 1.3: Distribuição de frequências para o número de dependentes

Número de dependentes	Frequência simples		Frequência acumulada	
	absoluta	relativa %	absoluta	relativa %
0	120	24,0	120	24,0
1	95	19,0	215	43,0
2	90	18,0	305	61,0
3	95	19,0	400	80,0
4	35	7,0	435	87,0
5	30	6,0	465	93,0
6	20	4,0	485	97,0
7	15	3,0	500	100,0
Total	500	100,0		

Note que aí acrescentamos também as frequências acumuladas em forma percentual. Essas frequências são calculadas como a proporção da frequência acumulada em relação ao total; por exemplo,

$$87,0 = \frac{435}{500} \times 100$$

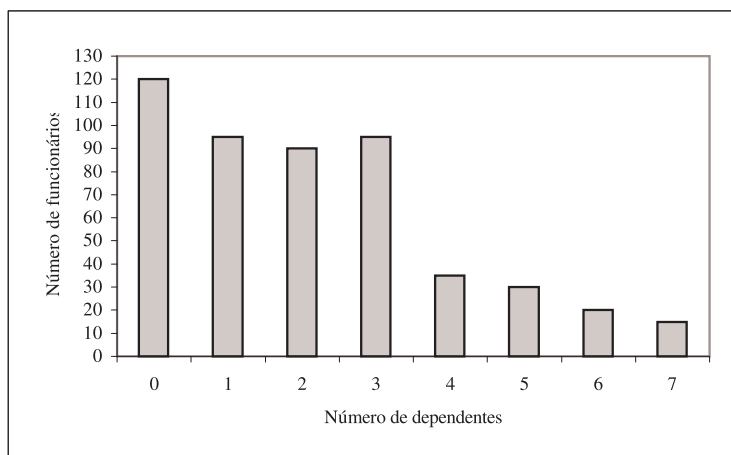
Exercício 1.4.

Construa a distribuição de frequência para o número de dependentes dos funcionários do Departamento de Recursos Humanos, conforme dados no Exemplo 1.1:

A representação gráfica da distribuição de frequências de uma variável quantitativa discreta pode ser feita através de um gráfico de colunas. A única diferença nesse caso é que no eixo horizontal do gráfico é representada a escala da variável quantitativa e tal escala deve ser definida cuidadosamente de modo a representar corretamente os valores.

Na **Figura 1.2**, temos o gráfico de colunas para o número de dependentes dos 500 funcionários.

Embora não seja incorreto, não é apropriado representar dados quantitativos discretos em um gráfico de setores, uma vez que, nesse gráfico, não é possível representar a escala dos dados.



**Figura 1.2:** Distribuição do número de dependentes de 500 funcionários.

### Exercício 1.5.

Construa o gráfico de colunas para representar a distribuição de frequências obtida do Exercício 1.4:

## Resumo

Ao final desta aula, você deve ser capaz de compreender os seguintes conceitos:

- População – conjunto de elementos para os quais se deseja estudar determinada(s) característica(s).
- Amostra – subconjunto de uma população.
- Pesquisa censitária - pesquisa em que toda a população é investigada.
- Pesquisa por amostragem – pesquisa em que apenas uma amostra da população é investigada.
- Variável – característica de uma população que desejamos estudar.
- Variável qualitativa – variável que descreve uma característica dos elementos de uma população.
- Variável quantitativa – variável que mensura uma característica dos elementos de uma população.
- Variável quantitativa discreta – variável cujos possíveis valores formam um conjunto enumerável.
- Variável quantitativa contínua – variável cujos possíveis valores pertencem a um intervalo  $[a, b]$ .

Nesta aula, você também aprendeu a resumir dados de variáveis qualitativas e de variáveis quantitativas discretas através de tabelas de frequência e gráficos de setores e de colunas. É importante saber os seguintes conceitos:

- frequência simples absoluta – é a contagem do número de elementos pertencentes a uma determinada categoria de uma variável qualitativa ou número de elementos que assumem determinado valor de uma variável quantitativa discreta.
- frequência simples relativa – representa a participação percentual de cada categoria ou valor no total de observações.
- frequência acumulada absoluta – para cada valor de uma variável quantitativa discreta, é o número de ocorrências (elementos) correspondente a valores menores ou iguais a esse valor.
- frequência acumulada relativa – é a frequência acumulada em forma percentual, calculada como uma participação no total de observações.

**Exercício 1.6.**

Na **Tabela 1.4**, temos informações sobre o sexo, a matéria predileta (Português, Matemática, História, Geografia ou Ciências) no 2º grau e a nota (número de questões certas) em um teste de múltipla escolha com 10 questões de matemática, ministrado no primeiro dia de aula dos calouros de Administração de uma universidade (dados fictícios).

- Classifique as variáveis envolvidas.
- Construa a tabela de frequências apropriada para cada uma das variáveis.
- Construa gráficos apropriados para ilustrar as distribuições de frequência.

**Tabela 1.4:** Dados sobre sexo, matéria predileta e nota de alunos

Sexo	Predileta	Nota	Sexo	Predileta	Nota	Sexo	Predileta	Nota
F	H	5	M	M	2	M	H	3
M	M	8	M	G	4	M	M	5
F	P	8	M	G	9	F	P	5
F	H	6	M	M	7	F	G	5
M	C	5	M	M	1	M	C	7
M	H	6	F	P	8	M	H	4
F	M	8	F	G	5	F	M	7
F	P	4	M	G	9	F	P	7
F	H	2	M	P	5	F	M	6
M	C	6	F	M	8	M	G	6
F	P	8	F	G	6	M	H	9
F	M	8	M	P	5	M	G	6
F	M	7	M	P	5	F	M	5
F	M	5	F	P	9	M	M	8

**Exercício 1.7.**

Na **Tabela 1.5**, temos dados sobre o consumo de refrigerantes no Brasil em 2005, segundo dados da Associação Brasileira das Indústrias de Refrigerantes e de Bebidas Não Alcoólicas. Construa um gráfico apropriado para ilustrar esses dados.

Tabela 1.5: Refrigerantes – Participação dos sabores – 2005

Refrigerantes	%
Colas	51,1
Guaraná	24,4
Laranja	10,9
Limão	5,9
Uva	3,2
Tuti Fruti	1,1
Tônica	0,7
Cítrico	0,1
Maçã	0,5
Outros sabores	2,1
Total	100,0

Fonte: ABIR - [www.abir.org.br](http://www.abir.org.br)

Exercício 1.8.

Na Tabela 1.6, temos as frequências acumuladas do número de sinistros por apólice de seguro do ramo Automóveis. Complete a tabela, calculando as frequências simples absolutas e relativas e também as frequências acumuladas relativas.

Tabela 1.6: Número de sinistros por apólice

Número de sinistros	Número de apólices
0	2913
$\leq 1$	4500
$\leq 2$	4826
$\leq 3$	4928
$\leq 4$	5000

Exercício 1.9.

Para a seguinte notícia, extraída do jornal *Folha de S. Paulo*, construa um gráfico para ilustrar o texto no segundo parágrafo da notícia.

Dentro de dez anos, 90% do mercado automobilístico mundial estará nas mãos de meia dúzia de conglomerados. A previsão consta de estudo produzido pela consultoria especializada britânica Autopolis, que dá assessoria técnica a montadoras que estão instaladas no Reino Unido.

Dados levantados pela Autopolis mostram que, hoje, a concentração de mercado já é grande. Cerca de 75% do setor é dominado por somente seis conglomerados, liderados por General Motors (22,8%), Ford (16,8%), Volkswagen (9,4%), Toyota (9,2%, incluindo Daihatsu), Renault-Nissan (8,7%) e Daimler-Chrysler (8,3%). Os outros 24,8% do mercado são dominados por uma infinidade de empresas pequenas e médias, como Fiat, BMW, Peugeot e Honda, entre outras.

## SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

### Exercício 1.1

É possível identificar as seguintes variáveis:

1. Condição do domicílio – variável qualitativa.
2. Condição da rua – variável qualitativa.
3. Tipo de imóvel – variável qualitativa.
4. Renda – pode ser qualitativa se for perguntada a faixa ou quantitativa, se for perguntada a renda exata; a primeira opção é a mais provável para esse tipo de pesquisa.
5. Classificação econômica – variável qualitativa.
6. Número de pessoas – variável quantitativa.
7. Presença de crianças – variável qualitativa.
8. Número de crianças – variável quantitativa discreta.
9. Presença de adolescentes – variável qualitativa.
10. Número de adolescentes – variável quantitativa discreta.
11. Idade do chefe e da dona de casa – pode ser quantitativa, caso se pergunte a idade exata, ou qualitativa, caso se identifique a faixa etária.
12. Grau de instrução do chefe e da dona de casa – variável qualitativa.
13. Condição de atividade do chefe – variável qualitativa.

- 14. Presença de geladeira, máquina de lavar etc. – variáveis qualitativas do tipo Sim/Não.
- 15. Acesso a serviços de mídia – variáveis qualitativas do tipo Sim/Não.

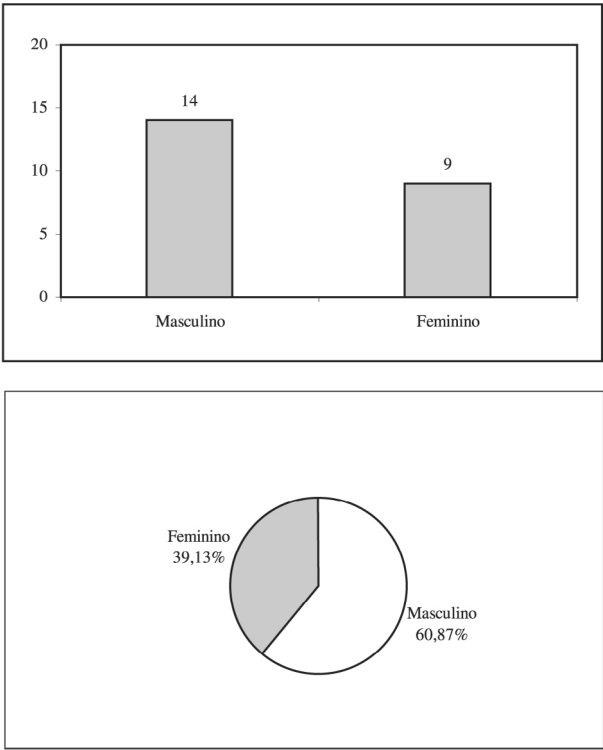
Exercício 1.2

A distribuição é dada na tabela a seguir:

Sexo	Frequência simples	
	absoluta	relativa %
Masculino	14	60,87
Feminino	9	39,13
Total	23	100,00

Exercício 1.3

Veja a **Figura 1.3**.



**Figura 1.3:** Distribuição dos funcionários do Departamento Financeiro por sexo.



### Exercício 1.4

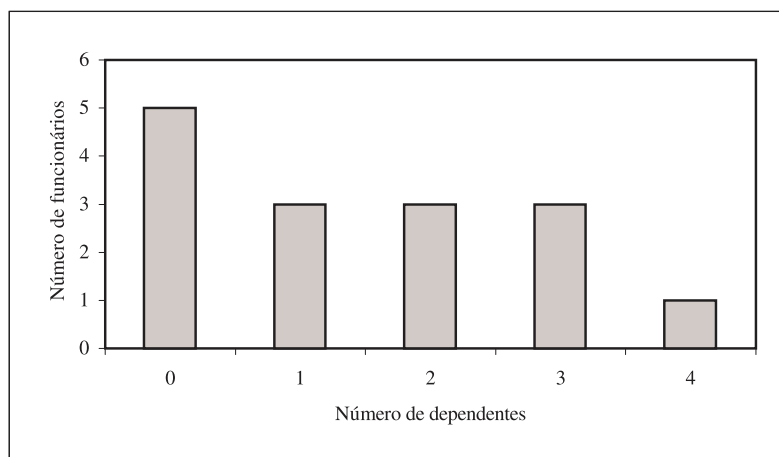
Veja a **Tabela 1.7**.

**Tabela 1.7:** Distribuição do número de dependentes dos funcionários do Departamento de RH

Número de dependentes	Frequência simples		Frequência acumulada	
	absoluta	relativa %	absoluta	relativa %
0	5	33,33	5	33,33
1	3	20,00	8	53,33
2	3	20,00	11	73,33
3	3	20,00	14	93,33
4	1	6,67	15	100,00
Total	15	100,00		

### Exercício 1.5

Veja a **Figura 1.4**.



**Figura 1.4:** Distribuição do número de dependentes dos funcionários do Departamento de RH.

### Exercício 1.6

Variáveis qualitativas: Sexo e matéria predileta.

Variável quantitativa discreta: nota – número de questões certas.

Veja as **Figuras 1.5, 1.6, 1.7** com as tabelas e gráficos para essas variáveis.

Sexo	Frequência simples	
	absoluta	relativa %
Masculino	21	50
Feminino	21	50
Total	42	100

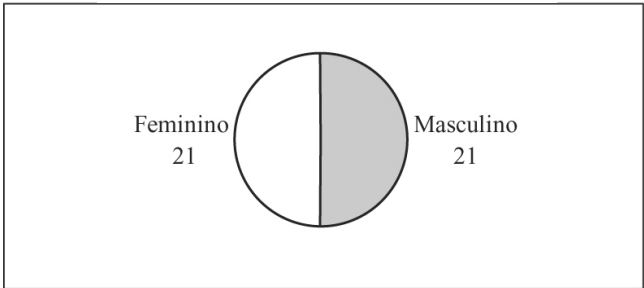


Figura 1.5: Distribuição dos alunos de Administração por sexo.

Matéria predileta	Frequência simples	
	absoluta	relativa %
Ciências	3	7,14
Geografia	8	19,05
História	7	16,67
Matemática	14	33,33
Português	10	23,81
Total	42	100,00

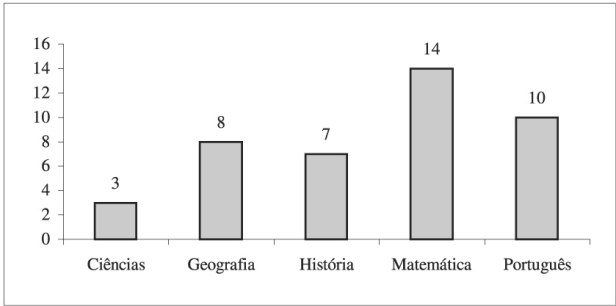
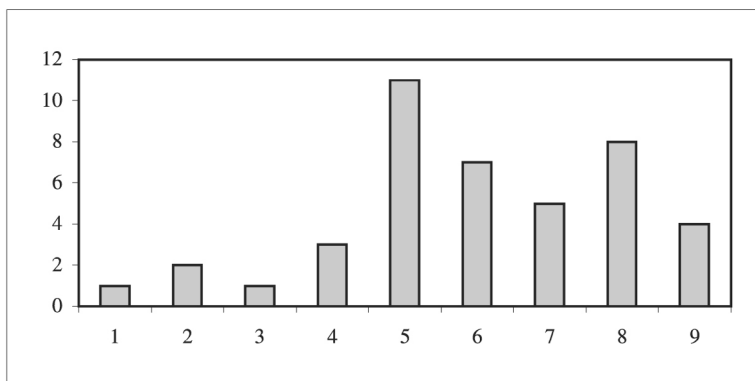


Figura 1.6: Distribuição dos alunos de Administração por matéria predileta.

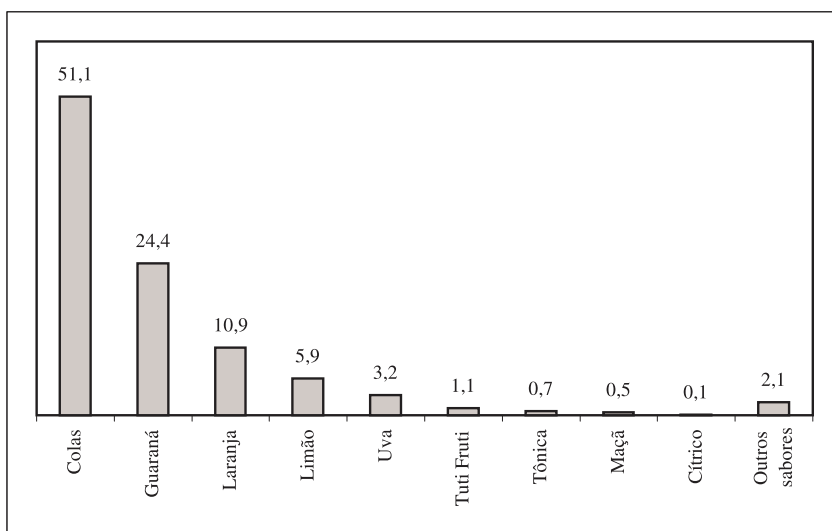
Nota	Frequência simples		Frequência acumulada	
	absoluta	relativa %	absoluta	relativa %
1	1	2,38	1	2,38
2	2	4,76	3	7,14
3	1	2,38	4	9,52
4	3	7,14	7	16,67
5	11	26,19	18	42,86
6	7	16,67	25	59,52
7	5	11,90	30	71,43
8	8	19,05	38	90,48
9	4	9,52	42	100,00
Total	42	100,00		



**Figura 1.7:** Distribuição das notas dos alunos de Administração.

### Exercício 1.7

Veja a **Figura 1.8**.



**Figura 1.8:** Distribuição da preferência de sabor de refrigerantes.

Exercício 1.8

No exercício são dadas as frequências acumuladas simples, que vamos representar pela letra  $F$ . Para obtermos as frequências absolutas simples, que vamos representar pela letra  $f$ , devemos notar o seguinte: para o menor valor (zero), a frequência simples é igual à acumulada, ou seja,

$$f_1 = F_1 = 2913$$

Para o segundo valor, temos:

$$f_1 + f_2 = F_2 \Rightarrow f_2 = F_2 - F_1 \Rightarrow f_2 = 4500 - 2913 = 1587$$

Para o terceiro valor, temos:

$$f_1 + f_2 + f_3 = F_3 \Rightarrow F_2 + f_3 = F_3 \Rightarrow f_3 = F_3 - F_2 \Rightarrow f_3 = 4826 - 4500 = 326$$

De forma análoga, obtemos que

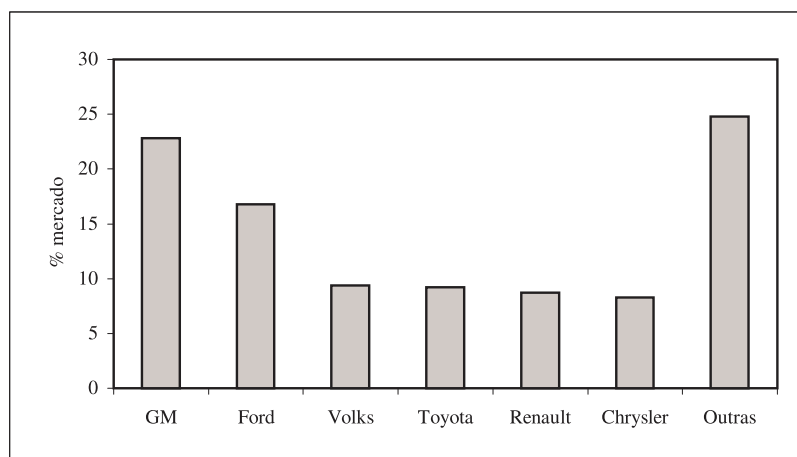
$$f_4 = F_4 - F_3 = 4928 - 4826 = 102 \Rightarrow f_5 = F_5 - F_4 = 5000 - 4928 = 72$$

Obtemos, então, a seguinte tabela:

Número de sinistros	Número de apólices			
	Frequência simples		Frequência acumulada	
	absoluta	relativa	absoluta	relativa
0	2913	58,26	2913	58,26
1	1587	31,74	4500	90,00
2	326	6,52	4826	96,52
3	102	2,04	4928	98,56
4	72	1,44	5000	100,00
Total	5000	100,00		

Exercício 1.9

O gráfico apresentado na **Figura 1.9** é um gráfico de colunas. Havendo disponibilidade de se usar o recurso de cores, é possível usar o gráfico de setores também.



**Figura 1.9:** Concentração do mercado automobilístico.



# Aula 2



## APRESENTAÇÃO DE DADOS – PARTE 2

---

# O b j e t i v o s

Nesta aula, você aprenderá:

- 1 a construir distribuições de frequências agrupadas para variáveis quantitativas discretas e contínuas;
- 2 a construir histogramas e polígonos de frequência para representar distribuições de frequências agrupadas;
- 3 a construir gráficos de linha e diagramas de ramos e folhas.

## APRESENTAÇÃO DE DADOS QUANTITATIVOS – CONTINUAÇÃO

### VARIÁVEIS QUANTITATIVAS DISCRETAS

Na aula anterior, você aprendeu a construir distribuições de frequências para variáveis discretas com poucos valores.

No exemplo ali apresentado, há duas variáveis quantitativas discretas: número de dependentes e idade. A diferença entre elas é que a idade pode assumir um número maior de valores, o que resultaria em uma tabela grande, caso decidíssemos relacionar todos os valores.

Além disso, em geral não é necessário apresentar a informação em tal nível de detalhamento. Por exemplo, para as seguradoras de planos de saúde, as faixas etárias importantes – aquelas em que há reajuste por idade – são 0 a 18; 19 a 23; 24 a 28; 29 a 33; 34 a 38; 39 a 43; 44 a 48; 49 a 53; 54 a 58 e 59 ou mais.

Sendo assim, podemos agrupar os funcionários segundo essas faixas etárias e construir uma **tabela de frequências agrupadas** da mesma forma que fizemos para o número de dependentes, só que agora cada frequência corresponde ao número de funcionários na respectiva faixa etária. Na **Tabela 2.1**, temos a tabela resultante.

**Tabela 2.1:** Distribuição de frequência da idade de 500 funcionários

Faixa etária	Frequência simples		Frequência acumulada	
	Absoluta	Relativa %	Absoluta	Relativa %
19 – 23	1	0,2	1	0,2
24 – 28	23	4,6	24	4,8
29 – 33	103	20,6	127	25,4
34 – 38	246	49,2	373	74,6
39 – 43	52	10,4	425	85,0
44 – 48	50	10,0	475	95,0
49 – 53	25	5,0	500	100,0
Total	500	100,0		



### Exercício 2.1.

Na **Tabela 2.2**, temos as informações sobre idade e salário para os 15 funcionários do Departamento de Recursos Humanos. Construa uma tabela de frequências para a idade, levando em conta as mesmas faixas etárias utilizadas anteriormente.

**Tabela 2.2:** Idade e salário dos funcionários do Departamento de RH

Nome	Idade	Salário
João da Silva	36	6.300
Pedro Fernandes	51	5.700
Maria Freitas	26	4.500
Paula Gonçalves	25	3.800
Ana Freitas	29	3.200
Luiz Costa	53	7.300
André Souza	42	7.100
Patrícia Silva	38	5.600
Regina Lima	35	6.400
Alfredo Souza	45	7.000
Margarete Cunha	26	3.700
Pedro Barbosa	37	6.500
Ricardo Alves	24	4.000
Márcio Rezende	31	5.100
Ana Carolina Chaves	29	4.500

## VARIÁVEIS QUANTITATIVAS CONTÍNUAS

Para as variáveis quantitativas contínuas, devemos também trabalhar com distribuições de frequências agrupadas. O processo de construção é idêntico ao visto para as variáveis discretas, mas aqui devemos tomar um cuidado especial na construção das classes. A escolha dos limites das classes deve ser feita com base na natureza, valores e unidade de medida dos dados. As regras que deverão ser seguidas são as seguintes:



**Regra:** Definição das classes em uma distribuição de frequências agrupadas.

1. As classes têm que ser exaustivas, isto é, todos os elementos devem pertencer a alguma classe.
2. As classes têm que ser mutuamente exclusivas, isto é, cada elemento tem que pertencer a uma única classe.

O primeiro passo é definir o número de classes desejado; esse número, de preferência, deve estar entre 5 e 25. Em seguida, devemos determinar a **amplitude** dos dados, ou seja, o intervalo de variação dos valores observados da variável em estudo.

### Definição 2.1.

A **amplitude** de um conjunto de dados, representada por  $\Delta_{total}$ , é definida como a diferença entre os valores máximo e mínimo:

$$\Delta_{total} = V_{Máx} - V_{Mín} \quad (2.1)$$

Se queremos trabalhar com classes de mesmo comprimento (e essa é uma opção bastante comum), para determinar esse comprimento, temos que dividir a amplitude total pelo número de classes desejado. No entanto, para garantir a inclusão dos valores mínimo e máximo, podemos, como regra geral, usar o seguinte procedimento: considere o primeiro múltiplo do número de classes maior que o valor da amplitude e use esse número como a nova amplitude. Por exemplo, se a amplitude é 28 e queremos trabalhar com cinco classes, vamos considerar 30 como a nova amplitude. Dividindo esse valor pelo número de classes, obtemos o comprimento de cada classe. Os limites de classe podem ser obtidos somando-se o comprimento de classe a partir do valor mínimo dos dados. Continuando com o nosso exemplo, o comprimento de classe é  $30 \div 5 = 6$ ; se o valor mínimo

dos dados é 4, então os limites de classe serão:

$$\begin{aligned}
 &4 \\
 4 + 6 &= 10 \\
 10 + 6 &= 16 \\
 16 + 6 &= 22 \\
 22 + 6 &= 28 \\
 28 + 6 &= 34
 \end{aligned}$$

e as classes serão:

$$[4, 10); [10, 16); [16, 22); [22, 28) \text{ e } [28, 34).$$

Note o tipo de intervalo utilizado: para incluir o valor mínimo (4) na primeira classe, o intervalo tem que ser fechado na parte inferior:  $[4$ . Se fechássemos o intervalo no limite superior, o 10 estaria incluído na primeira classe e, portanto, não poderia estar na segunda classe. Isso resultaria em  $[4, 10]$  como a primeira classe e  $(10, 16)$  como a segunda classe.

Assim, as duas primeiras classes estariam definidas de forma diferente, o que não é conveniente, pois dificulta a leitura da tabela. É preferível incluir o 10 na segunda classe, o que resulta nas classes apresentadas anteriormente.

### Exemplo 2.1.

Suponha que, entre os 500 funcionários da nossa empresa, o menor salário seja 2.800 e o maior salário seja de 12.400. Para agrupar os dados em cinco classes, devemos fazer o seguinte:

$$\Delta_{total} = V_{M\acute{a}x} - V_{M\acute{i}n} = 12.400 - 2.800 = 9.600$$

$$\text{Pr\'oximo m\'ultiplo de } 5 = 9.605$$

$$\text{Comprimento de classe} = \frac{9.605}{5} = 1.921$$

Os limites de classe, então, são:

$$\begin{aligned} &2.800 \\ 2.800 + 1.921 &= 4.721 \\ 4.721 + 1.921 &= 6.642 \\ 6.642 + 1.921 &= 8.563 \\ 8.563 + 1.921 &= 10.484 \\ 10.484 - 1.921 &= 12.405 \end{aligned}$$

e as classes podem ser definidas como

[2.800, 4.721)	(2.800 incluído; 4.721 excluído)
[4.721, 6.642)	(4.721 incluído; 6.642 excluído)
[6.642, 8.563)	(6.642 incluído; 8.563 excluído)
[8.563, 10.484)	(8.563 incluído; 10.484 excluído)
[10.484, 12.405)	(10.484 incluído; 12.405 excluído)

Essa é uma regra que resulta em classes corretamente definidas, mas nem sempre as classes resultantes são apropriadas ou convenientes. No exemplo anterior, seria preferível trabalhar com classes de comprimento 2.000, definindo o limite inferior dos dados como 2.500. Isso resultaria nas classes

$$[2.500, 4.500); [4.500, 6.500); [6.500, 8.500); [8.500, 10.500) \text{ e } [10.500, 12.500)$$

que são classes corretas e mais fáceis de ler.

Exercício 2.2.

Construa uma distribuição de frequências agrupadas em cinco classes de mesmo comprimento para os dados de salários da Tabela 2.2.

HISTOGRAMAS E POLÍGONOS DE FREQUÊNCIA

O histograma e o polígono de frequências são gráficos usados para representar uma distribuição de frequências simples de uma variável quantitativa contínua.

Um **histograma** é um conjunto de retângulos com bases sobre um eixo horizontal dividido de acordo com os comprimentos de classes, centros nos pontos médios das classes e **áreas proporcionais ou iguais às frequências**.

Vamos ilustrar a construção de um histograma usando como exemplo a distribuição de frequência dos dados sobre salários do Exercício 2.2, reproduzida na **Tabela 2.3**.

**Tabela 2.3:** Distribuição dos salários dos funcionários do Departamento de RH

Classe de salário	Frequência simples		Frequência acumulada	
	Absoluta	Relativa %	Absoluta	Relativa %
[3.200,4.021)	4	26,67	4	26,67
[4.021,4.842)	2	13,33	6	40,00
[4.842,5.663)	2	13,33	8	53,33
[5.663,6.484)	3	20,00	11	73,33
[6.484,7.305)	4	26,67	15	100,00
Total	15	100,00		

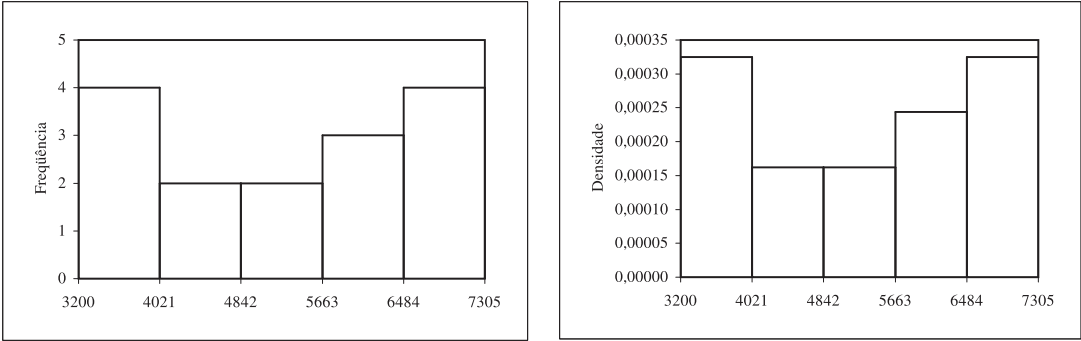
Como as classes têm o mesmo comprimento, o histograma, nesse caso, pode ser construído de tal modo que as alturas dos retângulos sejam iguais às frequências das classes. Dessa forma, as áreas serão **proporcionais** (e não iguais) às frequências, conforme ilustrado no gráfico à esquerda na **Figura 2.1**.

No gráfico à direita na **Figura 2.1**, a área de cada retângulo é **igual** à frequência relativa da classe e a altura de cada classe é calculada usando-se a expressão que dá a área de um retângulo. Por exemplo, para a classe [3.200,4.021), a frequência (área) é  $\frac{4}{15} = 0,266667$  e a base do retângulo (comprimento de classe) é 821. Logo, a altura  $h$  do retângulo correspondente é

$$h = \frac{0,266667}{821} = 0,000325$$

O resultado dessa divisão é denominado **densidade**, uma vez que dá a concentração em cada classe por unidade da variável. Em ambos os gráficos, a forma dos retângulos é a mesma; o que muda é a escala no eixo vertical.

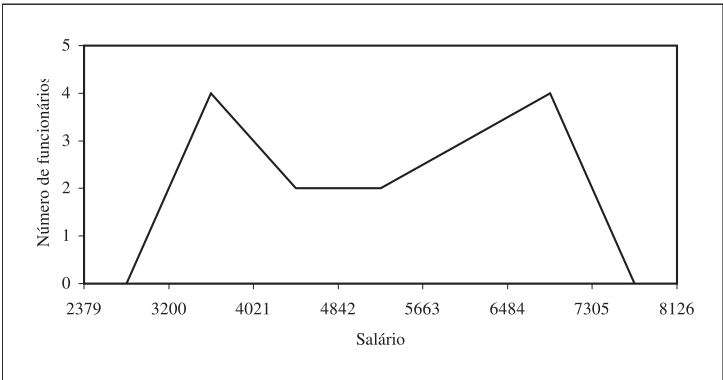
De modo geral, quando as classes têm o mesmo comprimento – e essa é a situação mais comum – podemos representar as alturas dos retângulos pelas frequências das classes, o que torna o gráfico mais fácil de interpretar.



**Figura 2.1:** Histogramas da distribuição dos salários dos funcionários do Departamento de RH.

Um **polígono de frequências** é um gráfico de linha que se obtém unindo por uma poligonal os pontos correspondentes às frequências das diversas classes, centradas nos respectivos pontos médios. Mais precisamente, são plotados os pontos com coordenadas (ponto médio, frequência simples). Para obter as interseções da poligonal com o eixo, cria-se em cada extremo uma classe com frequência nula.

Na **Figura 2.2**, temos o polígono de frequências para a renda dos funcionários do Departamento de Recursos Humanos. Pode-se construir o polígono de frequências junto com o histograma, o que facilita a visualização dos resultados.



**Figura 2.2:** Polígono de frequência para os salários dos funcionários do Departamento de RH.

**Exercício 2.3.**

Na **Tabela 2.4** a seguir, temos as notas de 50 alunos em uma prova. Construa uma tabela de frequências agrupadas, usando as classes

$$2 \vdash 3, 3 \vdash 4, 4 \vdash 5, \dots, 9 \vdash 10.$$

Construa o histograma e o polígono de frequências. (O símbolo  $\vdash$  indica que o limite inferior está incluído, mas não o superior; se quiséssemos o contrário, usaríamos o símbolo  $\dashv$  para indicar que o limite superior está incluído, mas não o limite inferior.)

**Tabela 2.4:** Notas de 50 alunos.

2,9	3,7	3,8	4,7	4,9	5,2	5,6	5,8	6,0	6,2
6,3	6,3	6,3	6,5	6,5	6,6	6,8	6,8	6,9	6,9
7,0	7,0	7,1	7,3	7,3	7,4	7,4	7,5	7,5	7,6
7,6	7,7	7,7	7,9	8,1	8,1	8,2	8,2	8,3	8,3
8,4	8,5	8,7	8,7	8,8	8,9	9,0	9,1	9,4	9,7

**DIAGRAMA DE RAMOS E FOLHAS**

Um outro gráfico usado para mostrar a forma da distribuição de um conjunto de dados quantitativos é o **diagrama de ramos e folhas**, desenvolvido pelo estatístico americano John Tukey.

Este gráfico é constituído de uma linha vertical, com a escala indicada à esquerda desta linha. A escala, naturalmente, depende dos valores observados, mas deve ser escolhida de tal forma que cada valor observado possa ser “quebrado” em duas partes: uma primeira parte quantificada pelo valor da escala e a segunda quantificada pelo último algarismo do número correspondente à observação.

Os **ramos** do gráfico correspondem aos números da escala, à esquerda da linha vertical. Já as **folhas** são os números que aparecem na parte direita.

Na **Figura 2.3**, temos o diagrama de ramos e folhas para as notas de 50 alunos dadas na **Tabela 2.4**. Nesse caso, a “quebra” dos valores é bastante natural: os ramos são formados pelo algarismo inteiro e as folhas pelos algarismos decimais, o que é indicado pela escala do gráfico.

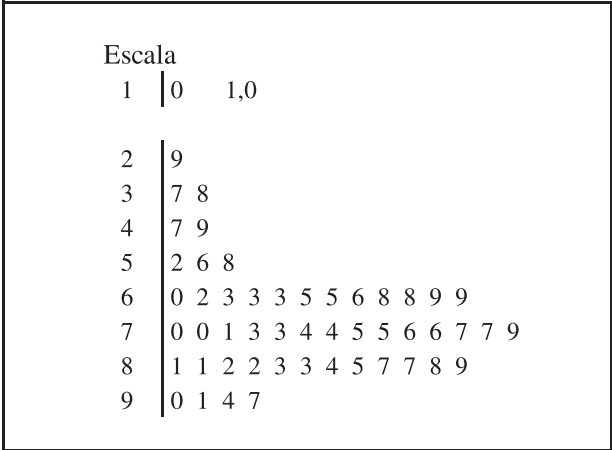


Figura 2.3: Notas de 50 alunos.

O diagrama de ramos e folhas também é útil na comparação de conjuntos de dados.

Suponha que, no exemplo anterior, a mesma prova tenha sido aplicada a duas turmas diferentes. Para comparar os resultados, podemos construir o diagrama que se encontra na **Figura 2.4**. Para facilitar a comparação, é usual indicar o número de dados em cada banda do diagrama.

Note que, na parte esquerda do gráfico, as folhas são anotadas crescentemente da direita para a esquerda, enquanto que na parte direita do gráfico, as folhas são anotadas crescentemente da esquerda para a direita.

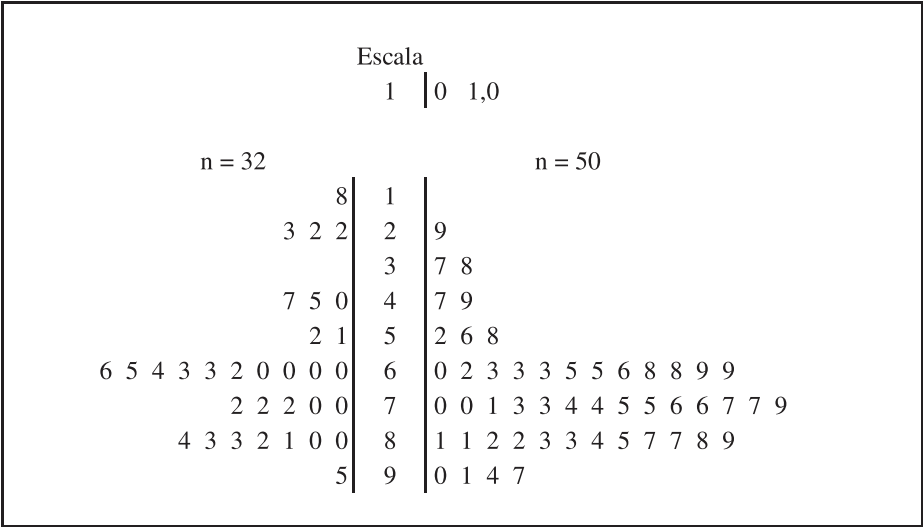


Figura 2.4: Comparação das notas de duas turmas.



### Exercício 2.4.

Suponha que, as idades dos 23 funcionários do Departamento Financeiro sejam 27; 31; 45; 52; 33; 34; 29; 27; 35; 38; 50; 48; 29; 30; 32; 29; 42; 41; 40; 42; 28; 36; 48.

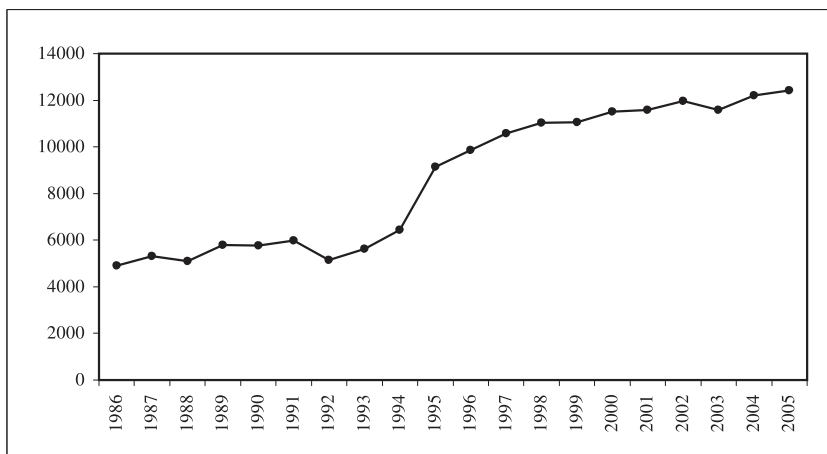
Usando esses dados e aqueles apresentados na **Tabela 2.2** sobre os funcionários do Departamento de Recursos Humanos, construa um diagrama de ramos e folhas para comparar os dois departamentos.

## GRÁFICOS DE LINHAS

O **gráfico de linhas** é usado principalmente para representar observações feitas ao longo do tempo, isto é, observações de uma **série de tempo**.

No eixo horizontal colocam-se as datas em que foram realizadas as observações e no eixo vertical, os valores observados. Os pontos assim obtidos são unidos por segmentos de reta para facilitar a visualização do comportamento dos dados ao longo do tempo.

Na **Figura 2.5**, temos o gráfico que ilustra o consumo de refrigerante (em milhões de litros) no período de 1986 a 2005, conforme dados da ABIR.

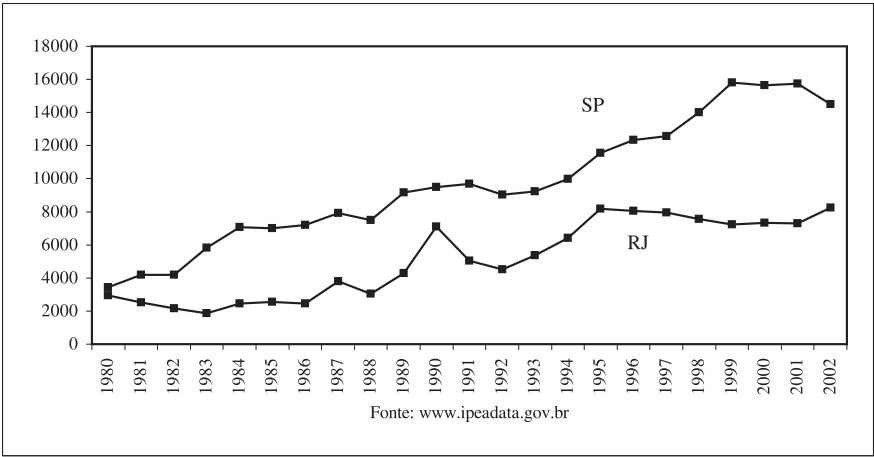


**Figura 2.5:** Consumo de refrigerante 1986-2005.

Na **Tabela 2.5**, temos dados sobre o número de homicídios nos estados do Rio de Janeiro e de São Paulo no período de 1980 a 2002. Para efeitos de comparação, é possível construir um gráfico de linhas em que as duas séries são representadas conjuntamente. Veja a **Figura 2.6**.

**Tabela 2.5:** Número de homicídios - RJ e SP - 1980 a 2002

Ano	RJ	SP	Ano	RJ	SP
1980	2.946	3.452	1992	4.516	9.022
1981	2.508	4.187	1993	5.362	9.219
1982	2.170	4.183	1994	6.414	9.990
1983	1.861	5.836	1995	8.183	11.566
1984	2.463	7.063	1996	8.049	12.350
1985	2.550	7.015	1997	7.966	12.522
1986	2.441	7.195	1998	7.569	14.001
1987	3.785	7.918	1999	7.249	15.810
1988	3.054	7.502	2000	7.337	15.631
1989	4.287	9.180	2001	7.304	15.745
1990	7.095	9.496	2002	8.257	14.494
1991	5.039	9.671			



**Figura 2.6:** Número de homicídios nos estados do Rio de Janeiro e de São Paulo – 1980–2002.

## Resumo

- Nesta aula, você completou seu estudo sobre apresentação de dados quantitativos com o estudo das distribuições de frequências agrupadas. Certifique-se de ter compreendido a forma de obter os limites das classes, respeitando o fato de que cada observação tem que pertencer a uma única classe (as classes têm que ser exaustivas e mutuamente exclusivas). As distribuições de frequências agrupadas podem ser representadas graficamente pelos histogramas e pelos polígonos de frequência.
- O histograma é um gráfico representado por um conjunto de retângulos com base sobre um eixo horizontal dividido de acordo com os comprimentos das classes. As bases dos retângulos estão centradas nos pontos médios das classes e a área de cada retângulo é proporcional à frequência da classe. Quando as classes têm comprimentos iguais, as alturas dos retângulos podem ser iguais às frequências das respectivas classes.
- O polígono de frequências é um gráfico em forma de uma poligonal, que une os pontos de coordenadas (ponto médio da classe, frequência da classe).
- Na construção do diagrama de ramos e folhas, cada valor é “quebrado” em duas partes, de modo que uma das partes – a folha – corresponda ao último algarismo do valor. A outra parte é o ramo, e em cada ramo colocam-se as folhas pertencentes ao ramo.
- Os gráficos de linha são utilizados na representação de séries temporais, que são dados observados ao longo do tempo. No eixo horizontal representam-se as datas em que os dados foram coletados e na escala vertical, os valores observados.

Exercício 2.5.

Em um estudo sobre a jornada de trabalho das empresas de Produtos Alimentares foram levantados os dados da **Tabela 2.6** relativos ao total de horas trabalhadas pelos funcionários no mês de agosto (dados fictícios).

Construa uma tabela de frequências usando cinco classes de mesmo tamanho; construa também o histograma e o polígono de frequências. Para facilitar a solução, os valores mínimo e máximo são: 1.815 e 118.800.

**Tabela 2.6:** Jornada de trabalho mensal em empresas de produtos alimentares

3.960	5.016	13.015	8.008	6.930	5.544	4.224	6.138
118.800	57.904	72.600	100.100	55.935	7.223	3.775	4.224
3.216	7.392	2.530	6.930	1.815	4.338	8.065	10.910
8.408	8.624	6.864	5.742	5.749	8.514	2.631	5.236
8.527	3.010	5.914	11.748	8.501	6.512	11.458	10.094
6.721	2.631	7.082	10.318	8.008	3.590	7.128	7.929
10.450	6.780	5.060	5.544	6.178	13.763	9.623	14.883
17.864	34.848	25.300	52.800	17.732	63.923	30.360	18.876
30.800	19.562	49.240	49.434	26.950	22.308	21.146	14.212
25.520	49.251	30.976	23.338	43.648	26.796	44.880	30.008
30.769	16.907	33.911	27.034	16.500	14.445	28.160	42.442
16.507	36.960	67.760	84.084	89.888	65.340	82.280	86.152
91.080	99.792	77.836	76.032				

Exercício 2.6.

Na **Tabela 2.7**, temos a população dos municípios de MG com mais de 50.000 habitantes, com base nos dados do Censo Demográfico 2000.

Construa uma tabela de frequências, trabalhando com as seguintes classes (em 1.000 hab.):

[50, 60), [60, 70), [70, 80), [80, 100), [100, 200), [200, 500) e 500

ou mais.

Note que aqui estamos trabalhando com classes desiguais, o que é comum em situações desse tipo, onde há muitas observações pequenas e poucas observações grandes.

**Tabela 2.7:** População dos municípios de MG com mais de 50.000 habitantes

Município	População	Município	População	Município	População
Leopoldina	50.097	Timóteo	71.478	Varginha	108.998
Pirapora	50.300	Pará de Minas	73.007	Barbacena	114.126
Três Pontas	51.024	Patrocínio	73.130	Sabará	115.352
São Francisco	51.497	Paracatu	75.216	Patos de Minas	123.881
Pedro Leopoldo	53.957	Vespasiano	76.422	Teófilo Otoni	129.424
Ponte Nova	55.303	Itaúna	76.862	Ibirité	133.044
S.Seb.do Paraíso	58.335	Caratinga	77.789	Poços de Caldas	135.627
Janaúba	61.651	S.João del Rei	78.616	Divinópolis	183.962
Formiga	62.907	Lavras	78.772	Sete Lagoas	184.871
Januária	63.605	Araxá	78.997	Santa Luzia	184.903
Cataguases	63.980	Itajubá	84.135	Ipatinga	212.496
Nova Lima	64.387	Ubá	85.065	Ribeirão das Neves	246.846
Viçosa	64.854	Ituiutaba	89.091	Gov.Valadares	247.131
Três Corações	65.291	Muriaé	92.101	Uberaba	252.051
Ouro Preto	66.277	Passos	97.211	Betim	306.675
João Monlevade	66.690	Cor. Fabriciano	97.451	Montes Claros	306.947
Alfenas	66.957	Itabira	98.322	Juiz de Fora	456.796
Manhuaçu	67.123	Araguari	101.974	Uberlândia	501.214
Curvelo	67.512	Cons.Lafaiete	102.836	Contagem	538.017
Unai	70.033	Pouso Alegre	106.776	Belo Horizonte	2.238.526

Fonte: IBGE - Censo Demográfico 2000

**Exercício 2.7.**

Na **Tabela 2.8**, temos a densidade populacional (hab/km<sup>2</sup>) das unidades da federação brasileira. Construa um gráfico ramo-e-folhas para esses dados. Para RJ e DF, você pode dar um “salto” na escala, de modo a não acrescentar muitos ramos vazios.

Tabela 2.8: Densidade populacional dos estados brasileiros

UF	Densidade populacional (hab/km <sup>2</sup> )	UF	Densidade populacional (hab/km <sup>2</sup> )
RO	6	SE	81
AC	4	BA	24
AM	2	MG	31
RR	2	ES	68
PA	5	RJ	328
AP	4	SP	149
TO	5	PR	48
MA	17	SC	57
PI	12	RS	37
CE	51	MS	6
RN	53	MT	3
PB	61	GO	15
PE	81	DF	353
AL	102		

Fonte: IBGE - Censo Demográfico 2000

Exercício 2.8.

Construa um gráfico de linhas para os dados da inflação brasileira anual medida pelo Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC) apresentados na Tabela 2.9.

Tabela 2.9: Índice Nacional de Preços ao Consumidor - 1995-2005

Ano	INPC (%)
1995	22,0
1996	9,1
1997	4,3
1998	2,5
1999	8,4
2000	5,3
2001	9,4
2002	14,7
2003	10,4
2004	6,1
2005	5,1

## SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

### Exercício 2.1.

Veja a **Tabela 2.10**.

**Tabela 2.10:** Distribuição de frequência da idade dos funcionários do Departamento de RH

Faixa Etária	Frequência simples		Frequência acumulada	
	Absoluta	Relativa %	Absoluta	Relativa %
24 – 28	4	26,67	4	26,67
29 – 33	3	20,00	7	46,67
34 – 38	4	26,67	11	73,33
39 – 43	1	6,67	12	80,00
44 – 48	1	6,67	13	86,67
49 – 53	2	13,33	15	100,0
Total	15	100,00		

### Exercício 2.2.

O valor mínimo é 3.200 e o valor máximo é 7.300. Dessa forma, a amplitude exata é  $7.300 - 3.200 = 4.100$  e o próximo múltiplo de 5 é 4.105. Logo, o comprimento de cada classe é  $\frac{4.105}{5} = 821$ . Obtém-se a **Tabela 2.11**.

**Tabela 2.11:** Distribuição dos salários dos funcionários do Depto de RH

Faixa salarial	Frequência simples		Frequência acumulada	
	Absoluta	Relativa %	Absoluta	Relativa %
3.200 – 4.021	4	26,67	4	26,67
4.021 – 4.842	2	13,33	6	40,00
4.842 – 5.663	2	13,33	8	53,33
5.663 – 6.484	3	20,00	11	73,33
6.484 – 7.305	4	26,67	15	100,00
Total	15	100,00		

### Exercício 2.3.

Veja a **Tabela 2.12** e os gráficos nas **Figuras 2.7** e **2.8**.

Tabela 2.12: Distribuição de frequência das notas de 50 alunos

Notas	Frequência simples		Frequência acumulada	
	Absoluta	Relativa (%)	Absoluta	Relativa (%)
2┤3	1	2,0	1	2,0
3┤4	2	4,0	3	6,0
4┤5	2	4,0	5	10,0
5┤6	3	6,0	8	16,0
6┤7	12	24,0	20	40,0
7┤8	14	28,0	34	68,0
8┤9	12	24,0	46	92,0
9┤10	4	8,0	50	100,0
Total	50	100,0		

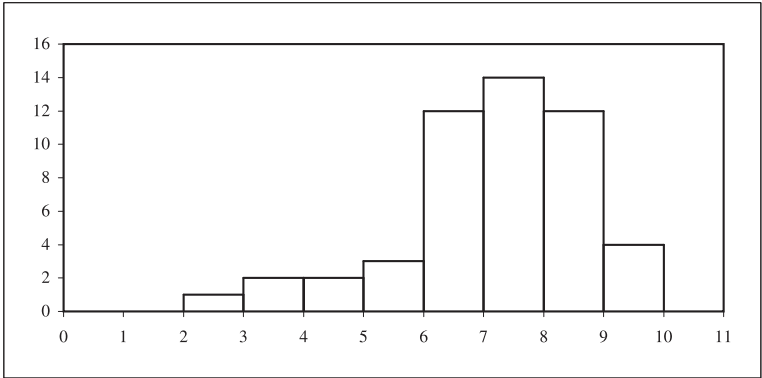


Figura 2.7: Histograma da distribuição das notas de 50 alunos.

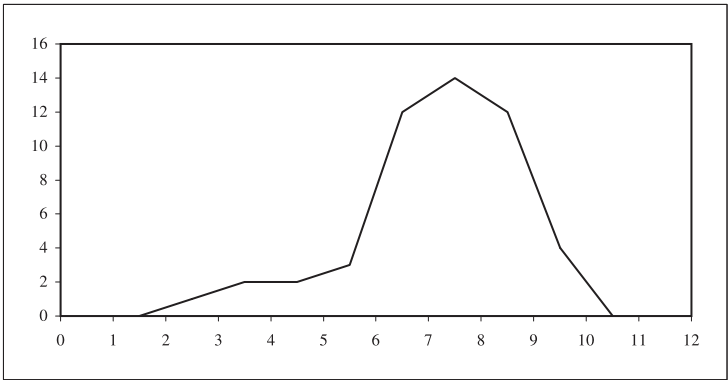
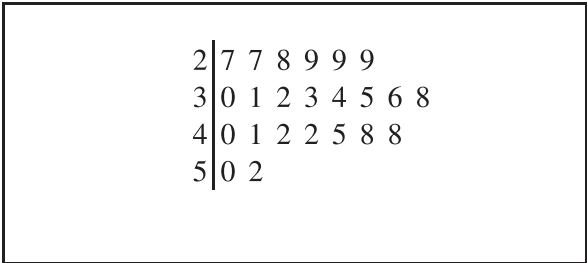


Figura 2.8: Polígono de frequência da distribuição das notas de 50 alunos.



Exercício 2.4.

Veja a **Figura 2.9**.



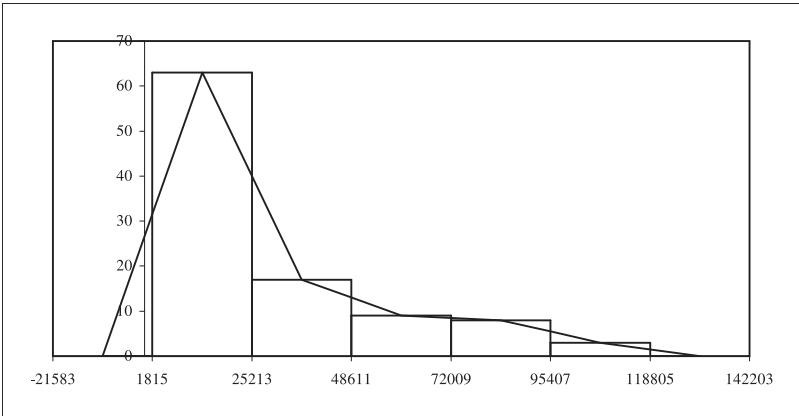
**Figura 2.9:** Idades dos funcionários do Departamento Financeiro.

Exercício 2.5.

Os valores mínimo e máximo são, respectivamente, 1.815 e 118.800, o que fornece uma amplitude exata de 116.985. Tomando o próximo múltiplo de 5, a amplitude efetiva passa a ser 116.990, o que dá um comprimento de classe  $\frac{116.990}{5} = 23.398$ . Veja a **Tabela 2.13** e os gráficos na **Figura 2.10**.

**Tabela 2.13:** Distribuição de frequência do número de horas trabalhadas

Número de Horas trabalhadas	Frequência simples		Frequência acumulada	
	Absoluta	Relativa (%)	Absoluta	Relativa (%)
1.815 – 25.213	63	63,0	63	63,0
25.213 – 48.611	17	17,0	80	80,0
48.611 – 72.009	9	9,0	89	89,0
72.009 – 95.407	8	8,0	97	97,0
95.407 – 118.805	3	3,0	100	100,0
Total	100	100,0		



**Figura 2.10:** Distribuição da jornada de trabalho de empresas alimentares.

Exercício 2.6.

Veja a Tabela 2.14.

Tabela 2.14: População dos municípios mineiros com mais de 50.000 habitantes

População (em 1000 hab)	Frequência simples		Frequência acumulada	
	Absoluta	Relativa (%)	Absoluta	Relativa (%)
50 ┤ 60	7	11,67	7	11,67
60 ┤ 70	12	20,00	19	31,67
70 ┤ 80	11	18,33	30	50,00
80 ┤ 90	3	5,00	33	55,00
90 ┤ 100	4	6,67	37	61,67
100 ┤ 200	13	21,67	50	83,33
200 ┤ 500	7	11,67	57	95,00
500 ou mais	3	5,00	60	100,00
Total	60	100,0		

Exercício 2.7.

Veja a Figura 2.11.

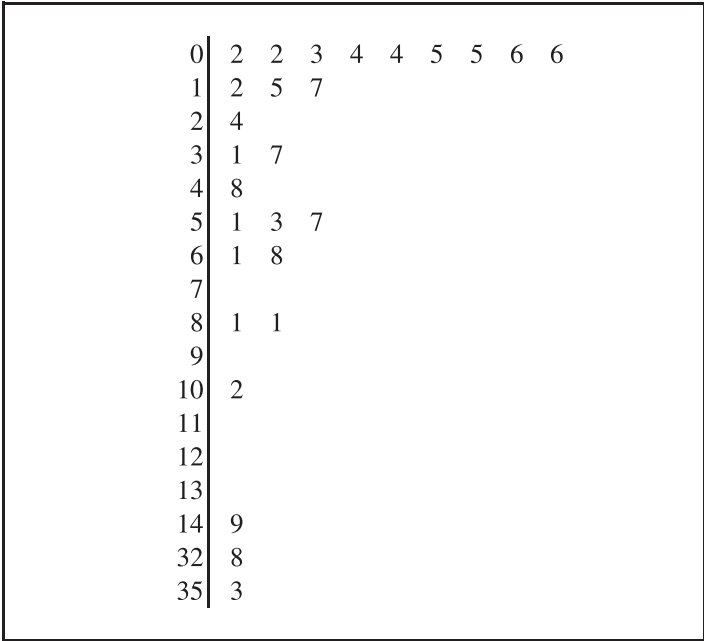
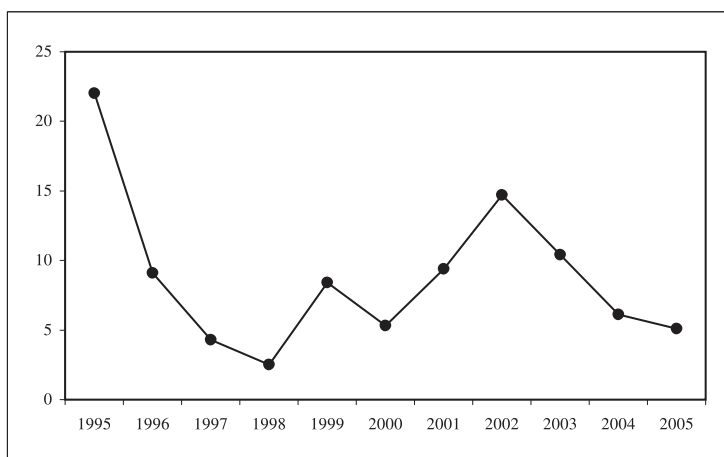


Figura 2.11: Densidade populacional das UFs brasileiras.

**Exercício 2.8.**

Veja a **Figura 2.12**.



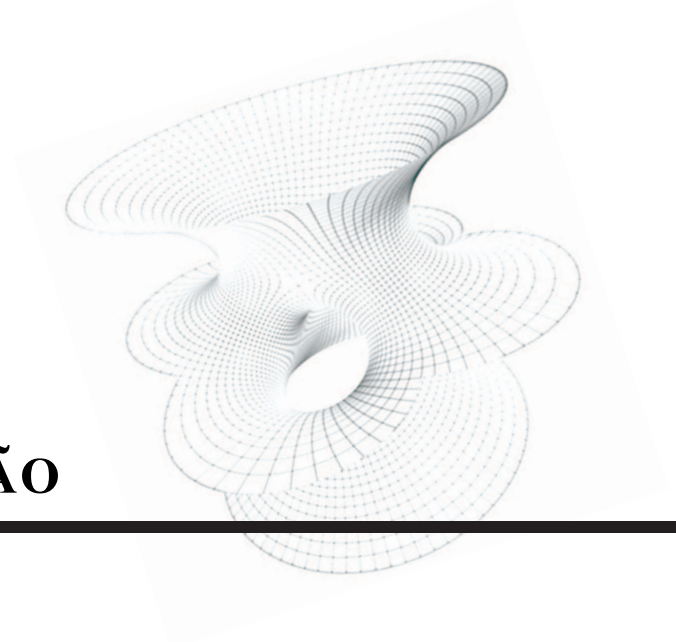
**Figura 2.12:** Inflação brasileira anual.



# Aula 3

## MEDIDAS DE POSIÇÃO

---



# O b j e t i v o

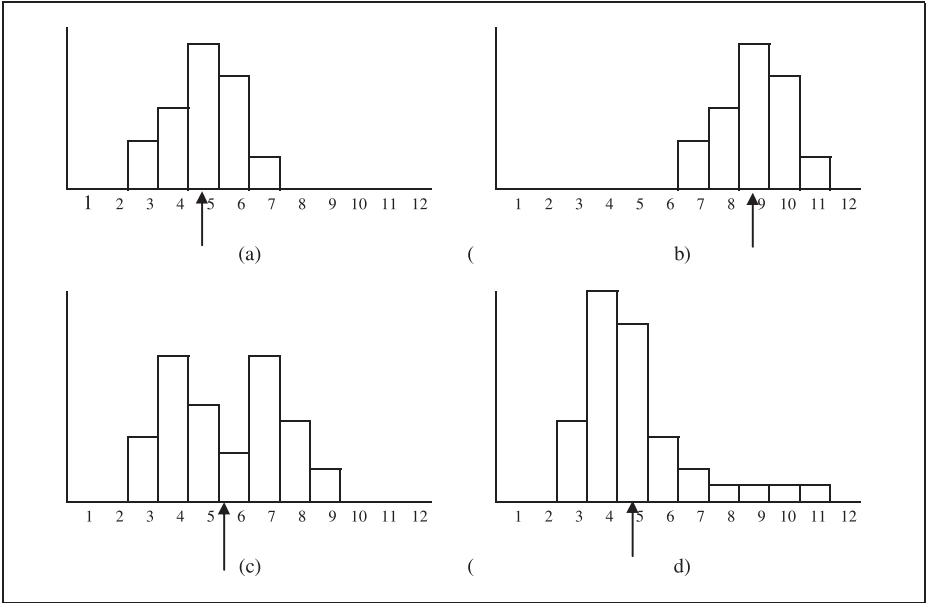
Nesta aula, você estudará as medidas de posição de uma distribuição de dados e aprenderá os seguintes conceitos:

- 1 média;
- 2 mediana;
- 3 moda.

## MEDIDAS DE POSIÇÃO OU TENDÊNCIA CENTRAL

A redução dos dados através de tabelas de frequências ou gráficos é um dos meios disponíveis para se ilustrar o comportamento de um conjunto de dados. No entanto, muitas vezes queremos resumir ainda mais esses dados, apresentando um único valor que seja “representativo” do conjunto original. As medidas de posição ou tendência central, como o próprio nome está indicando, são medidas que informam sobre a posição típica dos dados.

Na **Figura 3.1** podemos notar os seguintes fatos: em (a) e (b), as distribuições são idênticas, exceto pelo fato de que a segunda está deslocada à direita. Em (c), podemos ver que há duas classes com a frequência máxima e em (d), há uma grande concentração na cauda inferior e alguns poucos valores na cauda superior. As medidas de posição que apresentaremos a seguir irão captar essas diferenças.



**Figura 3.1:** Exemplos ilustrativos do conceito de medidas de posição.

## MÉDIA ARITMÉTICA SIMPLES

No nosso dia a dia, o conceito de média é bastante comum, quando nos referimos, por exemplo, à altura média dos brasileiros, à temperatura média dos últimos anos etc.

### Definição 3.1.

Dado um conjunto de  $n$  observações  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , a **média aritmética simples** é definida como

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (3.1)$$

A notação  $\bar{x}$  (lê-se x barra), usada para indicar a média, é bastante comum; em geral, usa-se a mesma letra utilizada para indicar os dados com a barra em cima.

Na definição anterior, fazemos uso do símbolo de somatório, representado pela letra grega sigma maiúscula,  $\Sigma$ . Nesta aula, você ainda aprenderá mais sobre esse símbolo. Por enquanto, entenda como a média aritmética de um conjunto de dados é calculada. A primeira observação é que ela só pode ser calculada para dados quantitativos (não faz sentido somar masculino + feminino!). O seu cálculo é feito somando-se todos os valores e dividindo-se pelo número total de observações.

Consideremos as idades dos funcionários do Departamento de Recursos Humanos, analisadas na aula anterior e apresentadas no ramo e folhas da **Figura 3.2**.

Escala						
1		0	10			
2		4	5	6	6	9 9
3		1	5	6	7	8
4		2	5			
5		1	3			

**Figura 3.2:** Idade dos funcionários do Departamento de RH.

A idade média é

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{24 + 25 + 26 + 26 + 29 + 29 + 31 + 35 + 36 + 37 + 38 + 42 + 45 + 51 + 53}{15} \\ &= \frac{527}{15} = 35,13\end{aligned}$$

Como as idades estão em anos, a idade média também é dada nessa unidade, ou seja, a idade média é 35,13 anos. Em geral, *a média de um conjunto de dados tem a mesma unidade dos dados originais*.

A interpretação física da média aritmética é que ela representa o centro de gravidade da distribuição. Nos quatro histogramas da **Figura 3.1**, ela é o ponto de equilíbrio, indicado pela seta.

Note que o valor da média aritmética é um valor tal que, se substituíssemos todos os dados por ela, isto é, se todas as observações fossem iguais à média aritmética, a soma total seria igual à soma dos dados originais. Então, a média aritmética é uma forma de se distribuir o total observado pelos  $n$  elementos, de modo que todos tenham o mesmo valor.

Considere os seguintes dados fictícios referentes aos salários de cinco funcionários de uma firma: 136, 210, 350, 360, 2500. O total da folha de pagamentos é 3236, havendo um salário bastante alto, discrepante dos demais. A média para esses dados é 647,20. Se todos os cinco funcionários ganhassem esse salário, a folha de pagamentos seria a mesma e todos teriam o mesmo salário.

## MODA

No histograma (c) da **Figura 3.1**, duas classes apresentam a mesma frequência máxima. Esse é o conceito de *moda*.

### Definição 3.2.

A **moda** de uma distribuição ou conjunto de dados, que representaremos por  $x^*$ , é o valor que mais se repete, ou seja, o valor mais frequente.



Podemos ter distribuições amodais (todos os valores ocorrem o mesmo número de vezes), unimodais (uma moda), bimodais (duas modas) etc. Para os dados da **Figura 3.2**, temos as seguintes modas:  $x^* = 26$  e  $x^* = 29$  anos e, portanto, essa é uma distribuição bimodal. Assim como a média, *a moda sempre tem a mesma unidade dos dados originais*.

## MEDIANA

Vamos analisar novamente os seguintes dados referentes aos salários (em R\$) de cinco funcionários de uma firma: 136, 210, 350, 360, 2500. Como visto, o salário médio é R\$ 647,20. No entanto, esse valor não representa bem nem os salários mais baixos, nem o salário mais alto. Isso acontece porque o salário mais alto é muito diferente dos demais.

Esse exemplo ilustra um fato geral sobre a média aritmética: ela é muito influenciada por *valores discrepantes* (em inglês, *outliers*), isto é, valores muito grandes (ou muito pequenos) que sejam distintos da maior parte dos dados. Nesses casos, é necessário utilizar uma outra medida de posição para representar o conjunto; uma medida possível é a *mediana*.

### Definição 3.3.

Seja  $x_1, x_2, \dots, x_n$  um conjunto de  $n$  observações e seja  $x_{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$  o conjunto das observações ordenadas, de modo que  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ . Então, a **mediana**  $Q_2$  é definida como o valor tal que 50% das observações são menores que ela e 50% são maiores que ela. Para efeito de cálculo, valem as seguintes regras:

$$\begin{aligned} n \text{ ímpar :} \quad & Q_2 = x_{(\frac{n+1}{2})} \\ n \text{ par :} \quad & Q_2 = \frac{x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dessa definição, podemos ver que a mediana é o valor central dos dados e para calculá-la é necessário ordenar os dados. Para as idades na **Figura 3.2**, temos que o número total de ob-

servações é  $n = 15$ . Logo, a mediana é o valor central, que deixa sete observações abaixo e sete observações acima. Logo, a mediana é a oitava observação, uma vez que

$$\frac{n + 1}{2} = \frac{15 + 1}{2} = 8.$$

Sendo assim, a idade mediana é  $Q_2 = 35$  anos. *A unidade da mediana é a mesma dos dados.*

**Exemplo 3.1.**

Na aula anterior, analisamos os dados referentes ao número de dependentes dos funcionários do Departamento de Recursos Humanos, apresentados novamente na tabela abaixo.

