



Fundação

CECIERJ

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Métodos Estatísticos II

Volume Único

Ana Maria Lima



**GOVERNO DO
Rio de Janeiro**

**SECRETARIA DE CIÊNCIA,
TECNOLOGIA, INOVAÇÃO E
DESENVOLVIMENTO SOCIAL**

**UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL**

**MINISTÉRIO DA
EDUCAÇÃO**



Apoio:



FAPERJ

Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

www.cederj.edu.br

Presidente

Carlos Eduardo Bielschowsky

Vice-presidente

Marilvia Dansa de Alencar

Coordenação do Curso de Administração

Administração (UFRRJ) - Silvestre Prado de Sousa Neto

Administração Pública (UFF) - Carlos Frederico Bom Kraemer

Material Didático

Elaboração de Conteúdo

Ana Maria Lima

Coordenação Geral (Matemática)

Marcelo Corrêa

Biblioteca

Raquel Cristina da Silva Tiellet

Simone da Cruz Correa de Souza

Vera Vani Alves de Pinho

Coordenação de Equipe

Marcelo Freitas

Ilustração

Ronaldo d'Águilar Silva

Programação Visual

Aline Madeira Brondani

Cristiane Mota Lourenço

Revisão Linguística e Tipográfica

Cristiane Mota Lourenço

Patrícia Paula

Coordenação de Produção

Fábio Rapello Alencar

Assistente de Produção

Bianca Giacomelli

Capa

Clara Gomes

Produção Gráfica

Patrícia Esteves

Ulisses Schnaider

Copyright © 2016, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

L732

Lima, Ana Maria.

Métodos estatísticos 2 : volume único / Ana Maria Lima - Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2016.

298p.; 19 x 26,5 cm.

ISBN: 978-85-458-0061-3

1. Estatística matemática. 2. Métodos estatísticos. I. Título.

CDD: 519.9

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.
Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador

Luiz Fernando de Souza Pezão

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia, Inovação e Desenvolvimento Social

Gabriell Carvalho Neves Franco dos Santos

Instituições Consorciadas

CEFET/RJ - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca

Diretor-geral: Carlos Henrique Figueiredo Alves

FAETEC - Fundação de Apoio à Escola Técnica

Presidente: Alexandre Sérgio Alves Vieira

IFF - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense

Reitor: Jefferson Manhães de Azevedo

UENF - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Reitor: Luis César Passoni

UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Reitor: Ruy Garcia Marques

UFF - Universidade Federal Fluminense

Reitor: Sidney Luiz de Matos Mello

UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Reitor: Roberto Leher

UFRRJ - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Reitor: Ricardo Luiz Louro Berbara

UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Reitor: Luiz Pedro San Gil Jutuca

Sumário

Aula 1 – Variáveis aleatórias contínuas.....	7
<i>Ana Maria Lima</i>	
Aula 2 – A distribuição normal – 1ª parte.....	37
<i>Ana Maria Lima</i>	
Aula 3 – A distribuição normal – 2ª parte.....	55
<i>Ana Maria Lima</i>	
Aula 4 – Inferência Estatística – conceitos básicos	91
<i>Ana Maria Lima</i>	
Aula 5 – Distribuição amostral da média.....	117
<i>Ana Maria Lima</i>	
Aula 6 – Distribuição amostral da proporção	139
<i>Ana Maria Lima</i>	
Aula 7 – Intervalos de confiança	155
<i>Ana Maria Lima</i>	
Aula 8 – Intervalos de confiança para proporção – amostras grandes	175
<i>Ana Maria Lima</i>	
Aula 9 – Intervalo de confiança para a média da $N(\mu; \sigma^2)$, σ^2 desconhecida.....	189
<i>Ana Maria Lima</i>	
Aula 10 – Testes de hipóteses	211
<i>Ana Maria Lima</i>	
Aula 11 – Teste de hipóteses sobre a média de uma população normal - σ^2 conhecida.....	239
<i>Ana Maria Lima</i>	
Aula 12 – Testes de hipóteses sobre proporções – amostras grandes	265
<i>Ana Maria Lima</i>	
Aula 13 – Testes de hipóteses sobre a média de uma população normal - σ^2 desconhecida	275
<i>Ana Maria Lima</i>	
Aula 14 – Resumo da Inferência Estatística – médias e proporções	289
<i>Ana Maria Lima</i>	
Bibliografia	297

Aula 1

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS



Objetivos

Nesta aula, iremos estudar as variáveis aleatórias contínuas, e você aprenderá os seguintes conceitos:

- 1 função de densidade de probabilidade;
- 2 função de distribuição acumulada de variáveis aleatórias contínuas;
- 3 esperança e variância de variáveis aleatórias contínuas;
- 4 a distribuição uniforme contínua.

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

NOÇÕES BÁSICAS

No estudo das distribuições de frequência para variáveis quantitativas contínuas, vimos que, para resumir os dados, era necessário agrupar os valores em classes. O histograma e o polígono de frequências eram os gráficos apropriados para representar tal distribuição.

Para apresentar os conceitos básicos relativos às variáveis aleatórias contínuas, vamos considerar os histogramas e respectivos polígonos de frequência apresentados na **Figura 1.1**. Esses gráficos representam as distribuições de frequências de um mesmo conjunto de dados, cada uma com um número de classes diferente – no histograma superior, há menos classes do que no histograma inferior.

Suponhamos, também, que as áreas de cada retângulo sejam iguais às frequências relativas das respectivas classes (essa é a definição mais precisa de um histograma). Pelos resultados vistos anteriormente, sabemos que a soma das áreas dos retângulos é 1 (as frequências relativas devem somar 1 ou 100%) e que cada frequência relativa é uma aproximação para a probabilidade de um elemento pertencer a determinada classe.

Analisando atentamente os dois gráficos, podemos ver o seguinte: à medida que aumentamos o número de classes, diminui a diferença entre a área total dos retângulos e a área abaixo do polígono de frequência.

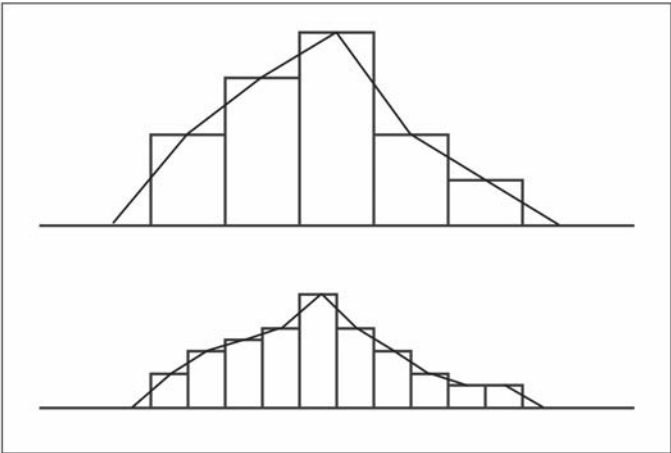


Figura 1.1: Histogramas e respectivos polígonos de frequência.

A divisão em classes se fez pelo simples motivo de que uma variável contínua poder assumir infinitos (não-enumeráveis) valores. Faz sentido, então, pensarmos em reduzir, cada vez mais, o comprimento de classe δ , até a situação limite em que $\delta \rightarrow 0$. Nessa situação limite, o polígono de frequências se transforma em uma curva na parte positiva (ou não-negativa) do eixo vertical, tal que a área sob ela é igual a 1. Essa curva será chamada curva de densidade de probabilidade.

Considere, agora, a **Figura 1.2**, em que é apresentado o histograma superior da figura anterior, mas agora ilustramos um fato visto anteriormente: para estimar a frequência de valores da distribuição entre os pontos a e b , podemos usar a área dos retângulos sombreados de cinza-claro.

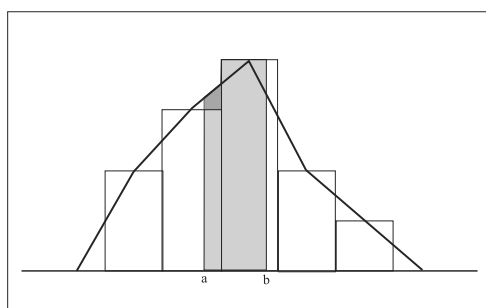


Figura 1.2: Cálculo da frequência entre dois pontos a e b .

Conforme ilustrado na **Figura 1.3**, a diferença entre essa área e a área sob o polígono de frequências tende a diminuir à medida que se aumenta o número de classes. Essa diferença é a parte sombreada de cinza mais escuro. Isso nos permite concluir o seguinte: no limite, quando $\delta \rightarrow 0$, podemos estimar a probabilidade de a variável de interesse estar entre dois valores A e B pela área sob a curva de densidade de probabilidade, delimitada pelos pontos A e B .