Nome	Número de dependentes
João da Silva	3
Patrícia Silva	2
Pedro Fernandes	1
Regina Lima	2
Maria Freitas	0
Alfredo Souza	3
Paula Gonçalves	0
Margarete Cunha	0
Ana Freitas	1
Pedro Barbosa	2
Luiz Costa	3
Ricardo Alves	0
André Souza	4
Márcio Rezende	1
Ana Carolina Chaves	0

Vamos calcular as medidas de posição para esses dados. Ordenando-os, temos o seguinte:

0 0 0 0 0 1 1 1 2 2 2 3 3 3 4

A média é

$$\bar{x} = \frac{5 \times 0 + 3 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 3 + 1 \times 4}{15} = \frac{22}{15} = 1,47.$$

Então, em média temos 1,47 dependentes por funcionário do Departamento de RH. A moda é 0 dependente e a mediana é ( $n = 15$ )

$$Q_2 = x_{(\frac{15+1}{2})} = x_{(8)} = 1 \text{ dependente}$$

### Exercício 3.1.

No Exercício 2.1 (Aula 2), você analisou os dados sobre os salários dos funcionários do Departamento de Recursos Humanos, cujos valores (em R\$) são os seguintes:

6300 5700 4500 3800 3200 7300 7100 5600  
6400 7000 3700 6500 4000 5100 4500

Calcule a média, a moda e a mediana para esses dados, especificando as respectivas unidades.

### Exercício 3.2.

Calcule a nota média, a nota modal e a nota mediana para os dados da **Tabela 3.1**.

**Tabela 3.1:** Notas de 50 alunos.

2,9	3,7	3,8	4,7	4,9	5,2	5,6	5,8	6,0	6,2
6,3	6,3	6,3	6,5	6,5	6,6	6,8	6,8	6,9	6,9
7,0	7,0	7,1	7,3	7,3	7,4	7,4	7,5	7,5	7,6
7,6	7,7	7,7	7,9	8,1	8,1	8,2	8,2	8,3	8,3
8,4	8,5	8,7	8,7	8,8	8,9	9,0	9,1	9,4	9,7

## SOMATÓRIO

A notação de somatório é bastante útil na apresentação de fórmulas, pois ele resume de forma bastante compacta a operação de soma de várias parcelas. Para compreender as propriedades do somatório, basta lembrar as propriedades da adição.

Para desenvolver um somatório, temos que substituir o valor do índice em cada uma das parcelas e em seguida realizar a soma dessas parcelas. Por exemplo:

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

Em termos mais gerais, temos as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_n + y_n) = \\ &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n kx_i &= kx_1 + kx_2 + \cdots + kx_n = \\ &= k(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \\ &= k \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n k &= k + k + \cdots + k = nk\end{aligned}$$

É importante salientar algumas diferenças:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \neq \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

uma vez que

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

e

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2$$

Temos também que  $\sum_{i=1}^n x_i y_i \neq \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)$   
uma vez que

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

e

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

à medida do necessário iremos apresentando mais propriedades do somatório.

**Exercício 3.3.**

Calcule as seguintes quantidades para os dados abaixo:

$$\sum_{i=1}^6 x_i$$

$$\sum_{i=1}^6 f_i$$

$$\sum_{i=1}^6 f_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^6 f_i x_i^2$$

$i$	1	2	3	4	5	6
$f_i$	3	5	9	10	2	1
$x_i$	10	11	15	19	21	26

**MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA**

Vimos que a média aritmética equivale a dividir o “todo” (soma dos valores) em partes iguais, ou seja, estamos supondo que os números que queremos sintetizar têm o mesmo grau de importância. Entretanto, há algumas situações em que não é razoável atribuir a mesma importância a todos os dados.

Por exemplo, o Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC) é calculado com uma média dos Índices de Preço ao Consumidor (IPC) de diversas regiões metropolitanas do Brasil, mas a importância dessas regiões é diferente. Uma das variáveis que as diferencia é a população residente. Nesse tipo de situação, em vez de se usar a média aritmética simples, usa-se a *média aritmética ponderada*, que será representada por  $\bar{x}_p$ .

**Definição 3.4.**

A **média aritmética ponderada** de números  $x_1, x_2, \dots, x_n$  com pesos  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  é definida como

$$\bar{x}_p = \frac{\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \dots + \rho_n x_n}{\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i x_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i}. \quad (3.3)$$

Se definimos

$$\omega_i = \frac{\rho_i}{\sum_{j=1}^n \rho_j}, \quad (3.4)$$

então, a média aritmética ponderada pode ser reescrita como

$$\bar{x}_p = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i, \tag{3.5}$$

em que  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ .

Note que a média aritmética simples é um caso particular da média aritmética ponderada, onde todas as observações têm o mesmo peso  $\omega_i = \frac{1}{n}$ .

Para a construção do Índice Nacional de Preços ao Consumidor – INPC, o peso de cada índice regional é definido pela população residente urbana, conforme dados da **Tabela 3.2**. Os pesos em porcentagem apresentados representam a participação da população residente urbana da região metropolitana no total da população residente urbana das 11 regiões metropolitanas pesquisadas. O índice geral é dado pela média ponderada é

$$\begin{aligned} \text{INPC}_{03/06} = & 0,0306 \times 0,75 + 0,0915 \times 0,64 + 0,0623 \times 0,55 + \\ & 0,0919 \times 0,52 + 0,0749 \times 0,50 + 0,0425 \times 0,48 + \\ & 0,0378 \times 0,48 + 0,0385 \times 0,44 + 0,3626 \times 0,37 + \\ & 0,0334 \times 0,37 + 0,1340 \times 0,18 = 0,427137 \end{aligned}$$

**Tabela 3.2:** Estrutura básica de ponderação regional para cálculo do INPC - Março 2006

Área Geográfica	Peso (%)	IPC - Mar/06
Brasília	3,06	0,75
Belo Horizonte	9,15	0,64
Salvador	6,23	0,55
Porto Alegre	9,19	0,52
Curitiba	7,49	0,50
Recife	4,25	0,48
Goiânia	3,78	0,48
Belém	3,85	0,44
São Paulo	36,26	0,37
Fortaleza	3,34	0,37
Rio de Janeiro	13,40	0,18
<b>INPC - Geral</b>		<b>0,42</b>

Fonte: IBGE

**Exercício 3.4.**

Segundo o critério de avaliação adotado pelo Departamento de Estatística, cada aluno será submetido a duas provas, a primeira tendo peso 2 e a segunda tendo peso 3. Para ser aprovado sem precisar fazer prova final, a média nas duas provas tem que ser, no mínimo, 6.

Se um aluno tirar 5,5 na primeira prova, quanto deverá tirar na segunda prova para não precisar fazer prova final? E se as provas tivessem o mesmo peso?

**PROPRIEDADES DAS MEDIDAS DE POSIÇÃO**

Da interpretação física de média como centro de gravidade da distribuição, fica claro que a média é sempre um valor situado entre os valores mínimo e máximo dos dados. O mesmo resultado vale para a mediana e a moda, o que é imediato a partir das respectivas definições. Resumindo, temos:

**Propriedade 1**

$$\begin{aligned}x_{\min} &\leq \bar{x} \leq x_{\max} \\x_{\min} &\leq Q_2 \leq x_{\max} \\x_{\min} &\leq x^* \leq x_{\max}\end{aligned}\tag{3.6}$$

Vamos apresentar as outras duas propriedades através do seguinte exemplo:

Em uma turma de Estatística, os resultados de uma prova ficaram abaixo do que a professora esperava. Como todos os alunos vinham participando ativamente de todas as atividades, mostrando um interesse especial pela matéria, a professora resolveu dar 1 ponto na prova para todos os alunos. Além disso, ela deu os resultados com as notas variando de 0 a 10, mas a Secretaria da Faculdade exige que as notas sejam dadas em uma escala de 0 a 100. Sendo assim, a professora precisa multiplicar todas as notas por 10. O que acontece com a média, a moda e a mediana depois dessas alterações?

Vamos ver isso com um conjunto de cinco notas: 5, 4, 2, 3, 4.

As notas ordenadas são 2, 3, 4, 4, 5 e temos as seguintes medidas de posição:

$$\bar{x} = \frac{5 + 4 + 2 + 3 + 4}{5} = \frac{18}{5} = 3,6$$

$$Q_2 = x^* = 4$$

Somando 1 ponto, as notas passam a ser 3, 4, 5, 5, 6 com as seguintes medidas de posição:

$$\bar{y} = \frac{3 + 4 + 5 + 5 + 6}{5} = \frac{23}{5} = 4,6 = 3,6 + 1$$

$$Q_{2,y} = y^* = 5 = 4 + 1$$

Ao somar 1 ponto em todas as notas, o conjunto de notas sofre uma translação, o que faz com que o seu centro também fique deslocado de 1 ponto. Sendo assim, todas as três medidas de posição ficam somadas de 1 ponto.

Multiplicando as novas notas por 10, obtemos 30, 40, 50, 50, 60 e

$$\bar{z} = \frac{30 + 40 + 50 + 50 + 60}{5} = \frac{230}{5} = 46,0 = 4,6 \times 10$$

$$Q_{2,z} = z^* = 50 = 5 \times 10,$$

ou seja, todas as medidas de posição ficam multiplicadas por 10.

Esse exemplo ilustra as seguintes propriedades:

### Propriedade 2

Somando-se um mesmo valor a cada observação  $x_i$ , obtemos um novo conjunto de dados  $y_i = x_i + k$  para o qual temos as seguintes medidas de posição:

$$y_i = x_i + k \Rightarrow \begin{cases} \bar{y} = \bar{x} + k \\ Q_{2,y} = Q_{2,x} + k \\ y^* = x^* + k \end{cases} \quad (3.7)$$



### Propriedade 3

Multiplicando cada observação  $x_i$  por uma mesma constante não nula  $k$ , obtemos um novo conjunto de dados  $y_i = kx_i$  para o qual temos as seguintes medidas de posição:

$$y_i = kx_i \Rightarrow \begin{cases} \bar{y} = k\bar{x} \\ Q_{2,y} = kQ_{2,x} \\ y^* = kx^* \end{cases} \quad (3.8)$$

#### Exercício 3.5.

A relação entre as escalas Celsius e Fahrenheit é a seguinte:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Se a temperatura média em determinada localidade é de  $45^\circ F$ , qual é a temperatura média em graus Celsius?

#### Exercício 3.6.

Em uma certa pesquisa, foram levantados dados sobre o lucro líquido de uma amostra de grandes empresas, em reais, obtendo-se a média de R\$ 1 035 420,00. Na divulgação dos resultados, os valores devem ser apresentados em milhares de reais. Qual é o valor a ser divulgado para o lucro médio?

## MEDIDAS DE POSIÇÃO PARA DISTRIBUIÇÕES DE FREQUÊNCIAS AGRUPADAS

Considere a distribuição de frequências do salário dos funcionários do Departamento de Recursos Humanos reproduzida na **Tabela 3.3**.

**Tabela 3.3:** Distribuição da renda dos funcionários do Departamento de RH

Classe de renda	Ponto médio	Frequência simples		Frequência acumulada	
		absoluta	relativa %	absoluta	relativa %
[3200,4021)	3610,5	4	26,67	4	26,67
[4021,4842)	4431,5	2	13,33	6	40,00
[4842,5663)	5252,5	2	13,33	8	53,33
[5663,6484)	6073,5	3	20,00	11	73,33
[6484,7305)	6894,5	4	26,67	15	100,00
Total		15	100,00		

Essa tabela foi construída a partir dos dados da **Tabela 2.2**, analisada na aula anterior. Imagine, agora, que não dispuséssemos daqueles dados e só nos fosse fornecida a **Tabela 3.3**. Como poderíamos calcular a média, a moda e a mediana? Isso é o que você aprenderá nessa parte final da aula.

### MÉDIA ARITMÉTICA SIMPLES

Quando agrupamos os dados em uma distribuição de frequências, estamos perdendo informação, uma vez que não apresentamos os valores individuais.

Informar apenas que existem quatro valores na classe 3200 ─ 4021 nos obriga a escolher um valor típico, representante de tal classe. Esse valor será sempre o *ponto médio* da classe.

Então, a informação anterior é interpretada como a existência de quatro valores iguais a 3610,5; que é o ponto médio dessa classe. Essa é a interpretação básica da tabela de frequências: *todos os valores de uma classe são considerados iguais ao ponto médio da classe*. O ponto médio da classe, por sua vez, é calculado como a média dos limites de classe. Veja a coluna criada com esses valores na **Tabela 3.3**.

A interpretação da tabela de frequências nos diz que há quatro observações iguais a 3610,5; duas observações iguais a 4431,5; duas iguais a 5252,5; três iguais a 6073,5 e quatro iguais a 6894,5. Então, esses dados podem ser vistos como o seguinte conjunto de observações:

$$\left. \begin{array}{l} 3610,5 \\ 3610,5 \\ 3610,5 \\ 3610,5 \end{array} \right\} \text{quatro ocorrências do } 3610,5 \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{array}{l} 4431,5 \\ 4431,5 \end{array} \right\} \text{duas ocorrências do } 4431,5$$

$$\left. \begin{array}{l} 5252,5 \\ 5252,5 \end{array} \right\} \text{duas ocorrências do } 5252,5$$

$$\left. \begin{array}{l} 6073,5 \\ 6073,5 \\ 6073,5 \end{array} \right\} \text{três ocorrências do } 6073,5$$

$$\left. \begin{array}{l} 6894,5 \\ 6894,5 \\ 6894,5 \\ 6894,5 \end{array} \right\} \text{quatro ocorrências do } 6894,5$$

Para calcular a média desse novo conjunto de dados, temos que fazer:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{4 \times 3610,5 + 2 \times 4431,5 + 2 \times 5252,5 + 3 \times 6073,5 + 4 \times 6894,5}{15} = \\ &= \frac{4}{15} \times 3610,5 + \frac{2}{15} \times 4431,5 + \frac{2}{15} \times 5252,5 + \frac{3}{15} \times 6073,5 + \frac{4}{15} \times 6894,5 = \\ &= 0,2667 \times 3610,5 + 0,1333 \times 4431,5 + 0,1333 \times 5252,5 + 0,20 \times 6073,5 + \\ &\quad + 0,2667 \times 6894,5 = 5307,2333 \end{aligned}$$

Note, na penúltima linha da equação anterior, que os pontos médios de cada classe são multiplicados pela frequência relativa da classe. Então, a média dos dados agrupados em classes é uma *média ponderada dos pontos médios*, onde os pesos são definidos pelas frequências das classes.

Representando o ponto médio da classe por  $x_i$  e por  $f_i$  a frequência relativa (não multiplicada por 100), temos que

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k f_i x_i \quad (3.10)$$

Os pesos (frequências) aparecem exatamente para compensar o fato de que as classes têm números diferentes de observações.

## MODA

Embora existam métodos geométricos para se calcular a moda de dados agrupados, tais métodos não são muito utilizados na prática. Sendo assim, estimaremos a moda de uma distribuição de frequências agrupadas pelo ponto médio da *classe modal*, que é a classe de maior frequência.

No exemplo anterior, temos uma distribuição bimodal com  $x^* = 3610,5$  e  $x^* = 6894,5$ .

## MEDIANA

Como já visto, a mediana é o valor que deixa 50% das observações acima e 50% abaixo dela. Estando os dados agrupados em classes, existe um método geométrico que produz uma estimativa da mediana. As ideias subjacentes a esse método são que a mediana divide ao meio o conjunto de dados (ou seja, a definição de mediana) e que, no histograma da distribuição, as áreas dos retângulos são proporcionais às frequências relativas.

Considere o histograma da **Figura 3.3**, referente aos salários dos funcionários do Departamento de Recursos Humanos. Nas duas primeiras classes, temos 40% das observações e, nas três primeiras classes, temos 53,33%. Logo, a mediana é algum ponto da *classe mediana* 4842 – 5663 e, abaixo desse ponto, temos que ter 50% da distribuição, ou seja, as áreas dos dois primeiros retângulos mais a área do retângulo hachurado representam 50% da frequência.

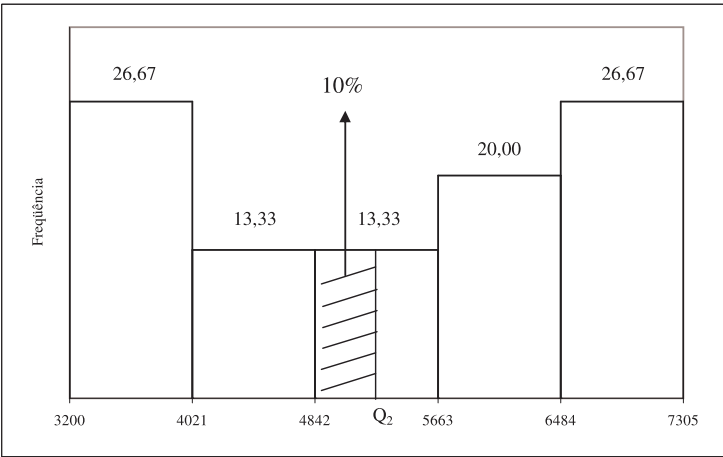
Então, para identificar a mediana, devemos notar que na classe mediana ficam faltando  $50\% - 40\% = 10\%$  da distribuição para completar 50%. Então, a área  $A_1$  do retângulo hachurado deve ser igual a 10%, enquanto que o retângulo da classe medi-

ana tem área  $A_m = 13,33\%$ . Usando a fórmula que dá a área de um retângulo, obtém-se:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0,10 = (Q_2 - 4842) \times h \\ A_m &= 0,1333 = (5663 - 4842) \times h \end{aligned}$$

em que  $h$  é a altura comum dos dois retângulos. Dividindo as duas igualdades, termo a termo, obtém-se a seguinte regra de proporcionalidade:

$$\frac{0,10}{0,1333} = \frac{Q_2 - 4842}{821} \Rightarrow Q_2 = 5457,904$$



**Figura 3.3:** Cálculo da mediana dos salários dos funcionários de RH.

**Exemplo 3.2.**

Para fixar as ideias, vamos calcular a média e a mediana da seguinte distribuição:

Classes	Frequência simples		Frequência acumulada	
	Absoluta	Relativa %	Absoluta	Relativa %
0 ┊ 5	5	6,25	5	6,25
5 ┊ 10	15	18,75	20	25,00
10 ┊ 15	22	27,50	42	52,50
15 ┊ 20	18	22,50	60	75,00
20 ┊ 25	12	15,00	72	90,00
25 ┊ 30	8	10,00	80	100,00
<b>Total</b>	80	100,00		

Os pontos médios das classes são

$$\frac{0+5}{2} = 2,5 \qquad \frac{5+10}{2} = 7,5 \qquad \dots \qquad \frac{25+30}{2} = 27,5$$

e a média é calculada como

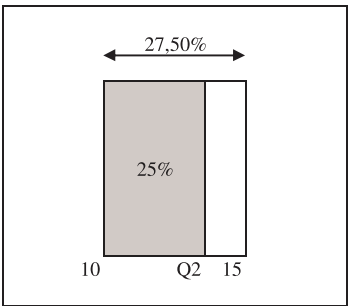
$$\bar{x} = 0,0625 \times 2,5 + 0,1875 \times 7,5 + 0,2750 \times 12,5 + 0,2250 \times 17,5 + \\ + 0,15 \times 22,5 + 0,10 \times 27,5 = 15,0625$$

Note que é preferível trabalhar com as frequências relativas em forma decimal, pois, se trabalhássemos com as frequências relativas em forma percentual, teríamos que dividir o resultado por 100. Lembre-se de que a média tem de estar entre o valor mínimo 0 e o valor máximo 30.

Da coluna de frequências relativas acumuladas, vemos que a mediana está na terceira classe 10 – 15. Nas duas primeiras classes, temos 25% dos dados; assim, está faltando 25% para completar 50%. Veja a **Figura 3.4**.

A regra de três resultante é

$$\frac{Q_2 - 10}{25} = \frac{15 - 10}{27,5} \Rightarrow Q_2 = 14,545$$



**Figura 3.4:** Cálculo da mediana do Exemplo 3.2.

**Exercício 3.7.**

Calcule a média e a mediana da seguinte distribuição:

Classes	Frequência
4 – 6	10
6 – 8	12
8 – 10	18
10 – 12	6
12 – 14	4
<b>Total</b>	<b>50</b>

## Resumo

Nesta aula, você estudou as principais medidas de posição ou de tendência central, que ilustram a posição típica dos dados. Seja  $x_1, x_2, \dots, x_n$  o nosso conjunto de dados.

**Média aritmética simples** – é o valor dado por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

cuja interpretação geométrica corresponde ao centro de gravidade da distribuição.

**Moda** –  $x^*$  é o valor que mais se repete.

**Mediana** – considerando os dados ordenados  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ , a mediana  $Q_2$  é o valor central, ou seja, a mediana é o valor tal que metade das observações é menor que ela:

$$Q_2 = x_{(\frac{n+1}{2})} \quad \text{se } n \text{ é ímpar}$$

$$Q_2 = \frac{x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} \quad \text{se } n \text{ é par}$$

**Média aritmética ponderada** – se as observações têm pesos  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  tais que  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ , a média ponderada é

$$\bar{x}_p = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_n x_n = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i$$

**Média de dados agrupados em classes** – é a média ponderada dos pontos médios  $x_i$  das classes, em que os pesos são as frequências relativas  $f_i$ :

$$\bar{x} = \sum_i f_i x_i$$

**Mediana de dados agrupados** – é calculada pela proporcionalidade direta de áreas no histograma da distribuição.

Média, mediana e moda são medidas na mesma unidade dos dados e satisfazem as seguintes propriedades:

$$x_{\min} \leq \bar{x} \leq x_{\max}$$

$$x_{\min} \leq Q_2 \leq x_{\max}$$

$$x_{\min} \leq x^* \leq x_{\max}$$

$$y_i = k_1 x_i + k_2 \Rightarrow \begin{cases} \bar{y} = k_1 \bar{x} + k_2 \\ Q_{2,y} = k_1 Q_{2,x} + k_2 \\ y^* = k_1 x^* + k_2 \end{cases}$$

**Exercício 3.8.**

Quatro amigos trabalham em um supermercado em tempo parcial com os seguintes salários horários:

Pedro:	R\$ 3,50	João:	R\$ 2,60
Marcos:	R\$ 3,80	Luiz:	R\$ 2,20

Se Pedro trabalha 10 horas por semana, João 12 horas, Marcos 15 horas e Luiz 8 horas, qual é o salário horário médio desses quatro amigos?

**Exercício 3.9.**

Na UFF, o coeficiente de rendimento (CR) semestral dos alunos é calculado como uma média das notas finais nas disciplinas cursadas, levando em conta a carga horária (ou crédito) das disciplinas, de modo que disciplinas com maior carga horária têm maior peso no CR.

Suponha que um aluno tenha cursado cinco disciplinas em um semestre, obtendo médias finais de 7,5; 6,1; 8,3; 6,5; 7,5. As três primeiras disciplinas tinham carga horária de 4 horas semanais, a quarta, carga horária de 6 horas e a última, duas horas semanais. Calcule o CR do aluno nesse semestre.

**Exercício 3.10.**

Em uma pesquisa sobre atividades de lazer realizada com uma amostra de 20 alunos de um campus universitário, perguntou-se o número de horas que os alunos gastaram “navegando” na internet na semana anterior. Os resultados obtidos foram os seguintes:

15	24	18	8	10	12	15	14	12	10
18	12	6	20	18	16	10	12	15	9

Calcule a média, a moda e a mediana desses dados, especificando as respectivas unidades.

**Exercício 3.11.**

No final do ano 2005, o dono de um pequeno escritório de administração deu a seus oito funcionários uma gratificação de 250 reais, paga junto com o salário de dezembro. Se em novembro o salário médio desses funcionários era de 920 reais, qual o salário médio em dezembro? Que propriedades você utilizou para chegar a esse resultado?



**Exercício 3.12.**

No mês de dissídio de determinada categoria trabalhista, os funcionários de uma empresa tiveram reajuste salarial de 8,9%. Se no mês anterior ao dissídio o salário médio desses funcionários era de 580 reais, qual o valor do salário médio depois do reajuste? Que propriedades você utilizou para chegar a esse resultado?

**Exercício 3.13.**

O número médio de empregados das empresas industriais do setor de fabricação de bebidas em determinado momento era de 117 empregados, enquanto o número mediano era de 27. Dê uma explicação para a diferença entre essas medidas de tendência central.

**Exercício 3.14.**

Na tabela a seguir, temos o número de empresas por faixa de pessoal ocupado (PO) do setor de fabricação de bebidas em determinado momento. Calcule a média e a mediana dessa distribuição, especificando as respectivas unidades.

Classe de PO	Número de empresas
[10, 30)	489
[30, 100)	269
[100, 500)	117
[500, 1000)	15
[1000, 2000)	9
[2000, 4000)	7

**SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS****Exercício 3.1.**

Temos 15 funcionários. Os dados ordenados são os seguintes: 3200, 3780, 3800, 4000, 4500, 4500, 5100, 5600, 5700, 6300, 6400, 6500, 7000, 7100, 7300. A média é

$$\bar{x} = \frac{3200 + 3780 + \cdots + 7300}{15} = \frac{80700}{15} = 5380$$

A moda é

$$x^* = 4500$$

e a mediana é a observação de posição  $\frac{15+1}{2} = 8$ , ou seja,

$$Q_2 = x_{(8)} = 5600$$

Todas essas medidas estão em R\$.

### Exercício 3.2.

Note que os dados já estão ordenados; caso não estivessem, uma boa opção para ajudar na solução do exercício seria construir o diagrama de ramos e folhas. Temos 50 notas. Logo,

$$\bar{x} = \frac{2,9 + 3,7 + \dots + 9,7}{50} = \frac{357,1}{50} = 7,142$$

A nota modal é  $x^* = 6,3$ , que aparece 3 vezes. Como o número de observações é par ( $n = 50$ ), a mediana é a média das 2 observações centrais, cujas posições são

$\frac{50}{2}$  e  $\frac{50}{2} + 1$ , ou seja, a mediana é a média da 25ª e da 26ª

Observações:

$$Q_2 = \frac{7,3 + 7,4}{2} = 7,35$$

### Exercício 3.3.

Temos o seguinte:

$$\sum_{i=1}^6 x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10 + 11 + 15 + 19 + 21 + 26 = 102$$

$$\sum_{i=1}^6 f_i = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 3 + 5 + 9 + 10 + 2 + 1 = 30$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^6 f_i x_i &= f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + f_4 x_4 + f_5 x_5 + f_6 x_6 = \\ &= 3 \times 10 + 5 \times 11 + 9 \times 15 + 10 \times 19 + 2 \times 21 + 1 \times 26 = 478\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^6 f_i x_i^2 &= f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2 + f_3 x_3^2 + f_4 x_4^2 + f_5 x_5^2 + f_6 x_6^2 = \\ &= 3 \times 10^2 + 5 \times 11^2 + 9 \times 15^2 + 10 \times 19^2 + 2 \times 21^2 + 1 \times 26^2 = 8098\end{aligned}$$

### Exercício 3.4.

Vamos denotar por  $x_1$  e  $x_2$  as notas na primeira e na segunda provas. Então, a média final é calculada como

$$\bar{x}_p = \frac{2x_1 + 3x_2}{2 + 3}$$

Para aprovação direta, sem prova final, temos que ter  $\bar{x}_p \geq 6$ . Logo,

$$\bar{x}_p \geq 6 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{2 + 3} \geq 6 \Leftrightarrow$$

$$2 \times 5,5 + 3x_2 \geq 30 \Leftrightarrow$$

$$3x_2 \geq 19 \Leftrightarrow$$

$$x_2 \geq \frac{19}{3} = 6,3\bar{3}$$

Se fosse média simples, teríamos que ter

$$\bar{x} \geq 6 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq 6 \Leftrightarrow$$

$$5,5 + x_2 \geq 12 \Leftrightarrow$$

$$x_2 \geq 6,5$$

Exercício 3.5.

A mesma relação que se aplica às temperaturas individuais se aplica também à temperatura média, ou seja, a temperatura média em graus Celsius é

$$\overline{C} = \frac{5}{9}(\overline{F} - 32) = \frac{5}{9}(45 - 32) = 7,22^{\circ}C$$

Exercício 3.6.

Não é necessário recalcular a média em milhares de reais; basta dividir a média por 1000, ou seja, o lucro médio é de 1035,42 milhares de reais.

Exercício 3.7.

A distribuição de frequências completa é a seguinte:

Classes	Ponto	Freq. Simples		Freq. Acumulada	
	Médio	Absoluta	Relativa	Absoluta	Relativa
4├ 6	5	10	0,20	10	0,20
6├ 8	7	12	0,24	22	0,44
8├ 10	9	18	0,36	40	0,80
10├ 12	11	6	0,12	46	0,92
12├ 14	13	4	0,08	50	1,00
Total		50	1,00		

A média é

$$\bar{x} = 5 \times 0,20 + 7 \times 0,24 + 9 \times 0,36 + 11 \times 0,12 + 13 \times 0,08 = 8,28$$

A mediana está na classe 8├ 10. Abaixo desta classe, temos 44% das observações. Assim, para completar 50% ficam faltando 6%. Veja a **Figura 3.5**.

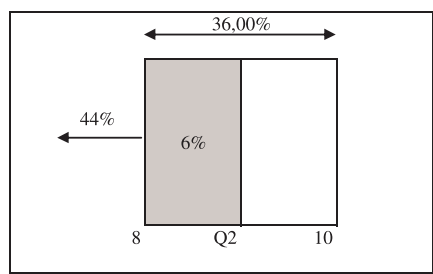


Figura 3.5: Cálculo da mediana do Exercício 3.7.



A média é

$$\bar{x} = \frac{6 + 8 + 9 + \dots + 20 + 24}{20} = \frac{274}{20} = 13,7$$

A moda é  $x^* = 12$  e a mediana é a média dos valores centrais:

$$Q_2 = \frac{x_{(10)} + x_{(11)}}{2} = \frac{12 + 14}{2} = 13$$

Todos esses resultados estão medidos em horas por semana.

### Exercício 3.11.

Todos os salários ficaram aumentados em 250 reais. Se chamamos de  $x_i$  o salário do funcionário  $i$  no mês de novembro e de  $y_i$  o salário desse mesmo funcionário em dezembro, então

$$y_i = x_i + 250.$$

De acordo com a Propriedade 2, temos que o salário médio em dezembro é

$$\bar{y} = \bar{x} + 250 = 920 + 250 = 1170 \text{ reais.}$$

### Exercício 3.12.

Seja  $x_i$  o salário do funcionário  $i$  no mês anterior ao dissídio. Depois do aumento, seu salário passa a ser

$$y_i = x_i + 0,089x_i = 1,089x_i.$$

Logo, todos os salários ficam multiplicados por 1,089 e, pela Propriedade 3, a média também fica multiplicada por este valor, ou seja, depois do dissídio o salário médio passa a ser

$$\bar{y} = 1,089\bar{x} = 1,089 \times 580 = 631,62 \text{ reais.}$$

### Exercício 3.13.

A diferença se deve à existência de grandes empresas no setor de bebidas, com muitos empregados. Como vimos, a média é bastante influenciada pelos valores discrepantes.

**Exercício 3.14.**

Completando a tabela, obtemos

Classe de PO	Ponto médio	Frequência Simples		Frequência Acumulada	
		Absoluta	Relativa (%)	Absoluta	Relativa (%)
[10, 30)	20	489	53,9735	489	53,9735
[30, 100)	65	269	29,6909	758	83,6645
[100, 500)	300	117	12,9139	875	96,5784
[500, 1000)	750	15	1,6556	890	98,2340
[1000, 2000)	1500	9	0,9934	899	99,2274
[2000, 4000)	3000	7	0,7726	906	100,0000
<b>Total</b>		906	100,0000		

Como as frequências relativas estão em forma percentual, temos que dividir o resultado por 100, ou seja:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (20 \times 53,9735 + 65 \times 29,6909 + 300 \times 12,9139 + \\ &\quad 750 \times 1,6556 + 1500 \times 0,9934 + 3000 \times 0,7726)/100 \\ &= 119,3322 \text{ empregados}\end{aligned}$$

A mediana está na classe 10 – 30. A frequência abaixo desta classe é nula. Logo, a regra de três é

$$\frac{Q_2 - 10}{50} = \frac{30 - 10}{53,9735} \Rightarrow Q_2 - 10 = \frac{1000}{53,9735} \Rightarrow$$

$$Q_2 = 28,528 \text{ empregados}$$

Note a diferença da média para a mediana, resultado da presença de empresas com muitos empregados – muitas empresas têm poucos empregados, mas poucas empresas têm muitos empregados, o que “puxa” a média para cima.





# Aula 4

## MEDIDAS DE DISPERSÃO

---



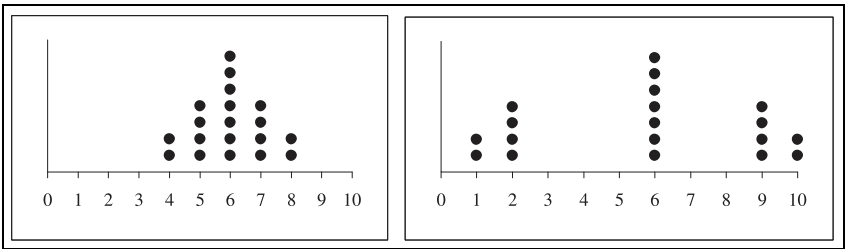
### Objetivo

Nesta aula, você estudará as medidas de dispersão de uma distribuição de dados e aprenderá os seguintes conceitos:

- 1 amplitude
- 2 desvios em torno da média
- 3 desvio médio absoluto
- 4 variância
- 5 desvio padrão

## AMPLITUDE

Considere os conjuntos de dados apresentados por um *diagrama de pontos* na **Figura 4.1**. Nesse gráfico, as “pilhas” de pontos representam as frequências de cada valor. Podemos ver facilmente que ambos os conjuntos têm a mesma média (o centro de gravidade ou ponto de equilíbrio é o mesmo), a mesma mediana e a mesma moda. No entanto, esses dois conjuntos têm características diferentes e ao sintetizá-los apenas por alguma medida de posição, essa característica se perderá. Tal característica é a *dispersão* dos dados: no primeiro conjunto, os dados estão mais concentrados em torno da média do que no segundo conjunto.



**Figura 4.1:** Conjuntos de dados com medidas de posição iguais e dispersão diferente.

Como podemos “medir” essa dispersão? Uma primeira ideia é considerar a *amplitude* dos dados, que é, como já visto, a diferença entre o maior e o menor valor.

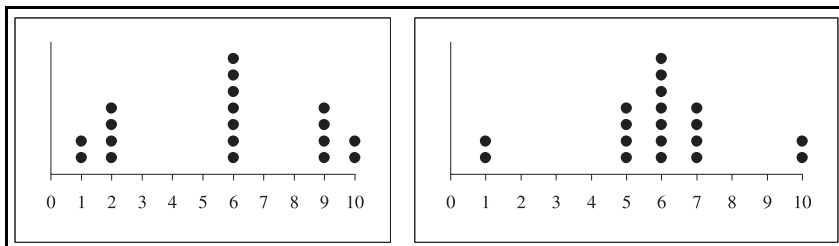
**Definição 4.1.**

A **amplitude** de um conjunto de dados é a distância entre o maior valor e o menor valor.

$$\Delta_{total} = V_{\max} - V_{\min}. \tag{4.1}$$

A amplitude tem a mesma unidade dos dados, mas ela tem algumas limitações, conforme ilustrado na **Figura 4.2**. Aí os dois conjuntos têm a mesma média, a mesma mediana e a mesma amplitude, mas essas medidas não conseguem caracterizar o fato de a distribuição dos valores entre o mínimo e o máximo ser di-

ferente nos dois conjuntos. A limitação da amplitude também fica patente pelo fato de ela se basear em apenas duas observações, independentemente do número total de observações.



**Figura 4.2:** Conjuntos de dados com medidas de posição e amplitude iguais.

## DESVIO MÉDIO ABSOLUTO

Uma maneira de se medir a dispersão dos dados é considerar os tamanhos dos *desvios*  $x_i - \bar{x}$  de cada observação em relação à média. Note nas figuras acima que, quanto mais disperso o conjunto de dados, maiores esses desvios tendem a ser. Para obter uma medida-resumo, isto é, um único número, poderíamos somar esses desvios, ou seja, considerar a seguinte medida:

$$D = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}). \quad (4.2)$$

Vamos desenvolver tal fórmula, usando as propriedades de somatório e a definição da média amostral.

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i - n\bar{x} = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i - n \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i = 0. \end{aligned}$$

Ou seja: essa medida, que representa a soma dos desvios em relação à média, é sempre nula, não importa o conjunto de dados! Logo, ela não serve para diferenciar quaisquer conjuntos!

Vamos dar uma explicação intuitiva para esse fato, que nos permitirá obter correções para tal fórmula. Ao considerarmos as diferenças entre cada valor e o valor médio, obtemos valo-

res negativos e positivos, pois, pela definição de média, sempre existem valores menores e maiores que a média; esses valores positivos e negativos, ao serem somados, se anulam.

Bom, se o problema está no fato de termos valores positivos e negativos, por que não trabalhar com o valor absoluto das diferenças? De fato, esse procedimento nos leva à definição de *desvio médio absoluto*.

#### Definição 4.2.

O **desvio médio absoluto** de um conjunto de dados  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é definido por

$$DMA = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| \quad (4.3)$$

onde as barras verticais representam o valor absoluto ou módulo.

Note que nesta definição estamos trabalhando com o desvio médio, isto é, tomamos a média dos desvios absolutos. Isso evita interpretações equivocadas, pois, se trabalhássemos apenas com a soma dos desvios absolutos, um conjunto com um número maior de observações tenderia a apresentar um resultado maior para a soma devido apenas ao fato de ter mais observações. Esta situação é ilustrada com os seguintes conjuntos de dados:

- Conjunto 1:  $\{1, 3, 5\}$
- Conjunto 2:  $\left\{1, \frac{5}{3}, 3, \frac{13}{3}, 5\right\}$

Para os dois conjuntos,  $\bar{x} = 3$  e para o conjunto 1

$$\sum_{i=1}^3 |x_i - \bar{x}| = |1 - 3| + |3 - 3| + |5 - 3| = 4$$

e para o conjunto 2

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 |x_i - \bar{x}| &= |1 - 3| + \left| \frac{5}{3} - 3 \right| + |3 - 3| + \left| \frac{13}{3} - 3 \right| + |5 - 3| \\ &= \frac{20}{3} = 6,667. \end{aligned}$$

Então, o somatório para o segundo conjunto é maior, mas o desvio absoluto médio é o mesmo para ambos; de fato, para o primeiro conjunto temos

$$DMA = \frac{4}{3}$$

e para o segundo conjunto

$$DMA = \frac{\frac{20}{3}}{5} = \frac{4}{3}$$

Ao dividirmos o somatório pelo número de observações, compensamos o fato de o segundo conjunto ter mais observações que o primeiro.

*O desvio médio absoluto tem a mesma unidade dos dados.*

#### Exercício 4.1.

Para o conjunto de dados 2, 4, 7, 8, 9, 6, 5, 8, calcule os desvios em torno da média e verifique que eles somam zero. Em seguida, calcule o desvio médio absoluto.

## VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO

Considerar o valor absoluto das diferenças  $(x_i - \bar{x})$  é uma das maneiras de se contornar o fato de que  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$ . No entanto, a função módulo tem a desvantagem de ser não diferenciável no ponto zero. Outra possibilidade de correção, com propriedades matemáticas e estatísticas mais adequadas, é considerar o quadrado das diferenças. Isso nos leva à definição de *variância*.

**Definição 4.3.**

A **variância**<sup>a</sup> de um conjunto de dados  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é definida por

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \tag{4.4}$$

<sup>a</sup>É possível definir a variância usando o divisor  $n - 1$  no lugar de  $n$ ; essa é a diferença entre os conceitos de variância populacional e variância amostral, que será mais relevante num segundo curso de inferência estatística.

Note que esta definição de variância nos diz que a variância é a *média dos desvios quadráticos*.

Suponhamos que os valores  $x_i$  representem os pesos, em quilogramas, de um conjunto de pessoas. Então, o valor médio  $\bar{x}$  representa o peso médio dessas pessoas e sua unidade também é quilogramas, o mesmo acontecendo com as diferenças  $(x_i - \bar{x})$ . Ao elevarmos essas diferenças ao quadrado, passamos a ter a variância medida em quilogramas ao quadrado, uma unidade que não tem interpretação física. Uma forma de se obter uma medida de dispersão com a mesma unidade dos dados consiste em tomar a raiz quadrada da variância.

**Definição 4.4.**

O **desvio padrão** de um conjunto de dados  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é definido por

$$\sigma = \sqrt{\text{Variância}} = \sqrt{\sigma^2} \tag{4.5}$$

A título de ilustração, vamos considerar novamente os dados analisados na aula anterior, referentes à idade dos funcionários do Departamento de Recursos Humanos. Essas idades são:

24 25 26 26 29 29 31 35 36 37 38 42 45  
51 53

e sua média é  $\frac{527}{15} = 35,1\bar{3}$ . Assim, a variância, em anos<sup>2</sup> é

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{15} \left[ \begin{aligned} &(24 - 35,13)^2 + (25 - 35,13)^2 + 2 \times (26 - 35,13)^2 + \\ &2 \times (29 - 35,13)^2 + (31 - 35,13)^2 + (35 - 35,13)^2 + \\ &(36 - 35,13)^2 + (37 - 35,13)^2 + (38 - 35,13)^2 + \\ &(42 - 35,13)^2 + (42 - 35,13)^2 + (45 - 35,13)^2 + \\ &(51 - 35,13)^2 + (53 - 35,13)^2 \end{aligned} \right] = \\ &= \frac{1213,73}{15} = 80,92\end{aligned}$$

e o desvio padrão, em anos, é

$$\sigma = \sqrt{80,92} = 8,995$$

### Exercício 4.2.

Para o conjunto de dados do Exercício 4.1 –  $\{2, 4, 7, 8, 9, 6, 5, 8\}$  – calcule a variância e o desvio padrão.

## FÓRMULA ALTERNATIVA PARA O CÁLCULO DA VARIÂNCIA

Consideremos a Equação (4.4) que define a variância. Desenvolvendo o quadrado e usando as propriedades de somatório, obtemos:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2\bar{x}x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) + \frac{1}{n} n\bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2\end{aligned}$$

ou seja

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \quad (4.6)$$

Essa forma de escrever a variância facilita quando os cálculos têm que ser feitos à mão ou em calculadoras menos sofisticadas, pois o número de cálculos envolvidos é menor. Note que ela nos diz que a variância é a *média dos quadrados menos o quadrado da média*.

Vamos calcular a variância das idades dos funcionários de RH usando essa fórmula:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{15} [24^2 + 25^2 + 25^2 + 2 \times 26^2 + 2 \times 29^2 + 31^2 + 35^2 + 36^2] + \\ &+ \frac{1}{15} [37^2 + 38^2 + 39^2 + 42^2 + 45^2 + 51^2 + 53^2] - \left(\frac{527}{15}\right)^2 = \\ &= \frac{19729 \times 15 - 527^2}{15^2} = \frac{295935 - 277729}{225} = \frac{18206}{225} = 80,916\end{aligned}$$

Na comparação dos resultados obtidos pelas duas fórmulas, pode haver alguma diferença por causa dos arredondamentos, uma vez que a média é uma dízima.

Exercício 4.3.

No Exercício 4.2 você calculou a variância do conjunto de dados {2, 4, 7, 8, 9, 6, 5, 8} como a média dos desvios quadráticos. Calcule a variância novamente utilizando a fórmula alternativa dada na Equação (4.6).

Exemplo 4.1.

Na aula anterior, analisamos os dados referentes ao número de dependentes dos funcionários do Departamento de Recursos Humanos, apresentados novamente na tabela a seguir.

Nome	Nº de dependentes
João da Silva	3
Patrícia Silva	2
Pedro Fernandes	1
Regina Lima	2
Maria Freitas	0
Alfredo Souza	3
Paula Gonçalves	0
Margarete Cunha	0
Ana Freitas	1
Pedro Barbosa	2
Luiz Costa	3
Ricardo Alves	0
André Souza	4
Márcio Rezende	1
Ana Carolina Chaves	0



Como o menor valor é 0 e o maior valor é 4, temos que a amplitude dos dados é de 4 dependentes. A média calculada para esses dados foi  $\bar{x} = \frac{22}{15} = 1,467$ . Vamos calcular a soma dos desvios em torno da média, usando o fato de que temos observações repetidas.

$$\begin{aligned}\sum(x_i - \bar{x}) &= 5 \times \left(0 - \frac{22}{15}\right) + 3 \times \left(1 - \frac{22}{15}\right) + 3 \times \left(2 - \frac{22}{15}\right) + \\ &+ 3 \times \left(3 - \frac{22}{15}\right) + \left(4 - \frac{22}{15}\right) = \\ &= -\frac{110}{15} - \frac{21}{15} + \frac{24}{15} + \frac{69}{15} + \frac{38}{15} = -\frac{131}{15} + \frac{131}{15} = 0\end{aligned}$$

Caso trabalhássemos com o valor aproximado 1,467, o resultado aproximado seria  $-0,005$ .

O desvio médio absoluto é

$$\begin{aligned}DMA &= \frac{1}{n} \sum |x_i - \bar{x}| = \\ &= \frac{1}{15} \times \left[ 5 \times \left|0 - \frac{22}{15}\right| + 3 \times \left|1 - \frac{22}{15}\right| + 3 \times \left|2 - \frac{22}{15}\right| \right] + \\ &+ \left[ 3 \times \left|3 - \frac{22}{15}\right| + \left|4 - \frac{22}{15}\right| \right] = \\ &= \frac{1}{15} \times \left[ \frac{110}{15} + \frac{21}{15} + \frac{24}{15} + \frac{69}{15} + \frac{38}{15} \right] = \\ &= \frac{1}{15} \times \left[ \frac{131}{15} + \frac{131}{15} \right] = \frac{262}{225} = 1,1644\end{aligned}$$

A variância é

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \\ &= \frac{1}{15} \times \left[ 5 \times \left(0 - \frac{22}{15}\right)^2 + 3 \times \left(1 - \frac{22}{15}\right)^2 + 3 \times \left(2 - \frac{22}{15}\right)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{15} \times \left[ 3 \times \left(3 - \frac{22}{15}\right)^2 + \left(4 - \frac{22}{15}\right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{15} \times \left[ \frac{2420}{225} + \frac{147}{225} + \frac{192}{225} + \frac{1587}{225} + \frac{1444}{225} \right] = \\ &= \frac{5790}{15 \times 225} = 1,715556\end{aligned}$$

$$\text{e} \quad \sigma = \sqrt{\frac{5790}{15 \times 225}} = 1,3098$$

Vamos agora calcular a variância usando a fórmula alternativa:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{15} \times (5 \times 0^2 + 3 \times 1^2 + 3 \times 2^2 + 3 \times 3^2 + 4^2) - \left(\frac{22}{15}\right)^2 = \\ &= \frac{3 + 12 + 27 + 16}{15} - \frac{484}{225} = \frac{58}{15} - \frac{484}{225} = \frac{58 \times 15 - 484}{225} = \\ &= \frac{386}{225} = 1,715556\end{aligned}$$

Note que com essa fórmula os cálculos ficam bem mais simples, uma vez que temos que fazer menos conta!

## PROPRIEDADES DAS MEDIDAS DE DISPERSÃO

Como visto para as medidas de posição, vamos ver as principais propriedades das medidas de dispersão.

### Propriedade 1

Todas as medidas de dispersão são não negativas!

$$\begin{aligned}\Delta &\geq 0 \\ DMA &\geq 0 \\ \sigma^2 &\geq 0 \\ \sigma &\geq 0\end{aligned}\tag{4.7}$$

### Propriedade 2

Somando-se uma mesma constante a todas as observações, as medidas de dispersão não se alteram. Essa propriedade é bastante intuitiva se notarmos que, ao somar uma constante aos dados, estamos simplesmente fazendo uma translação dos mesmos, sem alterar a dispersão.

$$y_i = x_i + k \Rightarrow \begin{cases} \Delta_y = \Delta_x \\ DMA_y = DMA_x \\ \sigma_y^2 = \sigma_x^2 \\ \sigma_y = \sigma_x \end{cases}\tag{4.8}$$

**Propriedade 3**

Ao multiplicarmos todos os dados por uma constante não nula temos que:

$$y_i = kx_i \Rightarrow \begin{cases} \Delta_y = |k| \Delta_x \\ DMA_y = |k| DMA_x \\ \sigma_y^2 = k^2 \sigma_x^2 \\ \sigma_y = |k| \sigma_x \end{cases} \quad (4.9)$$

Note que é razoável que apareça o módulo da constante, já que as medidas de dispersão são não negativas.

**Exercício 4.4.**

Se o desvio padrão das temperaturas diárias de uma determinada localidade é de  $5,2^\circ F$ , qual é o desvio padrão em graus Celsius? Lembre-se de que a relação entre as duas escalas é

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

## MEDIDAS DE DISPERSÃO PARA DISTRIBUIÇÕES DE FREQUÊNCIAS AGRUPADAS

### VARIÂNCIA

Na aula passada, vimos que, em uma tabela de frequências agrupadas, perdemos a informação sobre os valores individuais e isso nos obriga a tomar o ponto médio de cada classe como representante da respectiva classe. Vamos ver, agora, como calcular a variância para dados agrupados. Mais uma vez, vamos considerar os dados referentes aos salários dos funcionários do Departamento de Recursos Humanos, cuja distribuição é dada na **Tabela 4.1**.

Tabela 4.1: Distribuição da renda dos funcionários do Departamento de RH

Classe de renda	Ponto médio	Frequência simples		Frequência acumulada	
		absoluta	relativa %	absoluta	relativa %
[3200,4021)	3610,5	4	26,67	4	26,67
[4021,4842)	4431,5	2	1,33	6	40,00
[4842,5663)	5252,5	2	1,33	8	53,33
[5663,6484)	6073,5	3	20,00	11	73,33
[6484,7305)	6894,5	4	26,67	15	100,00
Total		15	100,00		

Como já dito, a interpretação da tabela de frequências nos diz que há 4 observações iguais a 3610,5; 2 observações iguais a 4431,5; 2 iguais a 5252,5; 3 iguais a 6073,5 e 4 iguais a 6894,5. Logo, para calcular a variância desses dados basta usar uma das fórmulas 4.4 ou 4.6.

Usando (4.4), a variância é calculada como:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{15} \times \left[ \begin{aligned} &4 \times (3610,5 - 5307,2333)^2 + 2 \times (4431,5 - 5307,2333)^2 \\ &+ 2 \times (5252,5 - 5307,2333)^2 + 3 \times (6073,5 - 5307,2333)^2 \\ &+ 4 \times (6894,5 - 5307,2333)^2 \end{aligned} \right] \\ &= \frac{4}{15} \times (3610,5 - 5307,2333)^2 + \frac{2}{15} \times (4431,5 - 5307,2333)^2 + \\ &\quad + \frac{2}{15} \times (5252,5 - 5307,2333)^2 + \frac{3}{15} \times (6073,5 - 5307,2333)^2 + \\ &\quad + \frac{4}{15} \times (6894,5 - 5307,2333)^2 \\ &= 1659638,729\end{aligned}$$

Note, na penúltima linha da equação anterior, que os desvios quadráticos de cada classe estão multiplicados pela frequência relativa da classe. Dessa forma, chegamos à seguinte expressão para a variância de dados agrupados:

$$\sigma^2 = \sum f_i(x_i - \bar{x})^2 \tag{4.10}$$

onde  $x_i$  é o ponto médio da classe e  $f_i$  é a frequência relativa.

Usando a Equação (4.6), a variância é calculada como:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{15} \times \left[ 4 \times 3610,5^2 + 2 \times 4431,5^2 + 2 \times 5252,5^2 \right. \\ &\quad \left. + 3 \times 6073,5^2 + 4 \times 6894,5^2 \right] - 5307,2333^2 \\ &= \left[ \frac{4}{15} \times 3610,5^2 + \frac{2}{15} \times 4431,5^2 + \frac{2}{15} \times 5252,5^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{15} \times 6073,5^2 + \frac{4}{15} \times 6894,5^2 \right] - 5307,2333^2 \\ &= 1659638,729\end{aligned}$$

Note, na penúltima linha da equação anterior, que os quadrados dos pontos médios de cada classe estão multiplicados pela frequência relativa da classe. Dessa forma, chegamos à seguinte expressão alternativa para a variância de dados agrupados:

$$\sigma^2 = \sum f_i x_i^2 - \bar{x}^2 \quad (4.11)$$

e mais uma vez, obtemos que a variância é a *média dos quadrados menos o quadrado da média*; a diferença é que aqui a média é uma média ponderada pelas frequências das classes.

## DESVIO MÉDIO ABSOLUTO

Seguindo raciocínio análogo, obtemos que o desvio médio absoluto para dados agrupados é

$$DMA = \sum f_i |x_i - \bar{x}|$$

que é uma média ponderada dos desvios absolutos em torno da média.

### Exercício 4.5.

Calcule a variância e o desvio médio absoluto para a distribuição dada na seguinte tabela, que foi analisada no Exercício 3.6 da aula anterior:

Classes	frequência
4 – 6	10
6 – 8	12
8 – 10	18
10 – 12	6
12 – 14	4
<b>Total</b>	40

## Resumo

Nesta aula, você estudou as principais medidas de dispersão, que medem a variabilidade dos dados. Seja  $x_1, x_2, \dots, x_n$  o nosso conjunto de dados.

- Amplitude - é a distância entre o maior e o menor valor:

$$\Delta_{total} = V_{Máx} - V_{Min} = x_{(n)} - x_{(1)}$$

- Desvio em torno da média:

$$d_i = x_i - \bar{x}$$

para qualquer conjunto de dados,  $\sum_{i=1}^n d_i = 0$

- Desvio médio absoluto:

$$DMA = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$$

- Variância: desvio quadrático médio

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$$

- Desvio padrão: raiz quadrada da variância

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

## EXERCÍCIOS

### Exercício 4.6.

*Continuação do Exercício 3.3* Em uma pesquisa sobre atividades de lazer realizada com uma amostra de 20 alunos de um campus universitário, perguntou-se o número de horas que os alunos gastaram “navegando” na Internet na semana anterior. Os resultados obtidos foram os seguintes:

15	24	18	8	10	12	15	14	12	10
18	12	6	20	18	16	10	12	15	9

Calcule a amplitude, o desvio médio absoluto e o desvio padrão desses dados, especificando as respectivas unidades.

### Exercício 4.7.

*Continuação do Exercício 3.4* No final do ano 2005, o dono de um pequeno escritório de administração deu a seus 8 funcionários uma gratificação de 250 reais, paga junto com o salário de dezembro. Se em novembro o desvio padrão dos salários desses funcionários era de 180 reais, qual o desvio padrão dos salários em dezembro? Que propriedades você utilizou para chegar a esse resultado?

### Exercício 4.8.

*Continuação do Exercício 3.5* No mês de dissídio de determinada categoria trabalhista, os funcionários de uma empresa tiveram reajuste salarial de 8,9%. Se no mês anterior ao dissídio o desvio padrão dos salários desses funcionários era de 220 reais, qual o valor do desvio padrão dos salários depois do reajuste? Que propriedades você utilizou para chegar a esse resultado?

### Exercício 4.9.

*Continuação do Exercício 3.7* Na tabela a seguir temos o número de empresas por faixa de pessoal ocupado (PO) do setor de fabricação de bebidas em determinado momento. Calcule o desvio médio absoluto e o desvio padrão dessa distribuição,

especificando as respectivas unidades.

Classe de PO	Número de empresas
[10, 30)	489
[30, 100)	269
[100, 500)	117
[500, 1000)	15
[1000, 2000)	9
[2000, 4000)	7

## SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

4.1 A média dos dados é  $\bar{x} = \frac{49}{8} = 6,125$ .

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x}) \\ = & (2 - 6,125) + (4 - 6,125) + (5 - 6,125) + (6 - 6,125) + (7 - 6,125) + 2 \times (8 - 6,125) + (9 - 6,125) \\ = & -4,125 - 2,125 - 1,125 - 0,125 + 0,875 + 2 \times 1,875 + 2,875 \\ = & -7,5 + 7,5 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DMA &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 |x_i - \bar{x}| \\ &= \frac{1}{8} \left[ |2 - 6,125| + |4 - 6,125| + |5 - 6,125| + |6 - 6,125| + |7 - 6,125| + \right. \\ &\quad \left. 2 \times |8 - 6,125| + |9 - 6,125| \right] \\ &= \frac{1}{8} (4,125 + 2,125 + 1,125 + 0,125 + 0,875 + 2 \times 1,875 + 2,875) \\ &= \frac{1}{8} (7,5 + 7,5) = 1,875 \end{aligned}$$

4.2

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{8} \left[ (2 - 6,125)^2 + (4 - 6,125)^2 + (5 - 6,125)^2 + (6 - 6,125)^2 + (7 - 6,125)^2 + \right. \\ &\quad \left. 2 \times (8 - 6,125)^2 + (9 - 6,125)^2 \right] \\ &= \frac{1}{8} (4,125^2 + 2,125^2 + 1,125^2 + 0,125^2 + 0,875^2 + 2 \times 1,875^2 + 2,875^2) \\ &= \frac{38,875}{8} = 4,859375 \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4,859375} = 2,204399$$



4.3

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{2^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 8^2 + 9^2}{8} - 6,125^2 = \\ &= \frac{339}{8} - 37,515625 = 4,859375\end{aligned}$$

4.4 Note que podemos escrever

$$C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$$

Como visto, somar uma constante aos dados não altera o desvio padrão; logo, o termo  $-\frac{160}{9}$  não tem influência sobre o resultado. Mas quando multiplicamos por uma constante, o desvio padrão fica multiplicado pelo módulo da constante. Logo,

$$\sigma_C = \frac{5}{9}\sigma_F \Rightarrow \sigma_C = \frac{5}{9} \times 5,2^\circ F = 2,8889^\circ F$$

4.5 Na aula anterior você calculou a média desta distribuição, a partir da seguinte tabela:

Classes	Ponto	Freq. Simples		Freq. Acumulada	
	Médio	Absoluta	Relativa	Absoluta	Relativa
4 ⊢ 6	5	10	0,20	10	0,20
6 ⊢ 8	7	12	0,24	22	0,44
8 ⊢ 10	9	18	0,36	40	0,80
10 ⊢ 12	11	6	0,12	46	0,92
12 ⊢ 14	13	4	0,08	50	1,00
<b>Total</b>		50	1,00		

O resultado foi  $\bar{x} = 8,28$ . O desvio médio absoluto é

$$\begin{aligned}DMA &= 0,20 \times |5 - 8,28| + 0,24 \times |7 - 8,28| + 0,36 \times |9 - 8,28| \\ &\quad + 0,12 \times |11 - 8,28| + 0,08 \times |13 - 8,28| \\ &= 1,9264\end{aligned}$$

Usando a fórmula alternativa, temos que

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= 0,20 \times 5^2 + 0,24 \times 7^2 + 0,36 \times 9^2 + 0,12 \times 11^2 \\ &\quad + 0,08 \times 13^2 - 8,28^2 \\ &= 73,96 - 68,5584 = 5,4016\end{aligned}$$

4.6 O diagrama de ramos e folhas é

0		6	8	9															
1		0	0	0	2	2	2	2	4	5	5	5	6	8	8	8			
2		0	4																

e a média foi calculada como  $\bar{x} = 13,7$ .

A amplitude é  $\Delta = 24 - 6 = 18$  horas semanais. O desvio médio absoluto, também em horas semanais, é

$$\begin{aligned} DMA &= \frac{1}{20} \times \left[ \begin{aligned} &|6 - 13,7| + |8 - 13,7| + |9 - 13,7| + 3 \times |10 - 13,7| + \\ &4 \times |12 - 13,7| + |14 - 13,7| + 3 \times |15 - 13,7| + |16 - 13,7| + \\ &3 \times |18 - 13,7| + |20 - 13,7| + |24 - 13,7| \end{aligned} \right] \\ &= 3,6 \end{aligned}$$

A variância, pela fórmula simplificada, é

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{20} \times [6^2 + 8^2 + 9^2 + 3 \times 10^2 + 4 \times 12^2 + 14^2 + 3 \times 15^2 + 16^2] + \\ &+ \frac{1}{20} \times [3 \times 18^2 + 20^2 + 24^2] - 13,7^2 = \\ &= \frac{4132}{20} - 187,69 = 206,6 - 187,69 = 18,91 \end{aligned}$$

4.7 Os novos salários são  $y_i = x_i + 250$ . Como visto na Propriedade 2, somar uma constante não altera as medidas de dispersão; logo, os novos salários têm o mesmo desvio padrão dos salários de novembro, ou seja, 180 reais.

4.8 Como visto, os novos salários são  $y_i = 1,089x_i$ . Logo, pela Propriedade 3,

$$\sigma_y = 1,089\sigma_x = 1,089 \times 220 = 239,58$$

4.9 A tabela de frequências completa é

Classe de PO	Ponto médio	Freq. simples		Freq. acumulada	
		absoluta	relativa (%)	absoluta	relativa (%)
[10,30)	20	489	53,9735	489	53,9735
[30,100)	65	269	29,6909	758	83,6645
[100,500)	300	117	12,9139	875	96,5784
[500,1000)	750	15	1,6556	890	98,2340
[1000,2000)	1500	9	0,9934	899	99,2274
[2000,4000)	3000	7	0,7726	906	100,0000
<b>TOTAL</b>		906	100,0000		

No Exercício 3.7 você deve ter calculado a média como  $\bar{x} = 119,3322$  empregados. O desvio médio absoluto é calculado como

$$\begin{aligned}DMA &= 0,539735 \times |20 - 119,3322| + 0,296909 \times |65 - 119,3322| \\&+ 0,129139 \times |300 - 119,3322| + 0,016556 \times |750 - 119,3322| \\&+ 0,009934 \times |1500 - 119,3322| + 0,007726 \times |3000 - 119,3322| \\&= 139,489691 \text{ empregados}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= 0,539735 \times 20^2 + 0,296909 \times 65^2 + 0,129139 \times 300^2 \\&+ 0,016556 \times 750^2 + 0,009934 \times 1500^2 \\&+ 0,007726 \times 3000^2 - (119,3322)^2 \\&= 114293,1843 - 14240,18102 = 100053,0033 \\ \sigma &= \sqrt{100053,0033} = 316,31 \text{ empregados}\end{aligned}$$



# Aula 5



## OUTRAS MEDIDAS ESTATÍSTICAS

---

### Objetivos

Nesta aula, você estudará outras características de uma distribuição de dados e verá métodos alternativos de análise que tratam de forma diferenciada os valores discrepantes. Serão apresentados os seguintes conceitos:

- 1 Coeficiente de variação;
- 2 Escores padronizados;
- 3 Teorema de Chebyshev;
- 4 Medidas de assimetria;
- 5 O boxplot (Gráfico de caixas).

## COEFICIENTE DE VARIAÇÃO

Considere a seguinte situação: uma fábrica de ervilhas comercializa seu produto em embalagens de 300 gramas e em embalagens de um quilo ou 1000 gramas. Para efeitos de controle do processo de enchimento das embalagens, sorteia-se uma amostra de 10 embalagens de cada uma das máquinas, obtendo-se os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} 300g &\longrightarrow \begin{cases} \bar{x} = 295g \\ \sigma = 5g \end{cases} \\ 1000g &\longrightarrow \begin{cases} \bar{x} = 995g \\ \sigma = 5g \end{cases} \end{aligned}$$

Vamos interpretar esses números. Na primeira máquina, as embalagens deveriam estar fornecendo peso de 300g mas, devido a erros de ajuste da máquina de enchimento, o peso médio das 10 embalagens é de apenas 295g. O desvio padrão de 5g significa que, em média, os pesos das embalagens estão 5 gramas abaixo ou acima do peso médio das 10 latas. Uma interpretação análoga vale para a segunda máquina.

Em qual das duas situações a variabilidade parece ser maior? Ou seja, em qual das duas máquinas parece haver um problema mais sério? Note que, em ambos os casos, há uma dispersão de 5g em torno da média, mas 5g em 1000g é menos preocupante que 5g em 300g.

Como um exemplo mais extremo, um desvio padrão de 10 unidades em um conjunto cuja observação típica é 100 é muito diferente de um desvio padrão de 10 unidades em um conjunto cuja observação típica é 10000.

Surge, assim, a necessidade de uma medida de *dispersão relativa*, que permita comparar, por exemplo, esses dois conjuntos. Uma dessas medidas é o *coeficiente de variação*.

### Definição 5.1.

Dado um conjunto de observações  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , o **coeficiente de variação** (CV) é definido como a razão entre o desvio padrão dos dados e sua média, ou seja,

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}. \quad (5.1)$$

Note que, como o desvio padrão e a média são ambos medidos na mesma unidade dos dados originais, o coeficiente de variação é *adimensional*. Este fato permite comparações entre conjuntos de dados diferentes, medidos em unidades diferentes. Em geral, o *CV* é apresentado em forma percentual, isto é, multiplicado por 100.

No exemplo das latas de ervilha, os coeficientes de variação para as embalagens oriundas das duas máquinas são

$$\begin{aligned} 300g &\longrightarrow CV = \frac{5}{300} \times 100 = 1,67\% \\ 1000g &\longrightarrow CV = \frac{5}{1000} \times 100 = 0,5\% \end{aligned}$$

o que confirma a nossa observação anterior: a variabilidade na máquina de 300g é relativamente maior.

### Exercício 5.1.

Faça uma análise comparativa do desempenho dos alunos e alunas de uma turma de Estatística, segundo as notas dadas a seguir. Para isso, calcule a média, o desvio padrão e o coeficiente de variação, comentando os resultados.

<b>Homens</b>	4,5	6,1	3,2	6,9	7,1	8,2	3,3	2,5	5,6	7,2	3,4
<b>Mulheres</b>	6,3	6,8	5,9	6,0	4,9	6,1	6,3	7,5	7,7	6,5	

## ESCORES PADRONIZADOS

Considere os dois conjuntos de dados abaixo, que representam as notas em Estatística e Cálculo dos alunos de uma determinada turma.

<b>Aluno</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>Estatística</b>	6	4	5	7	8	3	5	5	7
<b>Cálculo</b>	6	8	9	10	7	7	8	9	5

As notas médias nas duas disciplinas são:

$$\begin{aligned} \bar{x}_E &= \frac{6+4+5+7+8+3+5+5+7}{9} = \frac{50}{9} = 5,5556 \\ \bar{x}_C &= \frac{6+8+9+10+7+7+8+9+5}{9} = \frac{69}{9} = 7,6667 \end{aligned}$$

As variâncias são:

$$\begin{aligned}\sigma_E^2 &= \frac{6^2 + 4^2 + 5^2 + 7^2 + 8^2 + 3^2 + 5^2 + 5^2 + 7^2}{9} - \left(\frac{50}{9}\right)^2 = \\ &= \frac{298}{9} - \frac{2500}{81} = \frac{298 \times 9 - 2500}{81} = \frac{182}{81} = 2,246914\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_C^2 &= \frac{6^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 7^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 5^2}{9} - \left(\frac{69}{9}\right)^2 = \\ &= \frac{549}{9} - \frac{4761}{81} = \frac{549 \times 9 - 4761}{81} = \frac{180}{81} = 2,222222\end{aligned}$$

Os desvios padrões são:

$$\begin{aligned}\sigma_E &= \sqrt{\frac{182}{81}} = 1,498971 \\ \sigma_C &= \sqrt{\frac{180}{81}} = 1,490712\end{aligned}$$

Analisando os dois conjuntos de notas, pode-se ver que o aluno 1 tirou 6 em Estatística e em Cálculo. No entanto, a nota média em Estatística foi 5,56, enquanto que em Cálculo a nota média foi 7,67. Assim, o 6 em Estatística “vale mais” que o 6 em Cálculo, no sentido de que ele está acima e mais próximo da média.

Uma forma de medir tal fato é considerar a posição relativa de cada aluno no grupo. Para isso, o primeiro passo consiste em comparar a nota do aluno com a média do grupo, considerando o seu desvio em torno da média. Se  $x_i$  é a nota do aluno, passamos a trabalhar com  $x_i - \bar{x}$ .

Dessa forma, vemos que a nota 6 em Estatística gera um desvio de 0,44, enquanto a nota 6 em Cálculo gera um desvio de -1,67, o que significa que o aluno 1 tirou nota acima da média em Estatística e nota abaixo da média em Cálculo.

Um outro problema que surge na comparação do desempenho nas duas disciplinas é o fato de o desvio padrão ser diferente nas duas matérias. A variabilidade em Estatística foi um pouco maior que em Cálculo. Assim, o segundo passo consiste em padronizar a escala. Essa padronização da escala se faz dividindo os desvios em torno da média pelo desvio padrão do conjunto, o



que nos dá o escore padronizado:

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x}. \quad (5.2)$$

O desvio padrão das notas de Estatística é  $\sigma_E = 1,49897$  e das notas de Cálculo é  $\sigma_C = 1,49071$ . Na tabela a seguir, temos os escores padronizados; podemos ver aí que o escore relativo à nota 6 em Estatística é maior que o escore da nota 6 em Cálculo, indicando que a primeira “vale mais” que a segunda.

Aluno	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Estatística	0,297	-1,038	-0,371	0,964	1,631	-1,705	-0,371	-0,371	0,964
Cálculo	-1,118	0,224	0,894	1,565	-0,447	-0,447	0,224	0,894	-1,789

Da mesma forma, o 5 em Estatística do aluno 7 vale mais que o 5 em Cálculo do aluno 9: ambos estão abaixo da média, mas o 7 em Estatística está “mais próximo” da média.