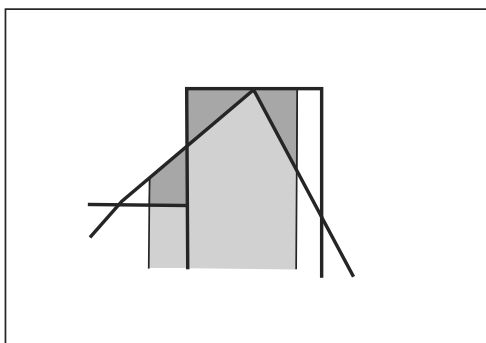


Figura 1.3: Diferença entre as áreas dos retângulos e a área sob o polígono de frequência.

VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA

Embora já visto anteriormente, voltamos a apresentar o conceito de variável aleatória, por ser esse um dos conceitos mais importantes deste curso.

Definição 1.1.

Uma **variável aleatória** é uma função real (isto é, que assume valores em \mathbb{R}) definida no espaço amostral Ω de um experimento aleatório. Dito de outra forma, uma variável aleatória é uma função que associa a cada evento de Ω um número real.

Já estudamos também as variáveis aleatórias discretas e agora vamos introduzir as variáveis aleatórias contínuas e, para isso, apresentamos novamente esses conceitos.

Definição 1.2.

Uma variável aleatória é **discreta** se sua imagem (ou conjunto de valores que ela assume) for um conjunto finito ou enumerável. Se a imagem for um conjunto não-enumerável, dizemos que a variável aleatória é **contínua**.

FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE

Os valores de uma v.a.(variável aleatória) contínua são definidos a partir do espaço amostral de um experimento aleatório. Sendo assim, é natural o interesse na probabilidade de obtenção de diferentes valores dessa variável. O comportamento probabilístico de uma variável aleatória contínua será descrito pela sua *função de densidade de probabilidade*.

Definição 1.3.

Uma **função de densidade de probabilidade** é uma função $f(x)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f(x) \geq 0$
2. A área total sob o gráfico de $f(x)$ tem de ser igual a 1.

Dada uma função $f(x)$ satisfazendo as propriedades acima, então $f(x)$ representa alguma variável aleatória contínua X , de modo que $P(a \leq X \leq b)$ é a área sob a curva limitada pelos pontos a e b (veja a **Figura 1.4**).

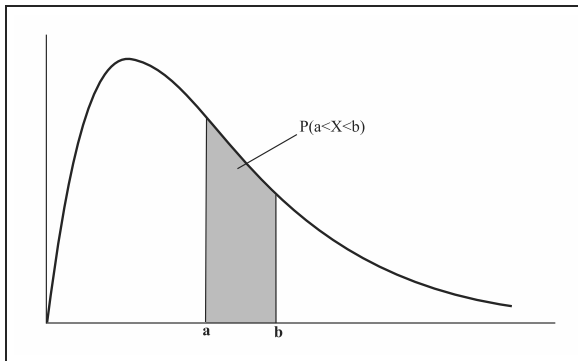


Figura 1.4: Probabilidade como área.

A definição anterior usa argumentos geométricos; no entanto, uma definição mais precisa envolve o conceito de *integral* de uma função de uma variável. Apresentamos a seguir essa definição, mas, neste curso, usaremos basicamente a interpretação geométrica da integral, que está associada à área sob uma curva.

Definição 1.4.

Uma **função de densidade de probabilidade** é uma função $f(x)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int f(x)dx = 1$.

Dada uma função $f(x)$ satisfazendo as propriedades acima, então $f(x)$ representa alguma variável aleatória contínua X , de modo que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Para deixar clara a relação entre a função de densidade de probabilidade e a respectiva v.a. X , usaremos a notação $f_X(x)$. Por questão de simplicidade, também abreviaremos a expressão função de densidade de probabilidade por fdp, devendo ficar claro no contexto se é função de distribuição de probabilidade – v.a. discreta – ou função de densidade de probabilidade – v.a. contínua.