Ao padronizarmos os dados, a nossa escala passa a ser definida em termos de desvio padrão. Ou seja, passamos a dizer que tal observação está abaixo (ou acima) da média por determinado número de desvios padrões. Com isso, tira-se o efeito de as médias e as variabilidades serem diferentes. Podemos escrever o escore padronizado como

$$z_i = \frac{1}{\sigma_x} x_i - \frac{\bar{x}}{\sigma_x}$$

e daí vemos que esse escore é obtido a partir dos dados originais por uma transformação linear: somamos uma constante  $\left(-\frac{\bar{x}}{\sigma_x}\right)$  e multiplicamos por outra constante  $\left(\frac{1}{\sigma_x}\right)$ . Das propriedades da média e do desvio padrão vistas nas aulas anteriores, resulta que a média e o desvio padrão dos escores padronizados podem ser obtidos a partir da média e do desvio padrão dos dados originais:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{\sigma_x} \bar{x} - \frac{\bar{x}}{\sigma_x} = 0 \\ \sigma_z^2 &= \frac{1}{\sigma_x^2} \sigma_x^2 = 1 \end{aligned}$$

Logo, os escores padronizados têm sempre média zero e desvio padrão (ou variância) 1.

## TEOREMA DE CHEBYSHEV E VALORES DISCREPANTES

Os escores padronizados podem ser usados para se detectarem valores discrepantes ou muito afastados do conjunto de dados, graças ao Teorema de Chebyshev.

### **Teorema 5.1** (Teorema de Chebyshev).

---

Para qualquer distribuição de dados, pelo menos  $(1 - 1/z^2)$  dos dados estão dentro de  $z$  desvios padrões da média, onde  $z$  é qualquer valor maior que 1. Dito de outra forma, pelo menos  $(1 - 1/z^2)$  dos dados estão no intervalo  $[\bar{x} - z\sigma; \bar{x} + z\sigma]$ .

Vamos analisar esse teorema em termos dos escores padronizados. Suponha que  $x'$  seja um valor do conjunto de dados dentro do intervalo  $[\bar{x} - z\sigma; \bar{x} + z\sigma]$ . Isso significa que

$$\bar{x} - z\sigma < x' < \bar{x} + z\sigma.$$

Subtraindo  $\bar{x}$  e dividindo por  $\sigma$  todos os termos dessa desigualdade obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x} - z\sigma - \bar{x}}{\sigma} &< \frac{x' - \bar{x}}{\sigma} < \frac{\bar{x} + z\sigma - \bar{x}}{\sigma} \Rightarrow \\ -z &< \frac{x' - \bar{x}}{\sigma} < +z \end{aligned}$$

O termo do meio nada mais é que o escore padronizado da observação  $x'$ . Assim, o teorema de Chebyshev pode ser estabelecido em termos dos escores padronizados como: para pelo menos  $(1 - 1/z^2)$  dos dados, os respectivos escores padronizados estão no intervalo  $(-z, +z)$ , onde  $z$  é qualquer valor maior que 1.

O fato interessante desse teorema é que ele vale para qualquer distribuição de dados. Vamos ver alguns exemplos numéricos.

- $z = 2$

Nesse caso,  $1 - 1/z^2 = 3/4$ , ou seja, para pelo menos 75% dos dados, os escores padronizados estão no intervalo  $(-2, +2)$ .

- $z = 3$

Nesse caso,  $1 - 1/z^2 = 8/9 = 0,889$ , ou seja, para aproximadamente 89% dos dados, os escores padronizados estão no intervalo  $(-3, +3)$ .

- $z = 4$

Nesse caso,  $1 - 1/z^2 = 15/16 = 0,9375$ , ou seja, para 93,75% dos dados, os escores padronizados estão no intervalo  $(-4, +4)$ .

Como regra de detecção de valores discrepantes, pode-se usar o Teorema de Chebyshev para se estabelecer, por exemplo, dados cujos escores padronizados estejam fora do intervalo  $(-3, +3)$  são valores discrepantes e, portanto, devem ser verificados cuidadosamente para se identificar a causa de tal discrepância. Algumas vezes, tais valores podem ser resultados de erros, mas muitas vezes eles são valores legítimos e a presença deles requer alguns cuidados na análise estatística.

### Exercício 5.2.

Considere os dados da **Tabela 5.1** sobre a densidade populacional das unidades da federação brasileira. Calcule os escores padronizados e determine se alguma UF pode ser considerada valor discrepante com relação a essa variável.

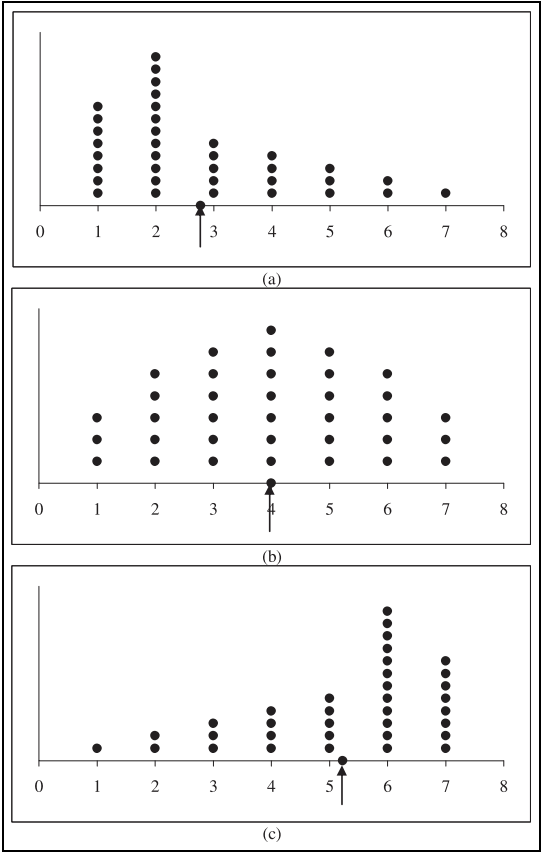
**Tabela 5.1:** Densidade populacional dos estados brasileiros:

UF	Densidade populacional (hab/km <sup>2</sup> )	UF	Densidade populacional (hab/km <sup>2</sup> )
RO	6	SE	81
AC	4	BA	24
AM	2	MG	31
RR	2	ES	68
PA	5	RJ	328
AP	4	SP	149
TO	5	PR	48
MA	17	SC	57
PI	12	RS	37
CE	51	MS	6
RN	53	MT	3
PB	61	GO	15
PE	81	DF	353
AL	102		

Fonte: IBGE - Censo Demográfico 2000

## MEDIDAS DE ASSIMETRIA

Considere os diagramas de pontos dados nas partes (a) a (c) da **Figura 5.1**, onde a seta indica a média dos dados. Analisando-os, podemos ver que a principal e mais marcante diferença entre eles diz respeito à simetria da distribuição. A segunda distribuição é simétrica, enquanto as outras duas são assimétricas.



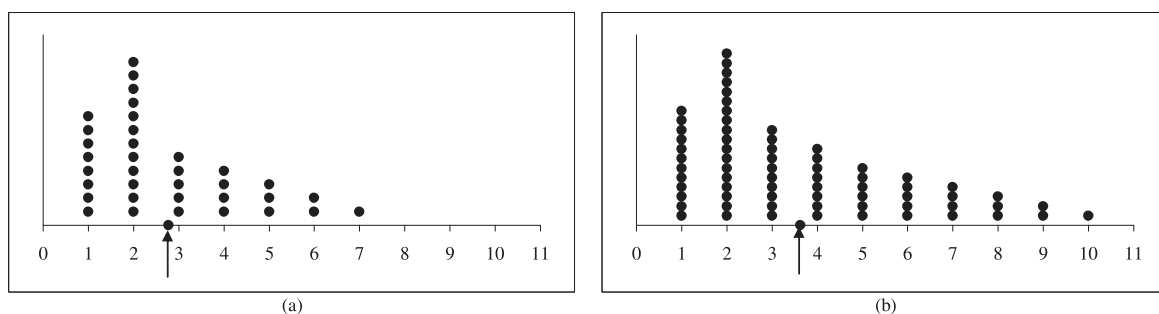
**Figura 5.1:** Diagramas de pontos de distribuições com diferentes tipos de assimetria.

No diagrama (a), a assimetria é tal que há maior concentração na cauda inferior, enquanto no diagrama (c), a concentração é maior na cauda superior. Visto de outra maneira, no diagrama (a), os dados se estendem para o lado positivo da escala, enquanto no diagrama (c), os dados se estendem para o lado negativo da escala. Dizemos que a distribuição ilustrada no diagrama (a) apresenta uma *assimetria à direita*, enquanto a do diagrama (c) apresenta uma *assimetria à esquerda*. No diagrama (b), temos uma *simetria perfeita* ou *assimetria nula*.

Esses três tipos de assimetria podem ser caracterizados pela posição da moda com relação à média dos dados. No primeiro tipo, a moda tende a estar à esquerda da média, enquanto no terceiro tipo, a moda tende a estar à direita da média. (Lembre-se de que a média é o centro de gravidade ou ponto de equilíbrio da distribuição). Para distribuições simétricas, a moda coincide com a média. Definem-se, assim, os três tipos de assimetria:

- se a média é maior que a moda ( $\bar{x} > x^*$ ), dizemos que a distribuição é *assimétrica à direita* ou tem *assimetria positiva* [diagrama (a) da **Figura 5.1**];
- se a média é igual à moda ( $\bar{x} = x^*$ ), dizemos que a distribuição é simétrica ou tem assimetria nula [diagrama (b) da **Figura 5.1**];
- se a média é menor que a moda ( $\bar{x} < x^*$ ), dizemos que a distribuição é *assimétrica à esquerda* ou tem *assimetria negativa* [diagrama (c) da **Figura 5.1**].

Essas definições, no entanto, não permitem “medir” diferentes graus de assimetria. Por exemplo, considere os diagramas de pontos (a) e (b) dados na **Figura 5.2**, ambos assimétricos à direita.



**Figura 5.2:** Duas distribuições assimétricas à direita.

Uma forma de medirmos essas diferentes assimetrias é através da distância  $\bar{x} - x^*$  entre a média e a moda, mas como as distribuições podem ter graus de dispersão diferentes, é importante que consideremos a diferença acima na mesma escala. Assim,

define-se um dos coeficientes de assimetria (definição devida a Karl Pearson) como:

$$e = \frac{\bar{x} - x^*}{\sigma}.$$

(5.3)

Se o coeficiente é negativo, tem-se assimetria negativa; se é positivo, tem-se assimetria positiva e se é nulo, tem-se uma distribuição simétrica. Note que aqui, assim como nos escores padronizados, tiramos o efeito de escalas diferentes ao dividirmos pelo desvio padrão, o que resulta na adimensionalidade do coeficiente.

Para os dados do diagrama (a) da **Figura 5.2**, temos que  $x^* = 2$ ,  $\bar{x} = 2,7714$  e  $\sigma = 1,6228$ ; logo,

$$e = \frac{2,7714 - 2}{1,6228} = 0,475351$$

Para os dados do diagrama (b) da **Figura 5.2**,  $x^* = 2$ ,  $\bar{x} = 3,6232$  e  $\sigma = 2,3350$ ; logo,

$$e = \frac{3,6232 - 2}{2,3350} = 0,6952$$

o que indica uma assimetria mais acentuada.

É interessante observar que existem outros coeficientes de assimetria; o que apresentamos é o menos utilizado, mas é o mais intuitivo.

Exercício 5.3.

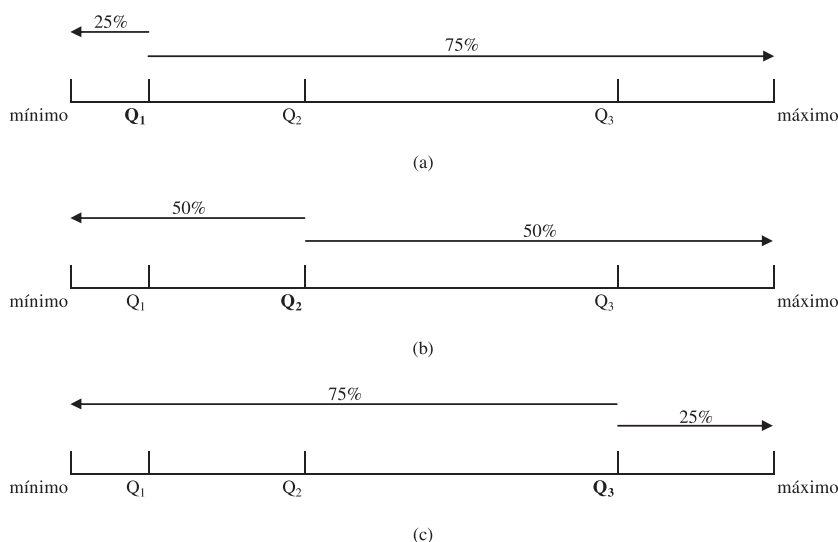
Considere novamente as notas de 50 alunos, cujo ramos e folhas é dado a seguir. Calcule o coeficiente de assimetria de Pearson para essa distribuição.

2		9																	
3		7	8																
4		7	9																
5		2	6	8															
6		0	2	3	3	3	5	5	6	8	8	9	9						
7		0	0	1	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	9				
8		1	1	2	2	3	3	4	5	7	7	8	9						
9		0	1	4	7														

## INTERVALO INTERQUARTIL

A mediana divide o conjunto de dados ao meio, deixando 50% das observações abaixo dela e 50% acima dela. De modo análogo, podemos definir qualquer *separatriz* como sendo um valor que deixa  $p\%$  dos dados abaixo e o restante acima.

Vamos nos concentrar aqui em um caso particular das separatrizes, que são os *quartis*. O primeiro quartil, que indicaremos por  $Q_1$ , deixa 25% das observações abaixo e 75% acima. O segundo quartil é a mediana e o terceiro quartil,  $Q_3$ , deixa 75% das observações abaixo e 25% acima. Na figura a seguir, **Figura 5.3**, temos uma ilustração desses conceitos.



**Figura 5.3:** Ilustração da definição de quartis.

Analisando essa figura, podemos ver que entre  $Q_1$  e  $Q_3$  há sempre 50% dos dados, qualquer que seja a distribuição. Assim, quanto maior for a distância entre  $Q_1$  e  $Q_3$ , mais dispersos serão os dados. Temos, assim, uma nova medida de dispersão, o *intervalo interquartil*.

### Definição 5.2.

O **intervalo interquartil**, que denotaremos por  $IQ$ , é definido como a distância entre o primeiro e o terceiro quartis, isto é:

$$IQ = Q_3 - Q_1 \quad (5.4)$$

*O intervalo interquartil tem a mesma unidade dos dados.*  
A vantagem do intervalo interquartil sobre o desvio padrão é que, assim como a mediana, o *IQ* não é muito influenciado por valores discrepantes.

## CÁLCULO DOS QUARTIS

O cálculo dos quartis pode ser feito da seguinte forma: depois de calculada a mediana, considere as duas partes dos dados, a parte abaixo da mediana e a parte acima da mediana, em ambos os casos excluindo a mediana. Essas duas partes têm o mesmo número de observações, pela definição de mediana.

O primeiro quartil, então, será calculado como a mediana da parte abaixo da mediana original e o terceiro quartil será calculado como a mediana da parte acima da mediana original.

### Exemplo 5.1.

Vamos calcular os quartis e o intervalo interquartil para o número de dependentes dos funcionários do Departamento de Recursos Humanos, cujos valores já ordenados são:

0 0 0 0 0 1 1 **1** 2 2 2 3 3 3 4

Como há 15 observações, a mediana é a oitava observação (em negrito), isto é:

$$Q_2 = x_{(\frac{n+1}{2})} = x_{(8)} = 1$$

Excluída essa oitava observação, a parte inferior dos dados é

0 0 0 **0** 0 1 1

cuja mediana é

$$Q_1 = x_{(\frac{7+1}{2})} = x_{(4)} = 0$$

A parte superior dos dados, excluída a mediana, é

2 2 2 **3** 3 3 4

e, portanto,

$$Q_3 = x_{(4+8)} = x_{(12)} = 3$$

o intervalo interquartil é calculado como

$$IQ = Q_3 - Q_1 = 3 - 0 = 3.$$



## MEDIDA DE ASSIMETRIA COM BASE NOS QUARTIS

É interessante observar que entre  $Q_1$  e  $Q_2$  e entre  $Q_2$  e  $Q_3$  há sempre 25% dos dados. Então, a diferença entre as distâncias  $Q_2 - Q_1$  e  $Q_3 - Q_2$  nos dá informação sobre a assimetria da distribuição.

Se  $Q_2 - Q_1 < Q_3 - Q_2$ , isso significa que “andamos mais rápido” para cobrir os 25% inferiores do que os 25% superiores, ou seja, a distribuição “se arrasta” para a direita.

Analogamente, se  $Q_2 - Q_1 > Q_3 - Q_2$ , isso significa que “andamos mais devagar” para cobrir os 25% inferiores do que os 25% superiores, ou seja, a distribuição “se arrasta” para a esquerda. De forma mais precisa, temos o seguinte resultado:

$$Q_2 - Q_1 < Q_3 - Q_2 \implies \text{assimetria positiva}$$

$$Q_2 - Q_1 > Q_3 - Q_2 \implies \text{assimetria negativa}$$

$$Q_2 - Q_1 = Q_3 - Q_2 \implies \text{simetria ou assimetria nula}$$

Para tirar o efeito de escala, temos que dividir por uma medida de dispersão – lembre-se de que dividimos pelo desvio padrão quando trabalhamos com as diferenças  $\bar{x} - x^*$ . Aqui, para não termos efeito dos valores discrepantes, usaremos o intervalo interquartil para gerar a seguinte medida de assimetria, que é chamada medida de assimetria de Bowley:

$$B = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1}$$

que pode ser reescrita como

$$B = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_2) + (Q_2 - Q_1)}$$

Analisando essa expressão, podemos ver que quanto mais assimétrica à direita for uma distribuição, mais próximos serão  $Q_1$  e  $Q_2$  e, portanto,  $B$  se aproxima de  $+1$ . Analogamente, quanto mais assimétrica à esquerda, mais próximos serão  $Q_2$  e  $Q_3$  e, portanto,  $B$  se aproxima de  $-1$ .

Exercício 5.4.

Considere novamente os dados da **Tabela 2.2** sobre os funcionários do Departamento de Recursos Humanos, cujos salários (em R\$) são os seguintes: 6300, 5700, 4500, 3800, 3200, 7300, 7100, 5600, 6400, 7000, 3700, 6500, 4000, 5100, 4500. Analise a assimetria da distribuição com base no coeficiente de Bowley.

O BOXPLOT

A partir dos quartis constrói-se um gráfico chamado *boxplot* ou *gráfico de caixas*, que ilustra os principais aspectos da distribuição e é também muito útil na comparação de distribuições.

O boxplot é formado basicamente por um retângulo vertical (ou horizontal). O comprimento do lado vertical (ou horizontal) é dado pelo intervalo interquartil (**Figura 5.4.a**, onde estamos trabalhando com um retângulo vertical). O tamanho do outro lado é indiferente, sugerindo-se apenas uma escala razoável. Na altura da mediana, traça-se uma linha, dividindo o retângulo em duas partes [**Figura 5.4.b**].

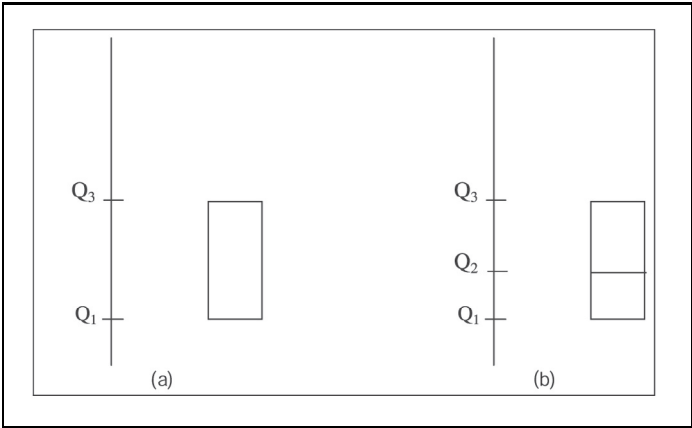


Figura 5.4: Construção do boxplot - Etapa 1.

Note que aí já temos representados 50% da distribuição e também já temos ideia da assimetria da mesma – nessa figura temos uma leve assimetria à direita, já que  $Q_2 - Q_1 < Q_3 - Q_2$ . Para representar os 25% restantes em cada cauda da distribuição

temos que cuidar primeiro da presença de possíveis *outliers* ou valores discrepantes, que, como já dito, são valores que se distanciam dos demais.



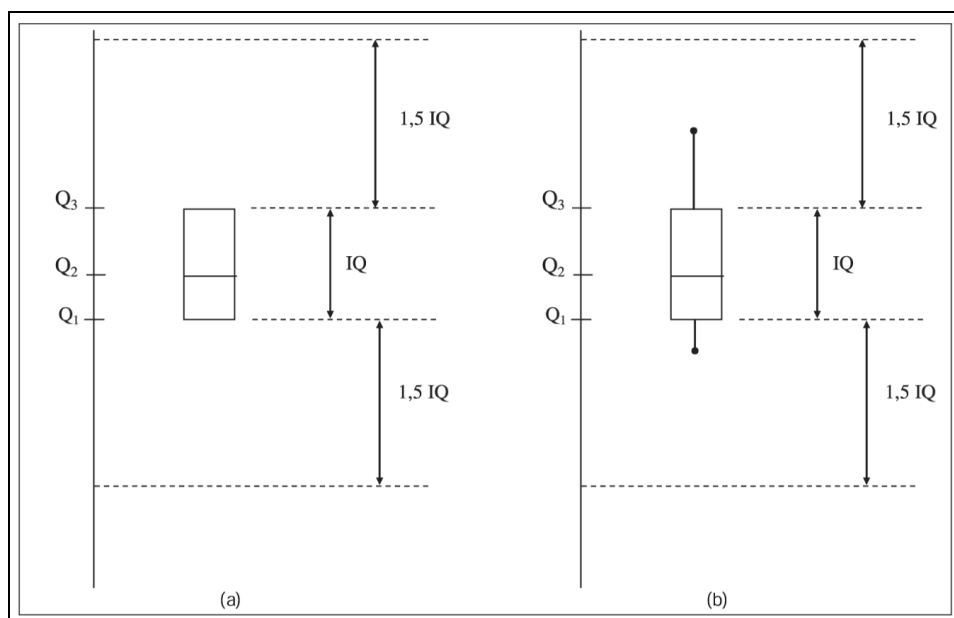
### Regra de Valores Discrepantes

Um dado  $x$  será considerado valor discrepante ou *outlier* se

$$x < Q_1 - 1,5 IQ \quad \text{ou} \quad x > Q_3 + 1,5 IQ$$

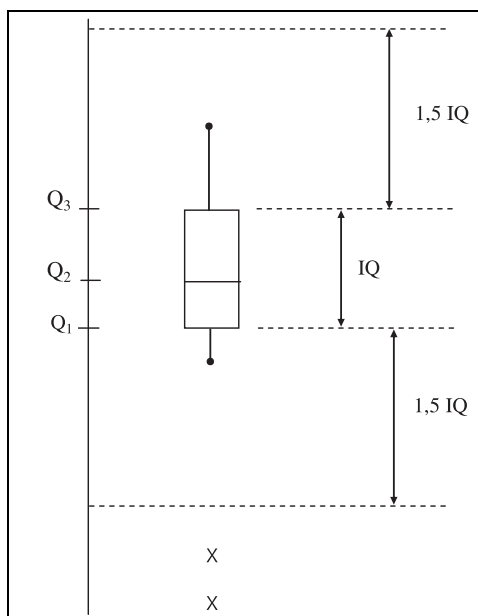
Veja a **Figura 5.5.a**. Qualquer valor para fora das linhas pontilhadas é considerado um valor discrepante. Para representar o domínio de variação dos dados na cauda inferior que não são *outliers*, traça-se, a partir do lado do retângulo definido por  $Q_1$ , uma linha para baixo até o menor valor que não seja *outlier*.

Da mesma forma, na cauda superior, traça-se, a partir do lado do retângulo definido por  $Q_3$ , uma linha para cima até o maior valor que não seja *outlier*. [Figura 5.5.b]. Esses pontos são chamados *juntas*. Dito de outra forma, as juntas são os valores mínimo e máximo do conjunto de dados formado pelos valores não discrepantes.



**Figura 5.5:** Construção do boxplot - Etapa 2.

Quanto aos *outliers*, eles são representados individualmente por um X (ou algum outro tipo de caracter), explicitando-se, de preferência, os seus valores, mas com uma possível quebra de escala no eixo (**Figura 5.6**).



**Figura 5.6:** Construção do boxplot - Etapa 3.

Note que a construção do boxplot é toda baseada nos quartis, que são medidas resistentes contra valores discrepantes.

### Exemplo 5.2.

Consideremos novamente as notas de 50 alunos, representadas no gráfico ramos e folhas da **Figura 5.7**.

[illegible]

**Figura 5.7** Notas de 50 alunos - Cálculo dos quartis.

A mediana divide o conjunto de dados em duas partes com 25 observações de cada lado (parte sombreada de cinza e a outra).

Como o número de observações é par, a mediana é a média dos valores centrais, que estão circundados por uma borda, um na parte inferior e outro na parte superior.

$$Q_2 = \frac{x_{(\frac{50}{2})} + x_{(\frac{50}{2}+1)}}{2} = \frac{x_{(25)} + x_{(26)}}{2} = \frac{73 + 74}{2} = 73,5$$

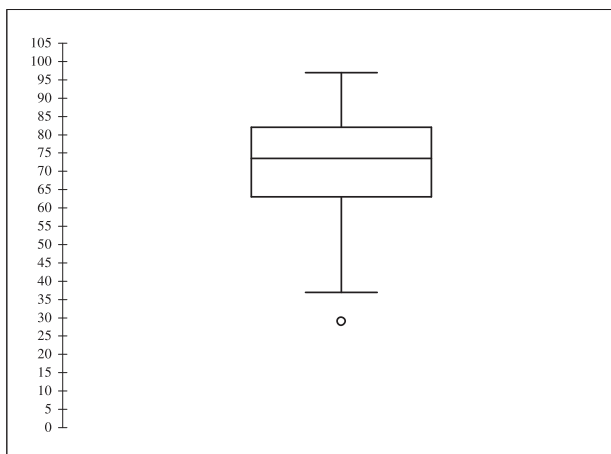
O primeiro quartil é a mediana da parte inferior, que é o valor circundado por uma borda na parte sombreada de cinza e o terceiro quartil é a mediana da parte superior, que é o valor circundado por uma borda na parte superior, não sombreada.

$$\begin{aligned} Q_1 &= 63 \\ Q_3 &= 82 \\ IQ &= 82 - 63 = 19 \end{aligned}$$

Para estudarmos os outliers, temos que calcular

$$\begin{aligned} Q_1 - 1,5 IQ &= 63 - 1,5 \times 19 = 34,5 \\ Q_3 + 1,5 IQ &= 82 + 1,5 \times 19 = 110,5 \end{aligned}$$

Como a maior nota é 97, não há outliers na cauda superior, mas na cauda inferior, temos a nota 29 que é menor que 34,5 e, portanto, um outlier inferior. Excluindo esse outlier, o menor valor que não é discrepante é 37 e o maior valor é 97; logo, as juntas são 37 e 97. Na **Figura 5.8**, temos o boxplot resultante.



**Figura 5.8:** Boxplot para as 50 notas.

Note que no gráfico final não marcamos os valores 34,5 e 110,5; eles são usados apenas para delimitar os outliers. São as juntas que são exibidas no gráfico.

Exemplo 5.3.

Considere os dados apresentados na **Tabela 5.2**, onde temos as populações urbana, rural e total, em 1000 habitantes, dos estados brasileiros.

Tabela 5.2: População urbana e rural das UF's brasileiras (em 1000 hab.)

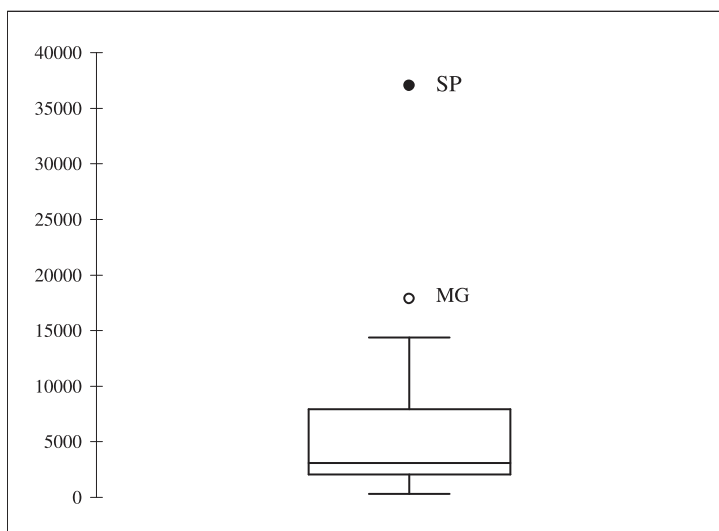
UF	População			UF	População		
	Urbana	Rural	Total		Urbana	Rural	Total
RO	885	496	1381	MG	14672	3220	17892
AC	371	188	559	ES	2464	635	3099
AM	2108	706	2814	RJ	13822	570	14392
RR	248	78	326	SP	34593	2440	37033
PA	4121	2072	6193	PR	7787	1778	9565
AP	425	53	478	SC	4218	1139	5357
TO	860	298	1158	RS	8318	1870	10188
MA	3365	2288	5653	MS	1748	331	2079
PI	1789	1055	2844	MT	1988	517	2505
CE	5316	2116	7432	GO	4397	607	5004
RN	2037	741	2778	DF	1962	90	2052
PB	2448	997	3445	PE	6059	1861	7920
AL	1920	903	2823	SE	1274	512	1786
BA	8773	4298	13071				

Fonte: IBGE - Censo Demográfico 2000

Vamos, inicialmente, construir o boxplot para a população total e, em seguida, um boxplot comparativo das populações urbana e rural. Na tabela a seguir, temos as estatísticas necessárias para a construção desses gráficos.

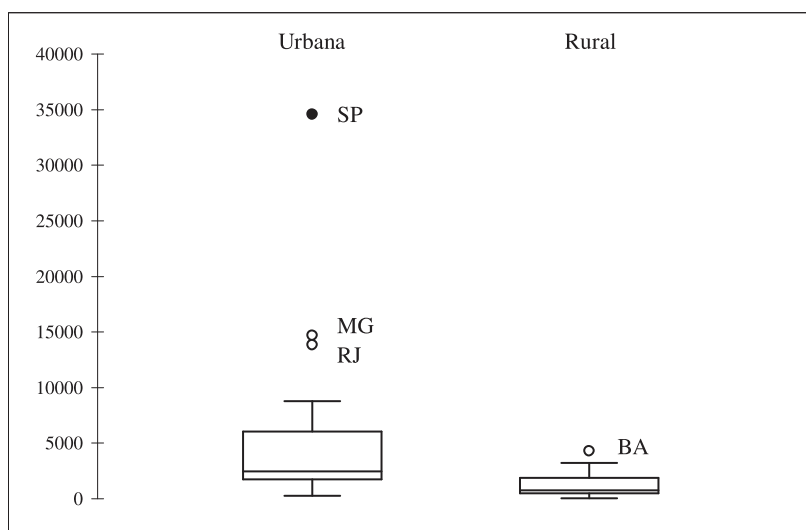
Estatística	Total	Urbana	Rural
$Q_1$	2052(DF)	1748 (MS)	496 (RO)
$Q_2$	3099 (ES)	2448 (PB)	741 (RN)
$Q_3$	7920 (PE)	6059 (PE)	1870 (RS)
$IQ$	5868	4311	1374
$Q_1 - 1,5 IQ$	-6750	-4718,5	-1565
$Q_3 + 1,5 IQ$	16722	12525,5	3931
Junta inferior	326 (RR)	248(RR)	53 (AP)
Junta superior	1439 (RJ)	8733(BA)	3220 (MG)
Outliers	17892 (MG) 37033 (SP)	13822 (RJ) 14672 (MG) 34593 (SP)	4298 (BA)

Na **Figura 5.9**, temos o boxplot para a população total; vemos aí que as populações de São Paulo e Minas Gerais são outliers e a distribuição apresenta uma forte assimetria à direita, ou seja, muitos estados têm população pequena enquanto alguns poucos têm população bem grande.



**Figura 5.9:** População total (em 1000 hab) das Unidades da Federação brasileiras.

Na **Figura 5.10**, temos um boxplot comparativo das populações urbana e rural. Podemos ver que a população urbana apresenta maior variabilidade e também uma forte assimetria positiva. Há três UFs que são discrepantes: São Paulo, Minas Gerais e Rio de Janeiro. Em termos da população rural, a Bahia é o único outlier e a distribuição também é assimétrica à direita.



**Figura 5.10:** População urbana e rural das UFs brasileiras (em 1000 hab).

Exercício 5.5.

Construa o boxplot para os salários dos funcionários do Departamento de Recursos Humanos, cujos valores em reais são 6300, 5700, 4500, 3800, 3200, 7300, 7100, 5600, 6400, 7000, 3700, 6500, 4000, 5100, 4500.

Exercício 5.6.

Os dados a seguir representam o número de apólices de seguro que um corretor conseguiu vender em cada um de seus 20 primeiros dias em um emprego novo: 2, 4, 6, 3, 2, 1, 4, 3, 5, 2, 1, 1, 4, 0, 2, 2, 5, 2, 2, 1. Analise a assimetria da distribuição, utilizando os coeficientes de Pearson e de Bowley.

Exercício 5.7.

O professor Celso tem duas opções de caminho para se dirigir da sua casa até seu local de trabalho. Tentando definir qual o melhor caminho, ele anota o tempo de viagem em diferentes dias, obtendo os seguintes tempos (em minutos):

<b>Caminho 1</b>	12	11	10	10	8	12	15	7	20	12
<b>Caminho 2</b>	12	15	13	13	14	13	12	14	13	15

Faça uma análise comparativa desses dados para ajudar o professor Celso a escolher um caminho.

Exercício 5.8.

Em sua política de fidelização de clientes, determinado supermercado tem uma promoção de dar descontos especiais diferenciados no mês do aniversário do cliente. O desconto básico é de 5%, mas clientes especiais – aqueles com pontuação alta – podem receber prêmios adicionais, que variam a cada mês e de filial para filial. A seguir, você tem os pontos dos clientes aniversariantes de determinado mês em uma das filiais do supermercado.

77	69	72	73	71	75	75	74	71	72	74	73	75	71	74
73	78	77	74	75	69	76	76	80	74	85	74	73	72	74

- a. Construa o gráfico ramo e folhas e comente suas principais características.



- b. Calcule a mediana e o intervalo interquartil IQ.
- c. Construa o boxplot e comente suas principais características.
- d. Essa filial dá uma garrafa de champagne para seus clientes especiais, segundo a seguinte regra: a cada mês, os clientes com pontuação acima do terceiro quartil por 1,5 vezes o intervalo interquartil serão premiados. Algum cliente ganhará a garrafa de champagne nesse mês?

## SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

### Exercício 5.1.

Eis o resumo das estatísticas por sexo:

Sexo	Número Obs.	Média	Desvio padrão	Coef. variação
<b>Masculino</b>	11	5,273	1,884	0,357
<b>Feminino</b>	10	6,400	0,764	0,119

Podemos ver, então, que as mulheres, além de terem obtido uma média maior, apresentam variabilidade menor: o coeficiente de variação das mulheres é de 0,119 e o dos homens é de 0,357.

### Exercício 5.2.

A densidade populacional média é 59,444 hab/km<sup>2</sup> e o desvio padrão das densidades é 87,253 hab/km<sup>2</sup>. Na **Tabela 5.3**, apresentam-se os escores padronizados para cada UF, calculados pela fórmula  $z_i = (x_i - \bar{x})/\sigma_x$ . Por exemplo, para RO, o valor  $-0,6125$  foi obtido como  $(6 - 59,444)/87,253$ .

Podemos ver que as únicas UFs com densidades relativamente altas, isto é, escores fora do intervalo  $(-3, +3)$ , são RJ e DF; não há densidade relativamente baixa.

Tabela 5.3: Escores padronizados das densidades populacionais

UF	Escores padronizados	UF	Escores padronizados
RO	-0,6125	SE	0,2470
AC	-0,6354	BA	-0,4062
AM	-0,6584	MG	-0,3260
RR	-0,6584	ES	0,0981
PA	-0,6240	RJ	3,0779
AP	-0,6354	SP	1,0264
TO	-0,6240	PR	-0,1312
MA	-0,4865	SC	-0,0280
PI	-0,5438	RS	-0,2572
CE	-0,0968	MS	-0,6125
RN	-0,0739	MT	-0,6469
PB	0,0178	GO	-0,5094
PE	0,2470	DF	3,3644
AL	0,4877		

Exercício 5.3.

Para esses dados temos  $\bar{x} = 71,42; x^* = 63; \sigma^2 = 215,2836$ . Logo,

$$e = \frac{71,42 - 63}{\sqrt{215,2836}} = 0,5739$$

Exercício 5.4.

Os quartis para esse conjunto de dados são  $Q_2 = x_{(8)} = 5600; Q_1 = x_{(4)} = 4000; Q_3 = x_{(12)} = 6500$ . O intervalo interquartil é  $Q_3 - Q_1 = 6500 - 4000 = 2500$ . Logo,

$$\begin{aligned} B &= \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{(6500 - 5600) - (5600 - 4000)}{6500 - 4000} \\ &= -0,4666. \end{aligned}$$

Como B está mais próximo de  $-1$  do que de  $1$ , temos uma assimetria à esquerda.

Exercício 5.5.

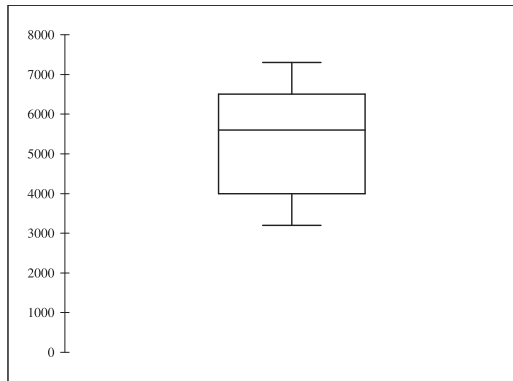
Os quartis para esse conjunto de dados são  $Q_2 = x_{(8)} = 5600; Q_1 = x_{(4)} = 4000; Q_3 = x_{(12)} = 6500$ . O intervalo interquartil é  $Q_3 - Q_1 = 6500 - 4000 = 2500$ .

A regra para outliers é

$$x < Q_1 - 1,5 IQ = 4000 - 1,5 \times 2500 = 250$$

$$x > Q_3 + 1,5 IQ = 6500 + 1,5 \times 2500 = 10250$$

Como o menor salário é 3200 e o maior salário é 7300, não há salários discrepantes. O boxplot é dado na **Figura 5.11**.



**Figura 5.11:** Solução do Exercício 5.5.

### Exercício 5.6.

A média dos dados é  $\bar{x} = 2,6$ , com desvio padrão  $\sigma = 1,5620$ .

A moda é  $x^* = 2$ .

Os quartis são

$$Q_1 = \frac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = 1,5;$$

$$Q_2 = \frac{x_{(10)} + x_{(11)}}{2} = 2;$$

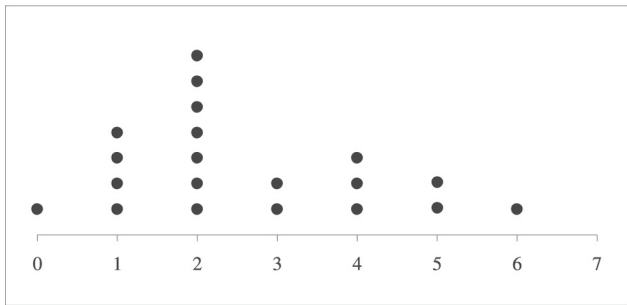
$$Q_3 = \frac{x_{(15)} + x_{(16)}}{2} = 4.$$

Com esses valores, obtemos os coeficientes de assimetria:

$$e = \frac{\bar{x} - x^*}{\sigma} = \frac{2,6 - 2}{1,5620} = 0,3841$$

$$B = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{(4 - 2) - (2 - 1,5)}{4 - 1,5} = \frac{1,5}{3,5} = 0,4286$$

Existe, assim, uma assimetria positiva nos dados; veja o diagrama de pontos na **Figura 5.12**.



**Figura 5.12:** Solução do Exercício 5.6.

**Exercício 5.7.**

Na tabela a seguir, são apresentados os valores relevantes para a solução do exercício. Podemos concluir que o tempo pelo caminho 2 é menos variável, apesar de ser um pouco maior. Dessa forma, parece que o Prof. Celso deva optar por esse caminho, planejando-se para sair com a devida antecedência.

Caminho	Média	Desvio padrão	CV
1	11,7	3,6833	0,3148
2	13,1	0,9944	0,0759

**Exercício 5.8.**

- a. Há uma grande concentração de folhas no ramo 7. Nesses casos, é usual “quebrar” o ramo em dois: no ramo superior ficam as folhas de 0 a 4 e no ramo inferior, as folhas de 5 a 9. Assim, fica mais saliente a maior concentração de clientes com pontos entre 70 e 74.

6		9	9														
7		1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
7		5	5	5	5	6	6	7	7	8							
8		0															
8		5															

- b. Temos 30 clientes. Logo,

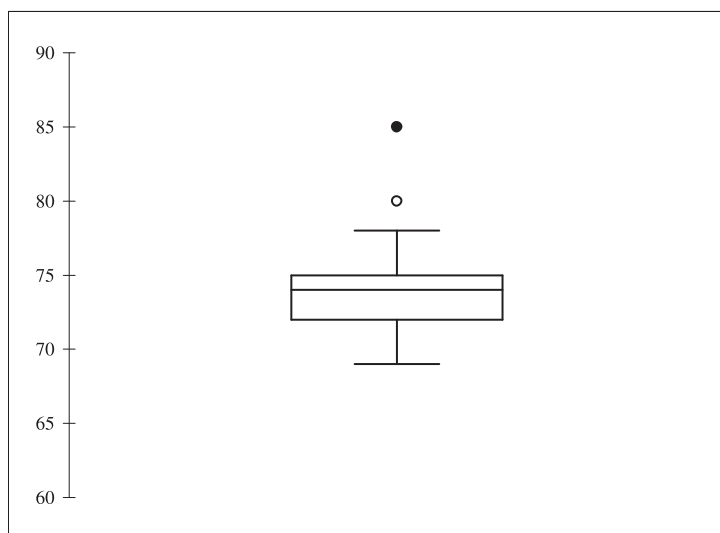
$$Q_2 = \frac{x_{(15)} + x_{(16)}}{2} = 74,$$

$$Q_1 = x_{(8)} = 72,$$

$$Q_3 = x_{(23)} = 75,$$

$$IQ = Q_3 - Q_1 = 75 - 72 = 3.$$

- c. Veja a **Figura 5.13**. É visível a presença de dois valores discrepantes. Excluindo esses dois valores, a distribuição apresenta uma leve assimetria à esquerda – note que  $Q_2$  está mais próximo de  $Q_3$  do que de  $Q_1$ .



**Figura 5.13:** Solução do Exercício 5.8.

- d. A regra para premiação especial é a regra de valores discrepantes; assim, dois clientes ganharão a garrafa de champagne.



# Aula 6



## PROBABILIDADE – CONCEITOS BÁSICOS

---

### Objetivos

Nesta aula, você aprenderá os conceitos de:

- 1 experimento aleatório;
- 2 espaço amostral;
- 3 evento aleatório e também as operações que podem ser feitas com os eventos aleatórios.

## INTRODUÇÃO

No nosso cotidiano, lidamos sempre com situações nas quais está presente a incerteza do resultado, embora, muitas vezes, os resultados possíveis sejam conhecidos. Por exemplo: o sexo de um embrião pode ser masculino ou feminino, mas só sabermos o resultado quando o experimento se concretizar, ou seja, quando o bebê nascer. Se estamos interessados na face voltada para cima quando jogamos um dado, os resultados possíveis são 1, 2, 3, 4, 5, 6, mas só sabermos o resultado quando o experimento se completar, ou seja, quando o dado atingir a superfície sobre a qual foi lançado. É conveniente, então, dispormos de uma medida que exprima a incerteza presente em cada um destes acontecimentos. Tal medida é a *probabilidade*.

No estudo das distribuições de frequências, vimos como elas são importantes para entendermos a variabilidade de um fenômeno aleatório. Por exemplo, se sortearmos uma amostra de empresas e analisamos a distribuição do número de empregados, sabemos que uma outra amostra forneceria resultados diferentes. No entanto, se sortearmos um grande número de amostras, esperamos que surja um determinado padrão que reflita a verdadeira distribuição da população de todas as empresas. Através de um modelo teórico, construído com base em suposições adequadas, podemos reproduzir a distribuição de frequências quando o fenômeno é observado diretamente. Esses modelos são chamados *modelos probabilísticos*, e eles serão estudados na segunda parte deste Módulo 2. A *probabilidade* é a ferramenta básica na construção de tais modelos, assim, começaremos este módulo com o seu estudo.

## EXPERIMENTO ALEATÓRIO, ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTO

Consideremos o lançamento de um dado. Queremos estudar a proporção de ocorrências das faces desse dado. O primeiro fato a observar é que existem apenas 6 resultados possíveis, as faces 1, 2, 3, 4, 5, 6. O segundo fato é uma suposição sobre o dado: em geral, é razoável supor que ele seja equilibrado. Assim, cada face deve ocorrer o mesmo número de vezes e, portanto, essa proporção deve ser  $\frac{1}{6}$ . Nessas condições, nosso modelo probabilístico para o lançamento de um dado pode ser ex-



presso da seguinte forma:

Face	1	2	3	4	5	6	Total
Frequência teórica	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Suponhamos que uma mulher esteja grávida de trigêmeos. Sabemos que cada bebê pode ser do sexo masculino (M) ou feminino (F). Então, as possibilidades para o sexo das três crianças são: HHH, HHM, HMH, MHH, MMH, MHM, HMM, MMM. Uma suposição razoável é que todos esses resultados sejam igualmente prováveis, o que equivale a dizer que cada bebê tem igual chance de ser do sexo masculino ou feminino. Então, cada resultado tem uma chance de  $\frac{1}{8}$  de acontecer, e o modelo probabilístico para esse experimento seria

Sexo	HHH	HHM	HMH	MHH	MMH	MHM	HMM	MMM	Total
Frequência teórica	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Por outro lado, se só estamos interessados no número de meninas, esse mesmo experimento leva ao seguinte modelo probabilístico:

Meninas	0	1	2	3	Total
Frequência teórica	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Nesses exemplos, vemos que a especificação de um modelo probabilístico para um fenômeno casual depende da especificação dos *resultados possíveis* e das respectivas *probabilidades*. Vamos, então, estabelecer algumas definições antes de passarmos à definição propriamente dita de probabilidade.

## EXPERIMENTO ALEATÓRIO

Um *experimento aleatório* é um processo que acusa variabilidade em seus resultados, isto é, repetindo-se o experimento sob as mesmas condições, os resultados serão diferentes. Contrapondo aos experimentos aleatórios, temos os experimentos *determinísticos*, que são experimentos que, repetidos sob as mesmas condições, conduzem a resultados idênticos. Neste curso, estaremos interessados apenas nos experimentos aleatórios.

## ESPAÇO AMOSTRAL

O *espaço amostral* de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento. Vamos denotar tal conjunto pela letra grega ômega maiúscula,  $\Omega$ . Quando o espaço amostral é finito ou infinito enumerável, é chamado espaço amostral *discreto*. Caso contrário, isto é, quando  $\Omega$  é não enumerável, vamos chamá-lo de espaço amostral *contínuo*.

## EVENTOS ALEATÓRIOS

Os subconjuntos de  $\Omega$  são chamados *eventos aleatórios*; já os elementos de  $\Omega$  são chamados *eventos elementares*. A classe dos eventos aleatórios de um espaço amostral  $\Omega$ , que denotaremos por  $\mathcal{F}(\Omega)$ , é o conjunto de todos os eventos (isto é, de todos os subconjuntos) do espaço amostral. A título de ilustração, consideremos um espaço amostral com três elementos:  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ . A classe dos eventos aleatórios é

$$\mathcal{F}(\Omega) = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}\}$$

Os eventos, sendo conjuntos, serão representados por letras maiúsculas do nosso alfabeto, enquanto os elementos de um evento serão representados por letras minúsculas.

### Exemplo 6.1.

1. O lançamento de uma moeda é um experimento aleatório, uma vez que, em cada lançamento, mantidas as mesmas condições, não podemos prever qual das duas faces (cara ou coroa) cairá para cima. Por outro lado, se colocarmos uma panela com água para ferver e anotarmos a temperatura de ebulição da água, o resultado será sempre  $100^\circ\text{C}$ .
2. Consideremos o experimento aleatório “lançamento de um dado”. O espaço amostral é

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

sendo, portanto, um espaço discreto. Os eventos elementares são  $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ . Outros eventos são “face par” =  $\{2, 4, 6\}$ , “face ímpar” =  $\{1, 3, 5\}$ , “face ímpar menor que 5” =  $\{1, 3\}$ , etc.

3. Consideremos o lançamento simultâneo de duas moedas. Vamos representar por  $K$  a ocorrência de cara e por  $C$  a ocorrência de coroa. Um espaço amostral para esse experimento é  $\Omega = \{KK, KC, CK, CC\}$ , que também é um espaço discreto. Os eventos simples são  $\{KK\}$ ,  $\{KC\}$ ,  $\{CK\}$ ,  $\{CC\}$  e um outro evento é “cara no primeiro lançamento” =  $\{KC, KK\}$ . Para esse mesmo experimento, se estamos interessados apenas no número de caras, o espaço amostral pode ser definido como  $\Omega = \{0, 1, 2\}$ .
4. Seja o experimento que consiste em medir, em decibéis, diariamente, durante um mês, o nível de ruído na vizinhança da obra de construção do metrô em Ipanema. O espaço amostral associado a este experimento é formado pelos números reais positivos, sendo, portanto, um espaço amostral contínuo. Um evento: observar níveis superiores a 80 decibéis, representado pelo intervalo  $(80, \infty)$ , que corresponde a situações de muito barulho.
5. Uma urna contém 4 bolas, das quais 2 são brancas (numeradas de 1 a 2) e 2 são pretas (numeradas de 3 a 4). Duas bolas são retiradas dessa urna, sem reposição. Defina um espaço amostral apropriado para esse experimento e os seguintes eventos:

*A: a primeira bola é branca;*

*B: a segunda bola é branca;*

*C: ambas as bolas são brancas.*

### Solução:

Considerando a numeração das bolas, o espaço amostral pode ser definido como:

$$\Omega = \{(i, j) : i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4; i \neq j\}$$

Mais especificamente:

$$\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

Os eventos são:

$$A = \{(i, j) : i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4; i \neq j\}$$

ou mais especificamente

$$A = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4)\}$$

$$B = \{(i, j) : i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2; i \neq j\}$$

ou

$$B = \{(2,1), (3,1), (4,1), (1,2), (3,2), (4,2)\}$$

$$C = \{(i, j) : i = 1, 2; j = 1, 2; i \neq j\}$$

ou

$$C = \{(1,2), (2,1)\}$$

6. Três cartas são retiradas, sem reposição, de um baralho que tem três cartas de cada uma das cores azul, vermelha, preta e branca. Dê um espaço amostral para esse experimento e liste os eventos:

A: todas as cartas selecionadas são vermelhas.

B: uma carta vermelha, uma carta azul e uma carta preta são selecionadas.

C: três diferentes cores ocorrem.

D: todas as 4 cores ocorrem.

### Solução:

Vamos denotar por  $A, V, P$  e  $B$  as cores azul, vermelha, preta e branca, respectivamente. Então

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i = A, V, P, B; i = 1, 2, 3\}$$

$$A = \{(V, V, V)\}$$

$$B = \{(V, A, P), (V, P, A), (A, V, P), (A, P, V), (P, A, V), (P, V, A)\}$$

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i = A, V, P, B; i = 1, 2, 3; x_1 \neq x_2 \neq x_3\}$$

ou

$$C = \left\{ \begin{array}{l} (V, A, P), (V, P, A), (A, V, P), (A, P, V), (P, A, V), (P, V, A), \\ (V, P, B), (V, B, P), (P, V, B), (P, B, V), (B, V, P), (B, P, V), \\ (V, A, B), (V, B, A), (A, B, V), (A, V, B), (B, A, V), (B, V, A), \\ (P, A, B), (P, B, A), (A, P, B), (A, B, P), (B, A, P), (B, P, A) \end{array} \right\}$$

Como temos 4 cores diferentes e apenas 3 extrações, não é possível obter todas as cores; logo,

$$D = \emptyset$$

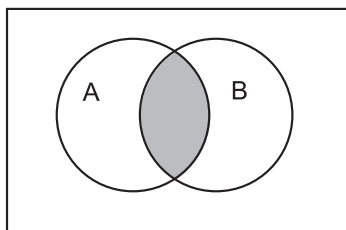
# OPERAÇÕES COM EVENTOS ALEATÓRIOS

## INTERSEÇÃO

O evento *interseção* de dois eventos  $A$  e  $B$  é o evento que equivale à ocorrência simultânea de  $A$  e  $B$  (ver **Figura 6.1**). Seguindo a notação da teoria de conjuntos, a interseção de dois eventos será representada por  $A \cap B$ .

Note que

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B \quad (6.1)$$



**Figura 6.1:** Interseção de dois eventos:  $A \cap B$ .

### Exemplo 6.2.

Consideremos o experimento “lançamento de dois dados” e os eventos  $A$  = “soma das faces é um número par” e  $B$  = “soma das faces é um número maior que 9”. Calcule  $A \cap B$ .

**Solução:**

O espaço amostral desse experimento, que tem 36 elementos, é

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 6)\}$$

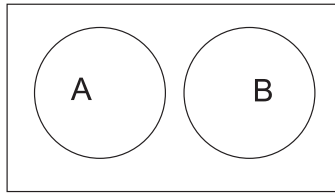
Para que um elemento pertença à interseção  $A \cap B$ , ele tem que pertencer simultaneamente ao evento  $A$  e ao evento  $B$ . O evento  $B$  é

$$B = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

Dos seus elementos, os únicos que pertencem ao evento  $A$ , isto é, que têm soma das faces par, são os eventos  $(4, 6)$ ,  $(5, 5)$ ,  $(6, 4)$  e  $(6, 6)$ . Logo,  $A \cap B = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4), (6, 6)\}$ . Note que não precisamos listar o evento  $A$ ! Ele tem 18 elementos!

## EXCLUSÃO

Dois eventos  $A$  e  $B$  são *mutuamente exclusivos* quando eles não podem ocorrer simultaneamente, isto é, quando a ocorrência de um impossibilita a ocorrência do outro. Isto significa dizer que os eventos  $A$  e  $B$  não têm elementos em comum. Então, dois eventos  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos quando sua interseção é o conjunto vazio, isto é,  $A \cap B = \emptyset$  (ver **Figura 6.2**).



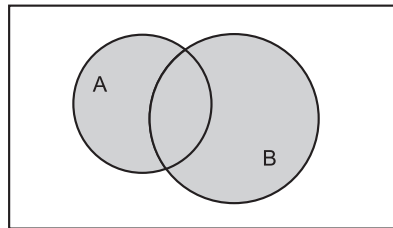
**Figura 6.2:** Eventos mutuamente exclusivos:  $A \cap B = \emptyset$ .

### Exemplo 6.3.

Consideremos novamente o experimento “lançamento de dois dados” e sejam os eventos  $A$  = “soma das faces é ímpar” e  $B$  = “duas faces iguais”. Então,  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos porque a soma de dois números iguais é sempre um número par!

## UNIÃO

A *união* de dois eventos  $A$  e  $B$  é o evento que corresponde à ocorrência de pelo menos um deles. Note que isso significa que pode ocorrer apenas  $A$ , ou apenas  $B$  ou  $A$  e  $B$  simultaneamente. Esse evento será representado por  $A \cup B$  (ver **Figura 6.3**).



**Figura 6.3:** União de dois eventos:  $A \cup B$ .

Note que

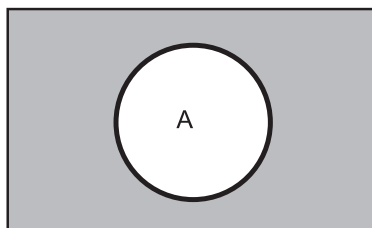
$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \quad (6.2)$$

**Exemplo 6.4.**

Consideremos o experimento do lançamento de duas moedas em que o espaço amostral é  $\Omega = \{KK, KC, CK, CC\}$ . Sejam os eventos  $A = \text{“ocorrência de exatamente 1 cara”}$  e  $B = \text{“duas faces iguais”}$ . Então,  $A = \{KC, CK\}$  e  $B = \{CC, KK\}$ ; logo,  $A \cup B = \Omega$  e  $A \cap B = \emptyset$ . Seja  $C$  o evento “pelo menos uma cara”; então,  $C = \{KC, CK, KK\}$  e  $B \cup C = \Omega$  e  $B \cap C \neq \emptyset$ .

**COMPLEMENTAR**

O *complementar* de um evento  $A$ , denotado por  $\bar{A}$  ou  $A^c$ , é a negação de  $A$ . Então, o complementar de  $A$  é formado pelos elementos que não pertencem a  $A$  (ver **Figura 6.4**).



**Figura 6.4:** Complementar de um evento  $A : \bar{A}$ .

Note que

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A \quad (6.3)$$

e também que

$$A \cup \bar{A} = \Omega \quad (6.4)$$

**Exemplo 6.5.**

Consideremos o lançamento de um dado e seja  $A = \text{“face par”}$ . Então,  $\bar{A}$  é o evento “face ímpar”. Note que  $A = \{2, 4, 6\}$  e  $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$  e  $\Omega = A \cup \bar{A}$ .

**DIFERENÇA**

A *diferença* entre dois eventos  $A$  e  $B$ , representada por  $A - B$ , ou equivalentemente, por  $A \cap \bar{B}$ , é o evento formado pelos pontos do espaço amostral que pertencem a  $A$ , mas não pertencem a  $B$  (ver **Figura 6.5**).

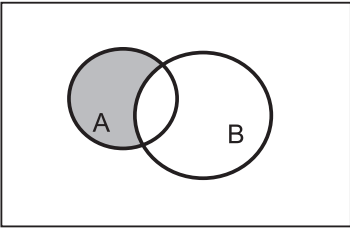


Figura 6.5: Diferença de dois conjuntos:  $A - B = A \cap \overline{B}$ .

Note que

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \notin B \tag{6.5}$$

e também

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \tag{6.6}$$

Além disso,  $A - B \neq B - A$ , conforme ilustrado na Figura 6.6.

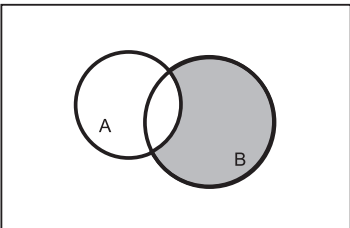


Figura 6.6: Diferença de dois conjuntos:  $B - A = B \cap \overline{A}$ .

**Exemplo 6.6.**

Consideremos novamente o lançamento de dois dados e os eventos  $A = \text{“soma das faces é par”}$  e  $B = \text{“soma das faces é maior que 9”}$ . Vamos considerar as duas diferenças,  $A - B$  e  $B - A$ . Temos que

$$A = \left\{ (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), \right. \\ \left. (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6) \right\}$$

e

$$B = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

Logo,

$$A - B = \left\{ (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), \right. \\ \left. (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (6, 2) \right\}$$

$$B - A = \{(5, 6), (6, 5)\}$$



## PARTIÇÃO DE UM ESPAÇO AMOSTRAL

Uma coleção de eventos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  forma uma *partição* do espaço amostral  $\Omega$  se

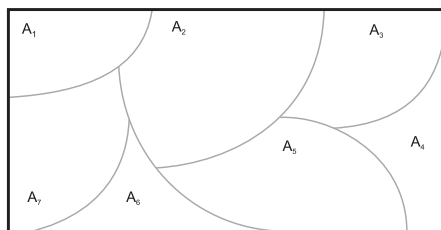
1. os eventos  $A_i$  são disjuntos dois a dois, isto é, se

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j;$$

2. a união dos eventos  $A_i$  é o espaço amostral  $\Omega$ , isto é,

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

Na **Figura 6.7** ilustra-se esse conceito.



**Figura 6.7:** Partição do espaço amostral  $\Omega$ .

### Exemplo 6.7.

No experimento “lançamento de um dado”, os eventos  $A$  = “face par” e  $B$  = “face ímpar” formam uma partição do espaço amostral. Temos também que, qualquer que seja  $\Omega$ , um evento  $A$  qualquer e seu complementar  $\bar{A}$  formam uma partição, isto é,  $A \cap \bar{A} = \emptyset$  e  $A \cup \bar{A} = \Omega$ .

## PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

Sejam  $A, B, C$  eventos de um espaço amostral  $\Omega$ . Então, valem as seguintes propriedades.

1. Identidade

$$\begin{aligned} A \cap \emptyset &= \emptyset \\ A \cup \emptyset &= A \\ A \cap \Omega &= A \\ A \cup \Omega &= \Omega \end{aligned} \quad (6.7)$$

(Note que  $\Omega$  é o equivalente do conjunto universal da teoria de conjuntos.)

2. Complementar

$$\begin{aligned} \overline{\Omega} &= \emptyset \\ \overline{\emptyset} &= \Omega \\ A \cap \overline{A} &= \emptyset \\ A \cup \overline{A} &= \Omega \end{aligned} \quad (6.8)$$

3. Idempotente

$$\begin{aligned} A \cap A &= A \\ A \cup A &= A \end{aligned} \quad (6.9)$$

4. Comutativa

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A \end{aligned} \quad (6.10)$$

5. Associativa

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \end{aligned} \quad (6.11)$$

6. Distributiva

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned} \quad (6.12)$$

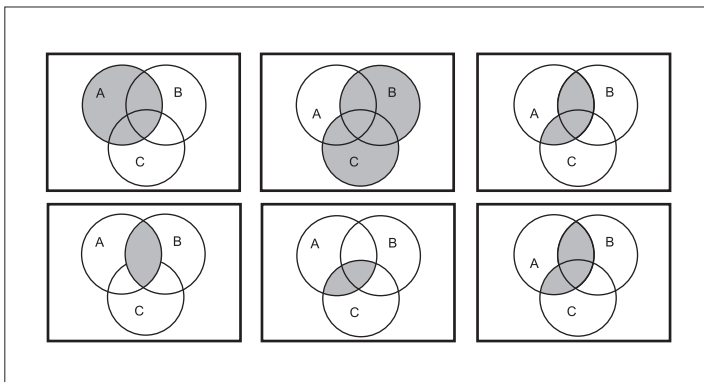
A ilustração da primeira propriedade está na **Figura 6.8**.

Na linha superior, ilustramos o lado esquerdo da igualdade  $A \cap (B \cup C)$ : no diagrama à esquerda, temos o evento  $A$  e no diagrama do centro temos o evento  $B \cup C$ . Para sombrear a interseção

desses dois eventos, basta sombrear as partes que estão sombreadas em ambos os diagramas, o que resulta no diagrama à direita, no qual temos o evento  $A \cap (B \cup C)$ .

Na linha inferior, ilustramos o lado direito da igualdade  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ : no diagrama à esquerda, temos o evento  $A \cap B$  e no diagrama do centro, o evento  $A \cap C$ . Para sombrear a união desses dois eventos, basta sombrear todas as partes que estão sombreadas em algum dos diagramas, o que resulta no diagrama à direita, no qual temos o evento  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

Analisando os diagramas à direita nas duas linhas da figura, vemos que  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

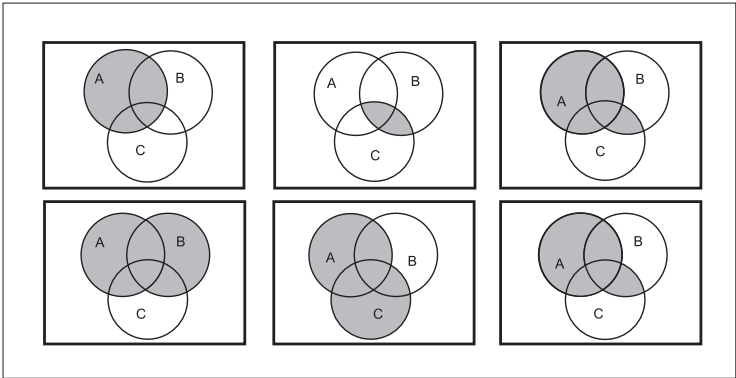


**Figura 6.8:** Ilustração da propriedade distributiva  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

A ilustração da segunda propriedade está na **Figura 6.9**.

Na linha superior, ilustramos o lado esquerdo da igualdade  $A \cup (B \cap C)$ : no diagrama à esquerda, temos o evento  $A$  e no diagrama do centro, temos o evento  $B \cap C$ . Para sombrear a união desses dois eventos, basta sombrear todas as partes que estão sombreadas em algum dos diagramas, o que resulta no diagrama à direita, no qual temos o evento  $A \cup (B \cap C)$ .

Na linha inferior, ilustramos o lado direito da igualdade  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ : no diagrama à esquerda, temos o evento  $A \cup B$  e no diagrama do centro, o evento  $A \cup C$ . Para sombrear a interseção desses dois eventos, basta sombrear todas as partes que estão sombreadas em ambos os diagramas, e isso resulta no diagrama à direita, no qual temos o evento  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ . Analisando os diagramas à direita, nas duas linhas da figura, vemos que  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .



**Figura 6.9:** Ilustração da propriedade distributiva  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

7. Absorção

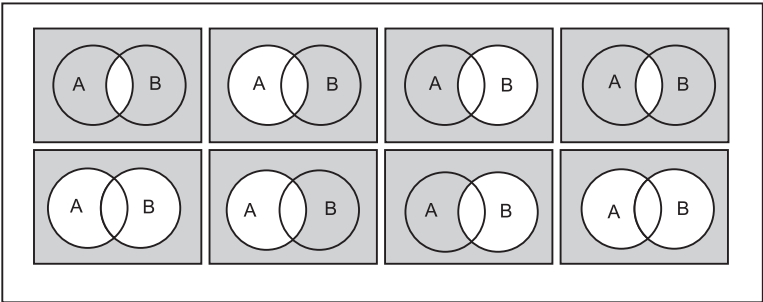
$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= A \\ A \cup (A \cap B) &= A \end{aligned} \tag{6.13}$$

8. Leis de De Morgan

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned} \tag{6.14}$$

Na primeira linha da **Figura 6.10**, ilustra-se a primeira propriedade  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ : no diagrama à esquerda, temos  $\overline{A \cap B}$ ; nos dois diagramas centrais, temos, respectivamente,  $\overline{A}$  e  $\overline{B}$ ; no diagrama à direita, temos  $\overline{A} \cup \overline{B}$ , que é igual ao diagrama à esquerda, ou seja,  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .

Na segunda linha da **Figura 6.10**, ilustra-se a segunda propriedade  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ : no diagrama à esquerda, temos  $\overline{A \cup B}$ ; nos dois diagramas centrais, temos, respectivamente,  $\overline{A}$  e  $\overline{B}$ ; no diagrama à direita, temos  $\overline{A} \cap \overline{B}$ , que é igual ao diagrama à esquerda, ou seja,  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ .



**Figura 6.10:** Ilustração das propriedades de De Morgan.

**Exemplo 6.8.**

1. Sejam  $A, B, C$  três eventos de um espaço amostral. Exprima os eventos a seguir usando as operações de união, interseção e complementação:
- somente  $A$  ocorre;
  - $A, B$  e  $C$  ocorrem;
  - pelo menos um ocorre;
  - exatamente dois ocorrem.

**Solução:**

- a. O evento “somente  $A$  ocorre” significa que  $A$  ocorreu e  $B$  não ocorreu e  $C$  não ocorreu; em linguagem de conjunto:

$$\text{Somente } A \text{ ocorre} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

- b. O evento “ $A, B$  e  $C$  ocorrem” significa que os três eventos ocorreram; em linguagem de conjunto,

$$A, B \text{ e } C \text{ ocorrem} = A \cap B \cap C$$

- c. O evento “pelo menos um ocorre” significa que pode ter ocorrido apenas um, ou dois ou três; essa é a própria definição de união, ou seja, em linguagem de conjunto, temos que

$$\text{pelo menos um ocorre} = A \cup B \cup C$$

- d. Os dois que ocorrem podem ser  $A$  e  $B$  ou  $A$  e  $C$  ou  $B$  e  $C$ . Ocorrendo dois desses, o terceiro não pode ocorrer. Logo, em linguagem de conjunto temos que:

$$\text{exatamente dois ocorrem} = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$$

2. Considere o lançamento de dois dados e defina os seguintes eventos:

$A$  = soma par

$B$  = soma  $\geq 9$

$C$  = máximo das faces é 6

Calcule  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A - B$ ,  $B - A$ ,  $B \cap C$ ,  $B - C$ .