Uma primeira observação importante que resulta da interpretação geométrica de probabilidade como área sob a curva de densidade de probabilidade é a seguinte: se X é uma v.a. contínua, então a probabilidade do evento $X = a$ é zero, ou seja, a probabilidade de X ser exatamente igual a um valor específico é nula. Isso pode ser visto na **Figura 1.4**: o evento $X = a$ corresponde a um segmento de reta, e tal segmento tem área nula. Como consequência, temos as seguintes igualdades:

$$\Pr(a \leq X \leq b) = \Pr(a \leq X < b) = \Pr(a < X \leq b) = \Pr(a < X < b)$$

FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

Da mesma forma que a função de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta, a função de densidade de probabilidade nos dá toda a informação sobre a v.a. X , ou seja, a partir da fdp, podemos calcular qualquer probabilidade associada à v.a. X . Também como no caso discreto, podemos calcular probabilidades associadas a uma v.a. contínua X a partir da *função de distribuição acumulada*.

Definição 1.5.

Dada uma variável aleatória (discreta) X , a **função de distribuição acumulada** de X é definida por

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

A definição é a mesma vista para o caso discreto; a diferença é que, para variáveis contínuas, a função de distribuição acumulada é uma função contínua, sem saltos. Veja a **Figura 1.5** para um exemplo.

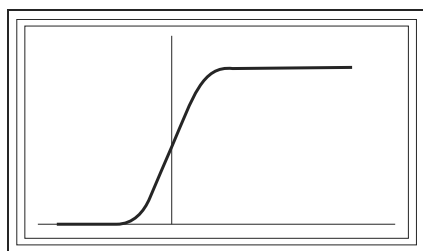


Figura 1.5: Exemplo de função de distribuição acumulada de uma v.a. contínua.

Como no caso discreto, valem as seguintes propriedades para a função de distribuição acumulada (fda) de uma v.a. contínua:

$$0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad (1.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1 \quad (1.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad (1.4)$$

$$a < b \Rightarrow F_X(a) \leq F_X(b) \quad (1.5)$$

Da interpretação de probabilidade como área, resulta que $F_X(x)$ é a área à esquerda de x sob a curva de densidade f_X . Veja a **Figura 1.6**:

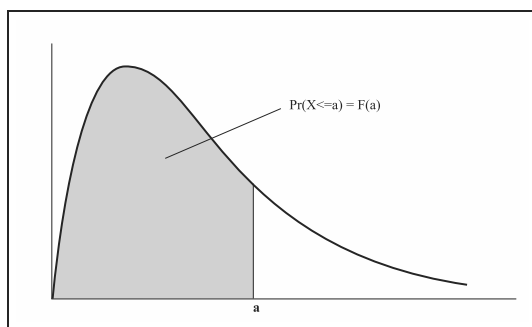


Figura 1.6: Função de distribuição acumulada - cálculo a partir da área sob a curva de densidade.

Existe uma relação entre a função de densidade de probabilidade e a função de distribuição acumulada, que é resultante do Teorema Fundamental do Cálculo. Essa relação será dada aqui para fins de completude das definições, mas não será cobrado do aluno tal conhecimento, uma vez que os conceitos de integral e derivada podem ainda não ter sido devidamente assimilados.

Por definição, temos o seguinte resultado:

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du,$$

e do Teorema Fundamental do Cálculo resulta que

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x),$$

isto é, a função de densidade de probabilidade é a *derivada* da função de distribuição acumulada.

ESPERANÇA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

Nas distribuições de frequências agrupadas em classes de variáveis quantitativas contínuas, vimos que a média e a variância da distribuição, medidas de centro e de dispersão, respectivamente, podiam ser calculadas como

$$\bar{x} = \sum f_i x_i$$

$$\sigma^2 = \sum f_i (x_i - \bar{x})^2$$

onde f_i era a frequência relativa da classe i e x_i era o ponto médio da classe i . Continuando com a ideia inicial da aula de tomar classes de comprimento cada vez menor, isto é, fazendo $\delta \rightarrow 0$, chegamos às seguintes definições de esperança e variância de uma variável aleatória contínua.

Definição 1.6.

Seja X uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade f_X . A **esperança** (ou **média** ou **valor esperado**) de X é definida como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

e a **variância** de X é definida como

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f_X(x) dx$$

O **desvio padrão** é definido como

$$DP(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Como já dito antes, não entraremos em detalhes de cálculo dessas fórmulas; nosso enfoque será na interpretação da média e da variância como medidas de centro e de dispersão. Para algumas distribuições específicas, apresentaremos os valores de $E(X)$ e $Var(X)$, mostrando a sua influência sobre a distribuição.