**Solução:**

$$A = \left\{ (1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), \right. \\ \left. (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6) \right\}$$

$$B = \{(3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$C = \left\{ (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6), \right. \\ \left. (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5) \right\}$$

$$A \cap B = \{(4,6), (5,5), (6,4), (6,6)\}$$

$$A \cup B = \left\{ (1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), \right. \\ \left. (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6), \right. \\ \left. (3,6), (4,5), (5,4), (5,6), (6,3), (6,5) \right\}$$

$$A - B = A \cap \overline{B} = \left\{ (1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), \right. \\ \left. (4,2), (4,4), (5,1), (5,3), (6,2) \right\}$$

$$B - A = B \cap \overline{A} = \{(3,6), (4,5), (5,4), (5,6), (6,3), (6,5)\}$$

$$B \cap C = \{(3,6), (4,6), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$B - C = B \cap \overline{C} = \{(4,5), (5,4), (5,5)\}$$

Note que, de acordo com as propriedades já vistas,

$$\begin{aligned} (B \cap C) \cup (B - C) &= (B \cap C) \cup (B \cap \overline{C}) = \\ &= [(B \cap C) \cup B] \cap [(B \cap C) \cup \overline{C}] = [B] \cap [\overline{C} \cup (B \cap C)] \\ &= B \cap [(\overline{C} \cup B) \cap (\overline{C} \cup C)] = B \cap [(\overline{C} \cup B) \cap (\Omega)] \\ &= B \cap (\overline{C} \cup B) = (B \cap \overline{C}) \cup (B \cap B) \\ &= (B \cap \overline{C}) \cup B = B \end{aligned}$$

## Resumo

Nesta aula, você estudou os conceitos básicos para o estudo da probabilidade. Certifique-se de ter compreendido bem as seguintes definições:

- Experimento aleatório – processo que acusa variabilidade em seus resultados.
- Espaço amostral – conjunto dos resultados possíveis de um experimento aleatório.
- Evento aleatório – qualquer subconjunto de um espaço amostral.
- Você deve também compreender as seguintes operações com eventos aleatórios:

Interseção	$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B$
União	$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$
Exclusão	$A \cap B = \emptyset$
Complementar	$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$
Diferença	$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \notin B$ $A - B = A \cap \overline{B}$
Partição	$A_1, A_2, \dots, A_n : A_i \cap A_j = \emptyset$ $\bigcup_i A_i = \Omega$

Exercício 6.1.

Lançam-se três moedas. Enumerar o espaço amostral e os eventos  $A = \text{“faces iguais”}$ ;  $B = \text{“cara na primeira moeda”}$ ;  $C = \text{“coroa na segunda e terceira moedas”}$ .

Exercício 6.2.

Considere os diagramas na **Figura 6.11**.

- 1. No diagrama (1), assinale a área correspondente a  $A - B$
- 2. No diagrama (2), assinale a área correspondente a  $\overline{A} \cap \overline{B}$
- 3. No diagrama (3), assinale a área correspondente a  $(A \cup C) \cap B$
- 4. No diagrama (4), assinale a área correspondente a  $(A \cup B) \cap C$

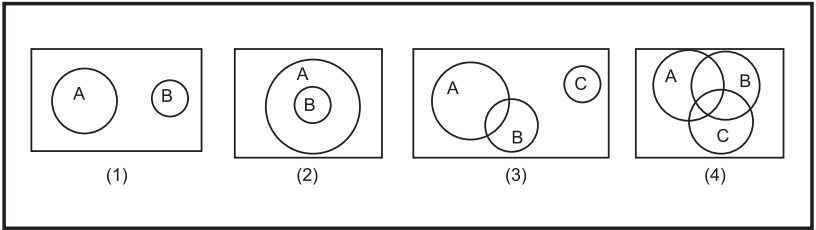


Figura 6.11: Exercício 6.2.

Exercício 6.3.

Na **Figura 6.12**, obtenha a expressão matemática para os eventos definidos por cada uma das áreas numeradas.

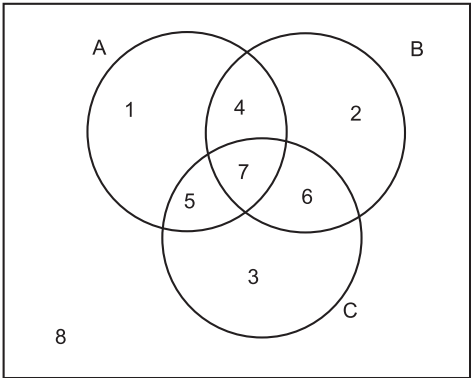


Figura 6.12: Exercício 6.3.



**Exercício 6.4.**

Defina um espaço amostral para cada um dos seguintes experimentos aleatórios:

1. Em uma pesquisa de mercado, conta-se o número de clientes do sexo masculino que entram em um supermercado no horário das 8 às 12 horas.
2. Em um estudo de viabilidade de abertura de uma creche própria de uma grande empresa, fez-se um levantamento, por funcionário, do sexo dos filhos com menos de 5 anos de idade. O número máximo de filhos por funcionário é 4, e a informação relevante é o sexo dos filhos de cada funcionário.
3. Em um teste de controle de qualidade da produção, mede-se a duração de lâmpadas, deixando-as acesas até que queimem.
4. Um fichário com 10 nomes contém 3 nomes de mulheres. Seleciona-se ficha após ficha até o último nome de mulher ser selecionado e anota-se o número de fichas selecionadas.
5. Lança-se uma moeda até aparecer cara pela primeira vez e anota-se o número de lançamentos.
6. Em uma urna, há 5 bolas identificadas pelas letras  $\{A, B, C, D, E\}$ . Sorteiam-se duas bolas, uma após a outra, com reposição, e anota-se a configuração formada.
7. Mesmo enunciado anterior, mas as duas bolas são selecionadas simultaneamente.

**Exercício 6.5.**

Sejam  $A, B, C$  três eventos de um espaço amostral. Expressar os eventos a seguir usando as operações de união, interseção e complementação:

1. exatamente um ocorre;
2. nenhum ocorre;
3. pelo menos dois ocorrem;
4. no máximo dois ocorrem.

## SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

### Exercício 6.1:

$K$  = cara       $C$  = coroa

$$\Omega = \{KKK, KKC, KCK, CKK, KCC, CKC, CCK, CCC\}$$

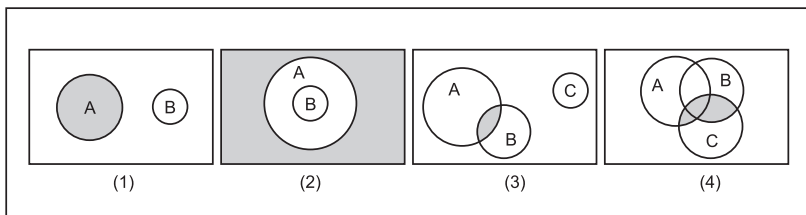
$$A = \{KKK, CCC\}$$

$$B = \{KKK, KKC, KCK, KCC\}$$

$$C = \{KCC, CCC\}$$

### Exercício 6.2:

Veja a **Figura 6.13**.



**Figura 6.13:** Solução do Exercício 6.2.

### Exercício 6.3:

Área 1: são os elementos que pertencem apenas ao evento  $A$ :  $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

Área 2: são os elementos que pertencem apenas ao evento  $B$ :  $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$

Área 3: são os elementos que pertencem apenas ao evento  $C$ :  $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$

Área 4: são os elementos que pertencem a  $A$  e a  $B$ , mas não a  $C$ :  $A \cap B \cap \overline{C}$

Área 5: são os elementos que pertencem a  $A$  e a  $C$ , mas não a  $B$ :  $A \cap \overline{B} \cap C$

Área 6: são os elementos que pertencem a  $B$  e a  $C$ , mas não a  $A$ :  $\overline{A} \cap B \cap C$

Área 7: são os elementos que pertencem a  $A$ , a  $B$  e a  $C$  :  
 $A \cap B \cap C$

Área 8: são os elementos que não pertencem nem a  $A$ , nem a  $B$ , nem a  $C$ :  $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

#### Exercício 6.4:

1.  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$
2. Representando por  $H$  e  $F$  os sexos masculino e feminino, respectivamente, podemos representar o espaço amostral como

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} H, F, HH, HF, FH, FF, \\ HHH, HHF, HFF, FHH, FFH, FHF, HFF, FFF, \\ FFFF, FFFH, FFHF, FHFF, HFFF, HHFF, \\ HFHF, HFFH, FFHH, FHFH, FHHF, \\ HHHF, HHFH, HFHH, FHHH, HHHH \end{array} \right\}$$

Note que representamos aí os casais com um filho, dois filhos, três filhos e quatro filhos.

3. A lâmpada pode queimar logo ao ser ligada e, teoricamente, pode durar para sempre; logo,  $\Omega = (0, \infty)$ .
4. Como temos que sortear as 3 mulheres, serão necessários no mínimo 3 sorteios e, no pior dos casos, a última mulher será a última a ser sorteada. Como estamos interessados apenas no número de sorteios, o espaço amostral é  $\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
5. Podemos obter cara logo no primeiro lançamento ou então no segundo ou no terceiro... Teoricamente, pode ser necessário lançar a moeda infinitas vezes. Logo,  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$
6.  $\Omega = \left\{ \begin{array}{l} AA, AB, AC, AD, AE, BA, BB, BC, BD, BE, CA, CB, CC, \\ CD, CE, DA, DB, DC, DD, DE, EA, EB, EC, ED, EE \end{array} \right\}$
7.  $\Omega = \left\{ \begin{array}{l} AB, AC, AD, AE, BA, BC, BD, BE, CA, CB, CD, CE, \\ DA, DB, DC, DE, EA, EB, EC, ED \end{array} \right\}$

**Exercício 6.5:**

1.  $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$  – o primeiro termo corresponde ao evento “apenas  $A$  ocorre”, o segundo ao evento “apenas  $B$  ocorre” e o terceiro ao evento “apenas  $C$  ocorre”.

2.  $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C}$

3. “Pelo menos dois” significa, neste caso, 2 ou 3 ocorrem, ou seja:

$$(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$$

o primeiro termo corresponde à ocorrência de  $A$  e  $B$ , mas não de  $C$ ; o segundo termo, ocorrência de  $B$  e  $C$ , mas não de  $A$ ; o terceiro, ocorrência de  $A$  e  $C$ , mas não de  $B$ , e o quarto termo corresponde à ocorrência dos 3 simultaneamente.

4. No máximo 2 significa ou nenhum ocorre, ou ocorre apenas um, ou ocorrem apenas 2. No caso de 3 eventos, a única possibilidade excluída é à ocorrência dos três simultaneamente, ou seja,  $\overline{A \cap B \cap C}$ .

# Aula 7



## REVISÃO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

---

### Objetivos

Conforme você verá na próxima aula, a definição clássica de probabilidade exige que saibamos contar o número de elementos de um conjunto.

Em algumas situações, é possível listar todos os elementos de um conjunto, mas, em geral, será necessário obter o número de elementos sem enumerá-los.

A análise combinatória consiste em um conjunto de regras de contagem, das quais veremos as principais.

Nesta aula, você estudará:

- 1 o princípio fundamental da adição;
- 2 o princípio fundamental da multiplicação;
- 3 o conceito de permutação;
- 4 o conceito de arranjo e
- 5 o conceito de combinação.

## PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA ADIÇÃO

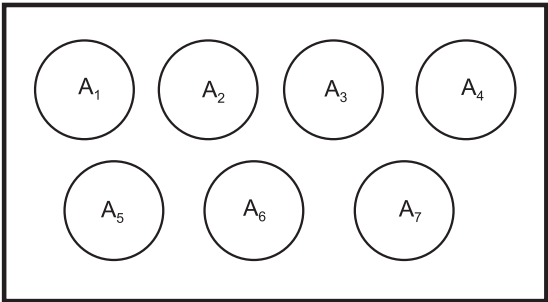
Na aula anterior, vimos que dois eventos são mutuamente exclusivos, se eles não têm interseção. Podemos generalizar essa definição para uma coleção de  $n$  conjuntos, olhando a interseção de dois conjuntos de cada vez. Se essa interseção for vazia para todo par  $(A_i, A_j)$  com  $i \neq j$ , dizemos que os conjuntos são mutuamente exclusivos dois a dois.

!

**Princípio Fundamental da Adição**

Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_k$  conjuntos tais que  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$  e  $\#A_i = n_i$ . Veja a **Figura 7.1**. Nesse caso, temos que

$$\# \bigcup_{i=1}^k A_i = \sum_{i=1}^k (\#A_i) = n_1 + \dots + n_k$$



**Figura 7.1:** União de eventos mutuamente exclusivos dois a dois.

## PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA MULTIPLICAÇÃO

Para ilustrar o segundo princípio fundamental da contagem, considere que numa sala haja três homens  $(h_1, h_2, h_3)$  e cinco mulheres  $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$ .

Quantos casais podem ser formados com essas pessoas?

Para responder a essa pergunta, devemos notar que há cinco casais nos quais o homem é  $h_1$ , cinco nos quais o homem é  $h_2$

e outros cinco nos quais o homem é  $h_3$ , perfazendo um total de  $3 \times 5 = 15$  casais. Esse exemplo ilustra o *princípio fundamental da multiplicação*.



### Princípio Fundamental da Multiplicação

Se temos  $k$  decisões  $d_1, d_2, \dots, d_k$  que podem ser tomadas de  $n_1, n_2, \dots, n_k$  maneiras respectivamente, então o número de maneiras de tomar as decisões  $d_1$  e  $d_2$  e  $\dots$  e  $d_k$  é  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$

No exemplo anterior, temos duas decisões: a primeira decisão é  $d_1$  = escolha do homem, e a segunda decisão é  $d_2$  = escolha da mulher. Como há três homens e cinco mulheres, o número de casais que podemos formar é  $3 \times 5 = 15$ , como já visto.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} h_1m_1, h_1m_2, h_1m_3, h_1m_4, h_1m_5, \\ h_2m_1, h_2m_2, h_2m_3, h_2m_4, h_2m_5, \\ h_3m_1, h_3m_2, h_3m_3, h_3m_4, h_3m_5, \end{array} \right\}$$

Note que o princípio da multiplicação permite obter o número de elementos do espaço amostral formado pelos casais sem ter que fazer essa enumeração enfadonha!

### Exemplo 7.1.

Quantos números naturais de três algarismos distintos existem?

### Solução:

Para o primeiro algarismo (milhar), existem nove possibilidades, já que o zero não pode ocupar a primeira posição. Para a segunda posição, escolhida a primeira, sobram nove algarismos (agora já podemos considerar o zero) e para a terceira, escolhidos os dois primeiros, sobram oito algarismos. Logo, existem  $9 \times 9 \times 8 = 648$  números. (Já pensou o trabalho que seria listar todos eles?)

**Exemplo 7.2.**

Um prédio possui oito portas. De quantas maneiras posso entrar e sair desse prédio, se não quero usar na saída a mesma porta que usei na entrada?

**Solução:**

Para a entrada, posso escolher qualquer uma das oito portas. Escolhida a porta de entrada, sobram sete portas para a saída. Logo, existem  $8 \times 7 = 56$  maneiras de entrar e sair por portas diferentes.

**Exemplo 7.3.**

Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar?

**Solução:**

Para que o número seja par, ele tem que terminar com 2, 4 ou 6. Se ele termina com 2, sobram duas posições para serem preenchidas com algarismos distintos escolhidos entre 1, 3, 4, 5, 6. Para a primeira posição, temos cinco possibilidades; escolhida a primeira posição, sobram quatro para a segunda posição.

Pelo princípio fundamental da multiplicação existem  $5 \times 4 = 20$  números pares com três algarismos distintos terminando com 2. Analogamente, existem vinte que terminam com 4 e vinte que terminam com 6. Logo, o número total é 60.

**Exercício 7.1.**

De quantos modos distintos podemos colocar três livros em uma prateleira?

**Exercício 7.2.**

Quantos números com cinco algarismos podemos construir com os algarismos 1, 3, 5, 7, 9? Desses, quantos apresentam os algarismos 1 e 3 juntos?



## PERMUTAÇÕES

Consideremos quatro objetos distintos  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . De quantas maneiras podemos ordená-los? Vamos listar todas as possibilidades.

$a_1a_2a_3a_4$	$a_1a_2a_4a_3$	$a_1a_3a_2a_4$	$a_1a_3a_4a_2$
$a_1a_4a_2a_3$	$a_1a_4a_3a_2$	$a_2a_1a_3a_4$	$a_2a_1a_4a_3$
$a_2a_3a_1a_4$	$a_2a_3a_4a_1$	$a_2a_4a_1a_3$	$a_2a_4a_3a_1$
$a_3a_1a_2a_4$	$a_3a_1a_4a_2$	$a_3a_2a_1a_4$	$a_3a_2a_4a_1$
$a_3a_4a_1a_2$	$a_3a_4a_2a_1$	$a_4a_1a_2a_3$	$a_4a_1a_3a_2$
$a_4a_2a_1a_3$	$a_4a_2a_3a_1$	$a_4a_3a_1a_2$	$a_4a_3a_2a_1$

Cada uma dessas ordenações é chamada uma *permutação simples*. Podemos ver que o número de tais permutações é bem grande. Note que, para apenas quatro objetos, temos 24 permutações. O cálculo do número de permutações é uma consequência direta do princípio da multiplicação.

Consideremos, então,  $n$  objetos distintos  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Para a primeira posição, temos  $n$  possibilidades. Para a segunda, escolhida a primeira, sobram  $n - 1$  objetos. Para a terceira, escolhidas a primeira e a segunda posições, sobram  $n - 2$  objetos. Continuando, para a última posição, escolhidas as  $n - 1$  anteriores, sobra apenas 1 objeto.

Pelo princípio da multiplicação, o número total de permutações, que denotaremos por  $P_n$  é  $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$ , e esse número, por definição, é o fatorial de  $n$ . Temos, assim, o seguinte resultado.



Dados  $n$  objetos distintos, o número de **permutações simples** de tais objetos é dado por

$$P_n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1 = n! \quad (7.1)$$

### Exemplo 7.4.

Quantas filas diferentes podemos formar com cinco crianças?

**Solução:**

Essa é exatamente a definição de permutação. Logo, o número de filas é  $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ .

**Exemplo 7.5.**

Temos cinco livros de Estatística, três livros de Matemática Financeira e quatro livros de Contabilidade.

De quantas maneiras podemos organizar esses livros em uma prateleira? Qual seria a sua resposta se os livros do mesmo assunto tivessem que ficar juntos?

**Solução:**

Ao todo, há 12 livros; logo, se não é necessário agrupar por assunto, existem  $12! = 479.001.600$  maneiras de organizar os livros.

Se os livros do mesmo assunto têm que ficar juntos, devemos observar que, primeiro, temos que contar as maneiras como podemos organizar os assuntos. Como são três assuntos, há  $3! = 6$  maneiras de organizar os assuntos. Para os livros de Estatística, há  $5! = 120$  maneiras de organizá-los; para os livros de Matemática Financeira,  $3! = 6$  maneiras, e para os livros de Contabilidade,  $4! = 24$  maneiras.

Pelo princípio fundamental da multiplicação, o número total de maneiras de organizar os 12 livros de modo que os livros do mesmo assunto fiquem juntos é  $6 \times 6 \times 120 \times 24 = 103.680$  maneiras. Note que é razoável que esse número seja menor, pois estamos impondo condições restritivas na organização.

**Exemplo 7.6.**

Cinco moças e cinco rapazes têm que sentar em cinco bancos de dois lugares, de modo que em cada banco fique uma moça e um rapaz. De quantas maneiras podemos fazer isso?

**Solução:**

Começamos com as meninas. A primeira menina pode escolher qualquer dos 10 lugares. Logo, ela tem 10 possibilidades. Já a segunda menina só tem 8 possibilidades, porque ela não pode sentar junto com a primeira. Analogamente, a terceira menina tem 6 possibilidades, a quarta tem 4 e a quinta tem 2 possibilidades.

Definidas as posições das meninas, temos cinco rapazes para sentar em cinco lugares, o que pode ser feito de  $5!$  maneiras. Logo, o número total de possibilidades, pelo princípio fundamental da multiplicação, é  $10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 5! = 3.840 \times 120 = 460.800$ .

### Exercício 7.3.

Considere a palavra TEORIA.

1. Quantos anagramas podemos formar?
2. Quantos anagramas começam com a letra T?
3. Quantos anagramas começam com a letra T e terminam com A?
4. Quantos anagramas têm todas as vogais juntas?

### Exercício 7.4.

Quantas filas podem ser formadas por cinco moças e cinco rapazes? Se João e Maria fazem parte desse grupo, em quantas filas eles estão juntos? E em quantas filas eles estão separados?

Segundo o dicionário *Aurélio*:  
Anagrama: Palavra ou frase formada pela transposição das letras de outra palavra ou frase.  
“E dizem que a Iracema do romance de Alencar é o anagrama de América” (João Ribeiro, *Curiosidades verbais*, p. 76).

## ARRANJOS

Na definição de permutação, consideramos ordenações de *todos* os objetos. Mas é possível que queiramos ordenar apenas  $k$  dos  $n$  objetos, onde  $k \leq n$ . Nesse caso, temos a definição de *arranjo simples*.

Suponhamos, por exemplo, que quatro pessoas serão sorteadas dentre dez. Quantas filas podemos formar com as quatro pessoas sorteadas?

Como no caso das permutações, para a primeira posição da fila temos disponíveis as 10 pessoas. Para a segunda, temos 9; para a terceira, temos 8, e para a quarta e última posição, temos 7. Logo, o número total de filas com as quatro pessoas sorteadas é  $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5.040$ . Veja o esquema na **Figura 7.2**.

$\frac{10}{1a.}$	$\frac{9}{2a.}$	$\frac{8}{3a.}$	$\frac{7}{4a.}$
------------------	-----------------	-----------------	-----------------

**Figura 7.2:** Arranjo de 10, tomados de 4 em 4.

Note que, para a quarta posição, já escolhemos as três anteriores; assim, sobram apenas  $(10 - 3) = [10 - (4 - 1)]$ . Uma outra observação interessante é a seguinte:

$$\begin{aligned} 10 \times 9 \times 8 \times 7 &= \frac{(10 \times 9 \times 8 \times 7) \times (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} \\ &= \frac{(10 \times 9 \times 8 \times 7) \times 6!}{6!} \\ &= \frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10 - 4)!} \end{aligned}$$

Vamos ver, agora, o caso geral. Para calcular o número de arranjos de  $k$  objetos dentre  $n$ , devemos notar que, para a primeira posição, existem  $n$  possibilidades. Para a segunda,  $n - 1$  possibilidades. Para a  $k$ -ésima e última posição, já foram escolhidos  $k - 1$  objetos; portanto, sobram  $n - (k - 1)$ , ou seja, para a  $k$ -ésima posição, há  $n - (k - 1) = n - k + 1$  possibilidades.

Logo, o número total de arranjos de  $k$  elementos, tomados dentre  $n$  é  $n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - k + 1)$ . Vamos denotar por  $A_n^k$  esse número.



O número de **arranjos simples** de  $k$  objetos dentre  $n$ , denotado por  $A_n^k$ , é

$$A_n^k = n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - k + 1)$$

Vamos usar um pequeno artifício para simplificar essa fórmula: vamos multiplicar e dividir o resultado por

$$(n - k) \times (n - k - 1) \times \cdots \times 2 \times 1 = (n - k)!$$

Então,

$$\begin{aligned} A_n^k &= n \times (n - 1) \times \cdots \times [n - (k - 1)] \times \frac{(n - k)!}{(n - k)!} = \\ &= \frac{n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - k + 1) \times (n - k) \times (n - k - 1) \times \cdots \times 2 \times 1}{(n - k)!} = \\ &= \frac{n!}{(n - k)!} \end{aligned}$$

De uma forma mais compacta, podemos escrever:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (7.2)$$

É importante notar que, sendo a definição de arranjo uma generalização de permutação (note que uma permutação é um arranjo em que  $k = n$ ), a ordem dos elementos é relevante, ou seja,  $a_1a_2a_3$  é diferente de  $a_3a_1a_2$ .

**Exemplo 7.7.**

Em um campeonato de futebol, concorrem 20 times. Quantas possibilidades existem para os três primeiros lugares?

**Solução:**

A resposta é  $A_{20}^3$ , pois a ordem faz diferença nesse caso. Note que

$$A_{20}^3 = \frac{20!}{17!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{17!} = 20 \times 19 \times 18 = 6.840$$

**Exemplo 7.8.**

De um grupo de 10 pessoas deve ser extraída uma comissão formada por um presidente, um vice-presidente e um secretário. Quantas comissões é possível formar?

**Solução:** A ordem aqui importa, já que os cargos não são equivalentes. Assim, a solução é

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

**Exercício 7.5.**

O segredo de um cofre é formado por uma sequência de três dígitos escolhidos entre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Suponha que uma pessoa saiba que o segredo é formado por três algarismos distintos. Qual o número máximo de tentativas que ela terá de fazer para abrir o cofre?

Exercício 7.6.

Quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6, 7, 8, 9?

COMBINAÇÕES SIMPLES

Vamos considerar agora, a situação análoga a um arranjo, mas onde a ordem não importa, ou seja,  $a_1a_2a_3$  é igual a  $a_3a_1a_2$ .

Consideremos a situação na qual temos cinco objetos dos quais vamos tomar três. Como visto, o número de arranjos é  $\frac{5!}{2!} = 60$ . Vamos listá-los.

Objetos envolvidos									
(1,2,3)	(1,2,4)	(1,2,5)	(1,3,4)	(1,3,5)	(1,4,5)	(2,3,4)	(2,3,5)	(2,4,5)	(3,4,5)
$a_1a_2a_3$	$a_1a_2a_4$	$a_1a_2a_5$	$a_1a_3a_4$	$a_1a_3a_5$	$a_1a_4a_5$	$a_2a_3a_4$	$a_2a_3a_5$	$a_2a_4a_5$	$a_3a_4a_5$
$a_1a_3a_2$	$a_1a_4a_2$	$a_1a_5a_2$	$a_1a_4a_3$	$a_1a_5a_3$	$a_1a_5a_4$	$a_2a_4a_3$	$a_2a_5a_3$	$a_2a_5a_4$	$a_3a_5a_4$
$a_2a_1a_3$	$a_2a_1a_4$	$a_2a_1a_5$	$a_3a_1a_4$	$a_3a_1a_5$	$a_4a_1a_5$	$a_3a_2a_4$	$a_3a_2a_5$	$a_4a_2a_5$	$a_4a_3a_5$
$a_2a_3a_1$	$a_2a_4a_1$	$a_2a_5a_1$	$a_3a_4a_1$	$a_3a_5a_1$	$a_4a_5a_1$	$a_3a_4a_2$	$a_3a_5a_2$	$a_4a_5a_2$	$a_4a_5a_3$
$a_3a_1a_2$	$a_4a_1a_2$	$a_5a_1a_2$	$a_4a_1a_3$	$a_5a_1a_3$	$a_5a_1a_4$	$a_4a_2a_3$	$a_5a_2a_3$	$a_5a_2a_4$	$a_5a_3a_4$
$a_3a_2a_1$	$a_4a_2a_1$	$a_5a_2a_1$	$a_4a_3a_1$	$a_5a_3a_1$	$a_5a_4a_1$	$a_4a_3a_2$	$a_5a_3a_2$	$a_5a_4a_2$	$a_5a_4a_3$

Essa listagem está organizada de modo que, em cada coluna, os objetos envolvidos são os mesmos. Note o seguinte: como a ordem não importa, os elementos de cada coluna são iguais, ou seja, só precisamos de um deles. Mas em cada coluna temos as permutações dos três objetos envolvidos.

Logo, o número de elementos em cada coluna nesse exemplo é  $3! = 6$ . Como só precisamos de um de cada  $3!$ , o número total é

$$\frac{60}{3!} = \frac{5!}{2!3!}.$$

Ilustramos com esse exemplo o conceito e o cálculo do número de combinações simples de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$ . Dado um conjunto de  $n$  elementos, a *combinação dos  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$*  nos dá o número de subconjuntos com  $k$  elementos (note que, em um conjunto, a ordem dos elementos não importa).



O número de **combinações simples** de  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$  é igual a

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \quad (7.3)$$

O número  $\binom{n}{k}$  é chamado número ou coeficiente binomial, ou ainda, número combinatório.

Note a diferença: no conceito de arranjo, estamos lidando com sequências de  $k$  elementos, enquanto no conceito de combinação, estamos lidando com subconjuntos. Nas sequências, a ordem dos elementos é relevante, mas não nos subconjuntos.

### Exemplo 7.9.

De um grupo de oito homens e cinco mulheres, devem ser escolhidos três homens e três mulheres para formar uma comissão. Quantas comissões podem ser formadas?

### Solução:

Os três homens podem ser escolhidos de  $\binom{8}{3}$  maneiras; as três mulheres podem ser escolhidas de  $\binom{5}{3}$  maneiras. Pelo princípio da multiplicação, há  $\binom{8}{3} \times \binom{5}{3}$  maneiras de escolher a comissão.

$$\text{Note que } \binom{8}{3} \times \binom{5}{3} = \frac{8!}{5!3!} \times \frac{5!}{3!2!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} \times \frac{5 \times 4}{2} = 560$$

### Exemplo 7.10.

Um baralho de pôquer é formado pelas cartas 7, 8, 9, 10, valete, dama, rei, ás de cada um dos quatro naipes. Em uma mão de pôquer, sacam-se cinco cartas sem reposição. Quantas são as extrações possíveis?

**Solução:**

Temos ao todo  $4 \times 8 = 32$  cartas. Como a ordem de retirada não importa, o número total de extrações possíveis é

$$\begin{aligned}
 C_{32}^5 &= \frac{32!}{5! \times 27!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27!}{5! \times 27!} \\
 &= \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\
 &= \frac{(4 \times 8) \times 31 \times (15 \times 2) \times 29 \times 28}{(4 \times 2) \times (5 \times 3) \times 1} \\
 &= 4 \times 31 \times 2 \times 29 \times 28 = 201.376
 \end{aligned}$$

**Exemplo 7.11.**

**Mega-Sena** No jogo da Mega-Sena da Caixa Econômica Federal, o apostador deve escolher no mínimo seis e no máximo 15 números diferentes entre 1 e 60. Um jogo simples consiste na escolha de seis números, e os preços das apostas se baseiam no número de jogos simples em cada cartão.

1. Qual é o número total de jogos simples distintos?

**Solução:**

Note que, na Mega-Sena, a ordem não importa; logo, o número total de jogos simples é

$$\begin{aligned}
 \binom{60}{6} &= \frac{60!}{6!54!} \\
 &= \frac{60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55 \times 54!}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 54!} \\
 &= 50.063.860
 \end{aligned}$$

Isso significa que a sua chance de acertar a sena é

$$\frac{1}{50.063.860} = 0,000000019974.$$

2. Em um cartão com 15 números marcados, quantos são os jogos simples? Se cada jogo simples custa R\$ 1,50, qual o preço de um cartão com 15 números marcados?



**Solução:**

Num cartão com 15 números marcados, o número de jogos simples é

$$\binom{15}{6} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9!}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 9!} = 5005$$

e, assim, o preço desse cartão é  $1,50 \times 5005 = 7507,5$ , e a probabilidade de se acertar a sena com um cartão desses é

$$\frac{5005}{50.063.860} = 0,00009997$$

**Exemplo 7.12.**

**Problema dos aniversários:** Em um grupo de 10 pessoas, qual é a probabilidade de que pelo menos dois façam aniversário no mesmo dia? Para simplificar, suponha que nenhuma dessas pessoas tenha nascido em ano bissexto.

**Solução:**

Note que, no caso de 10 pessoas, “pelo menos 2” significa ou 2, ou 3, ou 4, ..., ou 10. Então, podemos resolver essa versão mais simples do problema do aniversário usando a regra do complementar, ou seja, vamos calcular a probabilidade de todas as 10 pessoas fazerem aniversário em datas diferentes. Para isso, vamos usar a regra fundamental da multiplicação.

O aniversário de cada uma das 10 pessoas pode ser em um dos 365 dias do ano. Logo, o número total de possibilidades para as datas dos aniversários das 10 pessoas é  $365 \times 365 \times \dots \times 365 = 365^{10}$  pelo princípio fundamental da multiplicação. Isso nos dá  $\#\Omega$ .

Consideremos, agora, o evento  $A =$  “as 10 pessoas fazem aniversário em dias diferentes”. Escolhida a primeira pessoa, ela pode fazer aniversário em qualquer dia; então, o número de possibilidades é 365. Para a segunda pessoa, como o aniversário tem que ser em data diferente, sobram 364 possibilidades. Para a terceira, sobram 363; continuando, para a décima pessoa, sobram  $365 - 9 = 356$  possibilidades. Assim, obtemos

$$\Pr(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{365 \times 364 \times 363 \times \dots \times 356}{365^{10}} = 0,88305$$

Logo, a probabilidade de que pelo menos duas pessoas façam aniversário no mesmo dia é

$$\Pr(\bar{A}) = 1 - \Pr(A) = 0,11695$$

### Exercício 7.7.

De um grupo de oito homens e cinco mulheres devem ser escolhidos três homens e três mulheres para formar uma comissão. Quantas comissões podem ser formadas se João e Maria, que pertencem ao grupo original, não aceitam participar em conjunto da comissão?

### Exercício 7.8.

Três cartas vão ser retiradas de um baralho normal de 52 cartas. Calcule a probabilidade de que:

1. todas as três sejam de espadas;
2. as três cartas sejam do mesmo naipe;
3. as três cartas sejam de naipes diferentes.

### Exercício 7.9.

Para a seleção brasileira foram convocados 2 goleiros, 6 zagueiros, 7 meios-de-campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios-de-campo, e 2 atacantes?

### Exercício 7.10.

Em um torneio no qual cada participante enfrenta todos os demais, são jogadas 780 partidas. Quantos são os participantes?

### Exercício 7.11.

Quantos são os anagramas da palavra SIMULTÂNEO

1. que começam por consoante e terminam por vogal?
2. que têm as letras S, I, M juntas nesta ordem?
3. que têm as letras S, I, M juntas em qualquer ordem?
4. que têm a letra S no primeiro lugar e a letra I no segundo lugar?
5. que têm a letra S no primeiro lugar ou a letra I no segundo lugar?
6. que têm a letra S no primeiro lugar ou a letra I no segundo lugar ou a letra M no terceiro lugar? *Sugestão:* Aqui você deve usar o resultado do exercício anterior.

## Resumo

Nesta aula, você estudou os seguintes conceitos básicos de Análise Combinatória:

- **Princípio Fundamental da Adição:** Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_k$  conjuntos tais que  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $\forall i \neq j$  e  $\#A_i = n_i$ . Então

$$\# \bigcup_{i=1}^k A_i = \sum_{i=1}^k (\#A_i) = n_1 + \dots + n_k$$

- **Princípio Fundamental da Multiplicação:** Se temos  $k$  decisões  $d_1, d_2, \dots, d_k$  que podem ser tomadas de  $n_1, n_2, \dots, n_k$  maneiras respectivamente, então o número de maneiras de tomar as decisões  $d_1$  e  $d_2$  e  $\dots$  e  $d_k$  é

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k.$$

- **Permutação de  $n$  elementos distintos:** Número de sequências (filas) que podemos formar com todos os elementos

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$$

- **Arranjos (ou permutações) de  $k$  objetos tomados dentre  $n$  objetos distintos:**

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$$

- **Combinações simples de  $k$  objetos tomados dentre  $n$  objetos distintos:**

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

- No conceito de arranjo ou permutação, estamos lidando com sequências de  $k$  elementos, enquanto no conceito de combinação, estamos lidando com subconjuntos. Nas sequências, a ordem dos elementos é relevante, mas não nos subconjuntos.

## SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

### Exercício 7.1.

Para a primeira posição, temos os três livros; escolhido o primeiro livro, sobram dois para a segunda posição. Finalmente, escolhidos os livros para as duas primeiras posições, sobra um livro para a última posição. Pelo princípio da multiplicação, o número total de escolhas é  $3 \times 2 \times 1 = 6$ .

### Exercício 7.2.

Para a primeira posição, temos os 5 algarismos; para a segunda, temos 4, já que os algarismos têm que ser diferentes. Continuando, para a terceira, temos 3; para a quarta, temos 2, e para a última resta apenas 1. Logo, existem

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

números com cinco algarismos distintos escolhidos entre 1, 3, 5, 7, 9.

Se os algarismos 1 e 3 têm que estar juntos, podemos pensar neles como um bloco, que deve ser colocado junto com os algarismos 5, 7, 9. Logo, para organizar esses 4 blocos, há

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

maneiras diferentes. Por sua vez, o bloco dos algarismos 1 e 3 pode ser organizado de 2 maneiras diferentes. Logo, o número total de possibilidades é

$$2 \times 24 = 48.$$

### Exercício 7.3.

Note que o conceito de anagrama é o mesmo de permutação.

1. Como há seis letras diferentes, o número de anagramas é  $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ .
2. Fixada a letra T na primeira posição, as outras cinco podem ser organizadas de  $5! = 120$  maneiras diferentes.
3. Fixadas a primeira e a última letras, as outras quatro podem ser organizadas de  $4! = 24$  maneiras.

4. Temos quatro vogais. Esse bloco pode ser organizado de  $4! = 24$  maneiras. Para juntar esse bloco com as duas consoantes, há  $3! = 6$  maneiras diferentes. Logo, o número total é  $24 \times 6 = 144$ .

#### Exercício 7.4.

Há um total de 10 pessoas. Logo, o número total de filas é  $10! = 3.628.800$ .

Se João e Maria estão juntos, podemos pensar neles como uma só pessoa. Então, há  $9!$  maneiras de organizar a fila. Mas existem duas maneiras de organizar João e Maria. Logo, o número total de filas em que João e Maria estão juntos é  $9! \times 2 = 725.760$ .

Pela lei do complementar, o número de filas em que João e Maria estão separados é  $3.628.800 - 725.760 = 2.903.040$ .

#### Exercício 7.5.

Para abrir o cofre, ela tem que achar o arranjo correto dos três algarismos do segredo. O número total de possibilidades é  $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$

#### Exercício 7.6.

Os números pares com esses algarismos têm que terminar com 6 ou 8. Fixada a última posição (6 ou 8), sobram duas posições para serem preenchidas com os cinco algarismos restantes. Logo, o número total é  $2 \times A_5^2 = 2 \times \frac{5!}{3!} = 40$ .

#### Exercício 7.7.

O número total de comissões é  $\binom{8}{3} \times \binom{5}{3} = 560$ , conforme visto no exemplo anterior à atividade. O número de comissões em que Maria e João estão juntos é dado por

$$\binom{7}{2} \times \binom{4}{2} = \frac{7!}{2!5!} \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{7 \times 6}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} = 126$$

Logo, o número de comissões em que João e Maria não estão juntos é  $560 - 126 = 434$ .

**Exercício 7.8.**

O número total de possibilidades para se extraírem três cartas sem reposição é  $\#\Omega = \binom{52}{3}$ .

1. Existem 13 cartas de espadas. Logo, há  $\binom{13}{3}$  maneiras diferentes de se extraírem 3 cartas de espadas. Assim, se  $E_3$  é o evento “3 cartas de espadas”, temos que

$$\begin{aligned}\Pr(E_3) &= \frac{\binom{13}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{13!}{3!10!} \times \frac{3!49!}{52!} \\ &= \frac{13 \times 12 \times 11}{52 \times 51 \times 50} \\ &= \frac{1.716}{132.600} = 0,01294\end{aligned}$$

2. O mesmo cálculo feito no item anterior vale para os 4 naipes.

Sejam  $E_3, C_3, P_3, O_3$  os eventos “três cartas de espadas”, “três cartas de copas”, “três cartas de paus” e “três cartas de ouro”, respectivamente. Então,

$$\Pr(E_3) = \Pr(C_3) = \Pr(P_3) = \Pr(O_3).$$

Logo, a probabilidade do evento  $I_3 =$  “três cartas do mesmo naipe” é

$$\begin{aligned}\Pr(I_3) &= \Pr(E_3 \cup C_3 \cup P_3 \cup O_3) = \\ &= \Pr(E_3) + \Pr(C_3) + \Pr(P_3) + \Pr(O_3) \\ &= 4 \times \frac{\binom{13}{3}}{\binom{52}{3}} = 4 \times 0,01294\end{aligned}$$

3. Note que o evento  $D =$  “três cartas de naipes diferentes” não é o complementar de  $I_3$ , pois, por exemplo, a sequência  $CCE$  pertence ao complementar de  $I_3$ , mas não pertence ao evento  $D$ .

Para calcular a probabilidade do evento  $D$ , note que, para a primeira carta, temos 52 possibilidades – qualquer carta serve. Para a segunda carta, temos que excluir as cartas do naipe da primeira; logo, sobram 39. Para a terceira, temos que excluir as cartas dos dois naipes anteriores; logo, sobram 26.

Pelo princípio da multiplicação, o número total de possibilidades é  $52 \times 39 \times 26$ , e a probabilidade pedida é

$$\Pr(D) = \frac{52 \times 39 \times 26}{\binom{52}{3}}$$

**Exercício 7.9.**

$$\binom{2}{1} \times \binom{6}{4} \times \binom{7}{4} \times \binom{4}{2} = 6.300$$

**Exercício 7.10.**

Cada jogador tem  $n - 1$  oponentes. Logo, existem  $n(n - 1)$  maneiras de selecionar dois participantes. Como a ordem dos dois selecionados não importa, o número total de partidas é  $\frac{n(n - 1)}{2}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \frac{n(n - 1)}{2} &= 780 \Rightarrow n^2 - n - 1.560 = 0 \Rightarrow \\ n &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 6.240}}{2} \Rightarrow n = \begin{cases} 40 \\ -39 \end{cases} \end{aligned}$$

Como o número de participantes tem que ser positivo, a solução é  $n = 40$  participantes.

**Exercício 7.11.**

Existem 10 letras nessa palavra, das quais cinco são vogais e cinco são consoantes.

1. Para a consoante da primeira posição, há cinco possibilidades e para a vogal da última posição há cinco possibilidades. Excluídas as duas escolhidas, sobram oito letras, que podem ser permutadas de  $8!$  maneiras.

Logo, o número total de anagramas começando com consoante e terminando com vogal é  $5 \times 5 \times 8! = 1.008.000$ .

2. Podemos pensar no bloco SIM como uma letra, que deve ser permutada com as sete letras restantes. Então, há  $8! = 40.320$  anagramas com as letras SIM juntas nesta ordem.
3. Existem  $3!$  maneiras de organizar as letras SIM; logo, o número total de anagramas com as letras SIM juntas em qualquer ordem é  $8! \times 3! = 241.920$ .
4. Vamos denotar por  $S_1$  o evento “letra S na primeira posição” e por  $I_2$  o evento “letra I na segunda posição”. O evento  $S_1 \cap I_2$  corresponde aos anagramas que começam com as letras SI nessa ordem: há  $8! = 40.320$  desses anagramas.
5. Note que nos dois eventos  $S_1$  e  $I_2$  estão incluídas todas as permutações que começam com SI. Tais permutações correspondem ao conjunto  $S_1 \cap I_2$ . Assim, ao somarmos as cardinalidades de  $S_1$  e  $I_2$  a interseção será contada duas vezes. O cálculo certo, então, é

$$\#(S_1 \cup I_2) = \#S_1 + \#I_2 - \#(S_1 \cap I_2)$$

O evento  $S_1$  corresponde aos anagramas que começam com S e o evento  $I_2$  aos anagramas com I na segunda posição. Então,  $\#S_1 = \#I_2 = 9!$ . Logo,

$$\begin{aligned}\#(S_1 \cup I_2) &= \#S_1 + \#I_2 - \#(S_1 \cap I_2) \\ &= 9! + 9! - 8! = 685.440\end{aligned}$$

6. Continuando com a nossa notação, seja  $M_3$  o evento “letra M na terceira posição”. O problema pede  $\#(S_1 \cup I_2 \cup M_3)$ . Pelo exercício anterior,

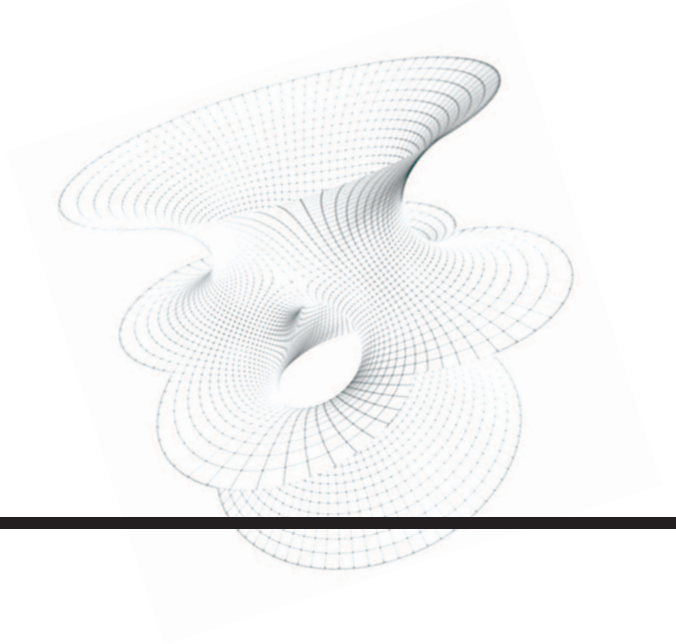
$$\begin{aligned}&\#(S_1 \cup I_2 \cup M_3) \\ &= \#S_1 + \#I_2 + \#M_3 - \#(S_1 \cap I_2) - \#(S_1 \cap M_3) - \#(I_2 \cap M_3) + \#(S_1 \cap I_2 \cap M_3) \\ &= 9! + 9! + 9! - 8! - 8! - 8! + 7! \\ &= 3 \times 9! - 3 \times 8! + 7! \\ &= 1.088.640 - 120.960 + 5040 \\ &= 972.720\end{aligned}$$



# Aula 8

## PROBABILIDADE

---



# O b j e t i v o s

Nesta aula, você:

- 1 aprenderá a definição de probabilidade;
- 2 estudará os axiomas e as propriedades de uma lei de probabilidade e
- 3 fará revisão dos seguintes conceitos de análise combinatória: permutação, arranjo e combinação.

## DEFINIÇÃO CLÁSSICA DE PROBABILIDADE

Na aula passada, vimos que o espaço amostral para o experimento aleatório do lançamento de um dado é  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Vimos também que é usual supor que o dado seja equilibrado, o que equivale a dizer que todos os resultados são igualmente prováveis.

Então, se jogarmos o dado várias vezes, aproximadamente um sexto das ocorrências resultará na face 3, bem como metade das repetições resultará em um número par. Estamos analisando a chance de ocorrência dos eventos  $A = \text{“face 3”}$  e  $B = \text{“face par”}$ . O evento  $A$  é um evento elementar, enquanto o evento  $B$  é um subconjunto com 3 elementos, o que representaremos por  $\#A = 1$  e  $\#B = 3$ . Essa é uma terminologia usual para representar o número de elementos de um conjunto, que lemos como “cardinalidade de  $A$  ou  $B$ ”. É intuitivo dizer que  $A$  ocorrerá  $\frac{1}{6}$  das vezes, enquanto  $B$  ocorrerá  $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$  das vezes.

Define-se, assim, a probabilidade de um evento  $A$  como a razão entre o número de elementos de  $A$  e o número de elementos de  $\Omega$ . Vamos nos referir aos elementos de  $A$  — o evento de interesse — como sendo os “casos favoráveis”, enquanto os elementos de  $\Omega$  são os “casos possíveis”, o que nos leva à seguinte definição.

### Definição 8.1 (Definição Clássica de Probabilidade).

Seja  $A$  um evento de um espaço amostral  $\Omega$  finito, cujos elementos são igualmente prováveis. Define-se a probabilidade do evento  $A$  como

$$\Pr(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{\#A}{\#\Omega} \quad (8.1)$$

Naturalmente, nessa definição estamos supondo que  $\#\Omega > 0$ , ou seja, que  $\Omega$  tenha algum elemento pois, se não tivesse, não teríamos o que estudar! Esta foi a primeira definição formal de probabilidade, tendo sido explicitada por Girolamo Cardano (1501-1576). Vamos nos referir a ela como a *definição clássica de probabilidade*. Note que ela se baseia em duas hipóteses:

1. Há um número finito de eventos elementares, isto é,  $\Omega$  é um conjunto finito.
2. Os eventos elementares são igualmente prováveis.

Embora essas hipóteses restrinjam o campo de aplicação da definição, veremos que ela é muito importante e vários exercícios serão resolvidos baseados nela.

## PROPRIEDADES DA DEFINIÇÃO CLÁSSICA DE PROBABILIDADE

A definição clássica de probabilidade satisfaz as seguintes propriedades básicas:

1.  $\Pr(A) \geq 0$  para todo evento  $A \subset \Omega$

### *Demonstração*

Como  $\#A \geq 0$  e  $\#\Omega > 0$ ,  $\Pr(A)$  é a razão de dois números não-negativos, então  $\Pr(A) \geq 0$ .

---

CQD

2.  $\Pr(\Omega) = 1$ .

### *Demonstração*

Por definição,  $\Pr(\Omega) = \frac{\#\Omega}{\#\Omega} = 1$ .

---

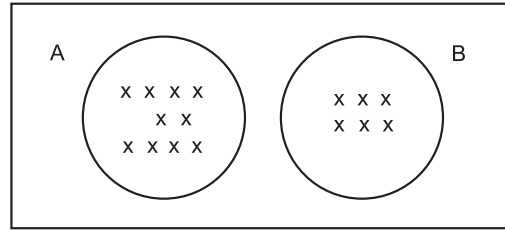
CQD

3. Se  $A$  e  $B$  são eventos mutuamente exclusivos, então  $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$ .

### *Demonstração*

Se  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos, resulta que  $A \cap B = \emptyset$ . Neste caso,  $\#(A \cup B) = \#A + \#B$  (veja a **Figura 8.1**). Logo,

$$\Pr(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#\Omega} = \frac{\#A + \#B}{\#\Omega} = \frac{\#A}{\#\Omega} + \frac{\#B}{\#\Omega} = \Pr(A) + \Pr(B)$$



**Figura 8.1:** Cardinalidade da união de eventos mutuamente exclusivos.

CQD

4.  $\Pr(\emptyset) = 0$

***Demonstração***

Como  $\#\emptyset = 0$ , resulta que  $\Pr(\emptyset) = \frac{\#\emptyset}{\#\Omega} = \frac{0}{\#\Omega} = 0$

Essa propriedade pode ser obtida também utilizando-se apenas as 3 primeiras. Para isso, note que podemos escrever

$$\Omega = \Omega \cup \emptyset$$

Como  $\Omega$  e  $\emptyset$  são mutuamente exclusivos, podemos aplicar a Propriedade 3 para obter

$$\Pr(\Omega) = \Pr(\Omega \cup \emptyset) = \Pr(\Omega) + \Pr(\emptyset)$$

Mas

$$\Pr(\Omega) = \Pr(\Omega) + \Pr(\emptyset) \Rightarrow \Pr(\emptyset) = \Pr(\Omega) - \Pr(\Omega) = 0$$

CQD

5.  $\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A)$

***Demonstração***

Vimos, na aula anterior, que

$$\Omega = A \cup \overline{A}$$

Como  $A$  e  $\overline{A}$  são mutuamente exclusivos, podemos aplicar a Propriedade 3 para obter que

$$\Pr(\Omega) = \Pr(A) + \Pr(\overline{A})$$

Mas, pela Propriedade 2,  $\Pr(\Omega) = 1$ . Logo,

$$1 = \Pr(A) + \Pr(\bar{A}) \Rightarrow \Pr(\bar{A}) = 1 - \Pr(A)$$

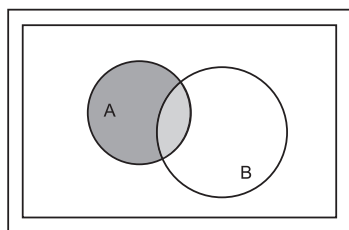
---

CQD

6.  $\Pr(A - B) = \Pr(A \cap \bar{B}) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$

***Demonstração***

Veja a **Figura 8.2** para visualizar melhor esse resultado.



**Figura 8.2:** Diferença de dois eventos  $A - B = A \cap \bar{B}$ .

Temos que

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

O primeiro termo é a parte sombreada mais escura, e o segundo termo é a parte sombreada mais clara. Podemos ver que essas duas partes não têm interseção. Logo, pela Propriedade 3, podemos escrever:

$$\Pr(A) = \Pr(A - B) + \Pr(A \cap B) \Rightarrow \Pr(A - B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$$

Volte à **Figura 8.2** para ver que o evento  $B - A = B \cap \bar{A}$  corresponde à parte não sombreada da figura e que

$$\Pr(B - A) = \Pr(B \cap \bar{A}) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

---

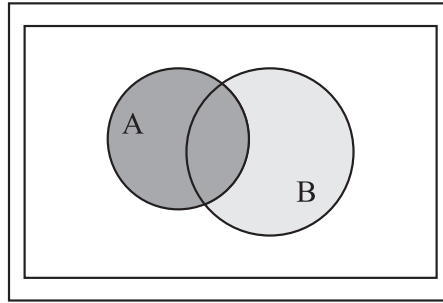
CQD

7. Para dois eventos  $A$  e  $B$  quaisquer,

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B).$$

***Demonstração***

Note que esse resultado generaliza a Propriedade 3 para dois eventos quaisquer, ou seja, não estamos exigindo que  $A$  e  $B$  sejam mutuamente exclusivos. Veja a **Figura 8.3**:



**Figura 8.3:** União de dois eventos quaisquer.

Toda a parte sombreada representa a união dos dois eventos, que pode ser decomposta nas duas partes com diferentes sombreamentos. A parte mais clara é  $B - A$ , e a parte mais escura é  $A$ , ou seja:

$$A \cup B = A \cup (B - A)$$

Como essas duas partes não têm intersecção, pela Propriedade 3, podemos escrever

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B - A)$$

Mas, na Propriedade 6, vimos que

$$\Pr(B - A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B).$$

Substituindo, obtemos que

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(B - A) + \Pr(A) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

---

CQD

8. Se  $A \subset B$  então  $\Pr(A) \leq \Pr(B)$ .

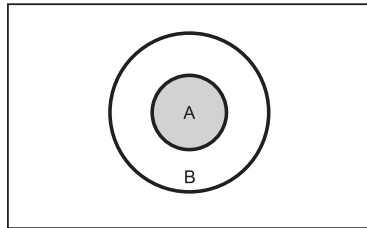
**Demonstração**

Veja a **Figura 8.4**. Se  $A \subset B$ , então  $A \cap B = A$ ; essa é a parte sombreada da figura. Nesse caso, usando a Propriedade 6, temos que

$$\Pr(B - A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B) = \Pr(B) - \Pr(A)$$

mas, pela Propriedade 1, a probabilidade de qualquer evento é não-negativa. Logo,

$$\Pr(B - A) \geq 0 \Rightarrow \Pr(B) - \Pr(A) \geq 0 \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(B)$$



**Figura 8.4:** Ilustração da Propriedade 8:  $A \subset B$ .

---

CQD

9.  $\Pr(A) \leq 1$  para qualquer evento  $A \subset \Omega$ .

**Demonstração**

Usando as Propriedades 8 e 2, temos que

$$A \subset \Omega \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(\Omega) = 1 \Rightarrow \Pr(A) \leq 1$$

---

CQD

## RESUMO DAS PROPRIEDADES

Vamos apresentar os resultados vistos anteriormente para facilitar o seu estudo.

### Propriedades da probabilidade

$$0 \leq \Pr(A) \leq 1$$

$$\Pr(\Omega) = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

$$\Pr(\emptyset) = 0$$

$$\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A)$$

$$\Pr(A - B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$$

$$\Pr(B - A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

$$A \subset B \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(B)$$

#### Exemplo 8.1.

No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de se obter face maior que 4?

#### Solução:

Sabemos que  $\#\Omega = 6$  e também que o evento de interesse é  $A = \{5, 6\}$ . Logo,  $\Pr(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .

#### Exemplo 8.2.

Considere um baralho usual composto de 52 cartas divididas em 4 naipes: ouros, copas, paus e espadas, cada naipe com 13 cartas. As cartas dos 2 primeiros naipes são *vermelhas* e as dos dois últimos naipes, *pretas*. Em cada naipe, as cartas podem ser Ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valete, Dama e Rei. Estas três últimas são *figuras* que representam a realeza. Retirando-se ao acaso uma carta desse baralho, qual é a probabilidade de que seja uma figura? Uma carta preta?



**Solução:**

Como há 52 cartas ao todo,  $\#\Omega = 52$ . Vamos denotar por  $F$  o evento “carta retirada é uma figura” e por  $P$  o evento “carta retirada é preta”. Em cada um dos 4 naipes há três figuras. Logo, o número total de figuras é  $4 \times 3$ , ou seja,  $\#F = 12$ . Logo, a probabilidade de retirarmos uma figura é  $\Pr(F) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$ . Metade das cartas é de cor preta; logo, a probabilidade de que a carta seja preta é  $\Pr(P) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ .

**Exemplo 8.3.**

Um número é escolhido entre os 20 primeiros inteiros, 1 a 20. Qual é a probabilidade de que o número escolhido seja (i) par? (ii) primo? (iii) quadrado perfeito?

**Solução:**

Vamos denotar por  $P$  o evento “número par”, por  $R$  o evento “número primo” e por  $Q$  o evento “quadrado perfeito”. Então,  $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ ;  $P = \{1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ ;  $Q = \{1, 4, 9, 16\}$ . Logo,  $\Pr(P) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ ;  $\Pr(R) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ ;  $\Pr(Q) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ .

**Exemplo 8.4.**

Uma urna contém 6 bolas pretas, 2 bolas brancas e 8 bolas verdes. Uma bola é escolhida ao acaso desta urna. Qual é a probabilidade de que (i) a bola não seja verde? (ii) a bola seja branca? (iii) a bola não seja nem branca nem verde?

**Solução:**

Temos um total de  $6 + 2 + 8 = 16$  bolas. Logo,  $\#\Omega = 16$ . Vamos denotar por  $P, B, V$  os eventos bola preta, branca e verde, respectivamente.

(i) Queremos a probabilidade de  $\overline{V}$ , ou seja, do complementar de  $V$ . Vimos que  $\Pr(\overline{V}) = 1 - \Pr(V) = 1 - \frac{8}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ .

(ii)  $\Pr(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$

(iii) Se a bola não é branca nem verde, ela tem que ser preta. Note que estamos pedindo  $\Pr(\overline{B} \cap \overline{V})$ . Pela lei de De Morgan e pelas Propriedades 3 e 4, temos que

$$\begin{aligned} \Pr(\overline{B} \cap \overline{V}) &= \Pr(\overline{B \cup V}) = 1 - \Pr(B \cup V) = \\ &= 1 - [\Pr(B) + \Pr(V)] = 1 - \frac{2}{16} - \frac{8}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = \Pr(P) \end{aligned}$$

Exemplo 8.5.

Consideremos novamente o lançamento de dois dados. Vamos definir os seguintes eventos:  $A$  = “soma das faces par”,  $B$  = “soma das faces maior que 9”,  $C$  = “soma das faces ímpar menor que 9”. Vamos calcular a probabilidade de tais eventos. A visualização do espaço amostral desse experimento pode ser vista na tabela a seguir, na qual, para cada par possível de resultados, apresentamos também a soma das faces:

		Dado 2					
		1	2	3	4	5	6
Dado 1	1	(1,1) → 2	(1,2) → 3	(1,3) → 4	(1,4) → 5	(1,5) → 6	(1,6) → 7
	2	(2,1) → 3	(2,2) → 4	(2,3) → 5	(2,4) → 6	(2,5) → 7	(2,6) → 8
	3	(3,1) → 4	(3,2) → 5	(3,3) → 6	(3,4) → 7	(3,5) → 8	(3,6) → 9
	4	(4,1) → 5	(4,2) → 6	(4,3) → 7	(4,4) → 8	(4,5) → 9	(4,6) → 10
	5	(5,1) → 6	(5,2) → 7	(5,3) → 8	(5,4) → 9	(5,5) → 10	(5,6) → 11
	6	(6,1) → 7	(6,2) → 8	(6,3) → 9	(6,4) → 10	(6,5) → 11	(6,6) → 12

Podemos ver que :

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\} \Rightarrow \#\Omega = 36$$

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), \\ (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), \\ (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6) \end{array} \right\} \Rightarrow \#A = 18$$

$$B = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\} \Rightarrow \#B = 6$$

$$C = \left\{ \begin{array}{l} (1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), \\ (3,2), (3,4), (4,1), (4,3), (5,2), (6,1), \end{array} \right\} \Rightarrow \#C = 12$$

Logo,

$$\Pr(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad \Pr(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \Pr(C) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

**Exemplo 8.6.**

Em uma urna há 4 bolas brancas e 3 bolas verdes. Duas bolas são retiradas dessa urna, sequencialmente e sem reposição. Qual é a probabilidade de obtermos (i) 2 bolas brancas? (ii) 2 bolas verdes? (iii) 2 bolas de cores diferentes?

**Solução:**

Vamos indicar por  $B_1, B_2, B_3$  e  $B_4$  as quatro bolas brancas e por  $V_1, V_2$  e  $V_3$  as três bolas verdes. O espaço amostral para este experimento é

$$\Omega = \{(C_1, C_2); \quad C_1, C_2 = B_1, B_2, B_3, B_4, V_1, V_2, V_3; \quad C_1 \neq C_2\}$$

A primeira bola pode ser qualquer uma; logo, há 7 bolas possíveis. Como a extração é sem reposição, para a segunda bola só há 6 possibilidades. Assim, o número total de pares é  $7 \times 6 = 42$ .

(i) O evento  $A =$  “2 bolas brancas” é

$$A = \left\{ \begin{array}{l} B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_2B_1, B_2B_3, B_2B_4, \\ B_3B_1, B_3B_2, B_3B_4, B_4B_1, B_4B_2, B_4B_3 \end{array} \right\}$$

Logo,  $\Pr(A) = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$ .

(ii) O evento  $B =$  “2 bolas verdes” é

$$B = \{V_1V_2, V_1V_3, V_2V_1, V_2V_3, V_3V_1, V_3V_2\}$$

Logo,  $\Pr(B) = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$

(iii) O evento  $C =$  “bolas de cores diferentes” é o complementar do evento  $D =$  “bolas de cores iguais”. Por sua vez,  $D = A \cup B$  e como  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos,

$$\Pr(D) = \Pr(A) + \Pr(B) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}.$$

Logo,  $\Pr(C) = 1 - \Pr(D) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

Note o trabalho que dá listar todos os elementos de um evento!

É interessante notar o seguinte fato sobre a extração das bolas: em vez de fazermos extrações sequenciais, podemos retirar 2 bolas simultaneamente. Em ambos os casos, as extrações são sem reposição, ou seja, a mesma bola não pode sair duas vezes. O que muda, então? Nas extrações simultâneas, não podemos diferenciar a ordem das bolas; por exemplo, os pares  $V_1V_2$  e  $V_2V_1$  são os mesmos. Dessa forma, a cardinalidade do espaço amostral fica reduzida por 2, que é  $2!$ , número de maneiras de organizar as 2 bolas. Se fossem 3 bolas, ficaria reduzido por  $3! = 6$ . Para ajudar na compreensão dessa diferença, vamos listar o espaço amostral nos dois casos, bem como os eventos que estudamos.

Evento	Extrações sequenciais	Evento	Extrações simultâneas
2 bolas brancas	$B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4,$ $B_2B_1, B_2B_3, B_2B_4,$ $B_3B_1, B_3B_2, B_3B_4,$ $B_4B_1, B_4B_2, B_4B_3,$	2 bolas brancas	$B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4,$ $B_2B_3, B_2B_4,$ $B_3B_4,$
2 bolas verdes	$V_1V_2, V_1V_3,$ $V_2V_1, V_2V_3,$ $V_3V_1, V_3V_2,$	2 bolas verdes	$V_1V_2, V_1V_3,$ $V_2V_3,$
Branca e verde	$B_1V_1, B_1V_2, B_1V_3,$ $B_2V_1, B_2V_2, B_2V_3,$ $B_3V_1, B_3V_2, B_3V_3,$ $B_4V_1, B_4V_2, B_4V_3,$	Uma branca e uma verde	$B_1V_1, B_1V_2, B_1V_3,$ $B_2V_1, B_2V_2, B_2V_3,$ $B_3V_1, B_3V_2, B_3V_3,$ $B_4V_1, B_4V_2, B_4V_3$
Verde e branca	$V_1B_1, V_1B_2, V_1B_3, V_1B_4,$ $V_2B_1, V_2B_2, V_2B_3, V_2B_4,$ $V_3B_1, V_3B_2, V_3B_3, V_3B_4$		

Note que as probabilidades são as mesmas em ambos os casos:

	Pr(2 verdes)	Pr(2 brancas)	Pr(cores diferentes)
Extrações sequenciais	$\frac{6}{42} = \frac{1}{7}$	$\frac{12}{42} = \frac{2}{7}$	$\frac{24}{42} = \frac{4}{7}$
Extrações simultâneas	$\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$	$\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$	$\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

Exemplo 8.7.

Em uma prova caíram dois problemas. Sabe-se que 132 alunos acertaram o primeiro, 86 erraram o segundo, 120 acertaram os dois e 54 acertaram apenas um. Sorteando-se ao acaso um desses alunos, qual é a probabilidade de que

- 1. não tenha acertado qualquer um dos dois problemas?
- 2. tenha acertado apenas o segundo problema?

**Solução:**

Vamos denotar por  $P_1$  e  $P_2$  os eventos “acertar problema 1” e “acertar problema 2” respectivamente. Os dados do problema nos dão que:

$$\begin{aligned} \#(P_1 \cap P_2) &= 120 && \text{(acertar os 2)} \\ \#P_1 &= 132 && \text{(acertar o primeiro)} \\ \#\overline{P_2} &= 86 && \text{(errar o segundo)} \\ \#[(P_1 \cap \overline{P_2}) \cup (\overline{P_1} \cap P_2)] &= 54 && \text{(acertar apenas um)} \end{aligned}$$

O número de alunos que acertaram apenas a primeira é

$$\#(P_1 \cap \overline{P_2}) = \#P_1 - \#(P_1 \cap P_2) = 132 - 120 = 12$$

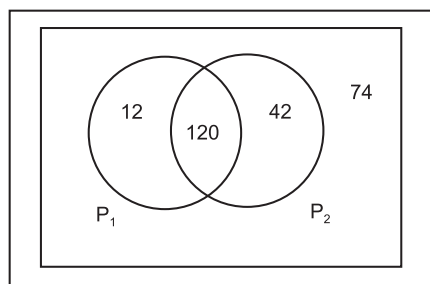
Logo, o número de candidatos que acertaram apenas a segunda é

$$\#(\overline{P_1} \cap P_2) = 54 - 12 = 42$$

Daí segue que o número de alunos que acertaram a segunda questão é

$$\#P_2 = \#(\overline{P_1} \cap P_2) + \#(P_1 \cap P_2) = 42 + 120 = 162$$

Essas cardinalidades estão ilustradas na **Figura 8.5**.



**Figura 8.5:** Espaço amostral do exemplo sobre acerto de duas questões.

Logo, o número total de alunos é

$$\#\Omega = \#(P_2 \cup \overline{P_2}) = \#P_2 + \#\overline{P_2} = 162 + 86 = 248$$

1. Pela lei de De Morgan, tem-se que

$$\begin{aligned} \Pr(\overline{P_1 \cap P_2}) &= \Pr(\overline{P_1} \cup \overline{P_2}) = 1 - \Pr(P_1 \cap P_2) = \\ &= 1 - [\Pr(P_1) + \Pr(P_2) - \Pr(P_1 \cap P_2)] = \\ &= 1 - \frac{132}{248} - \frac{162}{248} + \frac{120}{248} \\ &= \frac{74}{248} = \frac{37}{124} \end{aligned}$$

2. Pela Propriedade 6, tem-se que:

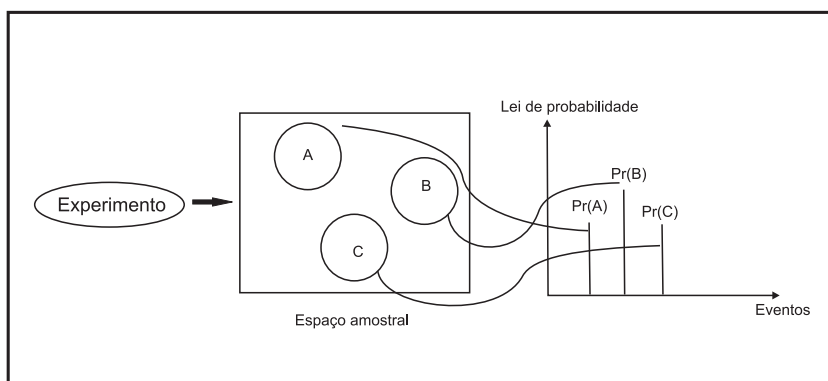
$$\Pr(P_2 \cap \overline{P}_1) = \Pr(P_2) - \Pr(P_1 \cap P_2) = \frac{162 - 120}{248} = \frac{42}{248} = \frac{21}{124}$$

### Exercício 8.1.

1. Em um arquivo há 4 balancetes de orçamento e 3 balancetes de custos. Em uma auditoria, o auditor seleciona aleatoriamente um desses balancetes. Qual é a probabilidade de que seja um balancete de custos? E de orçamento?
2. Considere a situação anterior, só que agora o auditor retira sequencialmente 2 balancetes sem reposição. Qual é a probabilidade de serem sorteados (i) 2 balancetes de custos? (ii) 2 balancetes de orçamento? (iii) 2 balancetes de tipos diferentes?

## DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA DE PROBABILIDADE

Anteriormente, vimos que a definição clássica de probabilidade se restringe a espaços amostrais finitos onde os eventos elementares são equiprováveis. Em tal contexto, mesmo com essas restrições, podemos observar o seguinte: a probabilidade é um número que associamos a cada evento de um espaço amostral  $\Omega$  e esse número - chamado *probabilidade* - satisfaz determinadas propriedades interessantes, que foram deduzidas (ou demonstradas) a partir das três primeiras. Vemos, assim, que probabilidade é uma função definida no conjunto de eventos de um espaço amostral. Na **Figura 8.6** ilustra-se o conceito de probabilidade como uma função, construindo-se um gráfico de barras para representá-la. Isso nos leva à *definição axiomática de probabilidade*.



**Figura 8.6:** Definição axiomática de probabilidade.

**Definição 8.2** (Definição Axiomática de Probabilidade).

Seja  $\Omega$  um espaço amostral associado a um experimento aleatório. Probabilidade é uma função, denotada por  $\Pr$ , que associa a cada evento  $A$  de  $\Omega$  um número real  $\Pr(A)$  que satisfaz os seguintes axiomas:

Axioma 1:  $\Pr(A) \geq 0$

Axioma 2:  $\Pr(\Omega) = 1$

Axioma 3:  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$

É importante que você observe que os três axiomas correspondem às três primeiras propriedades vistas para a definição clássica de probabilidade. Para a definição clássica, a demonstração da validade dessas três propriedades é imediata – e óbvia – a partir da teoria de conjuntos. No caso geral, elas formam o conjunto de *axiomas da probabilidade*. Como todas as outras propriedades foram deduzidas a partir dessas três propriedades, elas continuam valendo no caso geral, ou seja, a partir dos três axiomas deduzimos as seguintes propriedades:

$$\Pr(\emptyset) = 0$$

$$\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A)$$

$$\Pr(A - B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$$

$$\Pr(B - A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

$$A \subset B \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(B)$$

$$\Pr(A) \leq 1$$

Segundo o dicionário *Aurélio*:

*Axioma*

1. Premissa imediatamente evidente que se admite como universalmente verdadeira sem exigência de demonstração.
2. Proposição que se admite como verdadeira porque dela se podem deduzir as proposições de uma teoria ou de um sistema lógico ou matemático.

**Exemplo 8.8.**

Dados  $\Omega = \{1, 2, 3\}$ ,  $A = \{1\}$ ,  $B = \{2\}$ ,  $C = \{3\}$ ,  $\Pr(A) = \frac{1}{3}$ ,  $\Pr(B) = \frac{1}{3}$ , calcule:

1.  $\Pr(C)$
2.  $\Pr(A \cup B)$
3.  $\Pr(\overline{A})$
4.  $\Pr(\overline{A} \cap \overline{B})$
5.  $\Pr(\overline{A} \cup \overline{B})$ .

**Solução:**

1. Como  $\Pr(\Omega) = 1$ , resulta que

$$\Pr(C) = 1 - \Pr(A) - \Pr(B) = \frac{1}{3}.$$

2. Como  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos,

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) = \frac{2}{3}.$$

3.  $\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A) = \frac{2}{3}$ .

4. Pela lei de De Morgan, temos que

$$\Pr(\overline{A} \cap \overline{B}) = \Pr(\overline{A \cup B}) = 1 - \Pr(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

5. Pela lei de De Morgan, temos que

$$\Pr(\overline{A} \cup \overline{B}) = \Pr(\overline{A \cap B}) = 1 - \Pr(A \cap B) = 1 - 0 = 1.$$

**Exemplo 8.9.**

Dado que  $\Omega = \{-1, 0, 1\}$ , verifique se é possível definir uma medida de probabilidade em  $\Omega$  tal que

$$\Pr(\{-1, 1\}) = 0,6$$

$$\Pr(\{0, 1\}) = 0,9$$

$$\Pr(\{-1, 0\}) = 0,5$$

Justifique sua resposta.



**Solução:**

Note que o evento  $\{-1, 1\} = \{-1\} \cup \{1\}$ . Logo, as probabilidades dadas se transformam no seguinte sistema de 3 equações com 3 incógnitas:

$$\Pr(-1) + \Pr(1) = 0,6$$

$$\Pr(0) + \Pr(1) = 0,9$$

$$\Pr(-1) + \Pr(0) = 0,5$$

Da primeira equação, obtemos que  $\Pr(1) = 0,6 - \Pr(-1)$ . Substituindo na segunda, obtemos o seguinte sistema de 2 equações e 2 incógnitas:

$$\Pr(0) + 0,6 - \Pr(-1) = 0,9$$

$$\Pr(-1) + \Pr(0) = 0,5$$

ou

$$\Pr(0) - \Pr(-1) = 0,3$$

$$\Pr(0) + \Pr(-1) = 0,5$$

Somando termo a termo, resulta que

$$2 \times \Pr(0) = 0,8 \Rightarrow \Pr(0) = 0,4$$

Substituindo, obtemos que

$$\Pr(-1) = 0,5 - \Pr(0) = 0,5 - 0,4 \Rightarrow \Pr(-1) = 0,1$$

Substituindo novamente, obtemos

$$\Pr(1) = 0,6 - \Pr(-1) = 0,6 - 0,1 = 0,5$$

Como todos os valores obtidos estão no intervalo  $(0, 1)$  e somam 1, a atribuição de probabilidade dada é válida.

**Exemplo 8.10.**

Prove que:

$$\Pr[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] = \Pr(A) + \Pr(B) - 2\Pr(A \cap B)$$

Os dois termos da esquerda dão, respectivamente, as probabilidades dos eventos “apenas  $A$  ocorre” e “apenas  $B$  ocorre”. Logo, a afirmação trata da probabilidade de que *exatamente um* dos eventos  $A$  ou  $B$  ocorre.

**Solução:**

Pela Propriedade 6, temos que

$$\begin{aligned}\Pr(A \cap \overline{B}) &= \Pr(A) - \Pr(A \cap B) \\ \Pr(\overline{A} \cap B) &= \Pr(B) - \Pr(A \cap B)\end{aligned}$$

Somando essas igualdades termo a termo, obtém-se que:

$$\Pr(A \cap \overline{B}) + \Pr(\overline{A} \cap B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

Como  $A \cap \overline{B}$  e  $\overline{A} \cap B$  são mutuamente exclusivos, a soma de suas probabilidades é a probabilidade da sua união, ou seja,

$$\Pr(A \cap \overline{B}) + \Pr(\overline{A} \cap B) = \Pr[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)]$$

Logo,

$$\Pr[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] = \Pr(A) + \Pr(B) - 2\Pr(A \cap B)$$

Note que, pela definição clássica de probabilidade, isso significa que

$$\frac{\#[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)]}{\#\Omega} = \frac{\#A + \#B - 2 \times \#(A \cap B)}{\#\Omega}$$

e, portanto,

$$\#[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] = \#(A) + \#(B) - 2 \times \#(A \cap B)$$

.

## Resumo

Nesta aula, você estudou a definição clássica e a definição axiomática de probabilidade.

- **Definição clássica de probabilidade:** Para um espaço amostral finito  $\Omega$  em que os eventos elementares são igualmente prováveis, define-se a probabilidade como

$$\Pr(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

- **Definição axiomática de probabilidade:** Probabilidade é uma função que associa a cada evento  $A$  de um espaço amostral  $\Omega$  um número  $\Pr(A)$  que satisfaz os seguintes axiomas:

Axioma 1:  $\Pr(A) \geq 0$

Axioma 2:  $\Pr(\Omega) = 1$

Axioma 3:  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$

- **Propriedades da probabilidade:**

$$\Pr(\emptyset) = 0$$

$$\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A)$$

$$\Pr(A - B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$$

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

$$A \subset B \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(B)$$

$$\Pr(A) \leq 1$$

**Exercício 8.2.**

Se  $\Pr(A) = 1/3$  e  $\Pr(\overline{B}) = 1/4$ ,  $A$  e  $B$  podem ser mutuamente exclusivos?

**Exercício 8.3.**

Sejam  $A$  e  $B$  eventos mutuamente exclusivos tais que  $\Pr(A) = 0,5$  e  $\Pr(B) = 0,4$ .

1. Calcule  $\Pr(A \cup B)$ .
2. Calcule  $\Pr(B \cap \overline{A})$ .

**Exercício 8.4.**

Em uma urna há 15 bolas numeradas de 1 a 15. Três bolas são retiradas da urna sem reposição. Qual é a probabilidade de que:

1. o menor número seja 7?
2. o maior número seja 7?

**Exercício 8.5.**

Usando as propriedades já vistas, mostre que

$$\Pr(A \cup B \cup C) =$$

$$\Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) - \Pr(B \cap C) + \Pr(A \cap B \cap C)$$

*Sugestão:* Note que, pela propriedade associativa, você pode escrever  $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$ . Pense que  $A$  e  $B \cup C$  são dois eventos e aplique a Propriedade 7, que dá a probabilidade da união de dois eventos.

**Exercício 8.6.**

Usando a Propriedade 6, mostre as seguintes igualdades:

1.  $\Pr(A \cap B \cap \overline{C}) = \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap B \cap C)$
2.  $\Pr(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) + \Pr(A \cap B \cap C)$

**Exercício 8.7.**

Em uma cidade há três clubes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Em um grupo de 1000 famílias constatou-se que 470 são sócias do clube  $A$ ; 420 são sócias do clube  $B$ , 315 são sócias do clube  $C$ ; 110 são sócias dos clubes  $A$  e  $B$ ; 220 são sócias dos clubes  $A$  e  $C$ ; 140 são sócias dos clubes  $B$  e  $C$  e 75 são sócias dos 3 clubes. Escolhendo-se ao acaso uma família, qual é a probabilidade de que ela

1. não seja sócia de qualquer um dos clubes?
2. seja sócia de apenas um clube?
3. seja sócia de pelo menos dois clubes?

**Exercício 8.8.**

Em um levantamento em um bairro de 1.000 moradores, verifica-se que:

- 220 têm curso superior;
- 160 são casados;
- 100 estão desempregados;
- 50 têm curso superior, são casados e estão empregados;
- 60 têm curso superior e estão desempregados;
- 20 têm curso superior, são casados e estão desempregados.

Escolhe-se ao acaso um morador desse bairro. Qual é a probabilidade de que ele

1. tenha curso superior e seja casado?
2. ou tenha curso superior e seja casado ou esteja empregado?
3. ou tenha curso superior ou esteja desempregado?

**Exercício 8.9.**

Um lote é formado por 10 artigos bons, 4 com defeitos menores e 2 com defeitos graves. Um artigo é escolhido ao acaso. Ache a probabilidade de que:

1. ele não tenha defeitos;
2. ele não tenha defeitos graves;
3. ele seja perfeito ou tenha defeitos graves.

**Exercício 8.10.**

Quatro bolsas de estudo serão sorteadas entre 30 estudantes, dos quais 12 são do sexo masculino e 18 são do sexo feminino. Qual a probabilidade de que haja entre os sorteados:

1. uma pessoa do sexo masculino?
2. no máximo uma pessoa do sexo feminino?
3. pelo menos uma pessoa de cada sexo?

**SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS****Exercício 8.1.**

1. Vamos denotar por  $C$  o evento “balancete de custo” e por  $O$  o evento “balancete de orçamento”. Temos:

$$\#O = 4 \quad \#C = 3 \quad \#\Omega = 7$$

$$\text{Logo, } \Pr(O) = \frac{4}{7} \text{ e } \Pr(C) = \frac{2}{7}.$$

2. O espaço amostral para o experimento do sorteio sequencial de 2 balancetes sem reposição é

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} O_1 O_2, O_1 O_3, O_1 O_4, O_2 O_1, O_2 O_3, O_2 O_4, \\ O_3 O_1, O_3 O_2, O_3 O_4, O_4 O_1, O_4 O_2, O_4 O_3, \\ O_1 C_1, O_1 C_2, O_1 C_3, O_2 C_1, O_2 C_2, O_2 C_3, \\ O_3 C_1, O_3 C_2, O_3 C_3, O_4 C_1, O_4 C_2, O_4 C_3, \\ C_1 O_1, C_1 O_2, C_1 O_3, C_1 O_4, C_2 O_1, C_2 O_2, \\ C_2 O_3, C_2 O_4, C_3 O_1, C_3 O_2, C_3 O_3, C_3 O_4, \\ C_1 C_2, C_1 C_3, C_2 C_1, C_2 C_3, C_3 C_1, C_3 C_2 \end{array} \right\}$$

Logo,  $\#\Omega = 42$ .

(i) Seja  $A =$  “dois balancetes de custos”. Então,

$$A = \{C_1 C_2, C_1 C_3, C_2 C_1, C_2 C_3, C_3 C_1, C_3 C_2\}$$

$$\text{e } \Pr(A) = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}.$$

(ii) Seja  $B = \text{"dois balancetes de orçamento"}$ . Então,

$$B = \left\{ \begin{array}{l} O_1 O_2, O_1 O_3, O_1 O_4, O_2 O_1, O_2 O_3, O_2 O_4, \\ O_3 O_1, O_3 O_2, O_3 O_4, O_4 O_1, O_4 O_2, O_4 O_3 \end{array} \right\}$$

$$\text{e } \Pr(B) = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}.$$

(iii) Seja  $C = \text{"dois balancetes de tipos diferentes"}$ . Então,

$$C = \left\{ \begin{array}{l} O_1 C_1, O_1 C_2, O_1 C_3, O_2 C_1, O_2 C_2, O_2 C_3, \\ O_3 C_1, O_3 C_2, O_3 C_3, O_4 C_1, O_4 C_2, O_4 C_3, \\ C_1 O_1, C_1 O_2, C_1 O_3, C_1 O_4, C_2 O_1, C_2 O_2, \\ C_2 O_3, C_2 O_4, C_3 O_1, C_3 O_2, C_3 O_3, C_3 O_4, \end{array} \right\}$$

$$\text{e } \Pr(C) = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}.$$

### Exercício 8.2.

$$\Pr(B) = 1 - \Pr(\overline{B}) = \frac{3}{4}.$$

Se  $A$  e  $B$  fossem mutuamente exclusivos, teríamos que ter

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12} > 1.$$

Logo,  $A$  e  $B$  têm que ter interseção.

### Exercício 8.3.

Do enunciado, concluímos que  $A \cap B = \emptyset$ . Logo,

1.  $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) = 0,5 + 0,4 = 0,9$
2.  $\Pr(B \cap \overline{A}) = \Pr(B - A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B) = 0,4 - 0 = 0,4$

### Exercício 8.4.

1. Se o menor número é 7, isso significa que uma das bolas é a de número 7 e as outras 2 têm número de 8 a 15 e a ordem não importa. A probabilidade de sortear a bola 7 é  $\frac{1}{15}$ . Se a bola 7 é sorteada, sobram 14, das quais 8 têm número maior que 7. A probabilidade de sortear duas com número maior que 7, nesse caso, é  $\frac{8}{14} \times \frac{7}{13}$ . Como a

ordem não importa, existem  $\binom{3}{1}$  maneiras de sortear essas 3 bolas. Logo, a solução é

$$7, > 7, > 7 \text{ em qualquer ordem} \rightarrow \frac{1}{15} \times \frac{8}{14} \times \frac{7}{13} \times \binom{3}{1} = \frac{4}{65}$$

$$2. \quad 7, < 7, < 7 \text{ em qualquer ordem} \rightarrow \frac{1}{15} \times \frac{6}{14} \times \frac{5}{13} \times \binom{3}{1} = \frac{3}{91}$$

### Exercício 8.5.

Aqui vamos usar a Propriedade 7, que dá a probabilidade da união de 2 eventos e também a propriedade distributiva da interseção e união, vista na aula anterior.

$$\begin{aligned} \Pr(A \cup B \cup C) &= \Pr[(A \cup B) \cup C] = \\ &= \Pr(A \cup B) + \Pr(C) - \Pr[(A \cup B) \cap C] = \\ &= [\Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)] + \Pr(C) - \\ &\quad - \Pr[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ &= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) + \Pr(C) - \\ &\quad - \{\Pr(A \cap C) + \Pr(B \cap C) - \Pr[(A \cap C) \cap (B \cap C)]\} \end{aligned}$$

Mas  $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ . Logo,

$$\begin{aligned} \Pr(A \cup B \cup C) &= \Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) \\ &\quad - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) - \Pr(B \cap C) \\ &\quad + \Pr(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Note que, como todos os termos estão divididos por  $\#\Omega$ , esse resultado vale também para a cardinalidade da união de três eventos – basta substituir  $\Pr$  por  $\#$ .

### Exercício 8.6.

A Propriedade 6 nos diz que

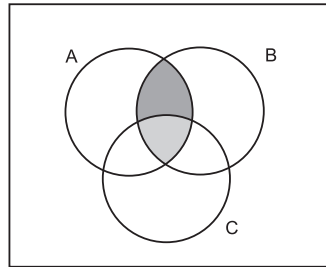
$$\Pr(A \cap \overline{B}) = \Pr(A - B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B).$$

1. Esse resultado trata da probabilidade de ocorrer  $A$  e  $B$ , mas não  $C$ . Usando a propriedade associativa, temos que

$$\Pr(A \cap B \cap \overline{C}) = \Pr[(A \cap B) \cap \overline{C}] = \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap B \cap C)$$



Veja a **Figura 8.7**. Toda a parte sombreada corresponde à ocorrência de  $A$  e  $B$ , ou seja,  $A \cap B$ . A parte sombreada mais escura é o evento de interesse:  $A \cap B \cap \bar{C}$  e a parte sombreada mais clara é  $A \cap B \cap C$ .

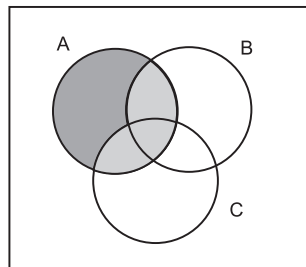


**Figura 8.7:** Ocorrência dos eventos  $A$  e  $B$  mas não de  $C$ .

2. Esse resultado trata da probabilidade de ocorrer apenas  $A$ , dentre os três eventos. Usando as propriedades comutativa e associativa, mais o resultado da letra (a), podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \Pr(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) &= \Pr(A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) = \Pr[(A \cap \bar{C}) \cap \bar{B}] \\
 &= \Pr(A \cap \bar{C}) - \Pr(A \cap \bar{C} \cap B) \\
 &= \Pr(A) - \Pr(A \cap C) - \Pr(A \cap B \cap \bar{C}) \\
 &= \Pr(A) - \Pr(A \cap C) - [\Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap B \cap C)] \\
 &= \Pr(A) - \Pr(A \cap C) - \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap B \cap C)
 \end{aligned}$$

Veja a **Figura 8.8**. Toda a parte sombreada corresponde ao evento  $A$ . A parte sombreada mais escura corresponde ao evento de interesse:  $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ . Note que se subtrairmos  $A \cap B$  e  $A \cap C$ , estaremos subtraindo duas vezes  $A \cap B \cap C$ ; aí, temos que somar  $A \cap B \cap C$  uma vez para compensar.

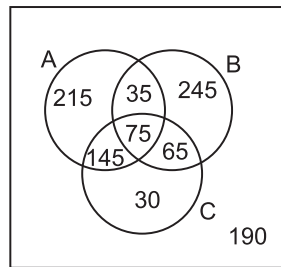


**Figura 8.8:** Ocorrência de  $A$ , mas não de  $B$  e  $C$ .

**Exercício 8.7.**

$$\begin{aligned} \#\Omega &= 1.000, \quad \#A = 470, \quad \#B = 420, \quad \#C = 315, \\ \#(A \cap B) &= 110, \quad \#(A \cap C) = 220, \quad \#(B \cap C) = 140, \quad \#(A \cap B \cap C) = 75. \end{aligned}$$

Veja a **Figura 8.9**:



**Figura 8.9:** Solução do exercício sobre os 3 clubes de uma cidade.

1. Note que o evento  $A \cup B \cup C$  corresponde ao evento “família sorteada é sócia de pelo menos um clube”. O problema pede “não é sócia de qualquer clube”, ou seja,  $\overline{A \cap B \cap C}$ . Pelas leis de De Morgan e do evento complementar, temos que

$$\Pr(\overline{A \cap B \cap C}) = \Pr(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - \Pr(A \cup B \cup C)$$

Mas,

$$\Pr(A \cup B \cup C) = \Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) - \Pr(B \cap C) + \Pr(A \cap B \cap C)$$

e, para o problema,

$$\begin{aligned} \Pr(\overline{A \cap B \cap C}) &= 1 - \Pr(A \cup B \cup C) \\ &= 1 - 0,47 - 0,42 - 0,315 + 0,11 + 0,22 + 0,140 - 0,075 \\ &= 0,19 \end{aligned}$$

2. O problema pede

$$\Pr[(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)]$$

Como os três eventos são mutuamente exclusivos, temos

que

$$\begin{aligned} & \Pr[(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)] \\ &= \Pr(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) + \Pr(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) + \Pr(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \end{aligned}$$

O primeiro termo se refere àqueles que são sócias apenas de  $A$ , o segundo termo, apenas de  $B$  e o terceiro termo, apenas de  $C$ . Usando o exercício anterior, temos que

$$\begin{aligned} & \Pr(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \\ &= \Pr(A) - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) + \Pr(A \cap B \cap C) \quad (8.2) \\ &= 0,47 - 0,11 - 0,22 + 0,075 = 0,215 \end{aligned}$$

Analogamente, prova-se que

$$\begin{aligned} & \Pr(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \\ &= \Pr(B) - \Pr(A \cap B) - \Pr(B \cap C) + \Pr(A \cap B \cap C) \quad (8.3) \\ &= 0,42 - 0,11 - 0,14 + 0,075 = 0,245 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Pr(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \\ &= \Pr(C) - \Pr(A \cap C) - \Pr(B \cap C) + \Pr(A \cap B \cap C) \quad (8.4) \\ &= 0,315 - 0,22 - 0,14 + 0,075 = 0,03 \end{aligned}$$

e a probabilidade pedida é  $0,215 + 0,245 + 0,03 = 0,49$ .

3. Como são 3 clubes, uma família pode ser sócia de 3, 2, 1, ou 0. Nesse caso, o evento  $F$  = “ser sócio de pelo menos 2” é o complementar do evento “ser sócio de no máximo 1” e esse, por sua vez, é a união dos eventos “ser sócio de nenhum” e “ser sócio de exatamente 1”, cujas probabilidades foram calculadas nas letras (a) e (b). Logo,

$$\begin{aligned} \Pr(F) &= \Pr(A \cap B \cap \bar{C}) + \Pr(A \cap \bar{B} \cap C) + \Pr(\bar{A} \cap B \cap C) + \Pr(A \cap \bar{B} \cap C) \\ &= 1 - 0,19 - 0,49 = 0,32 \end{aligned}$$

### Exercício 8.8.

Sejam os eventos  $S$  = “ter curso superior”,  $C$  = “ser casado”,  $D$  = “estar desempregado”. O problema dá que

$$\Pr(S) = 0,22 \quad \Pr(C) = 0,16 \quad \Pr(D) = 0,10$$

$$\Pr(S \cap C \cap \bar{D}) = 0,05 \quad \Pr(S \cap D) = 0,06 \quad \Pr(S \cap C \cap D) = 0,02$$

1. O problema pede  $\Pr(S \cap C)$ . Temos que

$$\Pr(S \cap C) = \Pr(S \cap C \cap D) + \Pr(S \cap C \cap \overline{D}) = 0,02 + 0,05 = 0,07$$

2. O problema pede  $\Pr[(S \cap C) \cup \overline{D}]$ . Temos que

$$\begin{aligned}\Pr[(S \cap C) \cup \overline{D}] &= \Pr(S \cap C) + \Pr(\overline{D}) - \Pr(S \cap C \cap \overline{D}) = \\ &= 0,07 + 0,90 - 0,05 = 0,92\end{aligned}$$

3. O problema pede  $\Pr(S \cup D)$ . Temos que

$$\Pr(S \cup D) = \Pr(S) + \Pr(D) - \Pr(S \cap D) = 0,22 + 0,10 - 0,06 = 0,26$$

### Exercício 8.9.

Sejam os eventos  $B$  = “artigo bom”,  $M$  = “artigo com defeitos menores” e  $G$  = “artigo com defeitos graves”. Pelos dados do problema, temos que

$$\Pr(B) = \frac{10}{16}, \quad \Pr(M) = \frac{4}{16}, \quad \Pr(G) = \frac{2}{16}.$$

1.  $\Pr(\text{não ter defeito}) = \Pr(B) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$
2.  $\Pr(\text{não ter defeito grave}) = \Pr(\overline{G}) = 1 - \Pr(G) = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$
3.  $\Pr(\text{ser perfeito ou ter defeito grave}) = \Pr(B \cup G) =$   
 $\Pr(B) + \Pr(G) = \frac{10}{16} + \frac{2}{16} = \frac{3}{4}.$

Note que esses são eventos mutuamente exclusivos, ou seja,  $\Pr(B \cap G) = 0$ .

### Exercício 8.10.

O número total de formas de distribuir as 4 bolsas é

$$\#\Omega = \binom{30}{4}$$

1. Uma bolsa para um aluno do sexo masculino significa que 3 bolsas vão para alunos do sexo feminino. Existem  $\binom{12}{1}$

maneiras de escolher o aluno do sexo masculino e  $\binom{18}{3}$  maneiras de escolher os 3 do sexo feminino. Logo, pelo princípio fundamental da multiplicação,

$$\begin{aligned} \text{Pr}(1 \text{ do sexo masculino}) &= \\ \frac{\binom{12}{1} \binom{18}{3}}{\binom{30}{4}} &= \frac{12 \times \frac{18 \times 17 \times 16}{3 \times 2}}{\frac{30 \times 29 \times 28 \times 27}{4 \times 3 \times 2}} = \frac{1.088}{3.045} = 0,357307. \end{aligned}$$

$$2. \text{Pr}(\text{nenhum do sexo feminino}) + \text{Pr}(1 \text{ do sexo feminino}) =$$

$$\frac{\binom{12}{4}}{\binom{30}{4}} + \frac{\binom{12}{3} \binom{18}{1}}{\binom{30}{4}} = \frac{4.455}{27.405} = 0,162562$$

$$3. \text{Pr}(\text{pelo menos 1 de cada sexo}) = 1 - \text{Pr}(\text{nenhum do sexo masculino}) - \text{Pr}(\text{nenhum do sexo feminino}) =$$

$$\text{Pr}(\text{pelo menos 1 de cada sexo}) =$$

$$1 - \text{Pr}(\text{nenhum do sexo masculino}) - \text{Pr}(\text{nenhum do sexo feminino}) =$$

$$1 - \frac{\binom{18}{4}}{\binom{30}{4}} - \frac{\binom{12}{4}}{\binom{30}{4}} = 0,870279$$



# Aula 9

## PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA DE EVENTOS

---

### Objetivos

Nesta aula, você

- 1 aprenderá os conceitos de probabilidade condicional e independência de eventos;
- 2 verá também que esses são conceitos importantes na modelagem de fenômenos aleatórios, com aplicações em diversas áreas do conhecimento.

## PROBABILIDADE CONDICIONAL

Consideremos o lançamento de um dado equilibrado. Já vimos que o espaço amostral desse experimento é

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Considere o evento  $A = \text{“sair face 2”}$ . Se não temos qualquer informação além de: o dado ser equilibrado, vimos que

$$\Pr(A) = \frac{1}{6}.$$

Suponhamos, agora, que o dado tenha sido lançado e a seguinte informação fornecida: “saiu face par”. Qual é a probabilidade de ter saído face 2?

Note a diferença: agora nós temos uma informação parcial sobre o experimento e devemos usá-la para reavaliar a nossa estimativa. Mais precisamente, sabemos que ocorreu o evento  $B = \text{“face par”}$ . Com essa informação, podemos nos concentrar no evento  $B = \{2, 4, 6\}$ , uma vez que as faces 1, 3, 5 ficam descartadas em função da informação dada. Dentro dessas três possibilidades, a probabilidade do evento  $A$  passa a ser  $\frac{1}{3}$ .

Calculamos, assim, a probabilidade do evento  $A$ , sabendo que ocorreu o evento  $B$ . Essa probabilidade será denotada por  $\Pr(A|B)$  (lê-se probabilidade de  $A$  dado  $B$ ).

Consideremos, agora, o lançamento de dois dados equilibrados e os eventos  $A = \text{“soma das faces é par”}$  e  $B = \text{“soma das faces é maior ou igual a 9”}$ . Se sabemos que ocorreu  $B$ , qual é a probabilidade de ter ocorrido  $A$ ?

Queremos calcular  $\Pr(A|B)$ . Temos que

$$A = \left\{ (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), \right. \\ \left. (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6) \right\}$$

$$B = \{(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

Se ocorreu  $B$ , a única chance de ter ocorrido  $A$  é que tenha ocorrido o evento

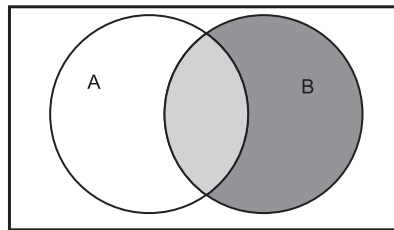
$$A \cap B = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4), (6, 6)\}$$



e, nesse caso, a probabilidade é  $\frac{4}{10}$ , ou seja,

$$\Pr(A|B) = \frac{4}{10} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

Esses dois exemplos ilustram o fato geral que está exibido na **Figura 9.1**: se sabemos que aconteceu o evento  $B$ , esse evento passa a ser o “novo espaço amostral” e nesse novo espaço amostral, a única parte de  $A$  presente é  $A \cap B$  - parte sombreada mais clara.



**Figura 9.1:** Probabilidade condicional  $\Pr(A|B)$ .

Com esses exemplos, estamos ilustrando uma situação comum, onde temos que calcular a probabilidade de um evento tendo uma *informação parcial*. Esse é o conceito de *probabilidade condicional*.

### Definição 9.1.

A **probabilidade condicional** do evento  $A$  dada a ocorrência do evento  $B$  é

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

Note que, nessa definição, temos que supor que o evento  $B$  é um evento possível, já que ele ocorreu. Logo, é óbvio que  $\Pr(B) > 0$ .

**Exemplo 9.1.**

Um grupo de 100 alunos foi classificado quanto ao sexo e à atividade de lazer preferida, obtendo-se a distribuição dada na tabela a seguir.

Sexo	Atividade de lazer			Total
	Cinema	Praia	Esporte	
Masculino	10	12	13	35
Feminino	15	41	9	65
Total	25	53	22	100

- 1. Qual é a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso neste grupo ser do sexo masculino?
- 2. Se a pessoa escolhida prefere a praia como atividade de lazer, qual é a probabilidade de que seja um homem?

**Solução:**

Vamos definir os seguintes eventos:  $M$  = “masculino”;  $F$  = “feminino”;  $C$  = “cinema”;  $P$  = “praia”;  $E$  = “esporte”.

- 1. O problema pede  $\Pr(M)$ . Como há 35 homens dentre as 100 pessoas, temos que

$$\Pr(M) = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$$

- 2. O problema pede  $\Pr(M|P)$ . Por definição,

$$\Pr(M|P) = \frac{\Pr(M \cap P)}{\Pr(P)} = \frac{\frac{12}{100}}{\frac{53}{100}} = \frac{12}{53}$$

Note que a probabilidade do evento “aluno do sexo masculino” se modifica quando sabemos que a pessoa prefere a praia como atividade de lazer.

**Exemplo 9.2.**

De um baralho de 52 cartas, extraí-se uma ao acaso. Defina os eventos  $C$  = “carta é de copas” e  $R$  = “carta é um rei”. Calcule  $\Pr(C)$ ,  $\Pr(R)$ ,  $\Pr(C \cap R)$ ,  $\Pr(C|R)$ .

**Solução:**

$$\Pr(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$\Pr(R) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$\Pr(C \cap R) = \frac{1}{52}$$

$$\Pr(C|R) = \frac{\Pr(C \cap R)}{\Pr(R)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{13}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = \Pr(C)$$

Neste caso, a probabilidade do evento  $C$  não se modifica quando sabemos da ocorrência do evento  $R$ .

### Exemplo 9.3.

De um total de 500 empregados, 200 possuem plano pessoal de aposentadoria complementar, 400 contam com o plano de aposentadoria complementar oferecido pela empresa e 200 empregados possuem ambos os planos. Sorteia-se aleatoriamente um empregado dessa empresa.

1. Qual é a probabilidade de que ele tenha algum plano de aposentadoria complementar?
2. Qual é a probabilidade de que ele não possua qualquer plano de aposentadoria complementar?
3. Se o empregado conta com o plano de aposentadoria complementar oferecido pela empresa, qual é a probabilidade de que ele tenha plano pessoal de aposentadoria complementar?
4. Se o empregado tem plano pessoal de aposentadoria complementar, qual é a probabilidade de que ele conte com o plano de aposentadoria complementar da empresa?

**Solução:**

Vamos denotar por  $E$  o evento “empregado tem o plano aposentadoria complementar da empresa” e por  $P$  o evento “empregado possui plano pessoal de aposentadoria complementar”. O problema diz que

$$\Pr(P) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5} \quad \Pr(E) = \frac{400}{500} = \frac{4}{5} \quad \Pr(P \cap E) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5}$$

Note que essas informações podem ser dispostas em forma de tabela como:

		Plano pessoal		Total
		Sim	Não	
Plano da Empresa	Sim	<b>200</b>	200	<b>400</b>
	Não	0	100	100
Total		<b>200</b>	300	<b>500</b>

Os números em negrito são as informações dadas no problema; o restante é calculado observando-se os totais de linha e de coluna.

1. O problema pede

$$\Pr(P \cup E) = \Pr(P) + \Pr(E) - \Pr(P \cap E) = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

2. O problema pede

$$\Pr(\overline{P \cap E}) = \Pr(\overline{P \cup E}) = 1 - \Pr(P \cup E) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

3. O problema pede

$$\Pr(P|E) = \frac{\Pr(P \cap E)}{\Pr(E)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}$$

4. O problema pede

$$\Pr(E|P) = \frac{\Pr(P \cap E)}{\Pr(P)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} = 1$$

Exercício 9.1.

Dois dados equilibrados são lançados.

- 1. Encontre a probabilidade de saírem faces iguais nos dois dados.
- 2. Sabendo-se que a soma das faces foi menor ou igual a quatro, calcule a probabilidade de saírem faces iguais nos dois dados.
- 3. Calcule a probabilidade de sair cinco em pelo menos um dado.
- 4. Sabendo-se que saíram faces diferentes nos dois dados, determine a probabilidade de sair cinco em pelo menos um dado.

**Exercício 9.2.**

A probabilidade de que uma nova campanha publicitária fique pronta antes do prazo estipulado pela diretoria foi estimada em 0,60. A probabilidade de que a diretoria aprove essa campanha publicitária é de 0,50. A probabilidade de que ambos os objetivos sejam atingidos é 0,30.

1. Qual é a probabilidade de que pelo menos um dos objetivos seja atingido?
2. Qual é a probabilidade de que nenhum objetivo seja atingido?
3. Se a campanha ficou pronta antes do prazo estipulado, qual é a probabilidade de que a diretoria a aprove?

**Exercício 9.3.**

Sejam  $A$  e  $B$  eventos do espaço amostral  $\Omega$  tais que  $\Pr(A) = \frac{1}{2}$ ,  $\Pr(B) = \frac{1}{3}$  e  $\Pr(A \cap B) = \frac{1}{4}$ .

1. Calcule  $\Pr(A \cup B)$ .
2. Calcule  $\Pr(\overline{A} \cap \overline{B})$ .
3. Calcule  $\Pr(A|\overline{B})$ .

**PROBABILIDADE CONDICIONAL COMO LEI DE PROBABILIDADE**

É interessante notar que a probabilidade condicional definida acima *realmente* define uma lei de probabilidade, ou seja, a função que associa a cada evento  $A$  de  $\Omega$  o número  $\Pr(A|B)$  satisfaz os axiomas de probabilidade. De fato:

**Axioma 1:**

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \geq 0$$

pois  $\Pr(A \cap B) \geq 0$  e  $\Pr(B) > 0$ .

**Axioma 2:**

$$\Pr(\Omega|B) = \frac{\Pr(\Omega \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(B)}{\Pr(B)} = 1$$

Na verdade, como  $\Pr(B|B) = \frac{\Pr(B)}{\Pr(B)} = 1$ , toda a probabilidade condicional está concentrada em  $B$ , o que justifica considerarmos  $B$  como o novo espaço amostral para essa nova lei de probabilidade.

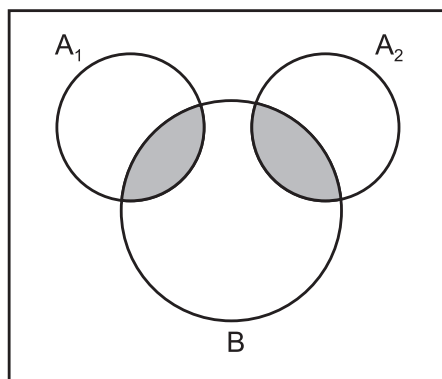
**Axioma 3:**

Sejam  $A_1$  e  $A_2$  dois eventos mutuamente exclusivos (veja **Figura 9.2**). Usando a propriedade distributiva, temos que

$$\Pr(A_1 \cup A_2|B) = \frac{\Pr[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{\Pr(B)} = \frac{\Pr[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{\Pr(B)}$$

Mas, como  $A_1$  e  $A_2$  são mutuamente exclusivos, resulta que  $(A_1 \cap B)$  e  $(A_2 \cap B)$  também o são – esses dois eventos correspondem à parte sombreada da figura. Logo,

$$\begin{aligned} \Pr(A_1 \cup A_2|B) &= \frac{\Pr[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{\Pr(B)} = \\ &= \frac{\Pr(A_1 \cap B) + \Pr(A_2 \cap B)}{\Pr(B)} = \\ &= \frac{\Pr(A_1 \cap B)}{\Pr(B)} + \frac{\Pr(A_2 \cap B)}{\Pr(B)} = \\ &= \Pr(A_1|B) + \Pr(A_2|B) \end{aligned}$$



**Figura 9.2:** Axioma 3 da probabilidade condicional.

Sendo a probabilidade condicional uma lei de probabilidade, todas as propriedades vistas anteriormente, que eram consequência dos axiomas, valem também para a probabilidade condicional.

**Propriedade 1:**

$$\Pr(\emptyset|B) = 0$$

**Propriedade 2:**

$$\Pr(\overline{A}|B) = 1 - \Pr(A|B)$$

**Propriedade 3:**

$$\Pr[(A_1 - A_2) | B] = \Pr(A_1 | B) - \Pr[(A_1 \cap A_2) | B]$$

**Propriedade 4:**

$$\Pr[(A_1 \cup A_2) | B] = \Pr(A_1 | B) + \Pr(A_2 | B) - \Pr[(A_1 \cap A_2) | B]$$

**Propriedade 5:**

$$A_2 \subset A_1 \Rightarrow \Pr(A_2|B) \leq \Pr(A_1|B)$$

**Propriedade 6:**

$$A \cap B \subset B \Rightarrow \Pr(A|B) \leq 1$$



Note que a definição de probabilidade condicional está vinculada ao evento  $B$  em que estamos condicionando, ou seja, se condicionarmos em um outro evento  $C$ , estaremos definindo uma outra função de probabilidade – a função de probabilidade condicional em  $C$ .

## REGRA DA MULTIPLICAÇÃO

A definição de probabilidade condicional leva a um resultado importante, conhecido como *regra da multiplicação*.



### Regra da multiplicação para dois eventos

Sejam  $A$  e  $B$  eventos de um espaço amostral  $\Omega$ . Então,

$$\Pr(A \cap B) = \begin{cases} \Pr(B) \Pr(A|B) \\ \Pr(A) \Pr(B|A) \end{cases}$$

Esse resultado nos permite calcular a probabilidade da interseção de dois eventos e é muito útil para modelar experimentos que têm caráter sequencial, isto é, que são executados em etapas, uma seguida da outra. Em tais situações, pode ser de ajuda desenhar um *diagrama de árvore* para ilustrar os eventos em questão. Vamos ver alguns exemplos.

### Exemplo 9.4.

Se um avião está presente em determinada área, um radar detecta sua presença com probabilidade 0,99. No entanto, se o avião não está presente, o radar detecta erradamente a presença de um avião com probabilidade 0,02.

A probabilidade de um avião estar presente nesta área é de 0,05. Qual é a probabilidade de um falso alarme? Qual é a probabilidade de o radar deixar de detectar um avião? (Note que esses são os dois erros possíveis nesta situação.)

### Solução:

Vamos definir os seguintes eventos:

$A$  = “avião presente”

$D$  = “radar detecta presença de avião”



Os eventos complementares são:

$$\bar{A} = \text{“avião não está presente”}$$

$$\bar{D} = \text{“radar não detecta avião”}$$

O problema nos dá as seguintes informações:

$$\Pr(D|A) = 0,99 \quad \Pr(D|\bar{A}) = 0,02 \quad \Pr(A) = 0,05$$

Pela lei do evento complementar, temos que

$$\Pr(\bar{D}|A) = 0,01 \quad \Pr(\bar{D}|\bar{A}) = 0,98 \quad \Pr(\bar{A}) = 0,95$$

O problema pede

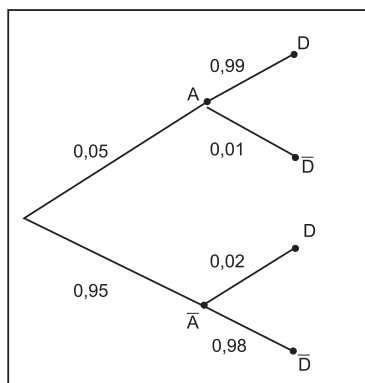
$$\Pr(D \cap \bar{A}) \quad \text{falso alarme}$$

$$\Pr(\bar{D} \cap A)$$

Na **Figura 9.3**, temos a ilustração desse experimento. Daí, podemos ver que as probabilidades pedidas são:

$$\Pr(D \cap \bar{A}) = \Pr(\bar{A}) \Pr(D|\bar{A}) = 0,95 \times 0,02 = 0,019$$

$$\Pr(\bar{D} \cap A) = \Pr(A) \Pr(\bar{D}|A) = 0,05 \times 0,01 = 0,0005$$



**Figura 9.3:** Diagrama de árvore para o problema do radar.

Note que a probabilidade de um erro é a soma dessas probabilidades.

### Exemplo 9.5.

Considere que duas cartas de um baralho (13 cartas de cada um dos naipes copas, paus, ouro, espada) sejam extraídas sem reposição, uma depois da outra. Qual é a probabilidade de nenhuma das duas ser de copas?

**Solução:**

Para solucionar esse problema, devemos notar que as cartas no baralho são igualmente prováveis, antes e depois da primeira extração. Vamos definir os seguintes eventos:

$C_1$  = copas na primeira extração

$C_2$  = copas na segunda extração

Queremos calcular  $\Pr(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2)$ . Pela regra da multiplicação, temos que

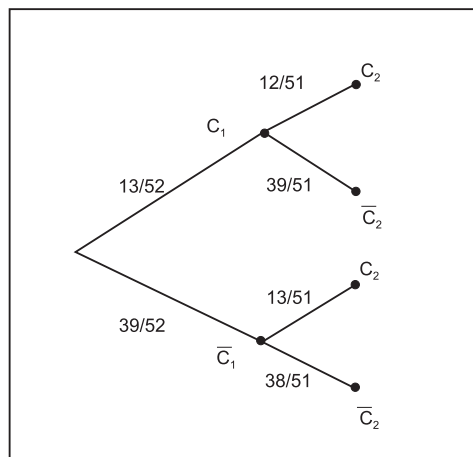
$$\Pr(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2) = \Pr(\overline{C}_1) \Pr(\overline{C}_2 | \overline{C}_1)$$

Na primeira extração, temos 39 cartas que não são de copas, em um baralho de 52. Na segunda extração, dado que na primeira não saiu copas, temos 38 cartas que não são copas em um baralho de 51. Logo,

$$\Pr(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2) = \Pr(\overline{C}_1) \Pr(\overline{C}_2 | \overline{C}_1) = \frac{39}{52} \times \frac{38}{51}$$

Veja a **Figura 9.4**, onde temos o diagrama de árvore para esse problema. Cada nó na árvore corresponde à ocorrência de um evento condicionada à ocorrência de todos os eventos representados pelos nós anteriores no caminho correspondente.

Assim, a parte superior da árvore corresponde à ocorrência de copas na primeira extração – evento  $C_1$  – e a parte inferior à não ocorrência de copas na primeira extração - evento  $\overline{C}_1$ .



**Figura 9.4:** Diagrama de árvore para o experimento de extração de 2 cartas sem reposição.

Continuando com a parte superior, vemos que

$$\begin{aligned}\Pr(C_1) &= \frac{13}{52} \\ \Pr(C_2|C_1) &= \frac{12}{51} \\ \Pr(\overline{C}_2|C_1) &= \frac{39}{51}\end{aligned}$$

Note que, pela lei do complementar,  $\Pr(C_2|C_1) + \Pr(\overline{C}_2|C_1) = 1$ .

Na parte inferior da árvore, temos

$$\begin{aligned}\Pr(\overline{C}_1) &= \frac{39}{52} \\ \Pr(C_2|\overline{C}_1) &= \frac{13}{51} \\ \Pr(\overline{C}_2|\overline{C}_1) &= \frac{38}{51}\end{aligned}$$

### Exemplo 9.6.

Suponhamos agora a extração de três cartas sem reposição, onde estamos interessados no mesmo evento “nenhuma de copas”. Queremos  $\Pr(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3)$ . Como generalizar a regra da multiplicação para esse caso?

### Solução:

Usando um recurso algébrico, podemos escrever (note que os termos se cancelam):

$$\begin{aligned}\Pr(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3) &= \Pr(\overline{C}_1) \times \frac{\Pr(\overline{C}_2 \cap \overline{C}_1)}{\Pr(\overline{C}_1)} \times \frac{\Pr(\overline{C}_3 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_1)}{\Pr(\overline{C}_2 \cap \overline{C}_1)} = \\ &= \Pr(\overline{C}_1) \times \frac{\Pr(\overline{C}_2 \cap \overline{C}_1)}{\Pr(\overline{C}_1)} \times \frac{\Pr(\overline{C}_3 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_1)}{\Pr(\overline{C}_2 \cap \overline{C}_1)}\end{aligned}$$

Aplicando a definição de probabilidade condicional, resulta que

$$\Pr(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3) = \Pr(\overline{C}_1) \Pr(\overline{C}_2|\overline{C}_1) \Pr(\overline{C}_3|\overline{C}_2 \cap \overline{C}_1)$$

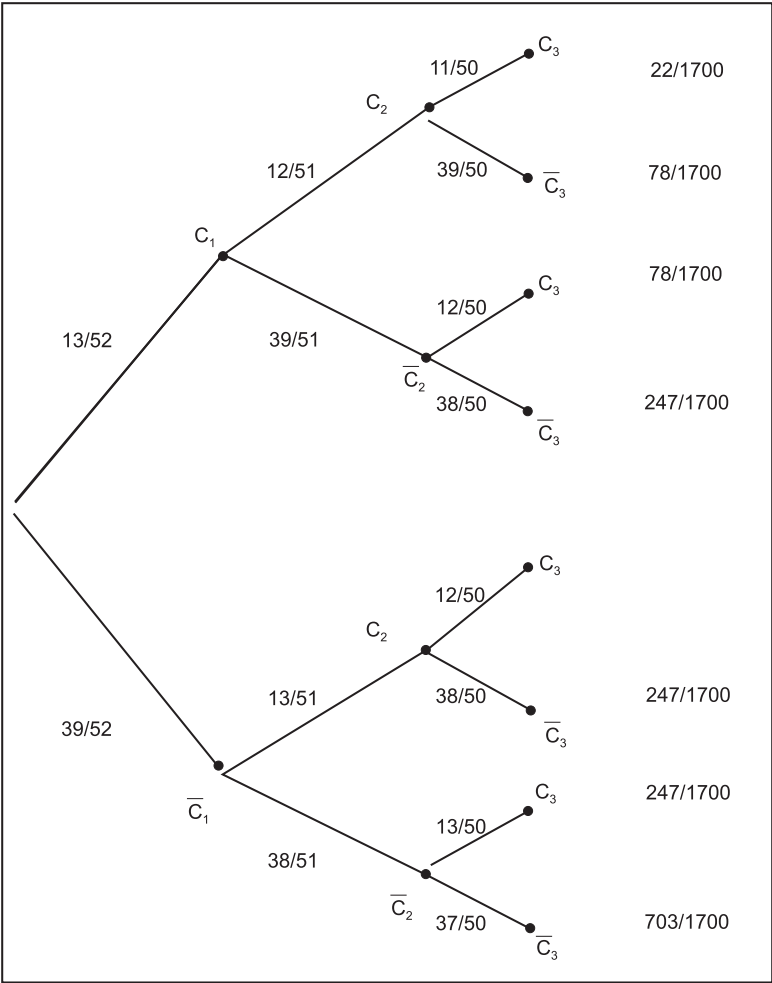
Voltando ao baralho, temos, como antes,  $\Pr(\overline{C}_1) = \frac{39}{52}$  e  $\Pr(\overline{C}_2|\overline{C}_1) = \frac{38}{51}$ . Com o mesmo tipo de raciocínio, resulta que

$$\Pr(\overline{C}_3|\overline{C}_2\cap\overline{C}_1) = \frac{37}{50}. \text{ Logo,}$$
$$\Pr(\overline{C}_1\cap\overline{C}_2\cap\overline{C}_3) = \frac{39}{52} \times \frac{38}{51} \times \frac{37}{50}$$

Veja a **Figura 9.5**. No diagrama de árvore, o espaço amostral completo é exibido.

Algumas probabilidades são:

$\Pr(C_1\cap C_2\cap C_3) = \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{11}{50} = \frac{22}{1700}$	ramo 1
$\Pr(C_1\cap\overline{C}_2\cap C_3) = \frac{13}{52} \times \frac{39}{51} \times \frac{12}{50} = \frac{78}{1700}$	ramo 3
$\Pr(\overline{C}_1\cap C_2\cap\overline{C}_3) = \frac{39}{52} \times \frac{13}{51} \times \frac{38}{50} = \frac{247}{1700}$	ramo 6



**Figura 9.5:** Diagrama de árvore para o experimento de extração de três cartas sem reposição.

## REGRA GERAL DA MULTIPLICAÇÃO

O exemplo anterior ilustra a regra geral de multiplicação.



### Regra geral da multiplicação

Seja  $A_1, A_2, \dots, A_n$  uma sequência de eventos de um espaço amostral  $\Omega$ . Então,

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \Pr(A_1) \Pr(A_2|A_1) \dots \Pr(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

### Exercício 9.4.

Em uma pesquisa realizada com um grupo de alunos da UFF, constatou-se que 10% dos estudantes não utilizam transporte público para ir às aulas e que 65% dos estudantes que utilizam o transporte público fazem refeições no bandeirão do campus.

Selecionando-se aleatoriamente um estudante deste grupo, calcule a probabilidade de que ele use transporte público e faça refeições no bandeirão.

### Exercício 9.5.

As preferências de homens e mulheres por cada gênero de filme alugado em uma locadora de vídeos estão apresentadas na tabela a seguir.

Sexo	Tipo de filme		
	Comédia	Romance	Policial
<b>Masculino</b>	136	92	248
<b>Feminino</b>	102	195	62

Sorteando-se ao acaso um registro de locação, pede-se a probabilidade de:

1. ser um filme policial alugado por uma mulher;
2. ser uma comédia;
3. ser de um homem ou de um romance;
4. ser de um filme policial dado que foi alugado por um homem.

**Exercício 9.6.**

Uma urna contém seis bolas pretas e cinco bolas amarelas. Extraem-se sequencialmente três bolas dessa urna, sem reposição. Qual é a probabilidade de que as três bolas sejam de cores iguais?

**INDEPENDÊNCIA DE EVENTOS**

Considere novamente um baralho usual, com 52 cartas, 13 de cada naipe, do qual será retirada uma carta. Vamos definir os seguintes eventos:

$C$  = “carta é de copas”

$R$  = “carta é um rei”

$V$  = “carta é vermelha”

Já vimos que  $\Pr(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ ;  $\Pr(R) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$  e  $\Pr(V) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ .

Vamos agora calcular as seguintes probabilidades condicionais:  $\Pr(R|C)$  e  $\Pr(V|C)$ .

No primeiro caso, estamos calculando a probabilidade de sair um rei, dado que a carta é de copas.

No segundo caso, estamos calculando a probabilidade de sair uma carta vermelha, dado que saiu uma carta de copas.

$$\Pr(R|C) = \frac{\Pr(R \cap C)}{\Pr(C)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} = \Pr(R)$$

$$\Pr(V|C) = \frac{\Pr(V \cap C)}{\Pr(C)} = \frac{\Pr(C)}{\Pr(C)} = 1 \neq \Pr(V)$$

No primeiro caso, saber que a carta é de copas não acrescentou informação útil para avaliarmos a probabilidade de sair rei, ou seja, saber ou não que saiu copas não altera a probabilidade de sair rei.

Já no segundo caso, saber que saiu carta de copas faz com que mudemos a probabilidade de sair carta vermelha. Como podemos ver, se sabemos que saiu carta de copas, então a carta *tem* que ser vermelha.

Esses exemplos ilustram um conceito importante. No primeiro caso, dizemos que os eventos  $R$  e  $C$  são *independentes* e no segundo caso, os eventos  $V$  e  $C$  são *dependentes*. No primeiro caso, o conhecimento da ocorrência de  $C$  não ajuda para reavaliarmos a probabilidade de  $C$ ; no segundo caso, o conhecimento da ocorrência de  $C$  faz com que mudemos nossa estimativa da probabilidade de  $V$ .

### Definição 9.2.

Sejam  $A$  e  $B$  eventos de um espaço amostral  $\Omega$ . Então,  $A$  e  $B$  são **independentes** se

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

Essa definição tem algumas implicações importantes. A primeira delas é a seguinte:

$$\Pr(A|B) = \Pr(A) \Rightarrow \Pr(B|A) = \Pr(B)$$

De fato,

$$\begin{aligned}\Pr(A|B) &= \Pr(A) \\ \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} &= \Pr(A) \\ \Pr(A \cap B) &= \Pr(A) \Pr(B)\end{aligned}$$

Então, temos que

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(B \cap A)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(A) \Pr(B)}{\Pr(A)} = \Pr(B)$$

A conclusão disso é a seguinte: se  $A$  e  $B$  são independentes, então  $B$  e  $A$  também o são (comutatividade).

A segunda implicação, bastante importante, é a seguinte: se  $A$  e  $B$  são independentes, então  $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B)$ . Mas a recíproca dessa afirmativa também é verdadeira, ou seja, se  $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B)$  então  $A$  e  $B$  são independentes:

$$\begin{aligned}\Pr(A \cap B) &= \Pr(A) \Pr(B) \Rightarrow \\ \Pr(A|B) &= \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(A) \Pr(B)}{\Pr(B)} = \Pr(A) \Rightarrow \\ &A \text{ e } B \text{ são independentes}\end{aligned}$$

Esse resultado nos permite estabelecer uma outra definição equivalente para a independência de dois eventos.

**Definição 9.3.**

Sejam  $A$  e  $B$  eventos de um espaço amostral  $\Omega$ . Então,  $A$  e  $B$  são **independentes** se

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B)$$

**Exemplo 9.7.**

Num exemplo anterior, analisamos os dados apresentados na tabela a seguir, referentes à participação de funcionários de uma empresa em planos de aposentadoria complementar:

		Plano pessoal		Total
		Sim	Não	
Plano da Empresa	Sim	200	200	400
	Não	0	100	100
Total		200	300	500

Naquele exemplo, estudamos os eventos  $E$  = “empregado tem o plano de aposentadoria complementar da empresa” e  $P$  = “empregado possui plano pessoal de aposentadoria complementar”. Vamos ver se esses eventos são independentes.

**Solução:**

Temos que

$$\begin{aligned} \Pr(P) &= \frac{2}{5} & \Pr(E) &= \frac{4}{5} \\ \Pr(P \cap E) &= \frac{2}{5} \neq \Pr(P) \Pr(E) \end{aligned}$$

Logo, os eventos  $P$  e  $E$  não são independentes. Outra forma de ver isso é

$$\Pr(E|P) = \frac{200}{200} = 1 \neq \Pr(E) = \frac{4}{5}$$



**Exemplo 9.8.**

Sejam  $A$  e  $B$  eventos independentes em um espaço amostral  $\Omega$ . Prove que os seguintes eventos também são independentes:

1.  $\bar{A}$  e  $B$
2.  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$

**Solução:**

1. Temos que

$$\Pr(\bar{A} \cap B) = \Pr(B - A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

Como  $A$  e  $B$  são independentes,  $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \Pr(\bar{A} \cap B) &= \Pr(B) - \Pr(A) \Pr(B) \\ &= \Pr(B) [1 - \Pr(A)] \\ &= \Pr(B) \Pr(\bar{A}) \end{aligned}$$

Logo, os eventos  $\bar{A}$  e  $B$  são independentes.

2. Pela lei de De Morgan e pela lei do complementar, temos que

$$\begin{aligned} \Pr(\bar{A} \cap \bar{B}) &= \Pr(\overline{A \cup B}) = 1 - \Pr(A \cup B) \\ &= 1 - \Pr(A) - \Pr(B) + \Pr(A \cap B) \end{aligned}$$

Como  $A$  e  $B$  são independentes,  $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \Pr(\bar{A} \cap \bar{B}) &= 1 - \Pr(A) - \Pr(B) + \Pr(A) \Pr(B) \\ &= [1 - \Pr(A)] - \Pr(B) [1 - \Pr(A)] \\ &= [1 - \Pr(A)] [1 - \Pr(B)] \\ &= \Pr(\bar{A}) \Pr(\bar{B}) \end{aligned}$$

Logo,  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  são independentes.

**Exercício 9.7.**

Sejam  $A$  e  $B$  eventos de um espaço amostral  $\Omega$  tais que  $\Pr(A) = \frac{1}{5}$ ,  $\Pr(B) = p$  e  $\Pr(A \cup B) = \frac{1}{2}$ .

Determine o valor de  $p$  para que  $A$  e  $B$  sejam independentes.

**Exercício 9.8.**

Volte ao Exercício 9.2. Verifique se os eventos considerados são independentes.

**Exercício 9.9.**

Sejam  $A$  e  $B$  eventos de um espaço amostral  $\Omega$  tais que  $\Pr(A) > 0$  e  $\Pr(B) > 0$ .

1. Mostre que se  $A$  e  $B$  são independentes, então  $A$  e  $B$  não podem ser mutuamente exclusivos.
2. Mostre que se  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos, então  $A$  e  $B$  não podem ser independentes.

## Resumo

Nesta aula você estudou dois conceitos fundamentais de probabilidade: probabilidade condicional e independência de eventos e viu também, como consequência direta, a regra da multiplicação.

- A **probabilidade condicional** do evento  $A$  dada a ocorrência do evento  $B$  é

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

- **Regra da multiplicação para dois eventos:**

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B) \Pr(A|B) = \Pr(A) \Pr(B|A)$$

- **Regra da multiplicação geral:**

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) =$$

$$\Pr(A_1) \Pr(A_2|A_1) \Pr(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \Pr(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

- **Independência de eventos:** Se  $A$  e  $B$  são eventos de um espaço amostral  $\Omega$ , então  $A$  e  $B$  são independentes se

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

ou equivalentemente

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B)$$

**Exercício 9.10.**

Sejam  $A$  e  $B$  eventos de um espaço amostral. Sabe-se que  $\Pr(A) = 0,3$ ;  $\Pr(B) = 0,7$  e  $\Pr(A \cap B) = 0,21$ .

Verifique se as seguintes afirmativas são verdadeiras. Justifique sua resposta.

1.  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos;
2.  $A$  e  $B$  são independentes;
3.  $A$  e  $\overline{B}$  são independentes;
4.  $A$  e  $\overline{B}$  são mutuamente exclusivos;
5.  $A$  e  $\overline{A}$  são independentes.

**Exercício 9.11.**

Dois dados equilibrados são lançados.

1. Calcule a probabilidade de sair seis em pelo menos um dado.
2. Sabendo-se que saíram faces diferentes nos dois dados, determine a probabilidade de sair seis em pelo menos um dado.
3. Os eventos “seis em pelo menos um dado” e “faces diferentes nos dois dados” são independentes?

**Exercício 9.12.**

Uma sala possui três soquetes para lâmpadas. De uma caixa com 10 lâmpadas, das quais seis estão queimadas, retiram-se três lâmpadas ao acaso, colocando-se as mesmas nos três bocais.

Calcular a probabilidade de que:

1. pelo menos uma lâmpada acenda;
2. todas as lâmpadas acendam.

**Exercício 9.13.**

O Ministério da Economia da Espanha acredita que a probabilidade de a inflação ficar abaixo de 3% este ano é de 0,20; entre 3% e 4% é de 0,45 e acima de 4% é de 0,35.

O Ministério acredita que, com inflação abaixo de 3%, a probabilidade de se criar mais 200.000 empregos é de 0,6, diminuindo essa probabilidade para 0,3 caso a inflação fique entre 3% e 4%; no entanto, com inflação acima de 4%, isso é totalmente impossível.

Qual é a probabilidade de se criarem 200.000 empregos nesse ano?

**Exercício 9.14.**

Na urna I há cinco bolas vermelhas, três brancas e oito azuis. Na urna II há três bolas vermelhas e cinco brancas. Lança-se um dado equilibrado. Se sair três ou seis, escolhe-se uma bola da urna I; caso contrário, escolhe-se uma bola da urna II.

Calcule a probabilidade de

1. sair uma bola vermelha;
2. sair uma bola branca;
3. sair uma bola azul.

**Exercício 9.15.**

Joana quer enviar uma carta a Camila. A probabilidade de que Joana escreva a carta é  $\frac{8}{10}$ . A probabilidade de que o correio não a perca é  $\frac{9}{10}$ . A probabilidade de que o carteiro a entregue é também  $\frac{9}{10}$ .

1. Construa o diagrama de árvore representando o espaço amostral deste problema.
2. Calcule a probabilidade de Camila não receber a carta.

**Exercício 9.16.**

Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos tais que  $\Pr(A) = 0,4$  e  $\Pr(A \cup B) = 0,7$ . Seja  $\Pr(B) = p$ .

Determine o valor de  $p$  para que

1.  $A$  e  $B$  sejam mutuamente exclusivos;
2.  $A$  e  $B$  sejam independentes.

**Exercício 9.17.**

Sejam  $A$  e  $B$  eventos possíveis de um mesmo espaço amostral  $\Omega$ . Se  $P(\bar{A}|B) = 1$  verifique a veracidade das seguintes afirmativas, justificando sua resposta.

1.  $A$  e  $B$  são independentes.
2.  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos.

**Exercício 9.18.**

Sejam  $A, B, C$  eventos de um mesmo espaço amostral. Sabe-se que

- (i)  $B$  é um subconjunto de  $A$ ;
- (ii)  $A$  e  $C$  são independentes e
- (iii)  $B$  e  $C$  são mutuamente exclusivos.

A probabilidade do complementar da união dos eventos  $A$  e  $C$  é  $0,48$ ; a probabilidade da união dos eventos  $B$  e  $C$  é  $0,3$  e a probabilidade do evento  $C$  é o dobro da probabilidade do evento  $B$ .

Calcule a probabilidade da união de  $A$  e  $B$ .

**Exercício 9.19.**

Uma comissão de dois estudantes deve ser sorteada de um grupo de 5 alunas e 3 alunos. Sejam os eventos:

- $$\begin{aligned} M_1 &= \text{“primeiro estudante sorteado é mulher”} \\ M_2 &= \text{“segundo estudante sorteado é mulher”} \end{aligned}$$

1. Construa um diagrama de árvore que represente o espaço amostral deste experimento, indicando as probabilidades.
2. Calcule  $\Pr(M_1)$  e  $\Pr(M_2)$ .
3. Verifique se  $M_1$  e  $M_2$  são independentes.

**Exercício 9.20.**

Em um campeonato de natação, estão competindo três estudantes: Alberto, Bosco e Carlos. Alberto e Bosco têm a mesma probabilidade de ganhar, que é o dobro da de Carlos ganhar.

1. Ache a probabilidade de que Bosco ou Carlos ganhe a competição.
2. Que hipótese você fez para resolver essa questão? Essa hipótese é razoável?

**Exercício 9.21.**

Solicita-se a dois estudantes, Maria e Pedro, que resolvam determinado problema. Eles trabalham na solução do mesmo independentemente, e têm, respectivamente, probabilidade 0,8 e 0,7 de resolvê-lo.

1. Qual é a probabilidade de que nenhum deles resolva o problema?
2. Qual é a probabilidade de o problema ser resolvido?
3. Dado que o problema foi resolvido, qual é a probabilidade de que tenha sido resolvido apenas por Pedro?

**Exercício 9.22.**

Joga-se um dado duas vezes. Considere os seguintes eventos:  $A$  = “resultado do primeiro lançamento é par” e  $B$  = “soma dos resultados é par”.  $A$  e  $B$  são independentes? Justifique.

**Exercício 9.23.**

Um aluno responde a uma questão de múltipla escolha com quatro alternativas, com uma só correta. A probabilidade de que ele saiba a resposta certa da questão é de 30%. Se ele não sabe a resposta, existe a possibilidade de ele acertar “no chute”. Não existe a possibilidade de ele obter a resposta certa por “cola”. Qual é a probabilidade de ele acertar a questão?

## SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

### Exercício 9.1.

1. Seja  $A = \text{“faces iguais”}$ . Então,

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$\text{e } \Pr(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

2. Seja  $B = \text{“soma das faces menor ou igual a 4”}$ . Então,  
 $B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$  e

$$\Pr(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}. \text{ O problema pede}$$

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$$

3. Seja  $C = \text{“5 em pelo menos um dos dados”}$ . Então,

$$C = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6)\}$$

$$\text{e } \Pr(C) = \frac{11}{36}.$$

4. Seja  $D = \text{“faces diferentes”}$ . Então,  $\Pr(D) = \Pr(\bar{A}) = \frac{5}{6}$ .  
 O problema pede

$$\Pr(C|D) = \frac{\Pr(C \cap D)}{\Pr(D)} = \frac{\frac{10}{36}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{3}$$

### Exercício 9.2.

Vamos definir os eventos  $P = \text{“campanha pronta antes do prazo”}$  e  $A = \text{“diretoria aprova campanha”}$ . O problema dá que

$$\Pr(P) = 0,6 \quad \Pr(A) = 0,5 \quad \Pr(A \cap P) = 0,3$$

1.  $\Pr(A \cup P) = \Pr(A) + \Pr(P) - \Pr(A \cap P) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = 0,8$
2.  $\Pr(\bar{A} \cap \bar{P}) = \Pr(\overline{A \cup P}) = 1 - \Pr(A \cup P) = 0,2$
3.  $\Pr(A|P) = \frac{\Pr(A \cap P)}{\Pr(P)} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5.$



**Exercício 9.3.**

$$1. \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{6+4-3}{12} = \frac{7}{12}$$

$$2. \Pr(\overline{A} \cap \overline{B}) = \Pr(\overline{A \cup B}) = 1 - \Pr(A \cup B) = \frac{5}{12}$$

$$3. \Pr(A|\overline{B}) = \frac{\Pr(A \cap \overline{B})}{\Pr(\overline{B})} = \frac{\Pr(A) - \Pr(A \cap B)}{1 - \Pr(B)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{8}$$

**Exercício 9.4.**

Vamos definir os seguintes eventos:  $T$  = “aluno utiliza transporte público” e  $B$  = “aluno come no bandeirão”. O problema dá que

$$\Pr(\overline{T}) = 0,10 \quad \Pr(B|T) = 0,65$$

O problema pede

$$\Pr(T \cap B) = \Pr(T) \Pr(B|T) = 0,9 \times 0,65 = 0,585$$

**Exercício 9.5.**

Vamos definir os seguintes eventos:  $C$  = “comédia”;  $R$  = “romance”;  $P$  = “policial”;  $M$  = “masculino”;  $F$  = “feminino”.

$$1. \Pr(P \cap F) = \frac{62}{835}$$

$$2. \Pr(C) = \frac{136 + 102}{835} = \frac{238}{835}$$

$$3. \Pr(M \cup R) = \Pr(M) + \Pr(R) - \Pr(R \cap M) = \frac{(136 + 92 + 248) + (92 + 195) - 92}{835} = \frac{671}{835}$$

$$4. \Pr(P|M) = \frac{\Pr(P \cap M)}{\Pr(M)} = \frac{248}{136 + 92 + 248} = \frac{248}{476}$$

### Exercício 9.6.

Vamos definir os eventos  $P_i = \text{"bola preta na extração } i\text{"}$ ;  $A = \text{"bola amarela na extração } i\text{"}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Seja  $M = \text{"3 bolas de mesma cor"}$ . Então,

$$\begin{aligned} \Pr(M) &= \Pr(P_1 \cap P_2 \cap P_3) + \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \Pr(P_1) \times \Pr(P_2|P_1) \times \Pr(P_3|P_1 \cap P_2) + \\ &\quad \Pr(A_1) \times \Pr(A_2|A_1) \times \Pr(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{5}{11} \times \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \\ &= \frac{4}{33} + \frac{2}{33} = \frac{2}{11} \end{aligned}$$

### Exercício 9.7.

Para que  $A$  e  $B$  sejam independentes, temos que ter  $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B) = \frac{p}{5}$ , mas

$$\Pr(A \cup B) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{5} + p - \frac{p}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4p}{5} = \frac{3}{10} \Rightarrow p = \frac{3}{8}$$

### Exercício 9.8.

Os eventos são  $P = \text{"campanha pronta antes do prazo"}$  e  $A = \text{"diretoria aprova campanha"}$  e o problema dá que

$$\Pr(P) = 0,6 \quad \Pr(A) = 0,5 \quad \Pr(A \cap P) = 0,3$$

Como  $\Pr(A \cap P) = \Pr(P) \Pr(A)$ , segue que  $P$  e  $A$  são independentes.