As mesmas propriedades vistas para variáveis aleatórias discretas continuam valendo no caso contínuo:

Esperança	Variância	Desvio Padrão
$E(a) = a$	$Var(a) = 0$	$DP(a) = 0$
$E(X + a) = E(X) + a$	$Var(X + a) = Var(X)$	$DP(X + a) = DP(X)$
$E(bX) = bE(X)$	$Var(bX) = b^2Var(X)$	$DP(bX) = b DP(X)$
$x_{\min} \leq E(X) \leq x_{\max}$	$Var(X) \geq 0$	$DP(X) \geq 0$

Se interpretamos a função de densidade de probabilidade de X como uma distribuição de massa na reta real, então $E(X)$ é o centro de massa desta distribuição. Essa interpretação nos permite concluir, por exemplo, que se f_X é simétrica, então $E(X)$ é o valor central, que define o eixo de simetria.

Exemplo 1.1.

Distribuição uniforme

Considere a função f_X apresentada na **Figura 1.7**:

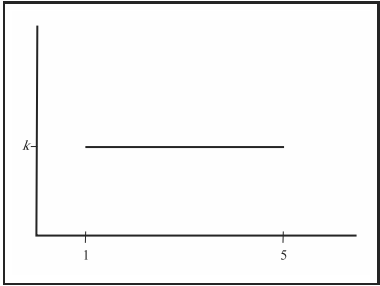


Figura 1.7: Função de densidade de probabilidade.

1. Encontre o valor de k para que f_X seja uma função de densidade de probabilidade de uma v.a. X .
2. Determine a equação que define f_X .
3. Calcule $\Pr(2 \leq X \leq 3)$.
4. Encontre $E(X)$.

5. Determine o valor de k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,6$.
6. Encontre a função de distribuição acumulada de X .

Solução:

1. Como a área tem que ser 1, temos de ter

$$1 = (5 - 1) \times k \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

2. Temos que

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

3. A probabilidade pedida é a área sombreada na **Figura 1.8**. Logo,

$$\Pr(2 \leq X \leq 3) = (3 - 2) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

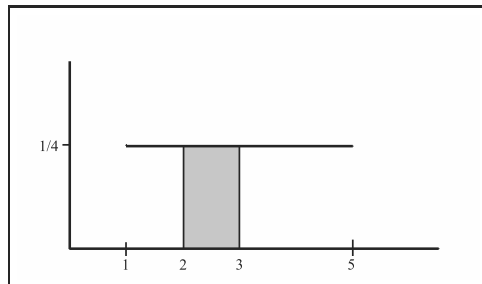


Figura 1.8: Cálculo de $\Pr(2 \leq X \leq 3)$.

4. Por argumentos de simetria, a esperança é o ponto médio, ou seja, $E(X) = 3$.
5. O primeiro ponto a observar é o seguinte: o ponto $x = 3$ divide a área ao meio, ou seja, $x = 3$ é a mediana da distribuição. Como temos que $\Pr(X \leq k) = 0,6$, resulta que k tem de ser maior que 3, uma vez que abaixo de 3 temos área igual a 0,5. Veja a **Figura 1.9**:

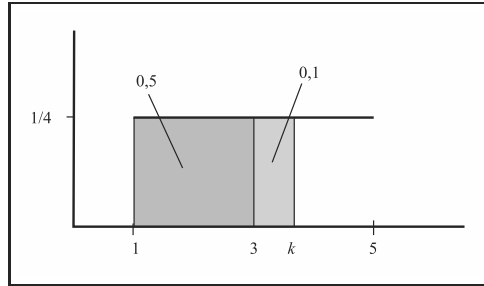


Figura 1.9: Cálculo de k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,6$.

Temos

$$0,1 = (k - 3) \times \frac{1}{4} \Rightarrow k = 3,4$$

6. Para $x < 1$, temos que $F_X(x) = 0$ e para $x > 5$, temos que $F_X(x) = 1$. Para $1 \leq x \leq 5$, $F_X(x)$ é a área de um retângulo de base $(x - 1)$ e altura $1/4$ (veja a **Figura 1.10**). Logo,

$$F_X(x) = \frac{x - 1}{4}$$

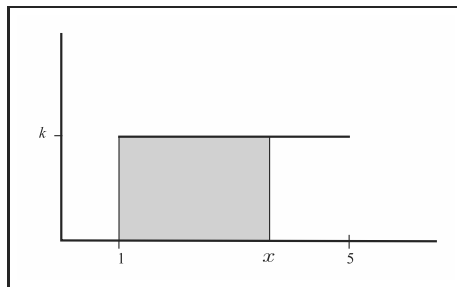


Figura 1.10: Cálculo de F_X .

e a expressão completa de F_X é

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ \frac{x-1}{4} & \text{se } 1 \leq x \leq 5 \\ 1 & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

cujo gráfico está ilustrado na **Figura 1.11**.

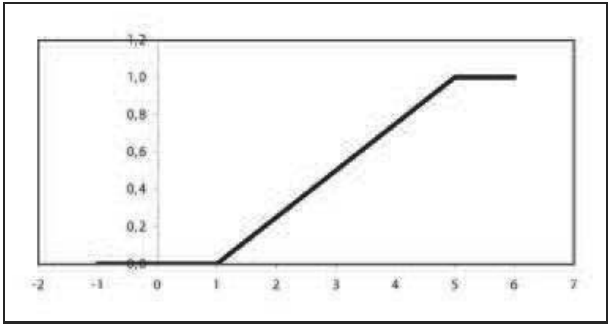


Figura 1.11: Função de distribuição acumulada.

Exemplo 1.2.

Considere a função f_X apresentada na Figura 1.12:

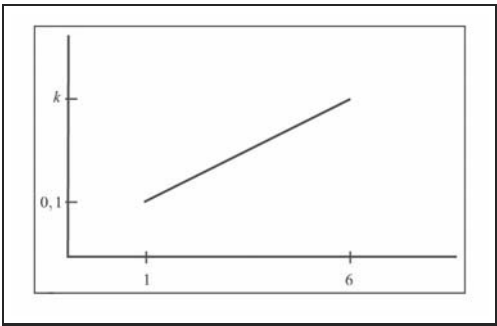


Figura 1.12: Função de densidade de probabilidade.

1. Encontre o valor de k para que f_X seja uma função de densidade de probabilidade de uma v.a. X .
2. Determine a equação que define f_X .
3. Calcule $\Pr(2 \leq X \leq 3)$.
4. Encontre a função de distribuição acumulada de X .
5. Determine o valor de k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,6$.

Solução:

- Podemos decompor a área sob a reta como a área de um triângulo e a área de um retângulo (na verdade, o resultado é a área de um trapézio - veja a **Figura 1.13**). Então, temos de ter

$$\begin{aligned} 1 &= (6-1) \times 0,1 + \frac{1}{2}(6-1) \times (k-0,1) \Rightarrow \\ 0,5 &= \frac{5}{2}(k-0,1) \Rightarrow k = 0,3 \end{aligned}$$

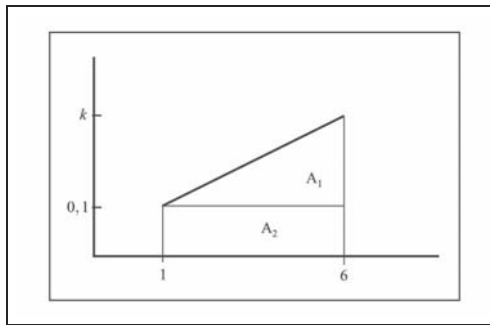


Figura 1.13: Cálculo de k .

- f_X é uma função linear e a reta passa pelos pontos $(1;0,1)$ e $(6;0,3)$, o que nos dá o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 0,1 = a + b \\ 0,3 = a + 6b \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos

$$0,3 - 0,1 = 5b \Rightarrow b = 0,04$$

Substituindo este valor na primeira equação, obtemos que $a = 0,1 - 0,04 = 0,06$. Logo,

$$f_X(x) = \begin{cases} 0,06 + 0,04x & \text{se } 1 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Veja a **Figura 1.14**, em que a área sombreada corresponde à probabilidade pedida. Vemos que essa área é a área de um trapézio de altura $3 - 2 = 1$, base maior igual a