### Exercício 9.9.

1.  $A$  e  $B$  independentes  $\Rightarrow \Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B) > 0 \therefore$   
 $A$  e  $B$  não são mutuamente exclusivos.
2.  $A$  e  $B$  mutuamente exclusivos  $\Rightarrow \Pr(A \cap B) = 0 \Rightarrow$   
 $\Pr(A|B) = 0 \neq \Pr(A) > 0 \therefore A$  e  $B$  não são independentes

Esse exercício é importante, no sentido em que ele diferencia os conceitos de eventos disjuntos e eventos independentes que, muitas vezes, são confundidos pelos alunos.

**Exercício 9.10.**

1.  $\Pr(A \cap B) = 0,21 \neq 0 \therefore A$  e  $B$  não são mutuamente exclusivos
2.  $\Pr(A \cap B) = 0,21 = \Pr(A) \Pr(B) \therefore A$  e  $B$  são independentes
3.  $A$  e  $B$  independentes  $\Rightarrow A$  e  $\bar{B}$  são independentes (ver exemplo resolvido)
4.  $A$  e  $\bar{B}$  independentes  $\Rightarrow A$  e  $\bar{B}$  não são mutuamente exclusivos (ver Exercício 9.9.)
5.  $A$  e  $\bar{A}$  são mutuamente exclusivos  $\Rightarrow A$  e  $\bar{A}$  não são independentes (ver Exercício 9.9.)

**Exercício 9.11.**

Vamos definir os eventos  $A$  = “face 6 em pelo menos um dado” e  $B$  = “faces iguais”. Então,

$$A = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$$

$$B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

1.  $\Pr(A) = \frac{11}{36}$
2.  $\Pr(A|\bar{B}) = \frac{\Pr(A \cap \bar{B})}{\Pr(\bar{B})} = \frac{\Pr(A) - \Pr(A \cap B)}{1 - \Pr(B)} = \frac{\frac{11}{36} - \frac{1}{36}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{3} \neq \Pr(A)$
3.  $\Pr(A|\bar{B}) \neq \Pr(A) \Rightarrow A$  e  $\bar{B}$  não são independentes

**Exercício 9.12.**

Seja  $A_i$  = “lâmpada  $i$  acende”,  $i = 1, 2, 3$

1. Seja  $P$  = “pelo menos uma lâmpada acende”. Então,

$$\bar{P} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Pr(\bar{P}) &= \Pr(\bar{A}_1) \times \Pr(\bar{A}_2|\bar{A}_1) \times \Pr(\bar{A}_3|\bar{A}_2 \cap \bar{A}_1) \\ &= \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{6} \Rightarrow \Pr(P) = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

2. O problema pede

$$\begin{aligned}\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \Pr(A_1) \times \Pr(A_2|A_1) \times \Pr(A_3|A_2 \cap A_1) \\ &= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{30}\end{aligned}$$

**Exercício 9.13.**

Vamos definir os seguintes eventos:  $B$  = “inflação abaixo de 3%”;  $M$  = “inflação entre 3% e 4%”,  $A$  = “inflação acima de 4%” e  $E$  = “200.000 empregos”. O problema dá o seguinte:

$$\begin{aligned}\Pr(B) &= 0,20 & \Pr(M) &= 0,45 & \Pr(A) &= 0,35 \\ \Pr(E|B) &= 0,6 & \Pr(E|M) &= 0,3 & \Pr(E|A) &= 0\end{aligned}$$

Veja a **Figura 9.6**. Daí concluímos que

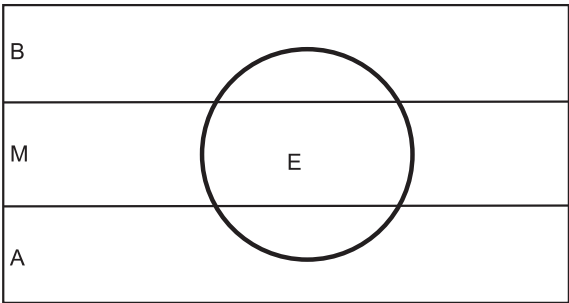
$$E = (E \cap B) \cup (E \cap M) \cup (E \cap A)$$

e, como os eventos são mutuamente exclusivos,

$$\Pr(E) = \Pr(E \cap B) + \Pr(E \cap M) + \Pr(E \cap A)$$

Logo,

$$\begin{aligned}\Pr(E) &= \Pr(B) \Pr(E|B) + \Pr(M) \Pr(E|M) + \Pr(A) \Pr(E|A) \\ &= 0,20 \times 0,60 + 0,45 \times 0,30 + 0,35 \times 0 \\ &= 0,255\end{aligned}$$

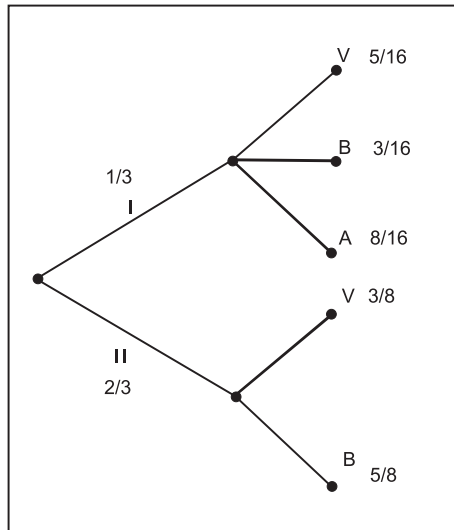


**Figura 9.6:** Partição do espaço amostral para o problema da inflação espanhola.

### Exercício 9.14.

Veja a **Figura 9.7**, onde temos os seguintes eventos:

$V$  = “bola vermelha”;  $B$  = “bola branca”;  $A$  = “bola azul”;  
 $I$  = “urna I”;  $II$  = “urna II”



**Figura 9.7:** Diagrama de árvore para o Exercício 9.14.

1. Temos que

$$\begin{aligned}
 \Pr(V) &= \Pr(V \cap I) + \Pr(V \cap II) \\
 &= \Pr(I) \Pr(V|I) + \Pr(II) \Pr(V|II) \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{5}{16} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} \\
 &= \frac{5}{48} + \frac{12}{48} = \frac{17}{48}
 \end{aligned}$$

2. Temos que

$$\begin{aligned}
 \Pr(B) &= \Pr(B \cap I) + \Pr(B \cap II) \\
 &= \Pr(I) \Pr(B|I) + \Pr(II) \Pr(B|II) \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{16} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{8} \\
 &= \frac{3}{48} + \frac{20}{48} = \frac{23}{48}
 \end{aligned}$$

3. Temos que

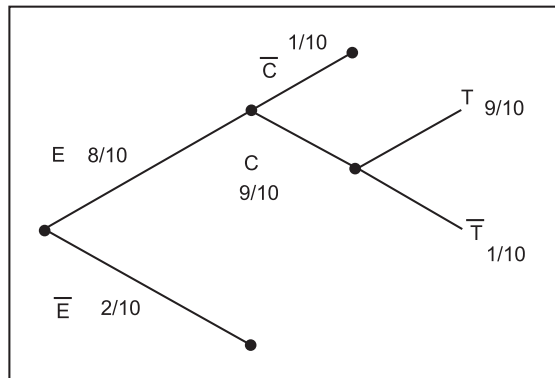
$$\begin{aligned}
 \Pr(A) &= \Pr(A \cap I) + \Pr(A \cap II) \\
 &= \Pr(I) \Pr(A|I) + \Pr(II) \Pr(A|II) \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{8}{16} + \frac{2}{3} \times 0 \\
 &= \frac{8}{48}
 \end{aligned}$$

Note que  $\Pr(V) + \Pr(B) + \Pr(A) = 1$ .

### Exercício 9.15.

Veja a **Figura 9.8**, onde temos os seguintes eventos:

$E$  = “Joana escreve a carta”;  $C$  = “correio não perde a carta”;  
 $T$  = “carteiro entrega a carta”.



**Figura 9.8:** Diagrama de árvore para o Exercício 9.15.

Vamos definir o evento  $R$  = “Camila recebe a carta”. O problema pede  $\Pr(\bar{R})$ . Mas

$$\begin{aligned}
 \Pr(\bar{R}) &= \Pr(\bar{E}) + \Pr(E \cap \bar{C}) + \Pr(E \cap C \cap \bar{T}) \\
 &= \Pr(\bar{E}) + \Pr(E) \times \Pr(\bar{C}|E) + \\
 &\quad \Pr(E) \times \Pr(C|E) \times \Pr(\bar{T}|C \cap E) \\
 &= \frac{2}{10} + \frac{8}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{8}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} \\
 &= 0,2 + 0,8 \times 0,1 + 0,8 \times 0,9 \times 0,1 \\
 &= 0,2 + 0,08 + 0,072 = 0,352
 \end{aligned}$$

**Exercício 9.16.**

Temos que  $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \Rightarrow 0,7 = 0,4 + p - \Pr(A \cap B)$

1.  $\Pr(A \cap B) = 0 \Rightarrow 0,7 = 0,4 + p \Rightarrow p = 0,3$
2.  $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B) \Rightarrow 0,7 = 0,4 + p - 0,4p \Rightarrow 0,6p = 0,3 \Rightarrow p = 0,5$

**Exercício 9.17.**

Pelos dados do problema, temos que

$$\begin{aligned}\Pr(\bar{A}|B) &= 1 \Rightarrow \frac{\Pr(\bar{A} \cap B)}{\Pr(B)} = 1 \Rightarrow \\ \frac{\Pr(B) - \Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} &= 1 \Rightarrow 1 - \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = 1 \Rightarrow \\ \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} &= 0 \Rightarrow \Pr(A \cap B) = 0\end{aligned}$$

Logo,  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos e, portanto, não podem ser independentes.

**Exercício 9.18.**

O problema dá os seguintes fatos:

$$\begin{aligned}B \subset A & \quad \Pr(A \cap C) = \Pr(A) \Pr(C) \\ \Pr(B \cap C) = 0 & \quad \Pr(\overline{A \cup C}) = 0,48 \\ \Pr(B \cup C) = 0,3 & \quad \Pr(C) = 2 \Pr(B)\end{aligned}$$

e pede  $\Pr(A \cup B)$ .

Como  $B \subset A$ , então,  $A \cup B = A \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A)$ .

$$\begin{aligned}\Pr(B \cup C) = 0,3 & \Rightarrow \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(B \cap C) = 0,3 \Rightarrow \\ \Pr(B) + 2 \Pr(B) - 0 &= 0,3 \Rightarrow \Pr(B) = 0,1\end{aligned}$$

Logo,  $\Pr(C) = 0,2$ .

$$\Pr(\overline{A \cup C}) = 0,48 \Rightarrow \Pr(\bar{A} \cap \bar{C}) = 0,48$$

Como  $A$  e  $C$  são independentes, segue que  $\bar{A}$  e  $\bar{C}$  também o são.

Logo,

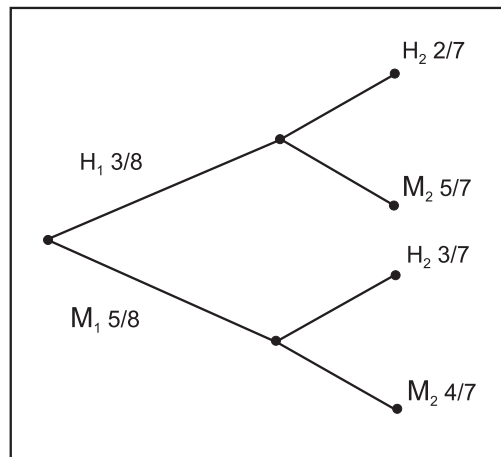
$$\Pr(\bar{A}) \Pr(\bar{C}) = 0,48 \Rightarrow \Pr(\bar{A}) \times 0,8 = 0,48 \Rightarrow \Pr(\bar{A}) = 0,6$$

e, portanto,

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) = 0,4$$

### Exercício 9.19.

1. Veja a **Figura 9.9**.



**Figura 9.9:** Diagrama de árvore para o Exercício 9.19.

2. Temos que

$$\begin{aligned} \Pr(M_1) &= \frac{5}{8} \\ \Pr(M_2) &= \Pr(M_1 \cap M_2) + \Pr(H_1 \cap M_2) \\ &= \Pr(M_1) \Pr(M_2|M_1) + \Pr(H_1) \Pr(M_2|H_1) \\ &= \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

3. Temos que

$$\Pr(M_2|M_1) = \frac{4}{7} \neq \Pr(M_2)$$

Logo,  $M_1$  e  $M_2$  não são independentes.



**Exercício 9.20.**

Sejam os eventos  $A$  = “Alberto ganha”;  $B$  = “Bosco ganha”;  $C$  = “Carlos ganha”. Como eles são os únicos competidores, temos que

$$\begin{aligned}\Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) &= 1 \Rightarrow \\ 2\Pr(C) + 2\Pr(C) + \Pr(C) &= 1 \Rightarrow \\ \Pr(C) &= \frac{1}{5} \Rightarrow \Pr(A) = \Pr(B) = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

1. O problema pede

$$\Pr(B \cup C) = \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(B \cap C)$$

Note que pode haver empate entre Bosco e Carlos. No entanto, é razoável supor que os eventos  $B$  e  $C$  sejam independentes, uma vez que numa competição honesta, nenhum competidor interfere no desempenho dos outros. Logo,

$$\begin{aligned}\Pr(B \cup C) &= \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(B \cap C) \\ &= \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(B)\Pr(C) \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{5} - \frac{2}{25} = \frac{13}{25}\end{aligned}$$

2. Foi necessário fazer a hipótese de independência, que é razoável, conforme explicado no item anterior.

**Exercício 9.21.**

Sejam os eventos  $M$  = “Maria resolve o problema” e  $P$  = “Pedro resolve o problema”. Sejam  $\overline{M}$  e  $\overline{P}$  os respectivos complementares. Temos que

$$\begin{aligned}\Pr(M) &= 0,8 & \Pr(P) &= 0,7 \\ \Pr(\overline{M}) &= 0,2 & \Pr(\overline{P}) &= 0,3\end{aligned}$$

1. O problema pede  $\Pr(\overline{P} \cap \overline{M})$ . Pela hipótese de independência (sabemos que, se  $A$  e  $B$  são eventos independentes, então os seus complementares também o são) temos que

$$\Pr(\overline{P} \cap \overline{M}) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$$

2. Seja  $R = \text{“problema resolvido”}$ . O problema pede  $\Pr(R) = \Pr(P \cup M)$ . Temos que

$$\begin{aligned}\Pr(R) &= \Pr(P \cup M) = 1 - \Pr(\overline{P \cup M}) = 1 - \Pr(\overline{P} \cap \overline{M}) = \\ &= 1 - 0,06 = 0,94\end{aligned}$$

3. Seja  $P_1 = \text{“apenas Pedro resolve”}$ . A questão pede  $\Pr(P_1 | R)$ . Temos que

$$\begin{aligned}\Pr(P_1 | R) &= \frac{\Pr(P_1 \cap R)}{\Pr(R)} = \frac{\Pr(P \cap \overline{M})}{\Pr(R)} \\ &= \frac{0,7 \times 0,2}{0,94} = 0,1489\end{aligned}$$

**Exercício 9.22.**

Vamos esquematizar o espaço amostral e os eventos  $A$  e  $B$  da seguinte forma:

		Dado 2					
		1	2	3	4	5	6
Dado 1	1	B		B		B	
	2	A	AB	A	AB	A	AB
	3	B		B		B	
	4	A	AB	A	AB	A	AB
	5	B		B		B	
	6	A	AB	A	AB	A	AB

Em cada cela colocamos a letra do evento que acontece na respectiva combinação dos dados. Então,

$$\begin{aligned}\Pr(A) = \Pr(B) &= \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \\ \Pr(A \cap B) &= \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \Pr(A) \times \Pr(B).\end{aligned}$$

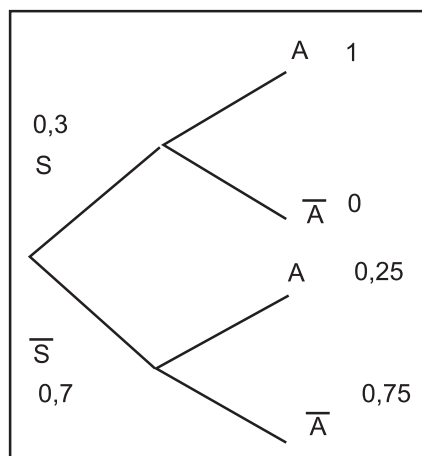
Logo,  $A$  e  $B$  são independentes.

**Exercício 9.23.**

Veja a **Figura 9.10**, onde temos os eventos  $S$  = “sabe a resposta” e  $A$  = “acerta a resposta”.

É dado que

$$\Pr(S) = 0,3 \Rightarrow \Pr(\bar{S}) = 0,7$$



**Figura 9.10:** Diagrama de árvore para o Exercício 9.23.

Se o aluno sabe a resposta, ele acerta a questão. Se ele não sabe, ele pode “chutar” entre as quatro alternativas. Logo,

$$\Pr(A|S) = 1 \qquad \Pr(A|\bar{S}) = 0,25$$

O problema pede  $\Pr(A)$ . Tem-se que

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= \Pr(A \cap S) + \Pr(A \cap \bar{S}) \\ &= \Pr(S) \times \Pr(A|S) + \Pr(\bar{S}) \times \Pr(A|\bar{S}) \\ &= 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0,25 = 0,475 \end{aligned}$$



# Aula 10

## TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL E TEOREMA DE BAYES

---

### O b j e t i v o s

Nesta aula, você:

- 1 estudará dois importantes teoremas de probabilidade e
- 2 verá suas aplicações em diversas situações envolvendo a tomada de decisão.

## TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL E TEOREMA DE BAYES

Esses teoremas, conhecidos como teorema da probabilidade total e teorema de Bayes, resultam diretamente da definição de probabilidade condicional e das propriedades vistas para a probabilidade.

A apresentação desses teoremas será feita inicialmente por meio de exemplos, para que você compreenda bem o contexto de sua aplicação. Ao final da aula, será apresentada a formulação geral dos teoremas.

### Exemplo 10.1.

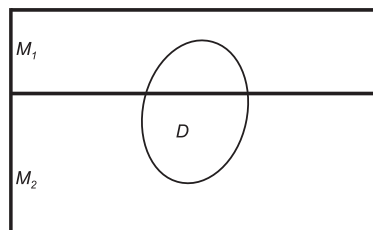
Em uma linha de produção de certa fábrica, determinada peça é produzida em duas máquinas. A máquina 1, mais antiga, é responsável por 35% da produção, e os 65% restantes vêm da máquina 2. A partir dos dados passados e das informações do fabricante das máquinas, estima-se em 5% a proporção de peças defeituosas produzidas pela máquina 1 e em 2,5% a proporção de peças defeituosas produzidas pela máquina 2. As peças produzidas pelas duas máquinas seguem para o departamento de armazenamento e embalagem, para venda posterior, sem distinção de qual máquina a produziu.

1. Qual é a proporção de peças defeituosas colocadas no mercado por essa fábrica?
2. Se um cliente identifica uma peça defeituosa, qual é a probabilidade de que ela tenha sido produzida pela máquina 2?

### Solução:

1. Na **Figura 10.1** representa-se a situação descrita no exemplo. Nosso experimento aleatório é o sorteio de uma peça produzida por essa fábrica, e nosso espaço amostral, representado pelo retângulo, é o conjunto de todas as peças produzidas em determinado período. Podemos ver que o espaço amostral está dividido em 2 eventos mutuamente exclusivos:  $M_1$ , peças produzidas pela máquina 1, e  $M_2$ , peças produzidas pela máquina 2. Mais precisamente,  $\Omega = M_1 \cup M_2$  — isso significa que  $M_1$  e  $M_2$

formam uma partição do espaço amostral (retorne à Aula 5, se necessário). Um outro evento de interesse é o evento  $D =$  “peça é defeituosa”. Podemos ver que esse evento tem interseção com os eventos  $M_1$  e  $M_2$ , ou seja, há peças defeituosas produzidas na máquina 1 e na máquina 2.



**Figura 10.1:** Espaço amostral para o experimento do Exemplo 10.1.

Pelos dados do problema, temos uma estimativa *a priori* das proporções de peças produzidas em cada máquina, ou seja, as probabilidades *a priori* dos eventos  $M_1$  e  $M_2$  são:

$$\Pr(M_1) = 0,35 \quad \Pr(M_2) = 0,65$$

Sabemos também a proporção de peças defeituosas produzidas por cada máquina. Essa proporção se traduz em uma probabilidade condicional: se a peça foi produzida pela máquina 1, existe 5% de chance de ser defeituosa; para a máquina 2, essa chance reduz-se a 2,5%. Em termos de probabilidade, temos

$$\Pr(D|M_1) = 0,05 \quad \Pr(D|M_2) = 0,025$$

Como  $M_1$  e  $M_2$  formam uma partição de  $\Omega$ , podemos escrever

$$D = (D \cap M_1) \cup (D \cap M_2)$$

Mas  $M_1$  e  $M_2$  são mutuamente exclusivos; logo,  $(D \cap M_1)$  e  $(D \cap M_2)$  também o são. Assim, pelo Axioma 3 da probabilidade, resulta que

$$\begin{aligned} \Pr(D) &= \Pr[(D \cap M_1) \cup (D \cap M_2)] \\ &= \Pr(D \cap M_1) + \Pr(D \cap M_2) \end{aligned}$$

Pelo teorema da multiplicação (veja a aula anterior), sabemos que  $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B|A)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \Pr(D) &= \Pr(M_1) \Pr(D|M_1) + \Pr(M_2) \Pr(D|M_2) \\ &= 0,35 \times 0,05 + 0,65 \times 0,025 = 0,03375 \end{aligned}$$

Note que a probabilidade de uma peça ser defeituosa é uma média ponderada das probabilidades de defeito em cada máquina; os pesos são definidos de acordo com o nível de produção de cada máquina.

- Na segunda parte do exemplo, temos uma informação sobre a peça: ela é defeituosa, ou seja, sabemos que ocorreu o evento  $D$ . O que o problema pede é que, com essa informação, reavaliemos a probabilidade de a peça ter sido produzida pela máquina 1. Essa probabilidade é chamada probabilidade *a posteriori*, ou seja, é a probabilidade que calculamos depois de realizado o experimento de sorteio e teste da peça. Em notação matemática, temos que calcular  $\Pr(M_1|D)$ . Por definição, temos

$$\Pr(M_1|D) = \frac{\Pr(M_1 \cap D)}{\Pr(D)}$$

Usando a regra da multiplicação e o resultado encontrado no item anterior, resulta que

$$\begin{aligned} \Pr(M_1|D) &= \frac{\Pr(M_1) \Pr(D|M_1)}{\Pr(M_1) \Pr(D|M_1) + \Pr(M_2) \Pr(D|M_2)} \\ &= \frac{0,35 \times 0,05}{0,35 \times 0,05 + 0,65 \times 0,025} \\ &= \frac{0,0175}{0,03375} = 0,5185 \end{aligned}$$

Compare os resultados:

Sem qualquer informação sobre o resultado do experimento, nossa estimativa para a probabilidade de ocorrência de  $M_1$  — peça a ser produzida pela máquina 1 — era 0,35.

Com a informação de que a peça é defeituosa, a probabilidade de ter sido produzida pela máquina 1 aumenta para 0,5185.

### Exemplo 10.2.

Considere novamente a situação do Exemplo 10.1, mas com a seguinte modificação: as peças são produzidas em três máquinas, que são responsáveis por 30%, 35% e 35% da produção, respectivamente. As proporções de peças defeituosas produzidas nessas máquinas são 5%, 2,5% e 2%.

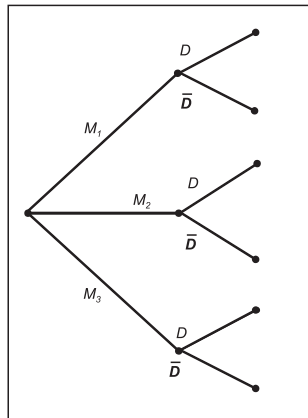
- Qual é a proporção de peças defeituosas produzidas na fábrica?



2. Se um cliente identifica uma peça defeituosa, qual é a probabilidade de que tenha sido produzida na máquina 1? E na máquina 2? E na máquina 3?

**Solução:**

1. O espaço amostral desse experimento está ilustrado no diagrama de árvore da **Figura 10.2**:



**Figura 10.2:** Espaço amostral para o experimento do Exemplo 10.2.

Como visto na aula anterior, cada galho da árvore corresponde ao condicionamento do evento aos eventos dos galhos anteriores. Assim, na parte superior da árvore, temos os eventos  $D|M_1$  e  $\bar{D}|M_1$ . Na parte do meio, temos os eventos  $D|M_2$  e  $\bar{D}|M_2$  e na parte inferior,  $D|M_3$  e  $\bar{D}|M_3$ .

Os dados do problema dão que

$$\begin{aligned} \Pr(M_1) &= 0,30 & \Pr(D|M_1) &= 0,05 \\ \Pr(M_2) &= \Pr(M_3) = 0,35 & \Pr(D|M_2) &= 0,025 \\ & & \Pr(D|M_3) &= 0,02 \end{aligned}$$

Como antes,  $M_1, M_2$  e  $M_3$  formam uma partição de  $\Omega$  e, portanto, podemos escrever

$$D = (D \cap M_1) \cup (D \cap M_2) \cup (D \cap M_3)$$

Mas  $M_1, M_2$  e  $M_3$  são mutuamente exclusivos; logo,  $(D \cap M_1)$ ,  $(D \cap M_2)$  e  $(D \cap M_3)$  também o são. Pelo Axioma 3 da proba-

bilidade, resulta que

$$\begin{aligned}\Pr(D) &= \Pr[(D \cap M_1) \cup (D \cap M_2) \cup (D \cap M_3)] \\ &= \Pr(D \cap M_1) + \Pr(D \cap M_2) + \Pr(D \cap M_3)\end{aligned}$$

Pelo teorema da multiplicação, sabemos que

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B|A).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\Pr(D) &= \Pr(M_1) \Pr(D|M_1) + \Pr(M_2) \Pr(D|M_2) + \Pr(M_3) \Pr(D|M_3) \\ &= 0,30 \times 0,05 + 0,35 \times 0,025 + 0,35 \times 0,02 = 0,03075\end{aligned}$$

Como antes, a probabilidade de uma peça ser defeituosa é uma média ponderada das probabilidades de defeito em cada máquina, com os pesos definidos de acordo com o nível de produção de cada máquina.

2. Na segunda parte do exemplo, deseja-se saber  $\Pr(M_1|D)$ ,  $\Pr(M_2|D)$  e  $\Pr(M_3|D)$ . Por definição, temos

$$\Pr(M_1|D) = \frac{\Pr(M_1 \cap D)}{\Pr(D)}$$

Usando a regra da multiplicação e o resultado encontrado no item anterior, resulta que

$$\begin{aligned}\Pr(M_1|D) &= \frac{\Pr(M_1) \Pr(D|M_1)}{\Pr(M_1) \Pr(D|M_1) + \Pr(M_2) \Pr(D|M_2) + \Pr(M_3) \Pr(D|M_3)} \\ &= \frac{0,30 \times 0,05}{0,30 \times 0,05 + 0,35 \times 0,025 + 0,35 \times 0,02} \\ &= \frac{0,015}{0,03075} = 0,487805\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(M_2|D) &= \frac{\Pr(M_2) \Pr(D|M_2)}{\Pr(M_1) \Pr(D|M_1) + \Pr(M_2) \Pr(D|M_2) + \Pr(M_3) \Pr(D|M_3)} \\ &= \frac{0,35 \times 0,025}{0,30 \times 0,05 + 0,35 \times 0,025 + 0,35 \times 0,02} \\ &= \frac{0,00875}{0,03075} = 0,284553\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(M_3|D) &= \frac{\Pr(M_3) \Pr(D|M_3)}{\Pr(M_1) \Pr(D|M_1) + \Pr(M_2) \Pr(D|M_2) + \Pr(M_3) \Pr(D|M_3)} \\ &= \frac{0,35 \times 0,02}{0,30 \times 0,05 + 0,35 \times 0,025 + 0,35 \times 0,02} \\ &= \frac{0,007}{0,03075} = 0,227642\end{aligned}$$

Note que  $0,487805 + 0,284553 + 0,227642 = 1,000000$ ; esse resultado é imediato a partir do fato de que  $\Pr(\Omega) = 1$ . Se ocorreu uma peça defeituosa, essa peça só pode ter vindo de umas das três máquinas.

### Exemplo 10.3.

Sabe-se que um “soro da verdade”, quando aplicado a um suspeito, é 90% eficaz quando a pessoa é culpada e 99% eficaz quando é inocente. Um suspeito é retirado de um grupo de pessoas, onde 95% jamais cometeram qualquer crime.

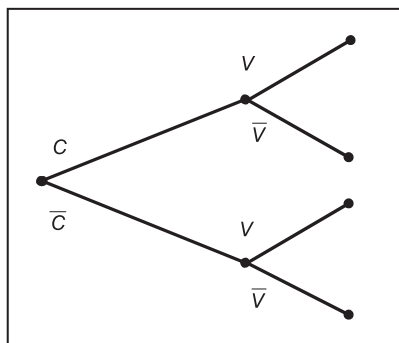
1. Qual é a probabilidade de o soro dar a resposta certa?
2. Se o soro indica “culpado”, qual é a probabilidade de o suspeito ser inocente?

### Solução:

1. Vamos definir os seguintes eventos (veja a **Figura 10.3**):

$C$  = “suspeito é culpado”       $\bar{C}$  = “suspeito é inocente”

$V$  = “soro indica culpado”       $\bar{V}$  = “soro indica inocente”



**Figura 10.3:** Espaço amostral para o experimento do Exemplo 10.3.

Note que você tem que definir os eventos de acordo com a execução do experimento. Ao se aplicar um soro da verdade, a resposta é “culpado” ou “inocente” e não “soro acerta” ou “soro erra”.

Os dados do problema nos dão as seguintes probabilidades:

$$\Pr(V|C) = 0,90 \quad \Pr(\overline{V}|\overline{C}) = 0,99 \quad \Pr(\overline{C}) = 0,95$$

Usando o resultado sobre probabilidade do evento complementar, obtemos:

$$\Pr(\overline{V}|C) = 0,10 \quad \Pr(V|\overline{C}) = 0,01 \quad \Pr(C) = 0,05$$

A partição do espaço amostral é definida pelos eventos  $C$  e  $\overline{C}$ , para os quais temos as probabilidades **a priori**. Os eventos de interesse são  $V$  e  $\overline{V}$ .

Seja o evento  $A$  = “soro acerta o diagnóstico”. Note que o soro pode diagnosticar corretamente sendo o suspeito culpado ou inocente, ou seja:

$$A = (C \cap V) \cup (\overline{C} \cap \overline{V})$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= \Pr(C \cap V) + \Pr(\overline{C} \cap \overline{V}) \\ &= \Pr(C) \Pr(V|C) + \Pr(\overline{C}) \Pr(\overline{V}|\overline{C}) \\ &= 0,05 \times 0,90 + 0,95 \times 0,99 = 0,9855 \end{aligned}$$

2. Queremos calcular  $\Pr(\overline{C}|V)$ . Por definição, temos que:

$$\Pr(\overline{C}|V) = \frac{\Pr(\overline{C} \cap V)}{\Pr(V)}$$

O soro pode indicar culpado sendo o suspeito culpado (acerto do diagnóstico) ou inocente (erro no diagnóstico), ou seja:

$$\begin{aligned} \Pr(V) &= \Pr(V \cap C) + \Pr(V \cap \overline{C}) \\ &= \Pr(V|C) \times \Pr(C) + \Pr(V|\overline{C}) \times \Pr(\overline{C}) \\ &= 0,90 \times 0,05 + 0,01 \times 0,95 \\ &= 0,045 + 0,0095 = 0,0545 \end{aligned}$$

$$\Pr(V \cap \overline{C}) = \Pr(V|\overline{C}) \times \Pr(\overline{C}) = 0,01 \times 0,95 = 0,0095$$

Logo,

$$\Pr(\overline{C}|V) = \frac{0,0095}{0,0545} = 0,1743$$

**Exemplo 10.4.**

Uma caixa contém três moedas. A moeda 1 é honesta, a moeda 2 tem duas caras e a moeda 3 é viciada de tal modo que cara é duas vezes mais provável que coroa. Uma moeda é escolhida ao acaso e lançada.

1. Qual é a probabilidade de observarmos cara e moeda 1?
2. Qual é a probabilidade de observarmos cara?
3. Se o resultado foi cara, qual a probabilidade de que a moeda lançada tenha sido a moeda 1?

**Solução:**

Vamos definir os eventos

$$K = \text{cara} \quad C = \text{coroa}$$

$$M_1 = \text{moeda 1} \quad M_2 = \text{moeda 2} \quad M_3 = \text{moeda 3}$$

É dado que  $\Pr(K|M_1) = \frac{1}{2} \quad \Pr(K|M_2) = 1$

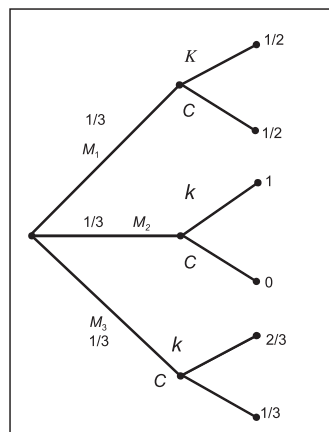
Para a moeda 3, como a probabilidade de cara é duas vezes a probabilidade de coroa e a soma dessas probabilidades tem que ser 1, resulta que

$$\Pr(K|M_3) = \frac{2}{3}$$

Como a moeda lançada é escolhida aleatoriamente, temos que

$$\Pr(M_1) = \Pr(M_2) = \Pr(M_3) = \frac{1}{3}$$

Veja a **Figura 10.4**:



**Figura 10.4:** Espaço amostral para o Exemplo 10.4 das 3 moedas.

1. Aqui a solução é consequência direta da regra de multiplicação:

$$\Pr(K \cap M_1) = \Pr(M_1) \times \Pr(K|M_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

2. Os eventos que formam a partição do espaço amostral são  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ . Logo,

$$\begin{aligned} \Pr(K) &= \Pr(K \cap M_1) + \Pr(K \cap M_2) + \Pr(K \cap M_3) = \\ &= \Pr(M_1) \times \Pr(K|M_1) + \Pr(M_2) \times \Pr(K|M_2) + \Pr(M_3) \times \Pr(K|M_3) = \\ &= \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{13}{6} = \frac{13}{18} \end{aligned}$$

3. O problema pede

$$\Pr(M_1|K) = \frac{\Pr(K \cap M_1)}{\Pr(K)} = \frac{\Pr(M_1) \times \Pr(K|M_1)}{\Pr(K)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{18}} = \frac{3}{13}$$

### Exemplo 10.5.

Um gerente de banco tem que decidir se concede ou não empréstimo aos clientes que o solicitam. Ele analisa diversos dados para estudar a possibilidade de o cliente vir a ficar inadimplente. Com base em dados passados, ele estima em 15% a taxa de inadimplência. Dentre os inadimplentes, ele tem 80% de chance de tomar a decisão certa, enquanto essa chance aumenta para 90% entre os clientes adimplentes. Esse gerente acaba de recusar um empréstimo. Qual é a probabilidade de ele ter tomado a decisão correta?

### Solução:

Os fatos envolvidos nesse processo decisório são: “cliente é inadimplente ou não” e “gerente concede ou não o empréstimo”. Vamos definir os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} I &= \text{“cliente é inadimplente”} \\ C &= \text{“gerente concede empréstimo”} \end{aligned}$$

Usaremos a notação de evento complementar para definir

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \text{“cliente é adimplente”} \\ \bar{C} &= \text{“gerente não concede empréstimo”} \end{aligned}$$

Note que temos duas possibilidades de acerto e duas possibilidades de erro.

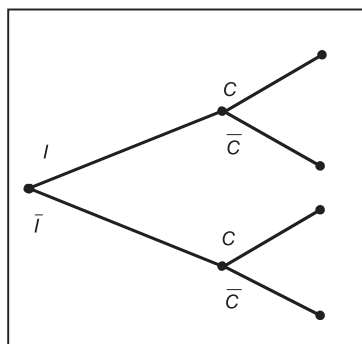
Os acertos são:

1. cliente é inadimplente e gerente não concede o empréstimo e
2. cliente é adimplente e gerente concede o empréstimo.

Os erros são:

1. cliente é inadimplente e gerente concede o empréstimo e
2. cliente é adimplente e gerente não concede o empréstimo.

A árvore que representa o espaço amostral é dada na **Figura 10.5**.



**Figura 10.5:** Espaço amostral para o Exemplo 10.5.

As probabilidades dadas são

$$\Pr(I) = 0,15 \quad \Pr(\bar{C}|I) = 0,80 \quad \Pr(C|\bar{I}) = 0,90$$

Pela lei do complementar, resulta que

$$\Pr(\bar{I}) = 0,85 \quad \Pr(C|I) = 0,20 \quad \Pr(\bar{C}|\bar{I}) = 0,10$$

Com relação ao que o problema pede, temos que, dado que o gerente *recusou* o empréstimo, a decisão só será certa se o cliente for *inadimplente*. Logo, temos que calcular

$$\Pr(I|\bar{C}) = \frac{\Pr(I \cap \bar{C})}{\Pr(\bar{C})}$$

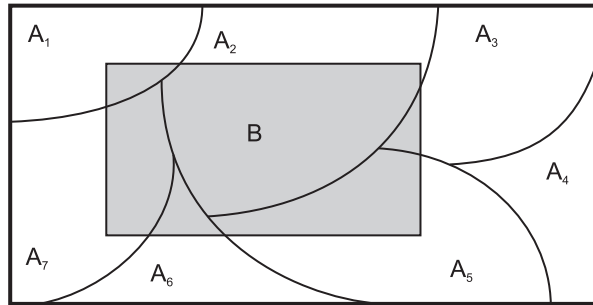
Mas o gerente pode recusar o empréstimo sendo o cliente inadimplente ou não, ou seja,

$$\begin{aligned}\Pr(\bar{C}) &= \Pr(\bar{C} \cap I) + \Pr(\bar{C} \cap \bar{I}) \\ &= \Pr(I) \Pr(\bar{C}|I) + \Pr(\bar{I}) \Pr(\bar{C}|\bar{I}) \\ &= 0,15 \times 0,80 + 0,85 \times 0,10 = 0,205\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(I|\bar{C}) &= \frac{\Pr(I \cap \bar{C})}{\Pr(\bar{C})} \\ &= \frac{\Pr(I) \Pr(\bar{C}|I)}{\Pr(I) \Pr(\bar{C}|I) + \Pr(\bar{I}) \Pr(\bar{C}|\bar{I})} \\ &= \frac{0,15 \times 0,80}{0,205} = 0,5854\end{aligned}$$

## TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL E TEOREMA DE BAYES

Considere a **Figura 10.6**, onde  $A_1, A_2, \dots, A_n$  é uma partição do espaço amostral  $\Omega$  e  $B$  um evento qualquer em  $\Omega$ .



**Figura 10.6:** Partição do espaço amostral.

Como a união de todos os  $A_i$ 's é o espaço amostral, segue que

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B).$$

O fato de alguns desses termos serem o conjunto vazio (por exemplo,  $B \cap A_4 = \emptyset$ ) não invalida o resultado, uma vez que  $A \cup \emptyset = A$ . Por definição de partição, os  $A_i$ 's são mutuamente exclusivos dois a dois; logo, os eventos  $A_i \cap B$  também o são.



Então, pela lei da probabilidade de eventos disjuntos, podemos escrever

$$\begin{aligned}\Pr(B) &= \Pr[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots (A_n \cap B)] = \\ &= \Pr(A_1 \cap B) + \Pr(A_2 \cap B) + \cdots + \Pr(A_n \cap B)\end{aligned}$$

e a regra da multiplicação nos dá que

$$\Pr(B) = \Pr(A_1) \Pr(B|A_1) + \Pr(A_2) \Pr(B|A_2) + \cdots + \Pr(A_n) \Pr(B|A_n)$$

Esse resultado é conhecido como teorema da probabilidade total.

---

**Teorema 10.1** (Teorema da Probabilidade Total).

---

Seja  $A_1, A_2, \dots, A_n$  uma partição do espaço amostral  $\Omega$  e seja  $B$  um evento qualquer em  $\Omega$ . Então

$$\Pr(B) = \sum_{i=1}^n \Pr(A_i) \Pr(B|A_i)$$

Como visto, a probabilidade  $\Pr(A_i)$  é denominada *probabilidade a priori do evento  $A_i$* . Continuando no contexto da **Figura 10.6**, suponhamos agora que  $B$  tenha ocorrido. Vamos usar essa informação para calcular a probabilidade **a posteriori** do evento  $A_i$ , ou seja, vamos calcular  $\Pr(A_i|B)$ . Por definição, temos que

$$\Pr(A_i|B) = \frac{\Pr(A_i \cap B)}{\Pr(B)}$$

Usando a regra da multiplicação e o teorema da probabilidade total, resulta que

$$\Pr(A_i|B) = \frac{\Pr(A_i) \Pr(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n \Pr(A_j) \Pr(B|A_j)}$$

Esse resultado é conhecido como teorema de Bayes.

---

**Teorema 10.2** (Teorema de Bayes).

---

Seja  $A_1, A_2, \dots, A_n$  uma partição do espaço amostral  $\Omega$  e seja  $B$  um evento qualquer em  $\Omega$ . Então

$$\Pr(A_i|B) = \frac{\Pr(A_i) \Pr(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n \Pr(A_j) \Pr(B|A_j)}$$

É importante que, na resolução de exercícios e também na aplicação prática desses teoremas, você identifique os eventos de interesse, os eventos que definem a partição do espaço amostral e quais são as probabilidades **a priori**. Em geral, são essas probabilidades que identificam a partição de  $\Omega$ . Vamos considerar mais um exemplo para ilustrar esses pontos.

### Exemplo 10.6.

Em uma turma de Administração, 65% dos alunos são do sexo masculino. Sabe-se que 30% dos alunos têm carro, enquanto essa proporção entre as alunas se reduz para 18%. Sorteia-se ao acaso um estudante dessa turma usando o seu número de matrícula e constata-se que possui um carro. Qual é a probabilidade de que a pessoa sorteada seja do sexo feminino?

### Solução:

Os eventos em questão envolvem o sexo do aluno e a posse de um carro. Vamos definir os eventos de interesse da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H &= \text{homem} & M &= \text{mulher} \\ C &= \text{possui carro} & \bar{C} &= \text{não possui carro} \end{aligned}$$

Note que  $H$  e  $M$  definem uma partição do espaço amostral, assim como  $C$  e  $\bar{C}$ . No entanto, as probabilidades **a priori** dadas referem-se a  $H$  e  $M$ ; logo, a partição de  $\Omega$  será definida em termos desses eventos. Os dados do problema nos dão que

$$\begin{aligned} \Pr(H) &= 0,65 \Rightarrow \Pr(M) = 0,35 \\ \Pr(C|H) &= 0,30 \Rightarrow \Pr(\bar{C}|H) = 0,70 \\ \Pr(C|M) &= 0,18 \Rightarrow \Pr(\bar{C}|M) = 0,82 \end{aligned}$$

O problema pede  $\Pr(M|C)$  e para calcular essa probabilidade, temos que calcular  $\Pr(C)$ . Pelo teorema da probabilidade total, sabemos que

$$\begin{aligned} \Pr(C) &= \Pr(C \cap M) + \Pr(C \cap H) \\ &= \Pr(M) \Pr(C|M) + \Pr(H) \Pr(C|H) \\ &= 0,35 \times 0,18 + 0,65 \times 0,30 = 0,518 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Pr(M|C) &= \frac{\Pr(C \cap M)}{\Pr(C)} = \frac{\Pr(M) \Pr(C|M)}{\Pr(C)} \\ &= \frac{0,35 \times 0,18}{0,518} = 0,12162 \end{aligned}$$

## Resumo

Nesta aula, você estudou dois importantes teoremas da teoria de probabilidade.

Seja  $A_1, A_2, \dots, A_n$  uma partição do espaço amostral  $\Omega$  e seja  $B$  um evento qualquer de  $\Omega$ .

### Teorema da Probabilidade Total

$$\Pr(B) = \sum_{i=1}^n \Pr(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n \Pr(A_i) \Pr(B|A_i)$$

### Teorema de Bayes

$$\Pr(A_i|B) = \frac{\Pr(A_i) \Pr(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n \Pr(A_j) \Pr(B|A_j)} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**Probabilidades a priori** - são as probabilidades  $\Pr(A_i)$

**Probabilidades a posteriori** - são as probabilidades  $\Pr(A_i|B)$

### Exercício 10.1.

Uma propaganda de um curso preparatório para a prova da ANPAD diz que 80% dos seus alunos conseguem ingressar em algum programa de Mestrado em Administração. Dos cadastros da ANPAD, sabe-se que 15% dos candidatos aos programas de Mestrado escolhem esse curso e que o índice geral de aprovação é de 63% (dados fictícios).

1. Se um candidato não escolhe esse curso, qual é a probabilidade de ele passar no exame da ANPAD?
2. Sabe-se que um aluno foi aprovado, conseguindo ingressar no programa de Mestrado de uma grande universidade. Qual é a probabilidade de ele ter frequentado este curso preparatório?

**Exercício 10.2.**

Em uma localidade, 8% dos adultos sofrem de determinada doença. Um médico local diagnostica corretamente 95% das pessoas que têm a doença e diagnostica erradamente 2% das pessoas que não a têm. Um adulto acaba de ser diagnosticado pelo médico como portador da doença. Qual é a probabilidade de esse adulto ter, de fato, a doença?

**Exercício 10.3.**

Uma urna contém 4 bolas numeradas de 1 a 4. Duas bolas são retiradas sem reposição. Seja  $A$  o evento “soma é 5” e seja  $B_i$  o evento “primeira bola sorteada tem o número  $i$ ”,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Calcule  $\Pr(A|B_i)$  e  $\Pr(B_i|A)$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ .

**Exercício 10.4.**

Resolva o exercício anterior, supondo que as extrações são feitas com reposição.

**Exercício 10.5.**

Numa prova há 7 perguntas do tipo Verdadeiro-Falso. Calcule a probabilidade de um aluno acertar todas as 7 questões

1. se ele “chuta” as respostas;
2. se ele “chuta” as respostas, mas sabendo que há mais Verdadeiros do que Falsos.

**Exercício 10.6.**

*Continuação do Exercício 9.13 da Aula 9.* O Ministério da Economia da Espanha acredita que a probabilidade de a inflação ficar abaixo de 3% este ano é de 0,20; entre 3% e 4% é de 0,45 e acima de 4% é de 0,35. O Ministério acredita que, com inflação abaixo de 3%, a probabilidade de se criarem mais 200.000 empregos é de 0,6, diminuindo essa probabilidade para 0,3 caso a inflação fique entre 3% e 4%; no entanto, com inflação acima de 4%, isso é totalmente impossível. No ano seguinte, um economista estrangeiro constata que foram criados 200.000 empregos novos. Qual é a probabilidade de a inflação ter ficado abaixo de 3%?

**Exercício 10.7.**

*Continuação do Exercício 9.15 da Aula 9.* Joana quer enviar uma carta a Camila. A probabilidade de que Joana escreva a carta é  $\frac{8}{10}$ . A probabilidade de que o correio não a perca é  $\frac{9}{10}$ . A probabilidade de que o carteiro a entregue é também  $\frac{9}{10}$ . Dado que Camila não recebeu a carta, qual é a probabilidade de que Joana não a tenha escrito?

**Exercício 10.8.**

*Continuação do Exercício 9.23 da Aula 9.* Um aluno responde a uma questão de múltipla escolha com 4 alternativas, com uma só correta.

A probabilidade de que ele saiba a resposta certa da questão é de 30%. Se ele não sabe a resposta, existe a possibilidade de ele acertar “no chute”. Não existe a possibilidade de ele obter a resposta certa por “cola”. Se o aluno acertou a questão, qual é a probabilidade de ele ter “chutado” a resposta?

**Exercício 10.9.**

Consideremos dois dados: um deles é equilibrado e o outro viciado, com  $\Pr(1) = 0,5$  e  $\Pr(2) = \dots = \Pr(6) = 0,1$ . Escolhe-se um dos dados ao acaso e efetuam-se dois lançamentos, que resultam ambos na face 1. Qual a probabilidade de ter sido escolhido o dado viciado?

**Exercício 10.10.**

Uma urna tem 3 bolas brancas, 3 pretas e 4 azuis. Duas bolas são retiradas ao acaso e substituídas por 5 vermelhas. Depois disso, retira-se uma bola. Qual a probabilidade de ser azul?

**Exercício 10.11.**

São dadas as urnas  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Da urna  $A$  é retirada uma bola, que é colocada na urna  $B$ . Da urna  $B$  retira-se, então, uma bola que é colocada na urna  $C$ . Retira-se em seguida uma bola da urna  $C$ . A probabilidade de ocorrer bola de cor vermelha na última extração é 0,537. Determinar o valor de  $x$  sabendo que as urnas têm as seguintes composições:

$$A : \begin{Bmatrix} 7V \\ 3P \end{Bmatrix} \quad B : \begin{Bmatrix} 3V \\ 6P \end{Bmatrix} \quad C : \begin{Bmatrix} 9-x & V \\ x & P \end{Bmatrix}$$

onde  $V$  representa bola vermelha e  $P$ , bola preta.

### Exercício 10.12.

O chefe do Setor de Compras de uma empresa trabalha com 3 grandes distribuidores de material de escritório. O distribuidor 1 é responsável por 70% dos pedidos, enquanto cada um dos outros 2 distribuidores responde por 15% dos pedidos. Dos registros gerais de compra, sabe-se que 6% dos pedidos chegam com atraso. A proporção de pedidos com atraso do distribuidor 1 é a metade da proporção do distribuidor 2 que, por sua vez, é o dobro da proporção do distribuidor 3. Calcule a porcentagem de pedidos com atraso de cada um dos distribuidores.

### Exercício 10.13.

O gerente de Recursos Humanos de uma empresa escolhe estagiários oriundos de dois cursos de Administração. No curso 1, a proporção de alunos com boa formação em informática é de 60%, enquanto no outro curso essa proporção cai para 40%. Um estagiário acaba de ser contratado. A probabilidade de que tenha boa formação em informática é 0,44. Qual é a preferência (probabilidade) do gerente pelo curso 1?

### Exercício 10.14.

Em um escritório de contabilidade, o contador-chefe tem três auxiliares: um que trabalha em tempo integral e os outros dois que trabalham em tempo parcial. O funcionário de tempo integral é responsável por 50% dos balancetes, enquanto cada um dos funcionários de tempo parcial responde pela metade dos balancetes restantes. Nos últimos 2 meses, a proporção de balancetes com erros oriundos do funcionário de tempo integral foi de 5%, enquanto para os funcionários de tempo parcial essas proporções foram de 6% e 8%. O chefe resolve, então, fazer um novo treinamento, discutindo os principais erros encontrados. No mês seguinte ao treinamento, a proporção de balancetes com erro cai pela metade, com cada funcionário de tempo parcial produzindo a mesma proporção de balancetes com erro, igual à metade da proporção de erros do funcionário de tempo integral. Quais são as novas proporções de balancetes com erro de cada funcionário?

**Exercício 10.15.**

Um empreiteiro apresentou orçamentos separados para a execução da parte elétrica e da parte hidráulica de um edifício. Ele acha que a probabilidade de ganhar a concorrência da parte elétrica é de  $1/2$ . Caso ele ganhe a parte elétrica, a chance de ganhar a parte hidráulica é de  $3/4$ ; caso contrário, essa probabilidade é de  $1/3$ . Qual é a probabilidade de ele:

1. ganhar os dois contratos?
2. ganhar apenas um?
3. não ganhar qualquer contrato?

**SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS****Exercício 10.1.**

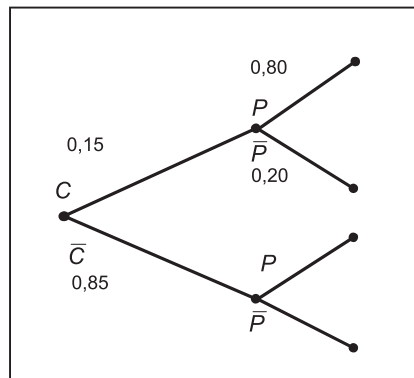
Os eventos de interesse no problema são:

$C$  = “escolher o curso em questão”  
 $P$  = “passar no concurso da ANPAD”

Os dados do problema informam que

$$\begin{aligned}\Pr(P|C) &= 0,80 \\ \Pr(C) &= 0,15 \\ \Pr(P) &= 0,63\end{aligned}$$

Veja a **Figura 10.7**.



**Figura 10.7:** Espaço amostral para o experimento do Exercício 10.1.

1. Temos que

$$\begin{aligned}
 \Pr(P) &= \Pr(P \cap C) + \Pr(P \cap \bar{C}) \Rightarrow \\
 0,63 &= \Pr(C) \Pr(P|C) + \Pr(\bar{C}) \Pr(P|\bar{C}) \Rightarrow \\
 0,63 &= 0,15 \times 0,80 + 0,85 \times \Pr(P|\bar{C}) \Rightarrow \\
 \Pr(P|\bar{C}) &= \frac{0,63 - 0,15 \times 0,80}{0,85} \Rightarrow \\
 \Pr(P|\bar{C}) &= 0,60
 \end{aligned}$$

2. O problema pede  $\Pr(C|P)$ .

$$\begin{aligned}
 \Pr(C|P) &= \frac{\Pr(C \cap P)}{\Pr(P)} = \frac{\Pr(C) \Pr(P|C)}{\Pr(P)} \\
 &= \frac{0,15 \times 0,80}{0,63} = 0,1905
 \end{aligned}$$

### Exercício 10.2.

Vamos definir os seguintes eventos:

$D$  = pessoa tem a doença  $\Rightarrow \bar{D}$  = pessoa não tem a doença  
 $V$  = diagnóstico indica doença  $\Rightarrow \bar{V}$  = diagnóstico não indica doença

Se a pessoa tem a doença, diagnóstico correto significa que o médico identificou a doença. Se a pessoa não tem a doença, diagnóstico correto significa que o médico não identificou a doença. Dessa forma, os dados do problema nos dão as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned}
 \Pr(D) &= 0,08 \Rightarrow \Pr(\bar{D}) = 0,92 \\
 \Pr(V|D) &= 0,95 \Rightarrow \Pr(\bar{V}|D) = 0,05 \\
 \Pr(V|\bar{D}) &= 0,02 \Rightarrow \Pr(\bar{V}|\bar{D}) = 0,98
 \end{aligned}$$

A probabilidade **a priori** dada é  $\Pr(D)$  e, por consequência,  $\Pr(\bar{D})$ . Então, para aplicar o teorema de Bayes, a partição do espaço amostral tem que ser definida por esses eventos, embora  $V$  e  $\bar{V}$  também definam uma partição. Queremos calcular  $\Pr(D|V)$ . Por definição, temos que:

$$\Pr(D|V) = \frac{\Pr(D \cap V)}{\Pr(V)}$$



Mas,

$$\begin{aligned}
 \Pr(V) &= \Pr(V \cap D) + \Pr(V \cap \overline{D}) \\
 &= \Pr(V|D) \times \Pr(D) + \Pr(V|\overline{D}) \times \Pr(\overline{D}) = \\
 &= 0,95 \times 0,08 + 0,02 \times 0,92 \\
 &= 0,076 + 0,0184 = 0,0944
 \end{aligned}$$

$$\Pr(V \cap D) = \Pr(V|D) \times \Pr(D) = 0,95 \times 0,08 = 0,076$$

Logo,

$$\Pr(D|V) = \frac{0,076}{0,0944} = 0,8051$$

### Exercício 10.3.

Pelo princípio fundamental da multiplicação, temos que  $\#\Omega = 4 \times 3 = 12$ .

$$A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\} \Rightarrow \Pr(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \{(1,2), (1,3), (1,4)\} \\
 B_2 &= \{(2,1), (2,3), (2,4)\} \\
 B_3 &= \{(3,1), (3,2), (3,4)\} \\
 B_4 &= \{(4,1), (4,2), (4,3)\} \\
 \Pr(B_i) &= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad i = 1, 2, 3, 4
 \end{aligned}$$

Note que  $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$  e como esses eventos são mutuamente exclusivos dois a dois, eles formam uma partição de  $\Omega$ . Temos que

$$A \cap B_1 = \{(1,4)\}, A \cap B_2 = \{(2,3)\}, A \cap B_3 = \{(3,2)\}, A \cap B_4 = \{(4,1)\}.$$

$$\Pr(A \cap B_i) = \frac{1}{12} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Logo,

$$\Pr(A|B_i) = \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(B_i)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} = \Pr(A) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\Pr(B_i|A) = \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} = \Pr(B_i) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Note que os eventos  $A$  e  $B_i, i = 1, 2, 3, 4$  são independentes!

**Exercício 10.4.**

Pelo princípio fundamental da multiplicação, temos que  $\#\Omega = 4 \times 4 = 16$ .

$$A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\} \Rightarrow \Pr(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$B_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$$

$$B_2 = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$$

$$B_3 = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

$$B_4 = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

$$\Pr(B_i) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Então,

$$A \cap B_1 = \{(1, 4)\}, A \cap B_2 = \{(2, 3)\}, A \cap B_3 = \{(3, 2)\}, A \cap B_4 = \{(4, 1)\}.$$

$$\Pr(A \cap B_i) = \frac{1}{16} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Logo,

$$\Pr(A|B_i) = \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(B_i)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} = \Pr(A) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\Pr(B_i|A) = \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(A)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} = \Pr(B_i) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Como antes, os eventos  $A$  e  $B_i, i = 1, 2, 3, 4$  são independentes!

**Exercício 10.5.**

1. Pelo princípio fundamental da multiplicação, há  $2^7 = 128$  possibilidades de respostas para as 7 questões. Logo, a probabilidade de acertar todas é  $\frac{1}{128}$ .
2. Haver mais Verdadeiros do que Falsos significa que pode ter 4 Verdadeiros (e, portanto, 3 Falsos), 5 Verdadeiros (e, portanto, 2 Falsos), 6 Verdadeiros (e, portanto, 1 Falso) e 7 Verdadeiros (e, portanto, nenhum Falso).

4 verdadeiros: existem  $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1} = 35$  maneiras;

5 verdadeiros: existem  $\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2 \times 1} = 21$  maneiras;

6 verdadeiros: existem  $\binom{7}{6} = \frac{7!}{6!1!} = \frac{7 \times 6!}{6! \times 1} = 7$  maneiras;

7 verdadeiros: existem  $\binom{7}{7} = \frac{7!}{7!0!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$  maneira.

Assim, se denotamos por  $V$  o evento “ter mais verdadeiros que falsos”, resulta que

$$\begin{aligned}\Pr(V) &= \frac{\binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7}}{128} \\ &= \frac{35 + 21 + 7 + 1}{128} = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Se  $A$  é o evento “acertar todas as questões”, então  $A \subset V$ , e o problema pede

$$\Pr(A|V) = \frac{\Pr(A \cap V)}{\Pr(V)} = \frac{\Pr(A)}{\Pr(V)} = \frac{\frac{1}{128}}{\frac{64}{128}} = \frac{1}{64}$$

### Exercício 10.6.

No Exercício 9.13 da aula anterior, definimos os seguintes eventos:  $B$  = “inflação abaixo de 3%”;  $M$  = “inflação entre 3% e 4%”,  $A$  = “inflação acima de 4%” e  $E$  = “200.000 empregos”. O problema dá o seguinte:

$$\begin{aligned}\Pr(B) &= 0,20 & \Pr(M) &= 0,45 & \Pr(A) &= 0,35 \\ \Pr(E|B) &= 0,6 & \Pr(E|M) &= 0,3 & \Pr(E|A) &= 0\end{aligned}$$

Lá, calculamos também que

$$\begin{aligned}\Pr(E) &= \Pr(B) \Pr(E|B) + \Pr(M) \Pr(E|M) + \Pr(A) \Pr(E|A) \\ &= 0,20 \times 0,60 + 0,45 \times 0,30 + 0,35 \times 0 = 0,255\end{aligned}$$

O problema agora pede  $\Pr(B|E)$  :

$$\begin{aligned}\Pr(B|E) &= \frac{\Pr(B \cap E)}{\Pr(E)} = \frac{\Pr(B) \Pr(E|B)}{\Pr(E)} \\ &= \frac{0,20 \times 0,6}{0,255} = 0,4706\end{aligned}$$

### Exercício 10.7.

Veja a **Figura 10.8**, na qual temos os seguintes eventos:

$E$  = “Joana escreve a carta”;  $C$  = “correio não perde a carta”;  
 $T$  = “carteiro entrega a carta”.

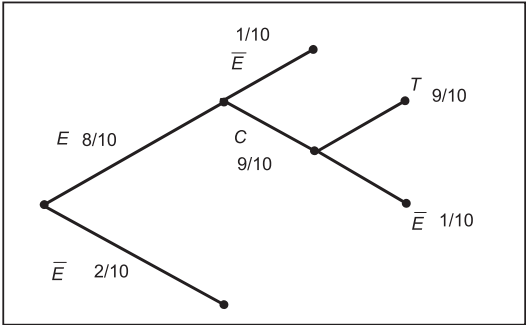


Figura 10.8: Diagrama de árvore para o Exercício 10.7.

No Exercício 9.7 da aula anterior, definimos o evento  $R = \text{“Camila recebe a carta”}$  e calculamos

$$\begin{aligned} \Pr(\overline{R}) &= \Pr(\overline{E}) + \Pr(E \cap \overline{C}) + \Pr(E \cap C \cap \overline{T}) \\ &= \frac{2}{10} + \frac{8}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{8}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = 0,352 \end{aligned}$$

O problema agora pede  $\Pr(\overline{E}|\overline{R})$  :

$$\Pr(\overline{E}|\overline{R}) = \frac{\Pr(\overline{R} \cap \overline{E})}{\Pr(\overline{R})} = \frac{\Pr(\overline{E}) \Pr(\overline{R}|\overline{E})}{\Pr(\overline{R})}$$

O evento  $\overline{R}|\overline{E}$  significa “Camila não receber a carta, dado que Joana não a escreveu”. Ora, se Joana não escreveu, é claro que Camila não recebe a carta! Logo, esse evento é o evento certo e, portanto,  $\Pr(\overline{E}|\overline{R}) = \frac{\Pr(\overline{E}) \Pr(\overline{R}|\overline{E})}{\Pr(\overline{R})} = \frac{0,2 \times 1}{0,352} = 0,5682$

Exercício 10.8.

Veja a Figura 10.9, na qual temos os eventos  $S = \text{“sabe a resposta”}$  e  $A = \text{“acerta a resposta”}$ .

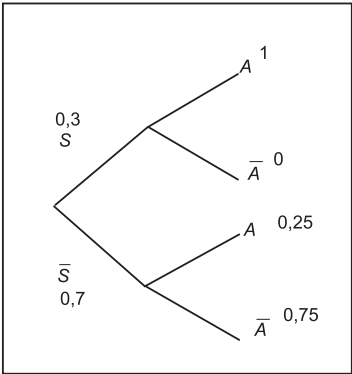


Figura 10.9: Diagrama de árvore para o Exercício 10.8.