$$f_X(3) = 0,06 + 0,04 \times 3 = 0,18$$

e base menor igual a

$$f(2) = 0,06 + 0,04 \times 2 = 0,14.$$

Logo,

$$\Pr(2 \leq X \leq 3) = \frac{0,18 + 0,14}{2} \times 1 = 0,16$$

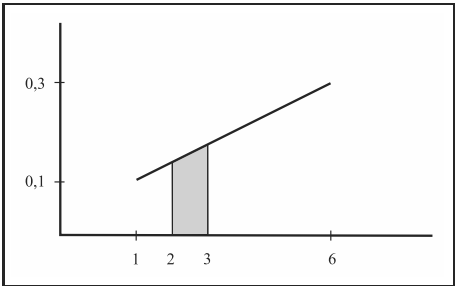


Figura 1.14: Cálculo de $\Pr(2 \leq X \leq 3)$.

4. Veja a **Figura 1.15**; nela podemos ver que, para $x \in [1, 5]$, $F_X(k)$ é a área de um trapézio de altura $k - 1$; base maior igual a $f_X(k)$ e base menor igual a $f_X(1)$. Logo,

$$\begin{aligned} F_X(k) &= \frac{(0,06 + 0,04k) + 0,1}{2} \times (k - 1) \\ &= (0,08 + 0,02k)(k - 1) \end{aligned}$$

ou seja,

$$F_X(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k < 1 \\ 0,02k^2 + 0,06k - 0,08 & \text{se } 1 \leq k \leq 6 \\ 1 & \text{se } k > 6 \end{cases}$$

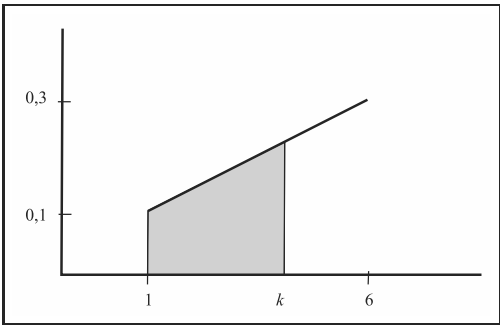


Figura 1.15: Função de distribuição acumulada.

5. Queremos determinar k tal que $F_X(k) = 0,6$. Logo,

$$\begin{aligned} 0,6 &= 0,02k^2 + 0,06k - 0,08 \Rightarrow \\ 0,02k^2 + 0,06k - 0,68 &= 0 \Rightarrow \\ k^2 + 3k - 34 &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$k = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \times 34}}{2} = 4,5208$$

A raiz que fornece resultado dentro do domínio de variação de X é $k = 4,5208$

Exemplo 1.3.

Distribuição triangular

Considere a função f_X apresentada na **Figura 1.16**:

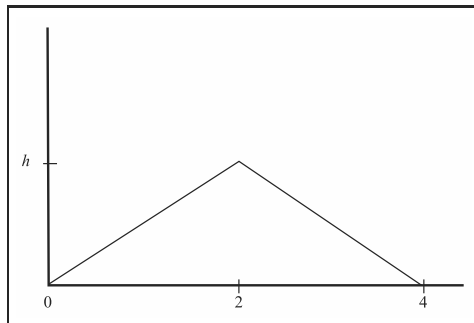


Figura 1.16: Função de densidade de probabilidade.

1. Encontre o valor de h para que f_X seja uma função de densidade de probabilidade de uma v.a. X (note que o triângulo é isósceles).
2. Determine a equação que define f_X .
3. Calcule $\Pr(1 \leq X \leq 3)$.
4. Encontre $E(X)$.
5. Determine o valor de k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,6$.
6. Encontre a função de distribuição acumulada de X .

Solução:

1. Como a área tem de ser 1, temos de ter

$$1 = \frac{1}{2} \times (4 - 0) \times h \Rightarrow h = \frac{1}{2}$$

2. A função f_X é dada por 2 equações de reta. A primeira é uma reta de inclinação positiva que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(2, \frac{1}{2})$. A segunda é uma reta de inclinação negativa, que passa pelos pontos $(2, \frac{1}{2})$ e $(4, 0)$.

Para achar a equação de cada uma das retas, basta substituir as coordenadas dos dois pontos e resolver o sistema.

Para a primeira reta, temos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} 0 &= a + b \times 0 \\ \frac{1}{2} &= a + b \times 2 \end{aligned}$$

Da primeira equação resulta que $a = 0$ (é o ponto onde a reta cruza o eixo y) e substituindo esse valor de a na segunda equação, resulta que $b = \frac{1}{4}$.