É dado que

$$\Pr(S) = 0,3 \Rightarrow \Pr(\bar{S}) = 0,7$$

Se o aluno sabe a resposta, ele acerta a questão. Se ele não sabe, ele pode “chutar” entre as 4 alternativas. Logo,

$$\Pr(A|S) = 1 \quad \Pr(A|\bar{S}) = 0,25$$

No Exercício 9.14 da aula anterior, calculamos

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= \Pr(A \cap S) + \Pr(A \cap \bar{S}) \\ &= \Pr(S) \times \Pr(A|S) + \Pr(\bar{S}) \times \Pr(A|\bar{S}) \\ &= 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0,25 = 0,475 \end{aligned}$$

O problema agora pede  $\Pr(\bar{S}|A)$  :

$$\begin{aligned} \Pr(\bar{S}|A) &= \frac{\Pr(\bar{S} \cap A)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(\bar{S}) \Pr(A|\bar{S})}{\Pr(A)} \\ &= \frac{0,7 \times 0,25}{0,475} = 0,3684 \end{aligned}$$

### Exercício 10.9.

Seja  $A_i$  = “face  $i$  no primeiro lançamento”,  $i = 1, \dots, 6$  e seja  $B_i$  = “face  $i$  no segundo lançamento”,  $i = 1, \dots, 6$ . Como os lançamentos são independentes, os eventos  $A_i$  e  $B_i$  são independentes. Logo, a probabilidade de cada um dos 36 pares  $(A_i, B_i)$  do espaço amostral é dada pelo produto das probabilidades individuais, ou seja,

$$\Pr(A_i, B_i) = \Pr(A_i) \Pr(B_i)$$

Vamos definir os seguintes eventos:

$$E = \text{“dado equilibrado”} \Rightarrow \bar{E} = \text{“dado viciado”}$$

$$D = \text{“dois 1s”} \Rightarrow \bar{D} = \text{“no máximo um 1”}$$

A escolha dos dados é aleatória. Logo,

$$\Pr(E) = \Pr(\bar{E}) = \frac{1}{2}$$

Temos também que

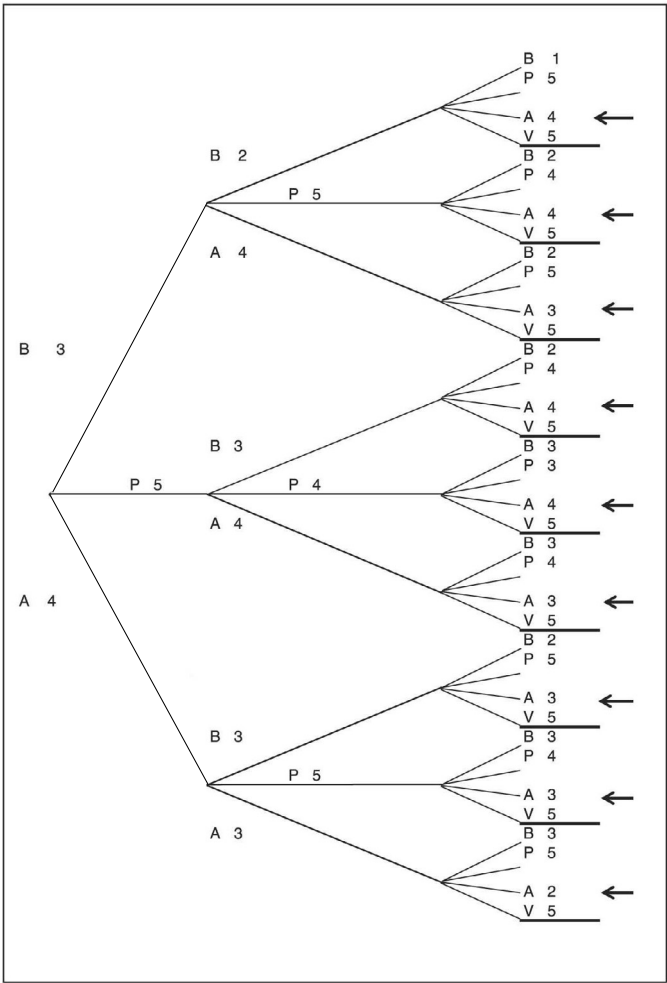
$$\begin{aligned} \Pr(D|E) &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \Rightarrow \Pr(\bar{D}|E) = \frac{35}{36} \\ \Pr(D|\bar{E}) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \Pr(\bar{D}|\bar{E}) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

O problema pede  $\Pr(\overline{E}|D)$ . Temos que

$$\begin{aligned}\Pr(\overline{E}|D) &= \frac{\Pr(\overline{E} \cap D)}{\Pr(D)} = \frac{\Pr(\overline{E} \cap D)}{\Pr(D \cap \overline{E}) + \Pr(D \cap E)} \\ &= \frac{\Pr(\overline{E}) \Pr(D|\overline{E})}{\Pr(\overline{E}) \Pr(D|\overline{E}) + \Pr(E) \Pr(D|E)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{36}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{9+1}{72}} = \frac{9}{10}\end{aligned}$$

**Exercício 10.10.**

São feitas 3 extrações. Veja a **Figura 10.10**, na qual os números representam o número de bolas disponíveis de cada cor no momento da respectiva extração. Queremos a probabilidade de sair azul na terceira extração. Esse evento corresponde à união dos eventos indicados pelas setas na figura; ou seja, representando a extração pelo número no subscrito, temos que

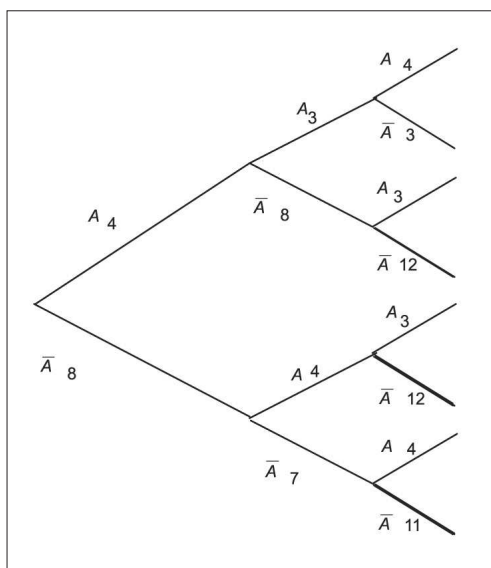


**Figura 10.10:** Espaço amostral para o experimento do Exercício 10.10.

$$\begin{aligned}
\Pr(A_3) &= [\Pr(B_1 \cap B_2 \cap A_3) + \Pr(B_1 \cap P_2 \cap A_3) + \Pr(B_1 \cap A_2 \cap A_3)] + \\
&\quad [\Pr(P_1 \cap B_2 \cap A_3) + \Pr(P_1 \cap P_2 \cap A_3) + \Pr(P_1 \cap A_2 \cap A_3)] + \\
&\quad [\Pr(A_1 \cap B_2 \cap A_3) + \Pr(A_1 \cap P_2 \cap A_3) + \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3)] \\
&= [\Pr(B_1) \Pr(B_2|B_1) \Pr(A_3|B_1 \cap B_2) + \Pr(B_1) \Pr(P_2|B_1) \Pr(A_3|B_1 \cap P_2) + \\
&\quad \Pr(B_1) \Pr(A_2|B_1) \Pr(A_3|B_1 \cap A_2)] + [\Pr(P_1) \Pr(B_2|P_1) \Pr(A_3|P_1 \cap B_2) + \\
&\quad \Pr(P_1) \Pr(P_2|P_1) \Pr(A_3|P_1 \cap P_2) + \Pr(P_1) \Pr(A_2|P_1) \Pr(A_3|P_1 \cap A_2)] + \\
&\quad [\Pr(A_1) \Pr(B_2|A_1) \Pr(A_3|A_1 \cap B_2) + \Pr(A_1) \Pr(P_2|A_1) \Pr(A_3|A_1 \cap P_2) + \\
&\quad \Pr(A_1) \Pr(A_2|A_1) \Pr(A_3|A_1 \cap A_2)] \\
&= \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{4}{15} + \frac{3}{12} \times \frac{5}{11} \times \frac{4}{15} + \frac{3}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{15} + \\
&\quad \frac{5}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{4}{15} + \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{4}{15} + \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{15} + \\
&\quad \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{15} + \frac{4}{12} \times \frac{5}{11} \times \frac{3}{15} + \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{15} \\
&= \frac{440}{1.980} = \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

Esse problema pode ser resolvido de forma mais simples, já que só estamos interessados em bola azul na terceira extração. Podemos pensar, em cada extração, que ocorreu bola azul ou não. Veja a **Figura 10.11**. Dessa forma, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\Pr(A_3) &= \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \Pr(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) + \Pr(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) + \\
&\quad \Pr(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \\
&= \Pr(A_1) \Pr(A_2|A_1) \Pr(A_3|A_2 \cap A_1) + \Pr(A_1) \Pr(\bar{A}_2|A_1) \Pr(A_3|\bar{A}_2 \cap A_1) + \\
&\quad \Pr(\bar{A}_1) \Pr(A_2|\bar{A}_1) \Pr(A_3|A_2 \cap \bar{A}_1) + \Pr(\bar{A}_1) \Pr(\bar{A}_2|\bar{A}_1) \Pr(A_3|\bar{A}_2 \cap \bar{A}_1) \\
&= \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{15} + \frac{4}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{3}{15} + \frac{8}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{15} + \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{4}{15} \\
&= \frac{440}{1.980} = \frac{2}{9}
\end{aligned}$$



**Figura 10.11:** Solução alternativa do Exercício 10.10.

### Exercício 10.11.

São feitas 3 extrações. Como antes, vamos denotar por  $V_i$  o evento “bola de cor vermelha na extração  $i$ ” e por  $B_i$  o evento “bola de cor branca na extração  $i$ ”. Queremos  $\Pr(V_3)$ .

$$\begin{aligned}\Pr(V_3) &= \Pr(V_1 \cap V_2 \cap V_3) + \Pr(V_1 \cap P_2 \cap V_3) + \\ &\quad \Pr(P_1 \cap V_2 \cap V_3) + \Pr(P_1 \cap P_2 \cap V_3) \\ &= \Pr(V_1) \times \Pr(V_2|V_1) \times \Pr(V_3|V_1 \cap V_2) + \\ &\quad \Pr(V_1) \times \Pr(P_2|V_1) \times \Pr(V_3|V_1 \cap P_2) + \\ &\quad \Pr(P_1) \times \Pr(V_2|P_1) \times \Pr(V_3|P_1 \cap V_2) + \\ &\quad \Pr(P_1) \times \Pr(P_2|P_1) \times \Pr(V_3|P_1 \cap P_2)\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}0,537 &= \frac{7}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{10-x}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{9-x}{10} + \\ &\quad \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{10-x}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{9-x}{10} \\ 0,537 &= 0,037 \times (10-x) + 0,063 \times (9-x) \\ 0,537 &= 0,937 - 0,1x \\ 0,1x &= 0,4 \\ x &= 4\end{aligned}$$

### Exercício 10.12.

Vamos definir os seguintes eventos:

$$\begin{aligned}D_i &= \text{“distribuidor } i\text{”, } i = 1, 2, 3 \\ A &= \text{“atraso”}\end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned}\Pr(D_1) &= 0,70 & \Pr(D_2) = \Pr(D_3) &= 0,15 \\ \Pr(A) &= 0,06 \\ \Pr(A|D_1) &= \frac{1}{2} \Pr(A|D_2) \\ \Pr(A|D_2) &= 2 \Pr(A|D_3)\end{aligned}$$

Fazendo  $p = \Pr(A|D_1)$ , temos que

$$\begin{aligned}\Pr(A|D_2) &= 2p \\ \Pr(A|D_3) &= \frac{1}{2} \Pr(A|D_2) = p\end{aligned}$$



Mas,

$$\begin{aligned}\Pr(A) &= \Pr(A \cap D_1) + \Pr(A \cap D_2) + \Pr(A \cap D_3) \\ &= \Pr(D_1) \Pr(A|D_1) + \Pr(D_2) \Pr(A|D_2) + \Pr(D_3) \Pr(A|D_3)\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}0,06 &= 0,7p + 0,15 \times 2p + 0,15p \Rightarrow \\ 0,06 &= 1,15p \Rightarrow p = 0,052174\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\Pr(A|D_1) = 0,052174 \quad \Pr(A|D_2) = 0,104348 \quad \Pr(A|D_3) = 0,052174$$

### Exercício 10.13.

Considere os eventos  $I$  = “aluno tem boa formação em informática” e  $C_i$  = “aluno do curso  $i$ ”,  $i = 1, 2$ . O problema dá as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned}\Pr(I|C_1) &= 0,60 \\ \Pr(I|C_2) &= 0,40 \\ \Pr(I) &= 0,44\end{aligned}$$

e pede  $\Pr(C_1)$ . Sabemos que

$$\begin{aligned}\Pr(I) &= \Pr(C_1 \cap I) + \Pr(C_2 \cap I) \\ &= \Pr(C_1) \times \Pr(I|C_1) + \Pr(C_2) \times \Pr(I|C_2) = \\ &= \Pr(C_1) \times 0,6 + \Pr(C_2) \times 0,4 \\ &= 0,6 \times \Pr(C_1) + 0,4 \times [1 - \Pr(C_1)]\end{aligned}$$

Logo,

$$0,44 = 0,4 + 0,2 \times \Pr(C_1) \Rightarrow 0,2 \times \Pr(C_1) = 0,04 \Rightarrow \Pr(C_1) = 0,2$$

### Exercício 10.14.

Vamos indicar por  $F_i$  o evento “funcionário  $i$ ” e por  $E$  o evento “balancete com erro”. Antes do treinamento, temos:

$$\begin{aligned}\Pr(E) &= \Pr(F_1 \cap E) + \Pr(F_2 \cap E) + \Pr(F_3 \cap E) \\ &= \Pr(F_1) \Pr(E|F_1) + \Pr(F_2) \Pr(E|F_2) + \Pr(F_3) \Pr(E|F_3) \\ &= 0,5 \times 0,05 + 0,25 \times 0,06 + 0,25 \times 0,08 \\ &= 0,06\end{aligned}$$

Depois do treinamento, passamos a ter

$$\begin{aligned}\Pr(E) &= 0,03 \\ \Pr(E|F_2) &= \Pr(E|F_3) \\ \Pr(E|F_1) &= 2\Pr(E|F_3)\end{aligned}$$

Logo, fazendo  $p = \Pr(E|F_3)$

$$\begin{aligned}\Pr(E) &= \Pr(F_1 \cap E) + \Pr(F_2 \cap E) + \Pr(F_3 \cap E) \\ &= \Pr(F_1) \Pr(E|F_1) + \Pr(F_2) \Pr(E|F_2) + \Pr(F_3) \Pr(E|F_3) \Rightarrow \\ 0,03 &= 0,5 \times 2p + 0,25 \times p + 0,25 \times p \Rightarrow \\ 0,03 &= 1,5p \Rightarrow p = 0,02\end{aligned}$$

ou seja, depois do treinamento, as probabilidades de erro de cada funcionário passam a ser

$$\begin{aligned}\Pr(E|F_1) &= 0,04 \text{ (tempo integral)} \\ \Pr(E|F_2) &= \Pr(E|F_3) = 0,02 \text{ (tempo parcial)}\end{aligned}$$

### Exercício 10.15.

Sejam os eventos  $E$  = “ganhar parte elétrica” e  $H$  = “ganhar parte hidráulica”. Temos que

$$\Pr(E) = \frac{1}{2} \quad \Pr(H|E) = \frac{3}{4} \quad \Pr(H|\overline{E}) = \frac{1}{3}$$

Resulta que

$$\Pr(\overline{E}) = \frac{1}{2} \quad \Pr(\overline{H}|E) = \frac{1}{4} \quad \Pr(\overline{H}|\overline{E}) = \frac{2}{3}$$

1.  $\Pr(E \cap H) = \Pr(H|E) \Pr(E) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
2.  $\begin{aligned}\Pr(\overline{E} \cap H) + \Pr(E \cap \overline{H}) &= \\ &= \Pr(H|\overline{E}) \times \Pr(\overline{E}) + \Pr(\overline{H}|E) \times \Pr(E) = \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{24}\end{aligned}$
3.  $\Pr(\overline{E} \cap \overline{H}) = \Pr(\overline{H}|\overline{E}) \times \Pr(\overline{E}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

# Aula 11



## VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

---

### Objetivos

Nesta aula, você aprenderá um conceito muito importante da teoria de probabilidade: o conceito de variável aleatória. Você verá que as variáveis aleatórias e suas distribuições de probabilidade são as ferramentas fundamentais na modelagem de fenômenos aleatórios. Definiremos as variáveis aleatórias discretas e contínuas, mas, nesta aula, iremos nos concentrar nas variáveis discretas, apresentando os seguintes conceitos:

- 1 função de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta;
- 2 função de distribuição acumulada de uma variável aleatória discreta;
- 3 funções de variáveis aleatórias discretas.

Esses conceitos serão apresentados através de exemplos clássicos, envolvendo basicamente moedas, dados e baralho, mas ao final da aula, apresentaremos exemplos completos abordando situações práticas.

# VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

## VARIÁVEL ALEATÓRIA

Consideremos o seguinte experimento aleatório: sortear uma amostra de 20 funcionários de uma empresa que tem 500 funcionários.

O espaço amostral deste experimento é formado por todas as amostras possíveis e, como a ordem não importa e não deve haver repetição de funcionários, o número total de tais amostras é  $\#\Omega = \binom{500}{20}$ . Cada elemento desse espaço amostral é formado pela relação dos 20 funcionários sorteados. No entanto, em geral, o interesse não está nos funcionários em si, mas, sim, em alguma característica deste funcionário, por exemplo, sua altura, se tem curso superior ou não, número de dependentes etc.

Dessa forma, poderíamos calcular a altura média dos funcionários da amostra, o número médio de dependentes, a proporção de funcionários com curso superior, etc. Com isso, a cada amostra possível, ou seja, a cada ponto do espaço amostral associamos um número. Essa é a definição de variável aleatória.

### Definição 11.1.

Uma **variável aleatória** é uma função real (isto é, que assume valores em  $\mathbb{R}$ ) definida no espaço amostral  $\Omega$  de um experimento aleatório. Dito de outra forma, uma variável aleatória é uma função que associa a cada evento de  $\Omega$  um número real.

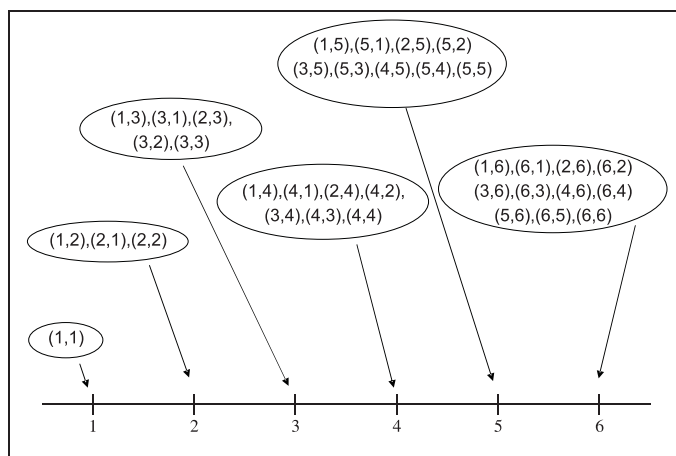
Por questões de simplicidade, muitas vezes abreviaremos a expressão variável aleatória por v.a. A convenção usual para representar uma v.a. consiste em usar letras maiúsculas como  $X$ ,  $Y$ , etc. Um valor específico, mas genérico, dessa variável será representado pela letra minúscula correspondente:  $x$ ,  $y$ , etc.

### Exemplo 11.1.

Consideremos o lançamento de dois dados equilibrados.

Como já visto, o espaço amostral desse experimento é formado pelos pares ordenados  $(i, j)$  em que  $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

Esse é um experimento em que o espaço amostral não é formado por números. Suponhamos que nosso interesse esteja no máximo das faces dos dois dados. Nesse caso, a v.a.  $X = \text{“máximo das 2 faces”}$  pode assumir os valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, conforme ilustrado na **Figura 11.1**. Aí podemos ver que o valor  $X = 2$  corresponde ao evento  $A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ .



**Figura 11.1:** Variável aleatória  $X = \text{“máximo das faces de 2 dados”}$ .

No exemplo anterior, a variável aleatória podia assumir um número finito de valores. Suponhamos, agora, que o experimento consistisse em sortear uma pessoa de um grupo de 20 adultos e a esse experimento associássemos a v.a.  $X = \text{“altura (em cm) da pessoa sorteada”}$ . Nesse caso, os possíveis valores de  $X$  estariam em um intervalo, digamos,  $(120, 210)$ . Isso nos leva à seguinte definição.

### Definição 11.2.

Uma variável aleatória é **discreta** se sua imagem (ou conjunto de valores que ela assume) é um conjunto finito ou enumerável. Se a imagem é um conjunto não enumerável, dizemos que a variável aleatória é **contínua**.

Lembre-se de que, na primeira parte do curso, estudamos as variáveis quantitativas discretas e contínuas.

Nesta aula e nas duas próximas estudaremos apenas as variáveis aleatórias discretas, apresentando vários conceitos relacionados a elas.

## FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

Os valores de uma v.a. discreta são definidos a partir do espaço amostral de um experimento aleatório. Assim, é natural perguntarmos “qual é a probabilidade do valor  $x$ ”?

No exemplo do máximo das duas faces de um dado da **Figura 11.1**, vimos que o valor  $X = 2$  corresponde ao evento  $A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ , enquanto o valor  $X = 1$  corresponde ao evento  $B = \{(1, 1)\}$ . Sendo assim, é de se esperar que o valor 2 seja mais provável que o valor 1. Podemos calcular a probabilidade de  $X = 2$  usando a seguinte equivalência de eventos:

$$\{X = 2\} \equiv A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

Dessa forma, podemos definir

$$\Pr(X = 2) = \Pr(A) = \frac{3}{36}$$

De maneira análoga, obtemos

$$\begin{aligned} \Pr(\{X = 1\}) &= \frac{1}{36} & \Pr(\{X = 3\}) &= \frac{5}{36} \\ \Pr(\{X = 4\}) &= \frac{7}{36} & \Pr(\{X = 5\}) &= \frac{9}{36} \\ \Pr(\{X = 6\}) &= \frac{11}{36} \end{aligned}$$

Esse exemplo ilustra o conceito de função de distribuição de probabilidade de uma v.a. discreta.

### Definição 11.3.

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta. A **função de distribuição de probabilidades** de  $X$  é a função  $f_X(x)$  que associa, a cada valor possível  $x$  de  $X$ , sua respectiva probabilidade, calculada da seguinte forma:  $f_X(x)$  é a probabilidade do evento  $\{X = x\}$ , consistindo em todos os resultados do espaço amostral que deram origem ao valor  $x$ .

$$f_X(x) = \Pr(\{X = x\}) = \sum_{\omega \in \Omega: X(\omega) = x} \Pr(\omega) \quad (11.1)$$

Para não sobrecarregar o texto, omitiremos os colchetes oriundos da notação de evento/conjunto e escreveremos  $\Pr(X = x)$  no lugar de  $\Pr(\{X = x\})$ , que seria a forma correta. Além disso, abreviaremos por fdp o termo função de distribuição de probabilidade.

Das propriedades (axiomas) da probabilidade resultam os seguintes fatos sobre a função de distribuição de probabilidades de uma v.a.  $X$ :

$$f_X(x) \geq 0 \quad (11.2)$$

$$\sum_x f_X(x) = 1 \quad (11.3)$$

em que  $\sum_x$  indica somatório ao longo de todos os possíveis valores de  $X$ . Note que a segunda propriedade é decorrente do axioma  $\Pr(\Omega) = 1$ , pois os eventos  $\{X = x\}$  são mutuamente exclusivos e formam uma partição do espaço amostral. Essas são as *condições definidoras de uma função de distribuição de probabilidade*.

## CÁLCULO DA FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

O cálculo da fdp de uma v.a.  $X$  qualquer se dá em três etapas:

- primeiro, temos que identificar todos os possíveis valores  $x$  da v.a.  $X$ ;
- segundo, temos que identificar os resultados que dão origem a cada valor  $x$  e suas respectivas probabilidades;
- finalmente, temos que somar todas essas probabilidades para obter  $f_X(x)$ .

### Exemplo 11.2.

Considerando novamente a v.a. definida na **Figura 11.1**, podemos resumir a fdp da variável em questão na seguinte tabela:

$x$	1	2	3	4	5	6
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Exemplo 11.3.

Consideremos novamente o lançamento de dois dados, mas agora vamos definir a seguinte v.a.  $X = \text{“soma das 2 faces”}$ . Para facilitar a solução desse problema, vamos construir uma tabela de duas entradas, em que cada dimensão representa o resultado de um dado e em cada cela temos a soma das duas faces.

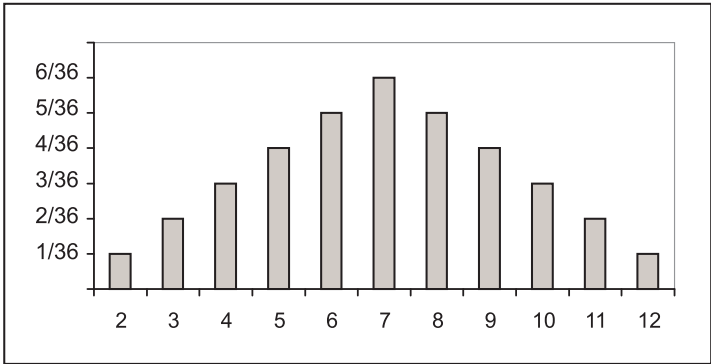
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Como cada ponto do espaço amostral é equiprovável, a fdp de  $X$  é:

$x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

A função de distribuição de probabilidade de uma v.a. discreta  $X$  que assume um número finito de valores pode ser representada por um gráfico de colunas, em que a cada valor de  $X$  corresponde uma coluna cuja altura representa a probabilidade do respectivo valor. Na **Figura 11.2** ilustra-se a fdp da v.a.  $X = \text{“soma das faces de 2 dados”}$ .



**Figura 11.2:** Função de distribuição de probabilidade de  $X = \text{“soma das faces de 2 dados”}$ .



**Exemplo 11.4.**

Dentre os cinco alunos de um curso com coeficiente de rendimento (CR) superior a 8,5, dois serão sorteados para receber uma bolsa de estudos. Os CRs desses alunos são: 8,8; 9,2; 8,9; 9,5; 9,0.

1. Designando por  $A, B, C, D, E$  os alunos, defina um espaço amostral para esse experimento.
2. Seja  $X = \text{CR médio dos alunos sorteados}$ . Liste os possíveis valores de  $X$ .
3. Liste o evento  $X \geq 9,0$ .
4. Encontre a fdp de  $X$  e calcule  $\Pr(X \geq 9)$ .

**Solução:**

1. Note que aqui a ordem não importa; logo,  $\#\Omega = \binom{5}{2} = 10$ . Mais especificamente,

$$\Omega = \left\{ (A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (C, D), (C, E), (D, E) \right\}$$

2. Usando uma tabela de duas entradas, podemos representar os valores de  $X$  da seguinte forma:

	A(8,8)	B(9,2)	C(8,9)	D(9,5)	E(9,0)
A(8,8)		$\frac{8,8+9,2}{2} = 9,0$	8,85	9,15	8,90
B(9,2)			9,05	9,35	9,10
C(8,9)				9,20	8,95
D(9,5)					9,25
E(9,0)					

3.  $\{X \geq 9\} = \{(A, D), (B, C), (B, D), (B, E), (C, D), (D, E)\}$ .
4. Como todos os pontos do espaço amostral são equiprováveis, a fdp de  $X$  é:

x	8,85	8,90	8,95	9,00	9,05	9,10	9,15	9,20	9,25	9,35
$p_X(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

e  $\Pr(X \geq 9) = \frac{7}{10}$ .

**Exemplo 11.5.**

Um homem possui quatro chaves em seu bolso. Como está escuro, ele não consegue ver qual a chave correta para abrir a porta de sua casa. Ele testa cada uma das chaves até encontrar a correta.

1. Defina um espaço amostral para esse experimento.
2. Defina a v.a.  $X$  = número de chaves experimentadas até conseguir abrir a porta (inclusive a chave correta). Quais são os valores de  $X$ ?
3. Encontre a fdp de  $X$ .

**Solução:**

1. Vamos designar por  $C$  a chave da porta e por  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$  as outras chaves. Se ele para de testar as chaves depois que acha a chave correta, então o espaço amostral é:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} C, E_1C, E_2C, E_3C, \\ E_1E_2C, E_2E_1C, E_1E_3C, E_3E_1C, E_2E_3C, E_3E_2C, \\ E_1E_2E_3C, E_1E_3E_2C, E_2E_1E_3C, \\ E_2E_3E_1C, E_3E_1E_2C, E_3E_2E_1C \end{array} \right\}$$

2. Podemos ver, na listagem de  $\Omega$ , que  $X = 1, 2, 3, 4$ .
3. Note que todas as chaves têm a mesma chance de serem sorteadas e, obviamente, cada chave testada não é colocada de volta no bolso. Feitas essas observações, podemos ver que

$$\Pr(X = 1) = \Pr(C) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \Pr(X = 2) &= \Pr(E_1C \cup E_2C \cup E_3C) \\ &= \Pr(E_1C) + \Pr(E_2C) + \Pr(E_3C) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(X = 3) &= \Pr(E_1E_2C) + \Pr(E_2E_1C) + \Pr(E_1E_3C) + \\ &\quad \Pr(E_3E_1C) + \Pr(E_2E_3C) + \Pr(E_3E_2C) \\ &= 6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(X = 4) &= \Pr(E_1E_2E_3C) + \Pr(E_1E_3E_2C) + \Pr(E_2E_1E_3C) + \\ &\quad \Pr(E_2E_3E_1C) + \Pr(E_3E_1E_2C) + \Pr(E_3E_2E_1C) \\ &= 6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Logo, a fdp de  $X$  é

$x$	1	2	3	4
$f_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

### Exercício 11.1.

Cinco cartas são extraídas de um baralho comum (52 cartas, 13 de cada naipe) sem reposição. Defina a v.a.  $X$  = número de cartas vermelhas sorteadas.

1. Quais são os possíveis valores de  $X$ ?
2. Encontre a fdp de  $X$ .

### Exercício 11.2.

Numa urna há sete bolas brancas e quatro bolas verdes. Cinco bolas são extraídas dessa urna sem reposição. Defina a v.a.  $X$  = número de bolas verdes.

1. Quais são os possíveis valores de  $X$ ?
2. Encontre a fdp de  $X$ .

### Exercício 11.3.

Repita o exercício anterior para o caso de extrações com reposição.

## FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

A partir da função de distribuição de probabilidades de uma v.a. discreta  $X$ , é possível calcular a probabilidade de qualquer evento associado a ela. Por exemplo, considere novamente a fdp da variável aleatória  $X$  = “máximo das faces de 2 dados”:

$x$	1	2	3	4	5	6
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

A partir dela, podemos calcular as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned}\Pr(X \geq 5) &= \Pr(\{X = 5\} \cup \{X = 6\}) = \Pr(X = 5) + \Pr(X = 6) = \frac{20}{36} \\ \Pr(X \leq 2) &= \Pr(\{X = 1\} \cup \{X = 2\}) = \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2) = \frac{4}{36}\end{aligned}$$

Na verdade, a fdp de uma variável aleatória discreta  $X$  nos dá toda a informação sobre  $X$ . Existe uma outra função com tal característica (na verdade, sob determinadas condições, podemos achar outras funções com tal característica), que é a *função de distribuição acumulada* de  $X$ , cuja definição apresentamos a seguir.

**Definição 11.4.**

Dada uma variável aleatória (discreta)  $X$ , a **função de distribuição acumulada** de  $X$  é definida por

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (11.4)$$

É interessante notar que a função  $F_X$  está definida para *todo* número real  $x$ . Antes de passar às propriedades teóricas da função de distribuição acumulada (usaremos a abreviação fda), também conhecida como função de distribuição, vamos ver um exemplo.

**Exemplo 11.6.**

Continuando com a fdp da v.a.  $X = \text{“máximo das faces de 2 dados”}$ , devemos notar inicialmente que nenhum valor menor que 1 é possível. Logo,

$$F_X(x) = 0 \quad \forall x < 1$$

Para  $x = 1$ , temos que

$$\begin{aligned} F_X(1) &= \Pr(X \leq 1) = \Pr(X < 1) + \Pr(X = 1) \quad (11.5) \\ &= 0 + \frac{1}{36} = \frac{1}{36} \end{aligned}$$

Para qualquer valor de  $x$  tal que  $1 < x < 2$ , temos  $f_X(x) = 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr(X \leq 1) + \Pr(1 < X < x) \\ &= F_X(1) + 0 = F_X(1) \quad \forall x : 1 < x < 2 \quad (11.6) \end{aligned}$$

Juntando os resultados (11.5) e (11.6), obtemos

$$F_X(x) = F_X(1) = \frac{1}{36} \quad \forall x : 1 \leq x < 2$$

Com raciocínio análogo, obtemos

$$\begin{aligned} F_X(2) &= \Pr(X \leq 2) \\ &= \Pr(X \leq 1) + \Pr(1 < X < 2) + \Pr(X = 2) \\ &= \frac{1}{36} + 0 + \frac{3}{36} = \frac{4}{36} \end{aligned} \quad (11.7)$$

e para  $x \in (2, 3)$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr(X \leq 2) + \Pr(2 < X < x) = \\ &= F_X(2) + 0 = F_X(2) \quad \forall x : 2 < x < 3 \end{aligned} \quad (11.8)$$

ou seja,

$$F_X(x) = F_X(2) = \frac{4}{36} \quad \forall x : 2 \leq x < 3$$

Continuando, obtemos

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_X(3) = \frac{9}{36} & \forall x : 3 \leq x < 4 \\ F_X(x) &= F_X(4) = \frac{16}{36} & \forall x : 4 \leq x < 5 \\ F_X(x) &= F_X(5) = \frac{25}{36} & \forall x : 5 \leq x < 6 \end{aligned}$$

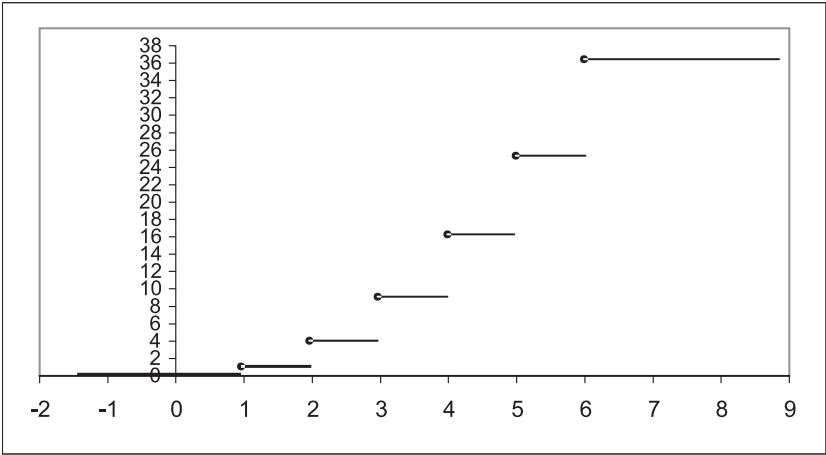
Para  $x \geq 6$  devemos notar que o evento  $\{X \leq x\}$  corresponde ao espaço amostral completo; logo

$$F_X(x) = 1 \quad \forall x \geq 6$$

Dessa forma, a fda de  $X$  é a seguinte função

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/36 & 1 \leq x < 2 \\ 4/36 & 2 \leq x < 3 \\ 9/36 & 3 \leq x < 4 \\ 16/36 & 4 \leq x < 5 \\ 25/36 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

Na **Figura 11.3**, temos o gráfico de tal função em que a escala vertical está em múltiplos de  $\frac{1}{36}$ . Note que esse gráfico tem a forma de uma “escada”, com saltos de descontinuidade nos valores da v.a.  $X$ .



**Figura 11.3:** Função de distribuição acumulada de  $X = \text{“máximo das faces de 2 dados”}$ .

**PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA**

Os axiomas da probabilidade e as propriedades deles decorrentes nos permitem obter as seguintes propriedades da função de distribuição acumulada de uma v.a.  $X$ .

1. Como  $0 \leq \Pr(A) \leq 1$  segue que

$$0 \leq F_X(x) \leq 1 \tag{11.9}$$

2. Do axioma  $\Pr(\Omega) = 1$  resulta que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1 \tag{11.10}$$

Note que o evento  $\{X < \infty\}$  corresponde a todos os números reais e, portanto, inclui todos os valores de  $X$ .

3. Da propriedade  $\Pr(\emptyset) = 0$  resulta que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \tag{11.11}$$

Note que o evento  $\{X < -\infty\}$  corresponde ao evento impossível.

4.  $F_X(x)$  é uma função não decrescente, isto é, se

$$a < b \Rightarrow F_X(a) \leq F_X(b) \quad (11.12)$$

Esse resultado segue do fato de que, se  $a < b$ , então o evento  $\{X \leq a\} \subset \{X \leq b\}$  e, portanto,  $\Pr(\{X \leq a\}) \leq \Pr(\{X \leq b\})$ , ou seja,  $F_X(a) \leq F_X(b)$ .

5.  $F_X(x)$  é uma função contínua à direita, isto é

$$F_X(b) = \lim_{h \rightarrow 0} F_X(b+h) \triangleq F_X(b^+) \quad (11.13)$$

6. A fdp de  $X$  pode ser calculada a partir da fda da seguinte forma:

$$f_X(x) = F_X(x) - \lim_{\delta \rightarrow 0} F_X(x-\delta) \triangleq F_X(x) - F_X(x^-) \quad (11.14)$$

Note que isso significa que  $f_X(x)$  é igual ao tamanho do “salto” da fda no ponto  $x$ .

A conclusão que podemos tirar é a seguinte: a função de distribuição de probabilidades (fdp) e a função de distribuição acumulada (fda), ambas nos dão todas as informações sobre a variável aleatória  $X$  e a partir de uma podemos obter a outra, de forma inequívoca.

### Exemplo 11.7.

Dada a função

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/2 & 1 \leq x < 2 \\ k & 2 \leq x < 3 \\ 3/4 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

em que  $k$  é uma constante, determine os possíveis valores de  $k$  para que  $F(x)$  seja a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória  $X$ . Em seguida, determine a função de distribuição de probabilidade desta v.a.  $X$ .

**Solução:** Como a fda de qualquer v.a.  $X$  tem que ser uma função não decrescente, concluímos que  $k$  tem que ser maior ou igual a  $\frac{1}{2}$ . Pela mesma razão,  $k$  tem que ser menor ou igual a  $\frac{3}{4}$ . Dessa forma, os possíveis valores de  $k$  pertencem ao intervalo  $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ . Os valores possíveis da v.a.  $X$  correspondem aos pontos de descontinuidade da função  $F(x)$ . Logo,  $X$  assume os valores 1, 2, 3, 4. As probabilidades desses valores são dadas pelo tamanho do “salto” de  $F(x)$  :

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \frac{1}{2} \\ P(X = 2) &= k - \frac{1}{2} \\ P(X = 3) &= \frac{3}{4} - k \\ P(X = 4) &= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

## FUNÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Dada uma v.a.  $X$ , podemos obter outras variáveis aleatórias através de funções de  $X$  e, da mesma forma que calculamos a função de distribuição de probabilidade de  $X$ , podemos calcular a fdp dessas novas variáveis.

Exemplo 11.8.

Considere a v.a.  $X$  cuja fdp é dada na tabela abaixo:

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$f_X(x)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

Consideremos a função  $Y = g(X) = X^2$ . Então,  $Y$  é uma nova variável aleatória, cujos possíveis valores são 0, 1, 4, 9. Para calcular as probabilidades desses valores, temos que identificar os valores de  $X$  que originaram cada um deles. Temos a seguinte equivalência de eventos:

$$\begin{aligned} \{Y = 0\} &\equiv \{X = 0\} \\ \{Y = 1\} &\equiv \{X = -1\} \cup \{X = 1\} \\ \{Y = 4\} &\equiv \{X = -2\} \cup \{X = 2\} \\ \{Y = 9\} &\equiv \{X = 3\} \end{aligned}$$

(O símbolo  $\equiv$  representa “é equivalente a”).



Como os eventos são mutuamente exclusivos, segue que

$$\begin{aligned}\Pr(Y = 0) &= \Pr(X = 0) = 0,2 \\ \Pr(Y = 1) &= \Pr(X = -1) + \Pr(X = 1) = 0,5 \\ \Pr(Y = 4) &= \Pr(X = -2) + \Pr(X = 2) = 0,2 \\ \Pr(Y = 9) &= \Pr(X = 3) = 0,1\end{aligned}$$

e podemos resumir essa fdp como

$y$	0	1	4	9
$f_Y(y)$	0,2	0,5	0,2	0,1

### Definição 11.5 (Função de Variável Aleatória).

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta com função de distribuição de probabilidade  $f_X(x)$ . Se definimos uma nova v.a.  $Y = g(X)$ , onde  $g$  é uma função real qualquer, então a fdp de  $Y$  é calculada como

$$f_Y(y) = \sum_{\{x | g(x)=y\}} f_X(x)$$

### Exercício 11.4.

Seja  $Y$  uma variável aleatória com fdp dada por

$y$	-3	-1	0	2	5	8	9
$f_Y(y)$	0,25	0,30	0,20	0,10	0,07	0,05	0,03

Defina  $Z = 2Y - 3$ . Encontre a fdp da variável aleatória  $Z$ .

### Exercício 11.5.

A demanda por um certo produto pode ser vista como uma variável aleatória  $X$  cuja função de distribuição de probabilidade  $f_X(x)$  é estimada por

Número de unidades demandadas $x$	1	2	3	4
$f_X(x) = \Pr(X = x)$	0,25	0,45	0,15	0,15

1. Verifique se  $f_X(x)$  realmente define uma fdp.
2. Obtenha a função de distribuição acumulada de  $X$ .
3. Usando a fda calculada no item anterior, calcule  $\Pr(X \leq 3,5)$ .

## Resumo

Nesta aula, você estudou importantes conceitos sobre variáveis aleatórias. Certifique-se de ter compreendido bem cada um deles.

- Uma **variável aleatória** (v.a.) é uma função real (isto é, que assume valores em  $\mathbb{R}$ ) definida no espaço amostral  $\Omega$  de um experimento aleatório. Dito de outra forma, uma variável aleatória é uma função que associa a cada evento de  $\Omega$  um número real.
- Uma variável aleatória é **discreta** se sua imagem (ou conjunto de valores que ela assume) é um conjunto finito ou enumerável. Se a imagem é um conjunto não enumerável dizemos que a variável aleatória é **contínua**.
- Seja  $X$  uma variável aleatória discreta. A **função de distribuição de probabilidades** de  $X$  é a função  $f_X(x)$  que associa, a cada valor possível  $x$  de  $X$ , sua respectiva probabilidade, calculada da seguinte forma:

$$f_X(x) = \Pr(\{X = x\}) = \sum_{\omega \in \Omega: X(\omega) = x} \Pr(\omega)$$

- A fdp de uma v.a. discreta satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} f_X(x) &\geq 0 \\ \sum_x f_X(x) &= 1 \end{aligned}$$

e pode ser representada por um gráfico de colunas, caso  $X$  assumia poucos valores.

- Dada uma variável aleatória (discreta)  $X$ , a **função de distribuição acumulada** (fda) de  $X$  é definida por

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Exercício 11.6.**

Uma variável aleatória discreta  $X$  tem a seguinte função de distribuição de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{(x+2)!} & x = 0, 1 \\ 0 & x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \end{cases}$$

onde  $k$  é uma constante.

1. Determine o valor de  $k$  para que  $f_X$  seja uma fdp.
2. Calcule a função de distribuição  $F_X(x)$ .

**Exercício 11.7.**

Considere o lançamento de três moedas e denote por  $K$  a ocorrência de cara e por  $C$  a ocorrência de coroa. Se ocorre o evento  $CCC$ , dizemos que temos uma sequência, ao passo que se ocorre o evento  $CKC$  temos três sequências. Defina a v.a.  $X$  = “número de caras obtidas” e  $Y$  = “número de sequências obtidas”. Obtenha as distribuições de  $X$  e  $Y$ .

**SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS****Exercício 11.1.**

1. No baralho há 26 cartas vermelhas, 13 de ouros e 13 de copas. Logo, os possíveis valores de  $X$  são 0, 1, 2, 3, 4, 5.
2. O número de pontos do espaço amostral é  $\#\Omega = \binom{52}{5}$ .

$$\begin{aligned} \Pr(X=0) &= \Pr(5 \text{ pretas}) = \frac{\binom{26}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48} \\ &= \frac{23 \times 22}{2 \times 51 \times 2 \times 49 \times 2} = 0,0253 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(X=1) &= \Pr(4 \text{ pretas, 1 vermelha}) = \frac{\binom{26}{4} \binom{26}{1}}{\binom{52}{5}} \\ &= \frac{\frac{26 \times 25 \times 24 \times 23}{4 \times 3 \times 2} \times 26}{\frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2}} = \frac{26 \times 25 \times 23 \times 26}{52 \times 51 \times 10 \times 49 \times 2} \\ &= \frac{5 \times 23 \times 13}{2 \times 51 \times 2 \times 49} = \frac{65 \times 23}{4 \times 51 \times 49} = 0,1496 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X = 2) &= \Pr(3 \text{ pretas}, 2 \text{ vermelhas}) = \frac{\binom{26}{3}\binom{26}{2}}{\binom{52}{5}} \\ &= \frac{\frac{26 \times 25 \times 24}{3 \times 2} \times \frac{26 \times 25}{2}}{\frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2}} = \frac{26 \times 25 \times 4 \times 13 \times 25}{52 \times 51 \times 5 \times 49 \times 4} \\ &= \frac{5 \times 13 \times 25}{2 \times 51 \times 49} = \frac{65 \times 25}{2 \times 51 \times 49} = 0,3251\end{aligned}$$

Como o número de cartas pretas e vermelhas é o mesmo, resulta que

$$\begin{aligned}\Pr(X = 3) &= \Pr(2 \text{ pretas}, 3 \text{ vermelhas}) = \frac{\binom{26}{2}\binom{26}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,3251 \\ \Pr(X = 4) &= \Pr(1 \text{ preta}, 4 \text{ vermelhas}) = \frac{\binom{26}{1}\binom{26}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,1496 \\ \Pr(X = 5) &= \Pr(5 \text{ vermelhas}) = \frac{\binom{26}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,0253\end{aligned}$$

Logo, a fdp de  $X$  é

$x$	0	1	2	3	4	5
$p_X(x)$	0,0253	0,1496	0,3251	0,3251	0,1496	0,0253

**Exercício 11.2.**

Note que temos bolas brancas em quantidade suficiente para podermos tirar todas brancas ( $X = 0$ ), mas não temos bolas verdes suficientes para tirar todas verdes.

- 1. Como há apenas 4 verdes, os valores de  $X$  são 0, 1, 2, 3, 4.
- 2. A cardinalidade do espaço amostral é

$$\#\Omega = \binom{11}{5} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 11 \times 6 \times 7 = 462$$

$$\begin{aligned}\Pr(X = 0) &= \Pr(5 \text{ brancas}) = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{11}{5}} \\ &= \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{22} = \frac{3}{66}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X = 1) &= \Pr(1 \text{ verde, } 4 \text{ brancas}) = \frac{\binom{4}{1} \binom{7}{4}}{11 \times 6 \times 7} \\ &= \frac{4 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2}}{11 \times 6 \times 7} = \frac{10}{33} = \frac{20}{66}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X = 2) &= \Pr(2 \text{ verdes, } 3 \text{ brancas}) = \frac{\binom{4}{2} \binom{7}{3}}{11 \times 6 \times 7} \\ &= \frac{\frac{4 \times 3}{2} \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2}}{11 \times 6 \times 7} = \frac{5}{11} = \frac{30}{66}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X = 3) &= \Pr(3 \text{ verdes, } 2 \text{ brancas}) = \frac{\binom{4}{3} \binom{7}{2}}{11 \times 6 \times 7} \\ &= \frac{4 \times \frac{7 \times 6}{2}}{11 \times 6 \times 7} = \frac{2}{11} = \frac{12}{66}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X = 4) &= \Pr(4 \text{ verdes, } 1 \text{ branca}) = \frac{\binom{4}{4} \binom{7}{1}}{11 \times 6 \times 7} \\ &= \frac{1 \times 7}{11 \times 6 \times 7} = \frac{1}{66}\end{aligned}$$

Logo, a fdp de  $X$  é

$x$	0	1	2	3	4
$p_X(x)$	$\frac{3}{66}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{30}{66}$	$\frac{12}{66}$	$\frac{1}{66}$

### Exercício 11.3.

1. Se as extrações são feitas com reposição, em cada extração podemos tirar bola branca ou verde. Logo, os possíveis valores de  $X$  são 0, 1, 2, 3, 4, 5.
2. Com reposição, sempre temos na urna 7 brancas e 4 verdes e em cada extração, temos que  $\Pr(\text{branca}) = \frac{7}{11}$  e  $\Pr(\text{verde}) = \frac{4}{11}$ . Como as extrações são independentes, resulta que

$$\Pr(X = 0) = \Pr(5 \text{ brancas}) = \left(\frac{7}{11}\right)^5 = 0,1044$$

$$\begin{aligned}\Pr(X = 1) &= \Pr(1 \text{ verde, } 4 \text{ brancas}) \\ &= \binom{5}{1} \left(\frac{7}{11}\right)^4 \left(\frac{4}{11}\right)^1 = 0,2982\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X = 2) &= \Pr(2 \text{ verdes, } 3 \text{ brancas}) \\ &= \binom{5}{2} \left(\frac{7}{11}\right)^3 \left(\frac{4}{11}\right)^2 = 0,3408\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X = 3) &= \Pr(3 \text{ verdes, } 2 \text{ brancas}) \\ &= \binom{5}{3} \left(\frac{7}{11}\right)^2 \left(\frac{4}{11}\right)^3 = 0,1947\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X = 4) &= \Pr(4 \text{ verdes, } 1 \text{ branca}) \\ &= \binom{5}{4} \left(\frac{7}{11}\right)^1 \left(\frac{4}{11}\right)^4 = 0,0556\end{aligned}$$

$$\Pr(X = 5) = \Pr(5 \text{ verdes}) = \left(\frac{4}{11}\right)^5 = 0,0064$$

Logo, a fdp de  $X$  é:

$x$	0	1	2	3	4	5
$p_X(x)$	0,1044	0,2982	0,3408	0,1948	0,0556	0,0064

A razão de multiplicarmos pelos números combinatórios se deve ao fato de que a(s) bola(s) verde(s) pode(m) sair em qualquer uma das extrações.

**Exercício 11.4.**

Note que  $Z$  é uma função linear de  $Y$ .

$$\begin{aligned}Y = -3 &\Rightarrow Z = -9 & Y = 5 &\Rightarrow Z = 7 \\ Y = -1 &\Rightarrow Z = -5 & Y = 8 &\Rightarrow Z = 13 \\ Y = 0 &\Rightarrow Z = -3 & Y = 9 &\Rightarrow Z = 15 \\ Y = 2 &\Rightarrow Z = 1\end{aligned}$$

Logo, a fdp de  $Z$  é

$z$	-9	-5	-3	1	7	13	15
$f_Z(z)$	0,25	0,30	0,20	0,10	0,07	0,05	0,03

**Exercício 11.5.**

1.  $0,25 + 0,45 + 0,15 + 0,15 = 1$  e todos os valores são não negativos. Logo,  $f_X$  é uma função de distribuição de probabilidade.

2.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 0,25 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0,70 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 0,85 & \text{se } 3 \leq x < 4 \\ 1,00 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

3. Temos que

$$\Pr(X \leq 3,5) = F_X(3,5) = 0,85$$

**Exercício 11.6.**

1. Os valores possíveis da v.a. são 0 e 1. Então, temos que ter

$$\begin{aligned} f_X(0) + f_X(1) &= 1 \Rightarrow \frac{k}{2!} + \frac{k}{3!} = 1 \Rightarrow \\ \frac{k}{2} + \frac{k}{6} &= 1 \Rightarrow \frac{3k+k}{6} = 1 \Rightarrow k = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f_X(0) &= \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4} \\ f_X(1) &= \frac{\frac{3}{2}}{6} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2. A fda de  $X$  é

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{3}{4} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Exercício 11.7.

O espaço amostral, bem como as variáveis aleatórias e suas fdp's estão dadas nas tabelas a seguir:

$w$	$\Pr(w)$	$X$	$Y$
$CCC$	$\frac{1}{8}$	3	1
$CCK$	$\frac{1}{8}$	2	2
$CKC$	$\frac{1}{8}$	2	3
$KCC$	$\frac{1}{8}$	2	2
$CKK$	$\frac{1}{8}$	1	2
$KCK$	$\frac{1}{8}$	1	3
$KKC$	$\frac{1}{8}$	1	2
$KKK$	$\frac{1}{8}$	0	1

$x$	0	1	2	3
$f_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$y$	1	2	3
$f_Y(y)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$



# Aula 12

## ESPERANÇA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

---

### O b j e t i v o

Nesta aula, você estudará os conceitos de média e variância de variáveis aleatórias discretas, que são, respectivamente, medidas de posição e dispersão da distribuição de probabilidade.

## ESPERANÇA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

### INTRODUÇÃO

Consideremos novamente o experimento aleatório “lançamento de um dado”, mas agora um dado que sabemos não ser equilibrado. Como poderíamos proceder para calcular a probabilidade de cada face?

Uma resposta, talvez intuitiva, seria lançar esse dado um *grande* número de vezes e observar o número de ocorrências de cada face. As frequências relativas nos dariam, então, o que poderíamos pensar como sendo a probabilidade de cada evento simples (face).

É de se esperar que, quanto maior o número de repetições do experimento (lançamento do dado), mais próximas das “verdadeiras” probabilidades estariam essas frequências relativas. Esta é, assim, a definição de probabilidade de um evento através da frequência relativa:

$$\Pr(A) = \frac{\text{número de ocorrências de } A}{\text{número de repetições do experimento}}$$

onde o número de repetições do experimento deve ser grande.

Ao trabalharmos com variáveis aleatórias, podemos pensar também nas probabilidades dos diferentes valores da variável como sendo frequências relativas em um número sempre crescente de repetições do experimento, ou seja, podemos pensar as probabilidades como sendo limites das frequências relativas.

Dessa forma, temos um paralelo entre a função de distribuição de probabilidade e as frequências relativas simples e entre a função de distribuição acumulada e as frequências relativas acumuladas.

No estudo das distribuições de frequências de variáveis quantitativas, vimos como calcular medidas de posição e medidas de dispersão da variável em estudo. De modo análogo, definiremos medidas de posição e dispersão para distribuições de probabilidades de variáveis aleatórias.

## ESPERANÇA OU MÉDIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

No estudo das distribuições de frequências de variáveis quantitativas, vimos que a média de dados agrupados em classes era calculada como uma média ponderada dos pontos médios das classes (valores representativos), com a ponderação definida pelas frequências relativas das classes.

No estudo de variáveis aleatórias e suas distribuições de probabilidades, estamos associando números aos pontos do espaço amostral, ou seja, o resultado é sempre uma variável quantitativa (note que os resultados cara e coroa não definem uma variável aleatória; para tal, temos que associar números, 0 e 1, por exemplo, a esses resultados). Sendo assim, faz sentido perguntar “qual é o valor médio da variável aleatória  $X$ ?”

### Definição 12.1.

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta que assume os valores  $x_1, x_2, \dots$  com probabilidades  $p_1, p_2, \dots$  respectivamente. A **média** ou **esperança** de  $X$  é definida como

$$E(X) = \sum_i p_i x_i = \sum_i x_i \Pr(X = x_i) \quad (12.1)$$

onde o somatório se estende por todos os valores possíveis de  $X$ .

Podemos ver, então, que a esperança de  $X$  é uma média dos seus valores, ponderada pelas respectivas probabilidades. Lembre-se de que, no caso das distribuições de frequências, tínhamos  $\bar{x} = \sum_i f_i x_i$ . Como antes, a média de uma v.a.  $X$  está na mesma unidade da variável.

### Exemplo 12.1.

Em determinado setor de uma loja de departamentos, o número de produtos vendidos em um dia pelos funcionários é uma variável aleatória  $P$  com a seguinte distribuição de probabilidades (esses números foram obtidos dos resultados de vários anos de estudo):

Número de produtos	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidade de venda	0,1	0,4	0,2	0,1	0,1	0,05	0,05

Cada vendedor recebe comissões de venda, distribuídas da seguinte forma: se ele vende até dois produtos em um dia, ele ganha uma comissão de R\$10,00 por produto vendido. A partir da terceira venda, a comissão passa para R\$50,00 por produto. Qual é o número médio de produtos vendidos por cada vendedor e qual a comissão média de cada um deles?

Solução:

O número médio de vendas por funcionário é

$$\begin{aligned} E(P) &= 0 \times 0,1 + 1 \times 0,4 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,1 \\ &\quad + 4 \times 0,1 + 5 \times 0,05 + 6 \times 0,05 \\ &= 2,05 \end{aligned}$$

Com relação à comissão, vamos construir sua fdp:

Número de produtos $P$	0	1	2	3	4	5	6
Comissão $C$	0	10	20	70	120	170	220
Probabilidade de venda	0,1	0,4	0,2	0,1	0,1	0,05	0,05

$$\begin{aligned} E(C) &= 0 \times 0,1 + 10 \times 0,4 + 20 \times 0,2 + 70 \times 0,1 + \\ &\quad + 120 \times 0,1 + 170 \times 0,05 + 220 \times 0,05 \\ &= 46,5 \end{aligned}$$

ou seja, a comissão média diária de cada vendedor é R\$ 46,50.

Assim, como no caso das distribuições de frequência, a esperança de  $X$  é o centro de gravidade da distribuição de probabilidades.

ESPERANÇA DE FUNÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Vimos que é possível obter novas variáveis aleatórias a partir de funções  $g(X)$  de uma variável  $X$  e através da fdp de  $X$  podemos obter a fdp de  $Y$ . Sendo assim, podemos calcular a esperança de  $Y$ . Foi exatamente isso o que fizemos no caso das

comissões no exemplo anterior, onde tínhamos

$$C = \begin{cases} 10P, & \text{se } P \leq 2 \\ 20 + 50 \times (P - 2), & \text{se } P > 2 \end{cases}$$

Analisando atentamente aquele exemplo e notando que, por definição de função, a cada valor de  $X$  corresponde um único  $Y = g(X)$ , obtemos o resultado geral sobre a esperança de funções de variáveis aleatórias.

**Definição 12.2** (Esperança de Funções de uma Variável Aleatória).

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta com função de distribuição de probabilidade  $f_X(x)$ . Se definimos uma nova v.a.  $Y = g(X)$ , então

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_x g(x) f_X(x) \quad (12.2)$$

**Exemplo 12.2.**

Considere a v.a.  $X$ , já analisada no Exemplo 11.8 onde calculamos  $E(X^2)$ .

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$f_X(x)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

Naquele exemplo, calculamos a fdp da v.a.  $Y = X^2$  e a partir dela podemos calcular:

$$E(Y) = E(X^2) = 0 \times 0,2 + 1 \times 0,5 + 4 \times 0,2 + 9 \times 0,1 = 2,2$$

Usando o resultado anterior, podemos fazer simplesmente:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= (-2)^2 \times 0,1 + (-1)^2 \times 0,2 + 0^2 \times 0,2 + \\ &\quad + 1^2 \times 0,3 + 2^2 \times 0,1 + 3^2 \times 0,1 = 2,2 \end{aligned}$$

sem necessidade do cálculo da fdp de  $Y$ .

## PROPRIEDADES DA ESPERANÇA

As propriedades da esperança são as mesmas vistas para a média de uma distribuição de frequência.

No que segue,  $X$  é uma variável aleatória discreta com distribuição de probabilidades  $f_X(x)$  e  $a, b \neq 0$  são constantes reais quaisquer. Temos, então, os seguintes resultados, cujas demonstrações são imediatas, a partir da definição de esperança:

$$E(a) = a \quad (12.3)$$

$$E(X + a) = E(X) + a \quad (12.4)$$

$$E(bX) = bE(X) \quad (12.5)$$

$$x_{\min} \leq E(X) \leq x_{\max} \quad (12.6)$$

Nessa última propriedade,  $x_{\min}$  e  $x_{\max}$  são os valores mínimo e máximo da variável  $X$ .

### Exercício 12.1.

Encontre a esperança da v.a.  $X$  definida no Exercício 11.1.

### Exercício 12.2.

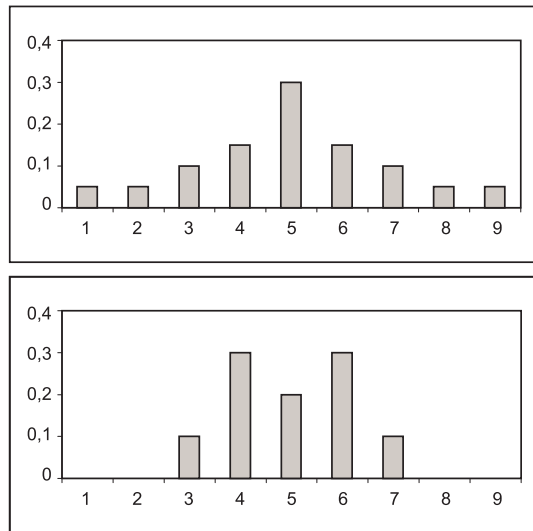
Encontre a esperança da v.a.  $X$  definida no Exercício 11.3.

### Exercício 12.3.

Encontre a esperança das v.a.  $Y$  e  $Z$  definidas no Exercício 11.4.

## VARIÂNCIA DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

A esperança de uma variável aleatória  $X$  é uma medida de posição. No entanto, é possível que duas variáveis bem diferentes tenham a mesma esperança, como é o caso das duas distribuições apresentadas na **Figura 12.1**.



**Figura 12.1:** Distribuições com mesma esperança e diferentes dispersões.

Como já visto, no caso da Estatística Descritiva, é necessário mensurar outros aspectos da distribuição, entre eles a dispersão dos dados. Esta será medida através da distância quadrática de cada valor à média da distribuição.

### Definição 12.3.

A **variância** de uma variável aleatória  $X$  é definida como

$$Var(X) = E [X - E(X)]^2 \quad (12.7)$$

Vamos ver como calcular a variância de uma v.a. discreta. Para isso, vamos definir  $g(X) = [X - E(X)]^2$ . Então, usando o resultado dado na equação (12.2), temos que

$$Var(X) = E[g(X)] = \sum_x [x - E(X)]^2 f_X(x)$$

Desenvolvendo o quadrado e usando as propriedades do somatório e da esperança vistas na seção anterior, resulta

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_x \left\{ x^2 - 2xE(X) + [E(X)]^2 \right\} f_X(x) = \\ &= \sum_x x^2 f_X(x) - 2E(X) \sum_x x f_X(x) + [E(X)]^2 \sum_x f_X(x) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_x x^2 f_X(x) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 \times 1 = \\
 &= \sum_x x^2 f_X(x) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2 = \\
 &= \sum_x x^2 f_X(x) - [E(X)]^2
 \end{aligned}$$

Mas, se definimos  $h(X) = X^2$ , então  $E[h(X)] = \sum_x x^2 f_X(x)$ .

Logo, podemos escrever

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (12.8)$$

que pode ser lida de maneira mais fácil como “a variância é a esperança do quadrado menos o quadrado da esperança”.

Lembre-se de que tínhamos visto resultado análogo para a variância populacional de um conjunto de dados (variância é a média dos quadrados menos o quadrado da média). Vimos também que a unidade de medida da variância é igual ao quadrado da unidade da variável.

## PROPRIEDADES DA VARIÂNCIA

Sendo uma medida de dispersão, é fácil ver que são válidas as seguintes propriedades (note que são as mesmas que vimos para uma distribuição de frequências), onde  $a, b \neq 0$  são constantes quaisquer:

$$Var(X) \geq 0 \quad (12.9)$$

$$Var(a) = 0$$

$$Var(X + a) = Var(X)$$

$$Var(bX) = b^2 Var(X)$$

## DESVIO PADRÃO

Como já dito, a unidade de medida da variância é o quadrado da unidade de medida da variável em estudo, sendo assim, uma unidade sem significado físico. Para se ter uma medida de dispersão na mesma unidade dos dados, define-se o *desvio padrão* como a raiz quadrada da variância.



**Definição 12.4.**

O **desvio padrão** de uma variável aleatória  $X$  é definido como a raiz quadrada de sua variância:

$$DP(X) = \sqrt{Var(X)} \quad (12.10)$$

Como consequência direta dessa definição e das propriedades da variância, temos as seguintes propriedades do desvio padrão, onde  $a, b \neq 0$  são constantes reais quaisquer.

$$DP(X) \geq 0$$

$$DP(a) = 0$$

$$DP(X + a) = DP(X)$$

$$DP(bX) = |b| DP(X)$$

**Exemplo 12.3.**

Considere a v.a.  $Y$  definida no Exercício 11.2 com fdp dada por

$y$	-3	-1	0	2	5	8	9
$f_Y(y)$	0,25	0,30	0,20	0,10	0,07	0,05	0,03

e seja  $Z = 2Y - 3$ . Vamos calcular a variância de  $Y$  e  $Z$ .

**Solução:**

No Exercício 12.1, você calculou  $E(Y)$  e  $E(Z)$  como

$$\begin{aligned} E(Y) &= -3 \times 0,25 - 1 \times 0,30 + 0 \times 0,20 + 2 \times 0,10 \\ &\quad + 5 \times 0,07 + 8 \times 0,05 + 9 \times 0,03 = 0,17 \end{aligned}$$

$$E(Z) = 2 \times E(Y) - 3 = 2 \times 0,17 - 3 = -2,66$$

Vamos calcular agora  $E(Y^2)$ :

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= 9 \times 0,25 + 1 \times 0,30 + 0 \times 0,20 + 4 \times 0,10 \\ &\quad + 25 \times 0,07 + 64 \times 0,05 + 81 \times 0,03 = 10,33 \end{aligned}$$

Logo,

$$Var(Y) = 10,33 - 0,17^2 = 10,3011$$

Usando as propriedades da variância, temos que

$$Var(Z) = 2^2 \times Var(Y) = 41,2044$$

**Exemplo 12.4.**

Um lojista mantém extensos registros das vendas diárias de certo aparelho. O quadro a seguir, dá a distribuição de probabilidades do número de aparelhos vendidos em uma semana. Se o lucro por unidade vendida é de R\$500,00, qual o lucro esperado em uma semana? Qual é o desvio padrão do lucro?

$x = \text{número de aparelhos}$	0	1	2	3	4	5
$f_X(x)$	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

**Solução:**

Seja  $X$  o número de aparelhos vendidos em uma semana e seja  $L$  o lucro semanal. Então,  $L = 500X$ .

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times 0,1 + 1 \times 0,1 + 2 \times 0,2 \\ &\quad + 3 \times 0,3 + 4 \times 0,2 + 5 \times 0,1 \\ &= 2,7 \text{ aparelhos} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times 0,1 + 1^2 \times 0,1 + 2^2 \times 0,2 \\ &\quad + 3^2 \times 0,3 + 4^2 \times 0,2 + 5^2 \times 0,1 \\ &= 10,2 \text{ aparelhos}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= 10,2 - (2,7)^2 = 2,91 \text{ aparelhos}^2 \\ DP(X) &= 1,706 \text{ aparelhos} \end{aligned}$$

Com relação ao lucro semanal, temos que

$$\begin{aligned} E(L) &= 500E(X) = R\$1350,00 \\ DP(L) &= R\$852,94 \end{aligned}$$

**Exemplo 12.5.**

Seja uma v.a.  $X$  com fdp dada na tabela a seguir:

$x$	1	2	3	4	5
$f_X(x)$	$p^2$	$p^2$	$p$	$p$	$p^2$

1. Encontre o valor de  $p$  para que  $f_X(x)$  seja, de fato, uma função de distribuição de probabilidade.
2. Calcule  $\Pr(X \geq 4)$  e  $\Pr(X < 3)$ .
3. Calcule  $\Pr(|X - 3| \geq 2)$ .
4. Calcule  $E(X)$  e  $Var(X)$ .

**Solução:**

1. Como  $\sum_x f_X(x) = 1$ , temos que ter:

$$3p^2 + 2p = 1 \Rightarrow 3p^2 + 2p - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$p = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} \Rightarrow \begin{cases} p = -1 \\ \text{ou} \\ p = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Como  $p$  é uma probabilidade, temos que ter  $p \geq 0$ . Logo, o valor correto é  $p = \frac{1}{3}$ .

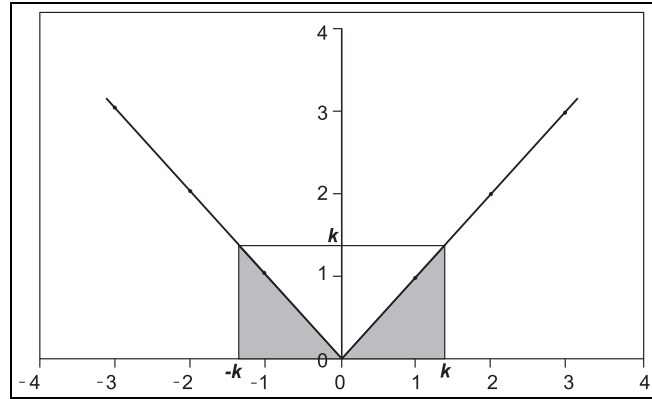
$$2. \Pr(X \geq 4) = \Pr(X = 4) + \Pr(X = 5) = p + p^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}.$$

$$\Pr(X < 3) = \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2) = 2p^2 = \frac{2}{9}.$$

3. Aqui temos que notar o seguinte fato sobre a função módulo, ilustrado na **Figura 12.2**:

$$|x| \geq k \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq k \\ \text{ou} \\ x \leq -k \end{cases}$$

e  $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$  (parte em cinza da figura)



**Figura 12.2:** Função módulo.

Usando esses fatos, temos que

$$\begin{aligned}
 \Pr(|X-3| \geq 2) &= \Pr(\{X-3 \leq -2\} \cup \{X-3 \geq 2\}) = \\
 &= \Pr(X-3 \leq -2) + \Pr(X-3 \geq 2) = \\
 &= \Pr(X \leq 1) + \Pr(X \geq 5) = \\
 &= \Pr(X=1) + \Pr(X=5) = \\
 &= 2p^2 = \frac{2}{9}
 \end{aligned}$$

4. Temos que

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 1 \times p^2 + 2 \times p^2 + 3 \times p + 4 \times p + 5 \times p^2 \\
 &= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + 1 + \frac{4}{3} + \frac{5}{9} \\
 &= \frac{29}{9} = 3,2222
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= 1^2 \times p^2 + 2^2 \times p^2 + 3^2 \times p + 4^2 \times p + 5^2 \times p^2 \\
 &= \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + 3 + \frac{16}{3} + \frac{25}{9} \\
 &= \frac{105}{9} = \frac{35}{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{35}{3} - \left(\frac{29}{9}\right)^2 = \frac{14}{81}$$

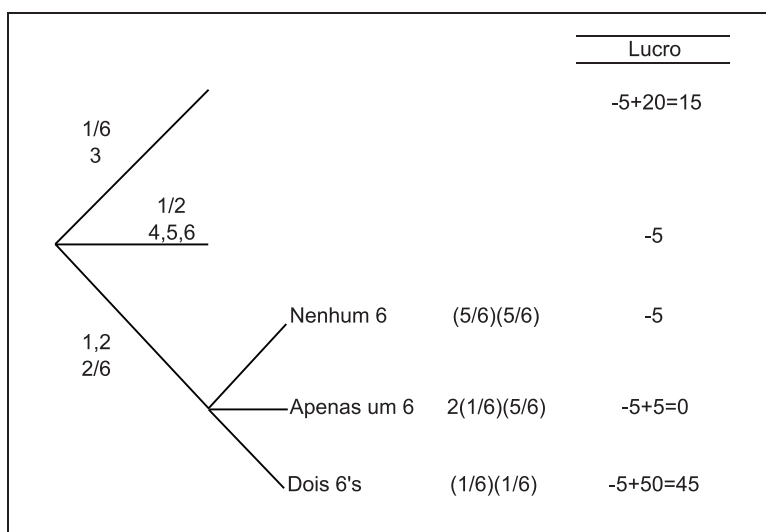
**Exemplo 12.6.**

Um jogador A paga R\$5,00 a B e lança um dado. Se sair face 3, ganha R\$20,00. Se sair face 4, 5, ou 6, perde. Se sair face 1 ou 2, tem o direito de jogar novamente. Desta vez, lança dois dados. Se saírem duas faces 6, ganha R\$50,00. Se sair uma face 6, recebe o dinheiro de volta. Nos demais casos, perde.

Seja  $L$  o lucro líquido do jogador A nesse jogo. Calcule a função de distribuição de probabilidade de  $L$  e o lucro esperado do jogador A.

**Solução:**

Sabemos que o dado é honesto e que os lançamentos são independentes. O diagrama de árvore para o espaço amostral desse experimento é dado na **Figura 12.3**.



**Figura 12.3:** Solução do Exemplo 12.6.

Para calcular a probabilidade dos eventos associados aos lançamentos dos dois dados (parte inferior da árvore), usamos o fato de que a probabilidade da interseção de eventos independentes é o produto das probabilidades.

No cálculo da probabilidade de uma face 6, multiplicamos por 2, porque a face 6 pode estar em qualquer um dos dois dados.

Vemos que os valores do lucro  $L$  são: -5; 0; 15; 45 e a fdp de  $L$  é

Lucro $\ell$	-5	0	15	45
$\Pr(L = \ell)$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$	$\frac{2}{6} \times 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$

ou

Lucro $\ell$	-5	0	15	45
$\Pr(L = \ell)$	$\frac{158}{216}$	$\frac{20}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{2}{216}$


$$E(L) = -5 \times \frac{158}{216} + 15 \times \frac{36}{216} + 45 \times \frac{2}{216} = -\frac{160}{216} = -0,74$$

Exercício 12.4.

Encontre a variância da v.a.  $X$  definida no Exercício 11.1.

Exercício 12.5.

Encontre a variância da v.a.  $X$  definida no Exercício 11.3.

 Você calculou as esperanças dessas v.a. nos Exercícios 12.1 e 12.2.

## Resumo

Nesta aula, você estudou os seguintes conceitos:

- Seja  $X$  uma variável aleatória discreta que assume os valores  $x_1, x_2, \dots$  com probabilidades  $p_1, p_2, \dots$  respectivamente. A **média** ou **esperança** de  $X$  é definida como

$$E(X) = \sum_i p_i x_i = \sum_i x_i \Pr(X = x_i)$$

onde o somatório se estende por todos os valores possíveis de  $X$ .

- Seja  $X$  uma variável aleatória discreta com função de distribuição de probabilidade  $f_X(x)$ . Se definimos uma nova v.a.  $Y = g(X)$ , então

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_x g(x) f_X(x)$$

- A **variância** de uma variável aleatória  $X$  é definida como

$$\text{Var}(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

- O **desvio padrão** de uma variável aleatória  $X$  é definido como a raiz quadrada de sua variância:

$$DP(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

- Propriedades da esperança, da variância e do desvio padrão: sejam  $a, b \neq 0$  constantes quaisquer.

$$x_{\min} \leq E(X) \leq x_{\max}$$

$$E(a) = a$$

$$E(X + a) = E(X) + a$$

$$E(bX) = bE(X)$$

$$\text{Var}(X) \geq 0 \quad DP(X) \geq 0$$

$$\text{Var}(a) = 0 \quad DP(a) = 0$$

$$\text{Var}(X + a) = \text{Var}(X) \quad DP(X + a) = DP(X)$$

$$\text{Var}(bX) = b^2 \text{Var}(X) \quad DP(bX) = |b| DP(X)$$

Exercício 12.6.

Um vendedor de serviços de informática visita diariamente uma ou duas empresas, com probabilidades 0,6 e 0,4. Em cada visita, ele pode ser malsucedido e não conseguir fechar negócio com probabilidade 0,6 ou ser bem sucedido e conseguir fechar um contrato médio no valor de 5.000 reais ou um contrato grande no valor de 20.000 reais com probabilidades 0,3 e 0,1, respectivamente.

Determine o valor esperado das vendas diárias desse vendedor.

Exercício 12.7.

Uma empresa de aluguel de carros tem em sua frota 4 carros de luxo e ela aluga esses carros por dia, segundo a seguinte função de distribuição de probabilidade:

Nº de carros alugados/dia	0	1	2	3	4
Probabilidade de alugar	0,10	0,30	0,30	0,20	0,10

O valor do aluguel é de R\$2000,00 por dia; a despesa total com manutenção é de R\$500,00 por dia quando o carro é alugado e de R\$200,00 por dia quando o carro não é alugado. Calcule:

1. o número médio de carros de luxo alugados por dia, bem como o desvio padrão;
2. a média e o desvio padrão do lucro diário com o aluguel dos carros de luxo.

Exercício 12.8.

As chamadas diárias recebidas por um batalhão do Corpo de Bombeiros apresentam a seguinte distribuição:

Número de chamadas/dia	0	1	2	3	4	5
Percentual (%) de dias	10	15	30	25	15	5

1. Calcule o número médio de chamadas por dia, bem como o desvio padrão do número de chamadas diárias.
2. Em um ano de 365 dias, qual é o número total de chamadas?



**Exercício 12.9.**

Considere o lançamento de três moedas e denote por  $K$  a ocorrência de cara e por  $C$  a ocorrência de coroa. Se ocorre o evento  $CCC$ , dizemos que temos uma sequência, ao passo que se ocorre o evento  $CKC$  temos três sequências.

Defina a v.a.  $X$  = “número de caras obtidas” e  $Y$  = “número de sequências obtidas”.

Note que no Exercício 11.7, você obteve as distribuições de  $X$  e  $Y$ .

**Exercício 12.10.**

As probabilidades de que haja 1, 2, 3, 4 ou 5 pessoas em cada carro que se dirige ao Barra Shopping em um sábado são, respectivamente, 0,05; 0,20; 0,40; 0,25 e 0,10.

Qual o número médio de pessoas por carro? Se chegam ao shopping 50 carros por hora, qual o número esperado de pessoas no período das 13 às 18 horas?

## SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

**Exercício 12.1.**

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times 0,0253 + 1 \times 0,1496 + 2 \times 0,3251 + \\ &\quad + 3 \times 0,3251 + 4 \times 0,1496 + 5 \times 0,0253 = 2,5 \end{aligned}$$

Note que esse valor segue imediatamente do fato de a média ser o centro de gravidade da fdp: no exercício a fdp é uma função simétrica; logo, a esperança é o “valor do meio”.

**Exercício 12.2.**

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times 0,1044 + 1 \times 0,2982 + 2 \times 0,3408 + \\ &\quad + 3 \times 0,1948 + 4 \times 0,0556 + 5 \times 0,0064 = 1,8186 \end{aligned}$$

**Exercício 12.3.**

$$\begin{aligned} E(Y) &= -3 \times 0,25 - 1 \times 0,30 - 0 \times 0,2 + 2 \times 0,10 + \\ &\quad + 5 \times 0,07 + 8 \times 0,05 + 9 \times 0,03 = 0,17 \end{aligned}$$

$$E(Z) = -9 \times 0,25 - 5 \times 0,30 - 3 \times 0,2 + 0,10 + \\ + 7 \times 0,07 + 13 \times 0,05 + 15 \times 0,03 = -2,66$$

ou pelas propriedades da esperança

$$E(Z) = 2E(Y) - 3 = 2 \times 0,17 - 3 = -2,66$$

**Exercício 12.4.**

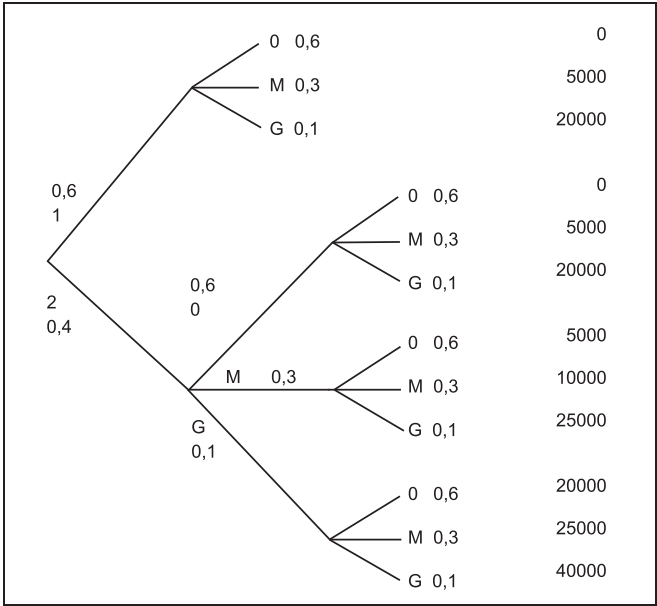
$$E(X^2) = 0^2 \times 0,0253 + 1^2 \times 0,1496 + 2^2 \times 0,3251 + \\ + 3^2 \times 0,3251 + 4^2 \times 0,1496 + 5^2 \times 0,0253 = 7,402$$
$$Var(X) = 7,402 - 2,5^2 = 1,152$$

**Exercício 12.5.**

$$E(X^2) = 0^2 \times 0,1044 + 1^2 \times 0,2982 + 2^2 \times 0,3408 + 3^2 \times 0,1948 \\ + 4^2 \times 0,0556 + 5^2 \times 0,0064 = 4,4642$$
$$Var(X) = 4,4642 - 1,8186^2 = 1,156894$$

**Exercício 12.6.**

Veja a **Figura 12.4** com o espaço amostral deste experi-  
mento.



**Figura 12.4:** Solução do Exercício 12.6.

Daí, podemos ver que o vendedor pode

- não vender qualquer projeto,
- vender apenas um projeto médio,
- vender apenas um projeto grande,
- vender um projeto médio e um projeto grande,
- vender dois projetos médios ou
- vender dois projetos grandes.

Seja  $V$  a v.a. “valor das vendas diárias”. Usando a regra da multiplicação, que diz que  $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B|A)$  e o axioma da probabilidade da união de eventos mutuamente exclusivos, podemos calcular:

$$\begin{aligned}\Pr(V = 0) &= 0,6 \times 0,6 + 0,4 \times 0,6 \times 0,6 = 0,504 \\ \Pr(V = 5000) &= 0,6 \times 0,3 + 2 \times 0,4 \times 0,6 \times 0,3 = 0,324 \\ \Pr(V = 10000) &= 0,4 \times 0,3 \times 0,3 = 0,036 \\ \Pr(V = 20000) &= 0,6 \times 0,1 + 2 \times 0,4 \times 0,6 \times 0,1 = 0,108 \\ \Pr(V = 25000) &= 2 \times 0,4 \times 0,3 \times 0,1 = 0,024 \\ \Pr(V = 40000) &= 0,4 \times 0,1 \times 0,1 = 0,004\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(V) &= 5000 \times 0,324 + 10000 \times 0,036 + 20000 \times 0,108 \\ &\quad + 25000 \times 0,024 + 40000 \times 0,004 = 4900\end{aligned}$$

### Exercício 12.7.

Número de carros alugados/dia	Probabilidade de alugar	Lucro por dia
0	0,10	$4 \times (-200) = -800$
1	0,30	$2000 - 500 - 3 \times 200 = 900$
2	0,30	$4000 - 2 \times 500 - 2 \times 200 = 2600$
3	0,20	$6000 - 3 \times 500 - 200 = 4300$
4	0,10	$8000 - 4 \times 500 = 6000$

Sejam  $X$  = “número de carros de luxo alugados por dia” e  $L$  = “lucro diário com aluguel de carros de luxo”. Então,

$$\begin{aligned}E(X) &= 1 \times 0,30 + 2 \times 0,30 + 3 \times 0,20 + 4 \times 0,10 = 1,9 \text{ carros por dia} \\ E(X^2) &= 1^2 \times 0,30 + 2^2 \times 0,30 + 3^2 \times 0,20 + 4^2 \times 0,10 = 4,9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = 4,9 - (1,9)^2 = 1,29 \\ DP(X) &= 1,1356 \text{ carros por dia} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(L) &= (-800) \times 0,10 + 900 \times 0,30 + 2600 \times 0,30 + 4300 \times 0,20 + \\ &\quad + 6000 \times 0,10 = 2430 \text{ reais} \\ E(L^2) &= (-800)^2 \times 0,10 + 900^2 \times 0,30 + 2600^2 \times 0,30 + 4300^2 \times 0,20 + \\ &\quad + 6000^2 \times 0,10 = 9633000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(L) &= E(L^2) - [E(L)]^2 = 9633000 - 2430^2 = 3728100 \\ DP(L) &= 1930,83 \text{ reais} \end{aligned}$$

### Exercício 12.8.

1. Seja  $X = \text{“número de chamadas por dia”}$ .

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times 0,15 + 2 \times 0,30 + 3 \times 0,25 + 4 \times 0,15 + 5 \times 0,05 = \\ &= 2,35 \text{ chamadas por dia} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= 1 \times 0,15 + 4 \times 0,30 + 9 \times 0,25 + 16 \times 0,15 + \\ &\quad + 25 \times 0,05 - (2,35)^2 = 1,7275 \\ DP(X) &= 1,3143 \text{ chamadas por dia} \end{aligned}$$

2. Seja  $T = \text{“número de chamadas em um ano”}$ . Então,

$$T = 365X \quad \text{e} \quad E(T) = 2,35 \times 365 = 857,75$$

### Exercício 12.9.

As distribuições de  $X$  e  $Y$  são

$x$	0	1	2	3
$f_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$y$	1	2	3
$f_Y(y)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$

Logo,

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ Var(X) &= \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} - \frac{9}{4} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \\ E(Y) &= \frac{2}{8} + \frac{8}{8} + \frac{6}{8} = \frac{16}{8} = 2 \end{aligned}$$

Note que a distribuição é simétrica!

$$Var(Y) = \frac{2}{8} + \frac{16}{8} + \frac{18}{8} - 4 = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$$

### Exercício 12.10.

$X$  : número de pessoas em cada carro

$Y$  : número de pessoas em 50 carros em 5 horas de contagem

$$X : \begin{array}{c|ccccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline p & 0,05 & 0,20 & 0,40 & 0,25 & 0,10 \end{array}$$

$$Y = 50 \times 5 \times X = 250X$$

$$E(X) = 0,05 + 0,40 + 1,20 + 1,0 + 0,5 = 3,15 \text{ pessoas por carro}$$

$$E(Y) = 250E(X) = 250 \times 3,15 = 787,5 \text{ pessoas}$$



# Aula 13



## ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS

---

### Objetivos

Nesta aula, estudaremos alguns modelos de variáveis aleatórias discretas. O objetivo de tais modelos é descrever situações gerais que se encaixam no contexto definido para cada um deles. Dentre os vários modelos de variáveis aleatórias discretas, estudaremos os seguintes:

- 1 distribuição uniforme discreta;
- 2 distribuição de Bernoulli;
- 3 distribuição binomial;
- 4 distribuição hipergeométrica.

## INTRODUÇÃO

Considere as seguintes situações:

1. (a) Lança-se uma moeda viciada e observa-se o resultado obtido e (b) pergunta-se a um eleitor se ele vai votar no candidato A ou B.
2. (a) Lança-se uma moeda  $n$  vezes e observa-se o número de caras obtidas e (b) de uma grande população, extrai-se uma amostra de  $n$  eleitores e pergunta-se a cada um deles em qual dos candidatos A ou B eles votarão e conta-se o número de votos do candidato A.
3. (a) De uma urna com  $P$  bolas vermelhas e  $Q$  bolas brancas, extraem-se  $n$  bolas sem reposição e conta-se o número de bolas brancas e (b) de uma população com  $P$  pessoas a favor do candidato A e  $Q$  pessoas a favor do candidato B, extrai-se uma amostra de tamanho  $n$  sem reposição e conta-se o número de pessoas a favor do candidato A na amostra.

Em cada uma das situações anteriores, os experimentos citados têm algo em comum: em certo sentido, temos a “mesma situação”, mas em contextos diferentes. Por exemplo, na situação 1, cada um dos experimentos tem dois resultados possíveis e observamos o resultado obtido. Na situação 3, temos uma população dividida em duas categorias e dela extraímos uma amostra sem reposição; o interesse está no número de elementos de uma determinada categoria.

Na prática, existem muitas outras situações que podem se “encaixar” nos modelos acima e mesmo em outros modelos. O que veremos nesse capítulo são alguns *modelos* de variáveis aleatórias discretas que podem descrever situações como as listadas anteriormente. Nesse contexto, um modelo será definido por uma variável aleatória e sua função de distribuição de probabilidade, explicitando-se claramente as hipóteses de validade. De posse desses elementos, poderemos analisar diferentes situações práticas para tentar “encaixá-las” em algum dos modelos dados.



Nesse capítulo serão descritas as distribuições de probabilidade discretas mais usuais. A introdução de cada uma delas será feita através de um exemplo clássico (moeda, urna, baralho etc.) e, em seguida, serão explicitadas as características do experimento. Tais características são a ferramenta necessária para sabermos qual modelo se aplica a uma determinada situação prática. Definida a distribuição, calculam-se a média e a variância.

## DISTRIBUIÇÃO UNIFORME DISCRETA

Suponha que seu professor de Estatística decida dar de presente a um dos alunos um livro de sua autoria. Não querendo favorecer qualquer aluno em especial, ele decide sortear aleatoriamente o ganhador, dentre os 45 alunos da turma. Para isso, ele numera os nomes dos alunos que constam do diário de classe de 1 a 45, escreve esses números em pedaços iguais de papel, dobrando-os ao meio para que o número não fique visível, e sorteia um desses papéis depois de bem misturados. Qual é a probabilidade de que você ganhe o livro? Qual é a probabilidade de que o aluno que tirou a nota mais baixa na primeira prova ganhe o livro? E o que tirou a nota mais alta?

O importante a notar nesse exemplo é o seguinte: o professor tomou todos os cuidados necessários para não favorecer qualquer aluno em especial. Isso significa que todos os alunos têm a mesma chance de ganhar o livro. Temos, assim, um exemplo da distribuição uniforme discreta.

### Definição 13.1.

A variável aleatória discreta  $X$ , que assume os valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , tem **distribuição uniforme** se

$$f_X(x_i) = \Pr(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (13.1)$$

Note que, em uma distribuição discreta uniforme, todos os valores são igualmente prováveis. Além disso, para que uma v.a.  $X$  tenha distribuição uniforme discreta, é necessário que  $X$  assumam um número *finito* de valores, já que  $\sum_x f_X(x) = 1$ .

## ESPERANÇA E VARIÂNCIA

Seja  $X$  uma v.a. discreta uniforme que assume valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Por definição,

$$E(X) = \frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \dots + \frac{1}{n}x_n = \bar{x},$$

ou seja,  $E(X)$  é a média aritmética dos valores possíveis de  $X$ .

Com relação à variância, temos, por definição, que

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[X - E(X)]^2 \\ &= \frac{1}{n}(x_1 - \bar{x})^2 + \frac{1}{n}(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + \frac{1}{n}(x_n - \bar{x})^2 = \sigma_X^2 \end{aligned}$$

que é a mesma fórmula vista na primeira parte do curso para variância populacional de um conjunto de dados.

### Exemplo 13.1.

Considere o lançamento de uma moeda. Vamos definir a seguinte variável aleatória  $X$  associada a esse experimento:

$$\begin{aligned} X &= 0, & \text{se ocorre cara} \\ X &= 1, & \text{se ocorre coroa} \end{aligned}$$

Para que essa v.a. tenha distribuição uniforme, é necessário supor que a moeda seja honesta e, nesse caso,

$$f_X(0) = f_X(1) = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = \frac{1}{2} \times \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

### Exercício 13.1.

Os defeitos em determinada máquina ocorrem aproximadamente na mesma frequência. Dependendo do tipo de defeito, o técnico leva 1, 2, 3, 4 ou 5 horas para consertar a máquina.

1. Descreva o modelo probabilístico apropriado para representar a duração do tempo de reparo da máquina.
2. Qual é o tempo médio de reparo desta máquina? E o desvio padrão deste tempo de reparo?
3. São 15 horas e acaba de ser entregue uma máquina para reparo. A jornada normal de trabalho do técnico termina às 17 horas. Qual é a probabilidade de que o técnico não precise fazer hora extra para terminar o conserto desta máquina?

### Exercício 13.2.

No lançamento de um dado, define-se a v.a.  $X$  como o número da face obtida. Explique qual(is) é(são) a(s) hipótese(s) necessária(s) para que a fdp de  $X$  seja uma distribuição uniforme.

## DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI

Considere o lançamento de uma moeda. A característica desse experimento aleatório é que ele possui apenas dois resultados possíveis. Uma situação análoga surge quando da extração da carta de um baralho, em que o interesse está apenas na cor (preta ou vermelha) da carta sorteada.

### Definição 13.2.

Um **experimento de Bernoulli** é um experimento aleatório com apenas dois resultados possíveis; por convenção, um deles é chamado “sucesso” e o outro, “fracasso”.

### Definição 13.3.

A **v.a. de Bernoulli** é a v.a.  $X$  associada a um experimento de Bernoulli, em que se define

$$\begin{aligned} X &= 1, & \text{se ocorre sucesso} \\ X &= 0, & \text{se ocorre fracasso.} \end{aligned}$$

Chamando de  $p$  a probabilidade de sucesso ( $0 < p < 1$ ), a **distribuição de Bernoulli** é

$x$	0	1
$f_X(x)$	$1 - p$	$p$

(13.2)

Obviamente, as condições definidoras de uma fdp são satisfeitas, uma vez que

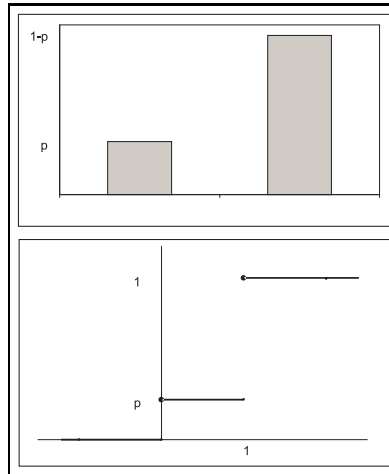
$$p > 0, \quad 1 - p > 0 \quad \text{e} \quad p + (1 - p) = 1.$$

O valor de  $p$  é o único valor que precisamos conhecer para determinar completamente a distribuição; ele é, então, chamado *parâmetro* da distribuição de Bernoulli. Vamos denotar a distribuição de Bernoulli com parâmetro  $p$  por  $Bern(p)$ .

A função de distribuição acumulada é dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - p & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \quad (13.3)$$

Na **Figura 13.1**, temos os gráficos da fdp e da fda de uma distribuição de Bernoulli.



**Figura 13.1:** Distribuição de Bernoulli com parâmetro  $p$ .

## ESPERANÇA E VARIÂNCIA

Seja  $X \sim Bern(p)$  (lê-se: a variável aleatória  $X$  tem distribuição de Bernoulli com parâmetro  $p$ ). Então,

$$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

$$E(X^2) = 0^2 \times (1 - p) + 1^2 \times p = p$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2$$

Em resumo:

$$X \sim \text{Bern}(p) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = p \\ \text{Var}(X) = p(1-p) \end{cases} \quad (13.4)$$

É comum denotar a probabilidade de fracasso por  $q$ , isto é,  $q = 1 - p$ .

### Exemplo 13.2.

Considere novamente o lançamento de uma moeda e a seguinte variável aleatória  $X$  associada a esse experimento:

$$\begin{aligned} X &= 0 \text{ se ocorre coroa} \\ X &= 1 \text{ se ocorre cara} \end{aligned}$$

Seja  $p$  a probabilidade de cara,  $0 < p < 1$ . Então,  $X$  tem distribuição de Bernoulli com parâmetro  $p$ . Note que, nesse caso, a Bernoulli com parâmetro  $p = 1/2$  é equivalente à distribuição uniforme.

### Exemplo 13.3.

Um auditor da Receita Federal examina declarações de Imposto de Renda de pessoas físicas, cuja variação patrimonial ficou acima do limite considerado aceitável. De dados históricos, sabe-se que 10% dessas declarações são fraudulentas.

Vamos considerar o experimento correspondente ao sorteio aleatório de uma dessas declarações. Esse é um experimento de Bernoulli, em que o sucesso equivale à ocorrência de declaração fraudulenta e o parâmetro da distribuição de Bernoulli é  $p = 0,1$ .

Esse exemplo ilustra o fato de que “sucesso”, nesse contexto, nem sempre significa uma situação feliz na vida real. Aqui, sucesso é definido de acordo com o interesse estatístico no problema. Em uma situação mais dramática, “sucesso” pode indicar a morte de um paciente, por exemplo.

## DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Vamos introduzir a distribuição binomial, uma das mais importantes distribuições discretas, através de alguns exemplos. Em seguida, discutiremos as hipóteses feitas e apresentaremos os resultados formais sobre tal distribuição.

### Exemplo 13.4.

Considere o seguinte experimento: uma moeda é lançada  $n$  vezes e sabe-se que  $p = \text{Pr}(\text{cara})$ . Vamos definir a seguinte variável aleatória associada a este experimento:

$$X = \text{número de caras}$$

Como visto antes, cada lançamento da moeda representa um experimento de Bernoulli e como o interesse está no número de caras, vamos definir sucesso = cara.

Para encontrar a função de distribuição de probabilidade de  $X$ , o primeiro fato a notar é que os valores possíveis de  $X$  são: 0, que equivale à ocorrência de  $n$  coroas; 1, que equivale à ocorrência de apenas 1 cara; 2, que equivale à ocorrência de 2 caras e, assim por diante, até  $n$ , que equivale à ocorrência de  $n$  caras. Assim, os possíveis valores de  $X$  são

$$X = 0, 1, 2, \dots, n$$

Vamos, agora, calcular a probabilidade de cada um desses valores, de modo a completar a especificação da fdp de  $X$ . Para isso, vamos representar por  $K_i$  o evento “cara no  $i$ -ésimo lançamento” e por  $C_i$  o evento “coroa no  $i$ -ésimo lançamento”.

- $X = 0$

Temos a seguinte equivalência de eventos:

$$\{X = 0\} \equiv \{C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n\}$$

É razoável supor que os lançamentos da moeda sejam eventos independentes, ou seja, o resultado de um lançamento não interfere no resultado de qualquer outro lançamento.

Dessa forma, os eventos  $C_i$  e  $K_j$  são independentes para  $i \neq j$ . (Note que os eventos  $C_i$  e  $K_i$  são mutuamente exclusivos e, portanto, não são independentes - se sair cara em um lançamento específico, não é possível sair coroa nesse mesmo lançamento e vice-versa).

Analogamente, os eventos  $C_i$  e  $C_j$  são independentes para  $i \neq j$ , bem como os eventos  $K_i$  e  $K_j$ ,  $i \neq j$ . Pela regra da probabilidade da interseção de eventos independentes, resulta que

$$\begin{aligned}\Pr(C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_n) &= \Pr(C_1) \times \Pr(C_2) \times \cdots \times \Pr(C_n) \\ &= (1-p) \times (1-p) \times \cdots \times (1-p) \\ &= (1-p)^n\end{aligned}$$

- $X = 1$

O evento  $X = 1$  corresponde à ocorrência de 1 cara e, conseqüentemente, de  $n - 1$  coroas. Uma sequência possível de lançamentos é

$$K_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \cdots \cap C_n.$$

Vamos calcular a probabilidade desse resultado. Como antes, os lançamentos são eventos independentes e, portanto,

$$\begin{aligned}\Pr(K_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \cdots \cap C_n) &= \Pr(K_1) \times \Pr(C_2) \times \cdots \times \Pr(C_n) \\ &= p \times (1-p) \times \cdots \times (1-p) \\ &= p(1-p)^{n-1}\end{aligned}$$

Mas qualquer sequência com 1 cara resulta em  $X = 1$ ; por exemplo, o evento  $C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_{n-1} \cap K_n$  também resulta em  $X = 1$ . Na verdade, a face cara poderia estar em qualquer posição e todas essas sequências resultariam em  $X = 1$ . Além disso, definida a posição da face cara, as posições das faces coroas já estão determinadas - são as posições restantes. Então, temos a seguinte equivalência:

$$\begin{aligned}\{X = 1\} \equiv & \{K_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \cdots \cap C_n\} \\ & \cup \{C_1 \cap K_2 \cap C_3 \cap \cdots \cap C_n\} \\ & \cup \cdots \cup \{C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_{n-1} \cap K_n\}\end{aligned}$$

Mas os eventos que aparecem no lado direito da expressão anterior são eventos mutuamente exclusivos. Logo,

$$\begin{aligned}
 \Pr(X=1) &= \Pr(K_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \dots \cap C_n) + \Pr(C_1 \cap K_2 \cap C_3 \cap \dots \cap C_n) + \\
 &\quad + \dots + \Pr(C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_{n-1} \cap K_n) \\
 &= p \times (1-p) \times (1-p) \times \dots \times (1-p) + \\
 &\quad + (1-p) \times p \times (1-p) \times \dots \times (1-p) + \\
 &\quad + \dots + (1-p) \times (1-p) \times \dots \times (1-p) \times p \\
 &= p(1-p)^{n-1} + p(1-p)^{n-1} + \dots + p(1-p)^{n-1} \\
 &= np(1-p)^{n-1} = \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1}
 \end{aligned}$$

•  $X=2$

O evento  $X=2$  corresponde à ocorrência de 2 caras e, consequentemente, de  $n-2$  coroas.

Uma sequência possível de lançamentos é

$$K_1 \cap K_2 \cap C_3 \cap \dots \cap C_n$$

e a probabilidade de tal sequência é  $p^2(1-p)^{n-2}$ . Mas as 2 caras podem ocupar quaisquer posições e existem  $\binom{n}{2}$  maneiras de colocar 2 caras em uma sequência de  $n$  lançamentos.

Todas essas  $\binom{n}{2}$  maneiras têm a mesma probabilidade e correspondem a eventos mutuamente exclusivos. Temos a seguinte equivalência:

$$\begin{aligned}
 \{X=2\} &\equiv \{K_1 \cap K_2 \cap C_3 \cap \dots \cap C_n\} \\
 &\quad \cup \{K_1 \cap C_2 \cap K_3 \cap \dots \cap C_n\} \\
 &\quad \cup \dots \cup \{C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_{n-2} \cap K_{n-1} \cap K_n\}
 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
 \Pr(X=2) &= \Pr(K_1 \cap K_2 \cap C_3 \cap \dots \cap C_n) + \Pr(K_1 \cap C_2 \cap K_3 \cap \dots \cap C_n) + \\
 &\quad + \dots + \Pr(C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_{n-2} \cap K_{n-1} \cap K_n) \\
 &= p \times p \times (1-p) \times \dots \times (1-p) + p \times (1-p) \times p \times \dots \times (1-p) \\
 &\quad + \dots + (1-p) \times \dots \times (1-p) \times p \times p \\
 &= p^2(1-p)^{n-2} + p^2(1-p)^{n-2} + \dots + p^2(1-p)^{n-2} \\
 &= \binom{n}{2} p^2(1-p)^{n-2}
 \end{aligned}$$

Aqui, vale a pena fazer uma observação sobre o número combinatório. Por que combinação e não arranjo?

Vamos considerar a primeira sequência como exemplo:  $K_1 \cap K_2 \cap C_3 \cap \dots \cap C_n$ . Essa sequência, para o nosso problema, significa “cara nos 2 primeiros lançamentos e coroa nos  $n-2$  últimos lançamentos”. Não existe diferença



entre as sequências

$$K_1 \cap K_2 \cap C_3 \cap \cdots \cap C_n \text{ e } K_2 \cap K_1 \cap C_3 \cap \cdots \cap C_n.$$

Assim, a “ordem não importa” e temos que usar combinação.

- $X = x, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$

O raciocínio visto para os casos  $X = 0$ ,  $X = 1$  e  $X = 2$  se generaliza facilmente, o que nos leva ao seguinte resultado geral:

$$\Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

É importante notar que a hipótese de independência dos lançamentos da moeda foi absolutamente fundamental na solução do exemplo; foi ela que nos permitiu multiplicar as probabilidades dos resultados de cada lançamento para obter a probabilidade da sequência completa de  $n$  lançamentos. Embora essa hipótese seja muito razoável nesse exemplo, ainda assim é uma hipótese “subjética”.

Outra propriedade utilizada foi a da probabilidade da união de eventos mutuamente exclusivos. Mas aqui essa propriedade é óbvia, ou seja, não há qualquer subjetividade: os eventos  $C_1 \cap K_2$  e  $K_1 \cap C_2$  são mutuamente exclusivos, pois no primeiro lançamento ou sai cara ou sai coroa; não pode sair cara e coroa no primeiro lançamento, ou seja, cada lançamento é um experimento de Bernoulli.

### Exemplo 13.5.

Uma urna contém quatro bolas brancas e seis bolas verdes. Três bolas são retiradas dessa urna, com reposição, isto é, depois de tirada a primeira bola, ela é recolocada na urna e sorteia-se a segunda, que também é recolocada na urna para, finalmente, ser sorteada a terceira bola. Vamos definir a seguinte variável aleatória associada a esse experimento:

$$X = \text{“número de bolas brancas sorteadas”}$$

Cada extração equivale a um experimento de Bernoulli e como o interesse está nas bolas brancas, vamos considerar sucesso = bola branca.

Os valores possíveis de  $X$  são 0, 1, 2, 3. O importante a notar aqui é o seguinte: como cada bola sorteada é recolocada na urna antes da próxima extração, a composição da urna é sempre a mesma e o resultado de uma extração não afeta o resultado de outra extração qualquer.

Dessa forma, podemos considerar as extrações como independentes e, assim, temos uma situação análoga à do exemplo anterior: temos quatro repetições de um experimento (sorteio de uma bola), essas repetições são independentes e em cada uma delas há dois resultados possíveis: bola branca ou bola verde.

Vamos calcular a probabilidade de cada um dos valores de  $X$ . Como antes, vamos denotar por  $V_i$  o evento “bola verde na  $i$ -ésima extração” e por  $B_i$  o evento “bola branca na  $i$ -ésima extração”. Da discussão anterior, resulta que, para  $i \neq j$ , os eventos  $V_i$  e  $B_j$  são independentes, assim como os eventos  $B_i$  e  $B_j$  e os eventos  $V_i$  e  $V_j$ .

- $X = 0$

Esse resultado equivale à extração de bolas verdes em todas as três extrações.

$$\{X = 0\} \equiv \{V_1 \cap V_2 \cap V_3\}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Pr(X = 0) &= \Pr(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = \Pr(V_1) \times \Pr(V_2) \times \Pr(V_3) \\ &= \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \left(\frac{6}{10}\right)^3 = \binom{3}{0} \left(\frac{6}{10}\right)^3 \end{aligned}$$

Lembre-se de que, por definição,  $0! = 1$ .

- $X = 1$

Esse resultado equivale à extração de uma bola branca e, por consequência, duas bolas verdes. A bola branca pode sair em qualquer extração e, definida a posição da bola branca, as posições das bolas verdes ficam totalmente estabelecidas. Logo,

$$\Pr(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{4}{10}\right) \left(\frac{6}{10}\right)^2$$

- $X = 2$

Esse resultado equivale à extração de duas bolas brancas e, por consequência, uma bola verde. As bolas brancas podem sair em quaisquer duas extrações e, definidas as posições das bolas brancas, a posição da bola verde fica totalmente estabelecida. Logo,

$$\Pr(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{4}{10}\right)^2 \left(\frac{6}{10}\right)$$

- $X = 3$

Esse resultado equivale à extração de três bolas brancas. Logo,

$$\Pr(X = 3) = \binom{3}{3} \left(\frac{4}{10}\right)^3$$

## A DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Nos dois exemplos anteriores, tínhamos repetições de um experimento que podiam ser consideradas independentes e em cada repetição havia apenas dois resultados possíveis. Essas são as condições definidoras do *contexto binomial*.

### Definição 13.4.

Um **experimento binomial** consiste em repetições *independentes* de um experimento de Bernoulli.

### Definição 13.5.

Para um experimento binomial consistindo em  $n$  repetições independentes de um experimento de Bernoulli com parâmetro  $p$ , defina a variável aleatória

$X =$  “número de sucessos”

Então,  $X$  tem **distribuição binomial** com parâmetros  $n$  e  $p$ , cuja função de distribuição de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = \Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n \quad (13.5)$$

É imediato ver, da equação (13.5), que  $f_X(x) \geq 0$ . O fato de que  $\sum_{x=0}^n f_X(x) = 1$  segue diretamente do Teorema do Binômio de Newton que diz que, se  $x$  e  $y$  são números reais e  $n$  é um inteiro positivo, então

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \quad (13.6)$$

Fazendo  $x = p$  e  $y = 1 - p$  em (13.6), obtém-se:

$$[p + (1 - p)]^n = 1^n = 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n f_X(x)$$

o que prova que  $\sum_{k=0}^n f_X(x) = 1$ . Assim, a equação (13.5) realmente define uma função de distribuição de probabilidade. Vamos denotar por  $X \sim \text{bin}(n, p)$  o fato de que a v.a.  $X$  tem distribuição binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ .

## ESPERANÇA E VARIÂNCIA

Pode-se mostrar que

$$X \sim \text{bin}(n, p) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = np \\ \text{Var}(X) = np(1 - p) \end{cases} \quad (13.7)$$

Note que a esperança e a variância da binomial são iguais à esperança e à variância da distribuição de Bernoulli, multiplicadas por  $n$ , o número de repetições. Pode-se pensar na distribuição de Bernoulli como uma distribuição binomial com parâmetros  $1, p$ .

### Exemplo 13.6.

Um atirador acerta, na mosca do alvo, 20% dos tiros. Se ele dá 10 tiros, qual a probabilidade de ele acertar na mosca no máximo uma vez?

**Solução:** Podemos pensar os tiros como experimentos de Bernoulli independentes, em que o sucesso é acertar no alvo e a probabilidade de sucesso é 0,20. Então, o problema pede  $\Pr(X \leq 1)$ , em que

$X$  = número de acertos em 10 tiros. Logo,  $X \sim \text{bin}(10; 0,20)$  e

$$\begin{aligned}\Pr(X \leq 1) &= \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) \\ &= \binom{10}{0} (0,20)^0 (0,80)^{10} + \binom{10}{1} (0,20)^1 (0,80)^9 \\ &= 0,37581\end{aligned}$$

### Exemplo 13.7.

Dois adversários  $A$  e  $B$  disputam uma série de oito partidas de um determinado jogo. A probabilidade de  $A$  ganhar uma partida é 0,6 e não há empate. Qual é a probabilidade de  $A$  ganhar a série?

### Solução:

Note que só podem ocorrer vitórias ou derrotas, o que significa que temos repetições de um experimento de Bernoulli com probabilidade 0,6 de sucesso (vitória do jogador  $A$ ). Assumindo a independência das provas, se definimos  $X$  = número de vitórias de  $A$ , então  $X \sim \text{bin}(8; 0,6)$  e o problema pede  $\Pr(X \geq 5)$ , isto é, probabilidade de  $A$  ganhar mais partidas que  $B$ .

$$\begin{aligned}\Pr(X \geq 5) &= \Pr(X = 5) + \Pr(X = 6) + \Pr(X = 7) + \Pr(X = 8) \\ &= \binom{8}{5} (0,6)^5 (0,4)^3 + \binom{8}{6} (0,6)^6 (0,4)^2 + \\ &\quad + \binom{8}{7} (0,6)^7 (0,4)^1 + \binom{8}{8} (0,6)^8 (0,4)^0 \\ &= 0,5940864\end{aligned}$$

### Exercício 13.3.

Na manufatura de certo artigo, é sabido que um entre dez artigos é defeituoso. Uma amostra de tamanho quatro é retirada com reposição, de um lote da produção. Qual a probabilidade de que a amostra contenha

1. nenhum defeituoso?
2. pelo menos um defeituoso?
3. exatamente um defeituoso? Na solução desse exercício, é importante que você identifique o experimento, a variável aleatória de interesse e sua respectiva fdp.

**Exercício 13.4.**

Em uma distribuição binomial, sabe-se que a média é 4,5 e a variância é 3,15. Encontre os valores dos parâmetros da distribuição.

**DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA**

A distribuição hipergeométrica, que estudaremos a seguir, tem estreita ligação com a distribuição binomial. Para salientar as semelhanças e as diferenças entre as duas distribuições, vamos retomar a situação do Exemplo 13.5.

**Exemplo 13.8.**

De uma urna composta por quatro bolas brancas e seis bolas verdes extraem-se três bolas *sem* reposição. Vamos definir a seguinte variável aleatória associada a esse experimento:

$$X = \text{“número de bolas brancas sorteadas”}$$

Assim como no Exemplo 13.4, temos repetições de um experimento de Bernoulli: em cada extração, podemos tirar uma bola branca ou uma bola verde. A diferença fundamental é que essas repetições *não* são independentes, ou seja, o resultado de uma repetição afeta o resultado da próxima repetição. Vamos calcular a função de distribuição de probabilidade de  $X$ . Como antes, os valores possíveis de  $X$  são

$$X = 0, 1, 2, 3$$

Para calcular a probabilidade de cada um destes valores, vamos usar a definição clássica de probabilidade, que estabelece que a probabilidade de um evento  $A$  é

$$\Pr(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

O espaço amostral  $\Omega$  deste experimento é formado por todas as triplas de bolas brancas e verdes retiradas dessa urna. O número

total de elementos de  $\Omega$  é

$$\#\Omega = \binom{10}{3}$$

Como antes, a ordem não importa, ou seja,  $B_1B_2V_3 \equiv B_2B_1V_3$  que significa: bola branca nas duas primeiras extrações e bola verde na terceira extração. Vamos calcular a probabilidade de cada valor de  $X$ .

- $X = 0$

Esse resultado equivale a retirar apenas bolas verdes. Como há seis bolas verdes, o número de possibilidades é  $\binom{6}{3}$  e, portanto,

$$\Pr(X = 0) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}$$

- $X = 1$

Esse resultado equivale a tirar uma bola branca e duas bolas verdes. O número de possibilidades para a bola branca é  $\binom{4}{1}$  e para cada uma dessas possibilidades, existem  $\binom{6}{2}$  maneiras de tirar as bolas verdes. Pelo princípio fundamental da multiplicação, o número total de maneiras de tirar uma bola branca e duas verdes é  $\binom{4}{1} \times \binom{6}{2}$  e, portanto,

$$\Pr(X = 1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{6}{2}}{\binom{10}{3}}$$

- $X = 2$

Com raciocínio análogo, conclui-se que

$$\Pr(X = 2) = \frac{\binom{4}{2} \binom{6}{1}}{\binom{10}{3}}$$

e

$$\Pr(X = 3) = \frac{\binom{4}{3} \binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}}$$

**Exemplo 13.9.**

De uma urna com quatro bolas brancas e oito bolas verdes, extraem-se seis bolas sem reposição. Mais uma vez, vamos definir a seguinte variável aleatória associada a esse experimento:

$$X = \text{“número de bolas brancas sorteadas”}$$

Note que não temos bolas brancas suficientes para tirar uma amostra só de bolas brancas, por exemplo. Mais precisamente, os valores possíveis de  $X$  são 0, 1, 2, 3, 4. Utilizando raciocínio análogo ao do exemplo anterior, podemos ver que

$$\Pr(X = x) = \frac{\binom{4}{x} \binom{8}{6-x}}{\binom{12}{6}} \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

Se estabelecermos a notação de que  $\binom{m}{j} = 0$  sempre que  $j > m$ , podemos definir a fdp de  $X$  como

$$\Pr(X = x) = \frac{\binom{4}{x} \binom{8}{6-x}}{\binom{12}{6}} \quad x = 0, \dots, 6$$

e com isso estamos atribuindo probabilidade nula aos valores impossíveis 5 e 6.

**Exemplo 13.10.**

De uma urna com oito bolas brancas e quatro bolas verdes, extraem-se seis bolas sem reposição. Mais uma vez, vamos definir a seguinte variável aleatória associada a esse experimento:

$$X = \text{“número de bolas brancas sorteadas”}$$

Note que não temos bolas verdes suficientes para tirar uma amostra só de bolas verdes, por exemplo. Mais precisamente, os valores possíveis de  $X$  são 2, 3, 4, 5, 6 e

$$\Pr(X = x) = \frac{\binom{8}{x} \binom{4}{6-x}}{\binom{12}{6}} \quad x = 2, 3, 4, 5, 6$$



Como antes, se estabelecermos a notação de que  $\binom{m}{j} = 0$  sempre que  $j > m$ , podemos definir a fdp de  $X$  como

$$\Pr(X = x) = \frac{\binom{8}{x} \binom{4}{6-x}}{\binom{12}{6}} \quad x = 0, \dots, 6$$

e com isso estamos atribuindo probabilidade nula aos valores impossíveis 0 e 1.

Nos três exemplos anteriores, temos a seguinte situação geral: do espaço amostral, que está dividido em duas categorias (branca ou verde), retira-se, sem reposição, uma amostra ou subconjunto. O interesse está no número de elementos, nesse subconjunto, de determinada categoria. Como no experimento de Bernoulli, a categoria de interesse será identificada por “sucesso” e a outra, por “fracasso”.

### Definição 13.6.

Considere uma população de tamanho  $N$  dividida em duas classes, uma composta por  $r$  “sucessos” e a outra composta por  $N - r$  “fracassos”. Dessa população, extrai-se uma amostra de tamanho  $n$  sem reposição (ver **Figura 13.2**). Então, a variável aleatória

$X$  = número de sucessos na amostra

tem **distribuição hipergeométrica** com parâmetros  $N, r, n$ , cuja função de distribuição de probabilidade é

$$\Pr(X = x) = \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n \quad (13.8)$$

Por convenção,  $\binom{j}{m} = 0$ , se  $j > m$ .

Pode-se provar que a equação (13.8) realmente define uma função de distribuição de probabilidade; isto é,

$$\Pr(X = k) \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_k \Pr(X = k) = 1.$$

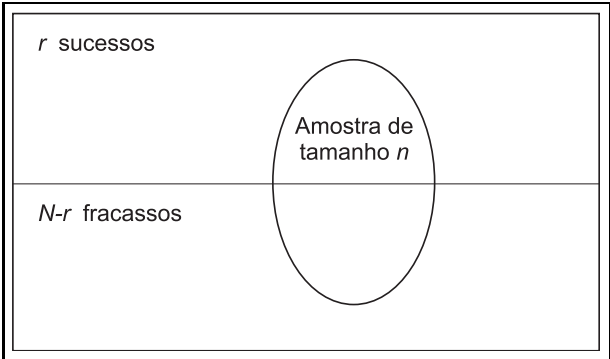


Figura 13.2: Ilustração do espaço amostral de uma v.a. hipergeométrica.

ESPERANÇA E VARIÂNCIA

Temos os seguintes resultados:

$$X \sim \text{hiper}(N, r, n) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = n \frac{r}{N} \\ Var(X) = n \frac{r}{N} \frac{N-r}{N} \frac{N-n}{N-1} \end{cases} \quad (13.9)$$

Exercício 13.5.

Uma comissão de cinco membros deve ser escolhida de um grupo formado por 12 mulheres e 18 homens. Se a comissão escolhida é formada por cinco homens, existe alguma razão para se suspeitar da lisura do processo de escolha?

Suponha que seja estabelecida a seguinte regra: se a probabilidade de se obter uma comissão formada apenas por homens for muito pequena, menor que 0,01, o processo será considerado fraudulento e uma nova comissão deverá ser escolhida. Qual é a conclusão nesse caso?

Exercício 13.6.

Um caçador, após um dia de caça, verificou que matou cinco andorinhas e duas aves de uma espécie rara, proibida de ser caçada. Como todos os espécimes tinham aproximadamente o mesmo tamanho, ele os colocou na mesma bolsa, pensando em dificultar o trabalho dos fiscais. No posto de fiscalização há dois fiscais, Manoel e Pedro, que adotam diferentes métodos de inspeção.

Manoel retira três espécimes de cada bolsa dos caçadores sem reposição. Pedro retira um espécime, classifica-o e o repõe na bolsa, retirando em seguida um segundo espécime. Em qualquer caso, o caçador é multado se é encontrado pelo menos um espécime proibido. Qual dos dois fiscais é mais favorável para o caçador em questão?

## BINOMIAL *versus* HIPERGEOMÉTRICA

Vamos fazer agora, algumas comparações entre as distribuições binomial e hipergeométrica. Colocando ambas em termos de extrações de bolas verdes de uma urna com bolas verdes e brancas, a binomial equivale a extrações independentes *com* reposição. Note que, repondo as bolas, a probabilidade de sucesso (isto é, bola branca) permanece constante ao longo das extrações. Já a hipergeométrica corresponde a extrações *sem* reposição.

A esperança da binomial é igual ao produto do tamanho da amostra pela probabilidade de sucesso; em termos da urna, a probabilidade de sucesso é  $\frac{r}{N}$  e, portanto, a esperança é  $n\frac{r}{N}$ . Na hipergeométrica, a esperança também é o produto do tamanho da amostra pela probabilidade de sucesso, probabilidade essa tomada apenas na primeira extração.

A variância da binomial é igual ao produto do tamanho da amostra pelas probabilidades de sucesso e fracasso. Em termos de urna, essas probabilidades são  $\frac{r}{N}$  e  $\frac{N-r}{N}$ . Na hipergeométrica, considerando apenas a primeira extração, a variância é igual a esse produto, mas corrigido pelo fator  $\frac{N-n}{N-1}$ .

Em pesquisas estatísticas por amostragem, normalmente lidamos com amostragem sem reposição (já imaginou visitar e entrevistar um mesmo morador duas vezes?). No entanto, os resultados teóricos sobre amostragem com reposição são bem mais simples (como você verá mais adiante nesse curso, isso equivale a lidar com variáveis independentes).

Assim, costuma-se usar uma aproximação, sempre que possível, ou seja, quando o tamanho  $N$  da população é suficientemente grande (de modo que podemos encará-la como uma população infinita) e o tamanho da amostra é relativamente pe-

queno, podemos “ignorar” o fato de as extrações serem feitas sem reposição. Isso vem dos seguintes resultados:

- na amostragem com reposição, a probabilidade de seleção de cada elemento em sorteios consecutivos é sempre  $\frac{1}{N}$ .
- Na amostragem sem reposição, as probabilidades em extrações sucessivas são  $\frac{1}{N}, \frac{1}{N-1}, \dots, \frac{1}{N-n}$ . Então, se  $N$  é “grande” e  $n$  é pequeno, temos que  $N \approx N-1 \approx \dots \approx N-n$ . Nessas condições, extrações com e sem reposição podem ser consideradas como equivalentes.

O termo que aparece na variância da hipergeométrica,  $\frac{N-n}{N-1}$ , é chamado *correção para populações finitas*, exatamente porque, se a população é pequena, não podemos ignorar o fato de as extrações estarem sendo feitas sem reposição.

## Resumo

- **Distribuição uniforme discreta:**  $X$  assume valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tais que

$$f_X(x_i) = \Pr(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$E(X) = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sigma_X^2$$

- **Distribuição de Bernoulli:**

$x$	0	1
$f_X(x)$	$1-p$	$p$

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1-p)$$

- **Experimento binomial:** repetições *independentes* de um experimento de Bernoulli.
- **Distribuição binomial:**  $X$  = número de sucessos em  $n$  repetições independentes de um experimento binomial

$$f_X(x) = \Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$E(X) = np$$

$$Var(X) = np(1-p)$$

- **Distribuição hipergeométrica:**  $X$  = número de sucessos em uma amostra de tamanho  $n$ , retirada sem reposição de uma população dividida em 2 classes, uma consistindo em  $r$  “sucessos” e outra consistindo em  $N-r$  “fracassos”

$$\Pr(X = x) = \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Por convenção,  $\binom{j}{m} = 0$  se  $j > m$ .

$$E(X) = n \frac{r}{N}$$

$$Var(X) = n \frac{r}{N} \frac{N-r}{N} \frac{N-n}{N-1}$$

**Exercício 13.7.**

Joga-se uma moeda não viciada. Qual é a probabilidade de serem obtidas cinco caras antes de três coroas?

**Exercício 13.8.**

Entre os 16 programadores de uma empresa, 12 são do sexo masculino. A empresa decide sortear cinco programadores para fazer um curso avançado de programação. Qual é a probabilidade dos cinco sorteados serem do sexo masculino?

**Exercício 13.9.**

**Distribuição geométrica**

Suponha que uma moeda perfeita seja lançada até que apareça cara pela primeira vez. Obtida a primeira cara, o experimento é interrompido e conta-se o número de lançamentos feitos. Seja  $X$  o número de lançamentos. Obtenha a função de distribuição de probabilidade de  $X$ . Repita o exercício supondo que a probabilidade de cara seja  $p$ ,  $p \neq \frac{1}{2}$ .

A distribuição da v.a.  $X$  é chamada *distribuição geométrica com parâmetro  $p$* . A definição geral da distribuição geométrica é a seguinte: Em repetições independentes de um experimento de Bernoulli com parâmetro  $p$ , a v.a.  $X =$  “número de repetições até o primeiro sucesso” tem distribuição geométrica com parâmetro  $p$ .

**Exercício 13.10.**

Um atirador acerta na mosca do alvo 20% dos tiros.

1. Qual é a probabilidade de ele acertar na mosca pela primeira vez no décimo tiro?
2. Se ele dá 10 tiros, qual é a probabilidade de ele acertar na mosca exatamente uma vez?

**Exercício 13.11.**

A probabilidade de uma máquina produzir uma peça defeituosa em um dia é 0,1.

1. Qual é a probabilidade de que, em 20 peças produzidas em um dia, exatamente uma seja defeituosa?
2. Qual é a probabilidade de que a 20ª peça produzida em um dia seja a primeira defeituosa?

**Exercício 13.12.**

Um supermercado faz a seguinte promoção: o cliente, ao passar pelo caixa, lança um dado. Se sair a face 6 tem um desconto de 30% sobre o total de sua conta. Se sair a face 5, o desconto é de 20%. Se sair a face 4, o desconto é de 10% e se ocorrerem as faces 1, 2 ou 3, o desconto é de 5%. Seja  $X$  = desconto concedido.

1. Encontre a função de distribuição de probabilidade de  $X$ .
2. Calcule o desconto médio concedido.
3. Calcule a probabilidade de que, num grupo de cinco clientes, pelo menos um consiga um desconto maior que 10%.
4. Calcule a probabilidade de que o quarto cliente seja o primeiro a receber 30% de desconto.

**Exercício 13.13.**

As probabilidades de que haja 1, 2, 3, 4 ou 5 pessoas nos carros que passam por um pedágio são, respectivamente, 0,05; 0,20; 0,40; 0,25 e 0,10. Seja  $X$  = número de passageiros por veículo.

1. Explícite a função de distribuição de probabilidade de  $X$ .
2. Calcule o número médio de passageiros por veículo.
3. Calcule a probabilidade de que, num grupo de cinco carros, pelo menos um tenha mais que três pessoas.
4. Calcule a probabilidade de que o quarto carro seja o primeiro a ter cinco passageiros.

**Exercício 13.14.**

Um fabricante de peças de automóveis garante que uma caixa de suas peças conterá, no máximo, duas defeituosas. Se a caixa contém 18 peças e a experiência mostra que esse processo de fabricação produz 5% de peças defeituosas, qual é a probabilidade de que uma caixa satisfaça a garantia?

### Exercício 13.15.

Certo curso de treinamento aumenta a produtividade de uma certa população de funcionários em 80% dos casos. Se 10 funcionários quaisquer participam deste curso, encontre a probabilidade de:

1. exatamente sete funcionários aumentarem a produtividade;
2. pelo menos três funcionários não aumentarem a produtividade;
3. não mais que oito funcionários aumentarem a produtividade.

### Exercício 13.16.

Determinado tipo de parafuso é vendido em caixas com 1.000 peças. É uma característica da fabricação produzir 10% de parafusos defeituosos. Normalmente, cada caixa é vendida por 13,50 u.m..

Um comprador faz a seguinte proposta para o produtor: de cada caixa, ele escolhe uma amostra de 20 peças; se ele encontrar

- nenhuma defeituosa, ele paga 20,00 u.m. pela caixa;
- uma ou duas defeituosas, ele paga 10,00 u.m. pela caixa;
- três ou mais defeituosas, ele paga 8,00 u.m. pela caixa.

Qual é a alternativa mais vantajosa para o fabricante?

### Exercício 13.17.

Um industrial fabrica peças, das quais 20% são defeituosas. Dois compradores,  $A$  e  $B$ , classificam as partidas adquiridas em categorias I e II. Pagando 1,20 u.m. e 0,80 u.m. respectivamente, do seguinte modo:

- Comprador A: retira uma amostra de 5 peças; se encontrar mais de uma defeituosa, classifica como II;
- Comprador B: retira uma amostra de 10 peças; se encontrar mais de 2 defeituosas, classifica como II.

Em média, qual comprador oferece maior lucro para o fabricante?



## SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

### Exercício 13.1.

Seja  $T$  = “tempo de reparo, em horas”.

1. Como os defeitos ocorrem na mesma frequência, o modelo probabilístico apropriado é uma distribuição uniforme:

$t$	1	2	3	4	5
$f_T(t) = \Pr(T = t)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$2. E(T) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = 3 \text{ horas}$$

$$Var(T) = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2}{5} - 9 = 2 \implies$$

$$DP(T) = 1,41 \text{ horas}$$

3. Seja  $E$  o evento “técnico vai ter que fazer hora extra”.  
Então

$$\Pr(E) = \Pr(T > 2) = \frac{3}{5} = 0,6$$

Logo, a probabilidade de que ele não tenha que fazer hora extra é 0,4.

### Exercício 13.2.

O dado tem que ser honesto.

### Exercício 13.3.

Como a amostra é retirada com reposição, as extrações são repetições independentes de um experimento de Bernoulli com parâmetro 0,1. Seja  $X$  = “número de artigos defeituosos na amostra”.

$$1. \Pr(X = 0) = \binom{4}{0} (0,1)^0 (0,9)^4 = 0,6561$$

$$2. \Pr(X \geq 1) = 1 - \Pr(X < 1) = 1 - \Pr(X = 0) = 0,3439$$

$$3. \Pr(X = 1) = \binom{4}{1} (0,1)^1 (0,9)^3 = 0,2916$$

**Exercício 13.4.**

Temos que

$$\begin{aligned} np &= 4,5 \\ np(1-p) &= 3,15 \end{aligned}$$

Substituindo a primeira equação na segunda resulta

$$\begin{aligned} 4,5(1-p) &= 3,15 \Rightarrow \\ 1-p &= 0,7 \Rightarrow \\ p &= 0,3 \end{aligned}$$

Substituindo na primeira equação, obtemos que

$$n = 4,5/0,3 = 15.$$

**Exercício 13.5.**

Vamos definir a seguinte v.a associada a este experimento:

$$X = \text{“número de homens na comissão”}$$

Queremos calcular  $\Pr(X = 5)$ . O número total de comissões possíveis é  $\#\Omega = \binom{30}{5}$  e

$$\begin{aligned} \Pr(X = 5) &= \frac{\binom{18}{5}}{\binom{30}{5}} = \frac{\frac{18!}{5!13!}}{\frac{30!}{5!25!}} \\ &= \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14}{30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26} = 0,060124 \end{aligned}$$

Como a probabilidade é maior que 0,01, não há razão para se sortear outra comissão.

**Exercício 13.6.**

Seja  $X$  = número de aves proibidas (sucessos) encontradas por um fiscal. No caso de Manoel, temos que  $X \sim \text{hiper}(7; 2; 3)$  e no caso do fiscal Pedro,  $X \sim \text{bin}(2; \frac{2}{7})$ . Queremos calcular  $\Pr(\text{multa}) = \Pr(X \geq 1) = 1 - \Pr(X = 0)$ .

Manoel:

$$\Pr(\text{multa}) = 1 - \Pr(X = 0) = 1 - \frac{\binom{2}{0}\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7} = \frac{35}{49}$$

Pedro:

$$\Pr(\text{multa}) = 1 - \Pr(X = 0) = 1 - \binom{2}{0} \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49}$$

Logo, a probabilidade de multa é maior no caso do fiscal Manoel, e, portanto, Pedro é o fiscal mais favorável para o caçador.

### Exercício 13.7.

Vamos considerar a seguinte v.a. de Bernoulli

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se ocorre cara} \\ 0 & \text{se ocorre coroa} \end{cases}$$

Então,  $\Pr(X = 0) = \Pr(X = 1) = 0,5$  e temos repetições independentes de um experimento de Bernoulli.

A ocorrência de cinco caras antes de três coroas só é possível se, nas sete primeiras repetições, tivermos pelo menos cinco caras. Seja, então,  $Y$  = número de caras em sete repetições. Logo,  $Y \sim \text{bin}(7; 0,5)$  e o problema pede  $\Pr(Y \geq 5)$ .

$$\begin{aligned} \Pr(Y \geq 5) &= \Pr(Y = 5) + \Pr(Y = 6) + \Pr(Y = 7) \\ &= \binom{7}{5} (0,5)^5 (0,5)^2 + \binom{7}{6} (0,5)^6 (0,5) + \binom{7}{7} (0,5)^7 (0,5)^0 \\ &= \binom{7}{5} (0,5)^7 + \binom{7}{6} (0,5)^7 + \binom{7}{7} (0,5)^7 \\ &= 0,2265625 \end{aligned}$$

### Exercício 13.8.

Se  $X$  = número de homens sorteados, então  $X \sim \text{hiper}(16; 12; 5)$  e o problema pede

$$\Pr(X = 5) = \frac{\binom{12}{5}}{\binom{16}{5}} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12} = \frac{33}{14 \times 13} = 0,181319$$

### Exercício 13.9.

A primeira observação diz respeito aos valores possíveis de  $X$ . Podemos ter muita sorte e obter cara no primeiro lançamento; nesse caso,  $X = 1$ . Nossa “sorte” pode começar a diminuir de modo que obtemos cara no segundo lançamento; nesse caso,  $X = 2$ . Continuando, podemos ser bastante infelizes e ter que ficar jogando a moeda “infinitas” vezes até obter a primeira cara.

Esse é um exemplo de v.a. discreta em que o espaço amostral é enumerável, mas infinito: os valores possíveis de  $X$  são  $1, 2, 3, \dots$ . Cada resultado desses significa que os primeiros lançamentos foram coroa ( $C$ ) e o último, cara ( $K$ ). Como os lançamentos podem ser considerados independentes, resulta que

$$\Pr(X = 1) = \Pr(K) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X = 2) &= \Pr(C_1 \cap K_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X = 3) &= \Pr(C_1 \cap C_2 \cap K_3) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X = 4) &= \Pr(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap K_4) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4\end{aligned}$$

Em geral,

$$\Pr(X = x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

Se a probabilidade de cara é  $p$ , então a única diferença com relação ao visto anteriormente é que  $\Pr(K) = p$  e  $\Pr(C) = 1 - p$ . Então,

$$\Pr(X = x) = (1 - p)^{x-1} p \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

É interessante notar que, tanto na distribuição binomial quanto na geométrica, temos repetições independentes de um experimento de Bernoulli.

Na binomial, o número de repetições é fixo e estamos interessados no número de sucessos. Na geométrica, o número de sucessos é fixo (igual a 1) e estamos interessados no número de repetições. A distribuição binomial negativa generaliza a distribuição geométrica, no seguinte sentido: a v.a. de interesse é  $X = \text{“número de sucessos até o } r\text{-ésimo sucesso, } r \geq 1\text{”}$ .

**Exercício 13.10.**

Nossa variável aleatória de Bernoulli é a seguinte:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se acerta no alvo} \\ 0 & \text{se não acerta no alvo} \end{cases}$$

e  $\Pr(X = 1) = 0,20$ , o que implica que  $\Pr(X = 0) = 0,8$ .

1. Seja  $Z = \text{"número de tiros até primeiro acerto no alvo"}$ .  
Então,  $Z \sim \text{geom}(0,2)$  e

$$\Pr(Z = 10) = (0,8)^9(0,20) = 0,026844$$

2. Seja  $Y = \text{"número de acertos em 10 tiros"}$ . Então,  
 $Y \sim \text{bin}(10;0,2)$  e

$$\Pr(Y = 1) = \binom{10}{1}(0,20)(0,8)^9 = 0,26844$$

**Exercício 13.11.**

Nossa variável aleatória de Bernoulli é a seguinte:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se peça é defeituosa} \\ 0 & \text{se peça é não defeituosa} \end{cases}$$

e  $\Pr(X = 1) = 0,10$ , o que implica que  $\Pr(X = 0) = 0,9$ .

1. Seja  $Y = \text{"número de peças defeituosas na amostra de tamanho 20"}$ . Então  $Y \sim \text{bin}(20;0,1)$  e

$$\Pr(Y = 1) = \binom{20}{1}(0,10)(0,9)^{19} = 0,27017$$

2. Seja  $Z = \text{"número de repetições até primeira peça defeituosa"}$ ; então,  $Z \sim \text{geom}(0,1)$  e

$$\Pr(Z = 20) = (0,9)^{19}(0,10) = 0,013509$$

**Exercício 13.12.**

1. Supondo que o dado seja honesto, a fdp de  $X$  é

Valor do desconto $x$	0,30	0,20	0,10	0,05
$\Pr(X = x)$	1/6	1/6	1/6	3/6

2. Temos que

$$E(X) = \frac{0,30 + 0,20 + 0,10 + 3 \times 0,05}{6} = 0,125$$

ou um desconto médio de 12,5%.

3. A probabilidade de se ter um desconto maior que 10% (20% ou 30%) é de  $\frac{2}{6}$ . Seja  $Y$  = número de clientes, em um grupo de cinco, que recebem desconto maior que 10%. Então,  $Y \sim \text{bin}(5; \frac{2}{6})$ . Logo,

$$\begin{aligned} \Pr(Y \geq 1) &= 1 - \Pr(Y < 1) \\ &= 1 - \Pr(Y = 0) \\ &= 1 - \binom{5}{0} \left(\frac{2}{6}\right)^0 \left(\frac{4}{6}\right)^5 = 0,868313 \end{aligned}$$

4. Seja  $Z$  = número de clientes que passam pelo caixa até primeiro desconto de 30% (probabilidade  $\frac{1}{6}$ ). Então,  $Z \sim \text{geom}(\frac{1}{6})$  e, portanto,

$$\Pr(Z = 4) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right) = 0,09645$$

### Exercício 13.13.

$X$  = “número de pessoas em cada carro”

1. A fdp de  $X$  é

$x$	1	2	3	4	5
$f_X(x) = \Pr(X = x)$	0,05	0,20	0,40	0,25	0,10

2.  $E(X) = 0,05 + 0,40 + 1,20 + 1,0 + 0,5 = 3,15$  pessoas por carro

3. A probabilidade de haver mais de três pessoas em um carro é  $0,35 = \Pr(X = 4) + \Pr(X = 5) = 0,25 + 0,10$ . Seja  $Y$  = número de carros, num grupo de 5, com mais de 3 pessoas. Então,  $Y \sim \text{bin}(5; 0,35)$ . Logo,

$$\Pr(Y \geq 1) = 1 - \Pr(Y = 0) = 1 - \binom{5}{0} (0,35)^0 (0,65)^5 = 0,883971$$

4. Seja  $Z$  = número de carros até primeiro carro com cinco passageiros. Então,  $Z \sim \text{geom}(0, 10)$  e, assim

$$\Pr(Z = 4) = (0,90)^3 (0,10) = 0,0729$$

### Exercício 13.14.

Se  $X$  = “número de peças defeituosas em uma caixa”, resulta que  $X \sim \text{bin}(18; 0,05)$ .

A caixa satisfaz a garantia se  $X \leq 2$ . Logo, a probabilidade de uma caixa satisfazer a garantia é

$$\begin{aligned} \Pr(X \leq 2) &= \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2) = \\ &= \binom{18}{0} (0,05)^0 (0,95)^{18} + \binom{18}{1} (0,05)^1 (0,95)^{17} \\ &\quad + \binom{18}{2} (0,05)^2 (0,95)^{16} = \\ &= 0,397214 + 0,376308 + 0,168348 = 0,941871 \end{aligned}$$

### Exercício 13.15.

Podemos pensar nos funcionários selecionados para o curso como experimentos de Bernoulli (aumenta ou não a produtividade) independentes. Seja  $X$  = número de funcionários, dentre os 10, que aumentam produtividade.

1.  $\Pr(X = 7) = \binom{10}{7} (0,80)^7 (0,20)^3 = 0,201327$
2. Pelo menos 3 não aumentarem a produtividade é equivalente a no máximo 7 dos 10 aumentarem a produtividade. Logo, a probabilidade pedida é

$$\begin{aligned} \Pr(X \leq 7) &= 1 - \Pr(X > 7) \\ &= 1 - \Pr(X = 8) - \Pr(X = 9) - \Pr(X = 10) \\ &= 1 - \binom{10}{8} (0,80)^8 (0,20)^2 - \binom{10}{9} (0,80)^9 (0,20)^1 - \binom{10}{10} (0,80)^{10} (0,20)^0 \\ &= 0,32220 \end{aligned}$$

3.  $\Pr(X \leq 8) = \Pr(X \leq 7) + \Pr(X = 8)$ 

$$= 0,322200 + \binom{10}{8} (0,80)^8 (0,20)^2 = 0,62419$$

**Exercício 13.16.**

Numa população de 1.000, retirar uma amostra de 20 pode ser vista como repetições de experimentos independentes de Bernoulli.

Seja  $X$  = número de defeituosos na amostra de 20. Então,  $X \sim \text{bin}(20; 0,10)$

Seja  $V$  = valor de compra proposto pelo cliente. Então,  $V$  pode assumir os valores 20, 10 ou 8 u.m. e, pela regra dada,

$$\Pr(V = 20) = \Pr(X = 0) = \binom{20}{0} (0,10)^0 (0,90)^{20} = 0,1216$$

$$\begin{aligned}\Pr(V = 10) &= \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2) = \\ &= \binom{20}{1} (0,10)^1 (0,90)^{19} + \binom{20}{2} (0,10)^2 (0,90)^{18} = 0,5553\end{aligned}$$

$$\Pr(V = 8) = \Pr(X \geq 3) = 1 - \Pr(X = 0) - \Pr(X = 1) - \Pr(X = 2) = 0,3231$$

$v$	8	10	20
$f_V(v)$	0,3231	0,5553	0,1216

$$E(V) = 8 \times 0,3231 + 10 \times 0,5553 + 20 \times 0,1216 = 10,5698$$

A proposta do cliente é mais desvantajosa para o fabricante, já que, em média, ele paga menos do que o preço normal de 13,50.

**Exercício 13.17.**

Sejam os seguintes eventos:  $A$  = comprador  $A$  classifica partida como tipo II e  $B$  = comprador  $B$  classifica partida como tipo II. Sejam  $X_A$  número de peças defeituosas na amostra do comprador  $A$  e  $X_B$  o número de peças defeituosas na amostra do comprador  $B$ . Então,  $X_A \sim \text{bin}(5; 0,20)$  e  $X_B \sim \text{bin}(10; 0,20)$

$$\begin{aligned}\Pr(A) &= \Pr(X_A > 1) = 1 - \Pr(X_A \leq 1) = \\ &= 1 - \binom{5}{0} (0,2)^0 (0,8)^5 - \binom{5}{1} (0,2)^1 (0,8)^4 = 0,2627\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(B) &= \Pr(X_B > 2) = 1 - \Pr(X_B \leq 2) = \\ &= 1 - \binom{10}{0} (0,2)^0 (0,8)^{10} - \binom{10}{1} (0,2)^1 (0,8)^9 \\ &\quad - \binom{10}{2} (0,2)^2 (0,8)^8 = 0,3222\end{aligned}$$



Sejam  $P_A$  e  $P_B$  os preços pagos pelos compradores  $A$  e  $B$  respectivamente. Então, as distribuições de probabilidade dessas variáveis são:

$P_A$	0,8	1,2	$E(P_A) = 1,095$
Probabilidade	0,2627	0,7373	

$P_B$	0,8	1,2	$E(P_B) = 1,071$
Probabilidade	0,3222	0,6778	

A proposta do comprador  $A$  é mais vantajosa.



# Bibliografia

---

- [1] ANDERSON, David R.; SWEENEY, Dennis J.; WILLIAMS, Thomas A. *Estatística Aplicada à Administração e à Economia*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002
- [2] MOORE, David S.; McCabe, George P.; DUCKWORTH, William M.; SCLOVE, Stanley L. *A Prática da Estatística Empresarial – Como Usar Dados para Tomar Decisões*. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006
- [3] MORETTIN, Pedro Alberto; BUSSAB, Wilton de Oliveira. *Estatística Básica*, 5a Edição. São Paulo: Saraiva, 2006
- [4] TRIOLA, Mario F. *Introdução à Estatística*, 9a. Edição. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2005