Para a segunda reta, temos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} 0 &= a + b \times 4 \\ \frac{1}{2} &= a + b \times 2 \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, resulta:

$$0 - \frac{1}{2} = (a - a) + (4b - 2b) \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

Substituindo na primeira equação, encontramos que $a = 1$.

Combinando essas duas equações, obtemos a seguinte expressão para f_X :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 1 - \frac{x}{4} & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 4 \end{cases}$$

3. A probabilidade pedida é a área sombreada em cinza-escuro na **Figura 1.17**.

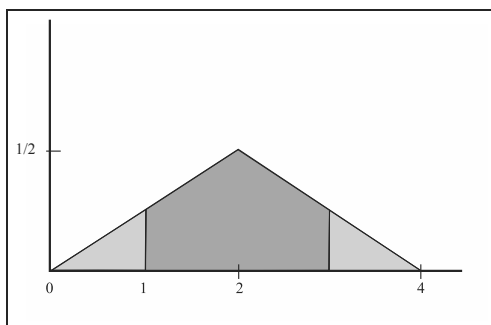


Figura 1.17: Cálculo de $\Pr(1 \leq X \leq 3)$.

Os dois triângulos sombreados de cinza-claro têm a mesma área, por causa da simetria. Assim, podemos calcular a probabilidade usando a regra do complementar, uma vez que a área total é 1.

A altura dos dois triângulos é $\frac{1}{4}$; basta substituir o valor de $x = 1$ na primeira equação e o valor de $x = 3$ na segunda equação.

Logo, a área de cada um dos triângulos é $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ e, portanto,

$$\Pr(1 \leq X \leq 3) = 1 - 2 \times \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

4. Como a função é simétrica, resulta que $E(X) = 2$.
5. O primeiro ponto a observar é o seguinte: o ponto $x = 2$ divide a área ao meio, ou seja, $x = 2$ é a mediana da distribuição. Como temos que $\Pr(X \leq k) = 0,6$, resulta que k tem de ser maior que 2. Veja a **Figura 1.18**:

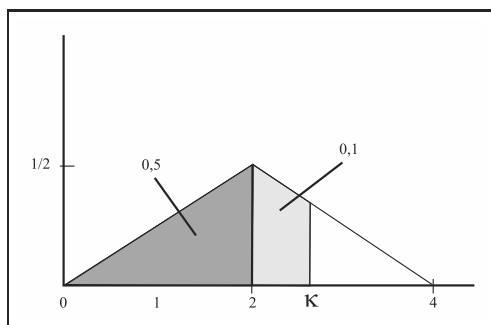


Figura 1.18: Cálculo de k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,6$.

Novamente, vamos usar a regra do complementar: como a área (probabilidade) abaixo de k tem de ser 0,6, resulta que a área (probabilidade) acima de k tem de ser 0,4; então, a área do triângulo superior tem de ser 0,4.

A altura desse triângulo é obtida substituindo-se o valor $x = k$ na equação da segunda reta, o que nos dá $h = 1 - \frac{k}{4}$. Substituindo na fórmula que dá a área de um triângulo, resulta:

$$0,4 = \frac{1}{2} \times (4 - k) \times \left(1 - \frac{k}{4}\right) \Rightarrow$$

$$0,4 = \frac{1}{2} \left(4 - k - k + \frac{k^2}{4}\right) \Rightarrow$$

$$0,8 = \frac{16 - 8k + k^2}{4} \Rightarrow$$

$$3,2 = k^2 - 8k + 16 \Rightarrow k^2 - 8k + 12,8 = 0 \Rightarrow$$

$$k = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 12,8}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{12,8}}{2}$$

A raiz $\frac{8 + \sqrt{12,8}}{2}$ está fora do domínio de definição da função; logo, essa solução não serve. A solução para o problema, então, é:

$$k = \frac{8 - \sqrt{12,8}}{2} = 2,2111$$

6. Assim como a fdp, a fda será definida por 2 equações: uma para os valores de x no intervalo $[0, 2)$ e outra para valores de x no intervalo $[2, 4]$. Para $x \in [0, 2)$, temos que $F_X(x)$ é a área do retângulo sombreado na **Figura 1.19**. Logo,

$$F_X(x) = \frac{1}{2}(x - 0) \times \frac{x}{4} \quad x \in [0, 2)$$

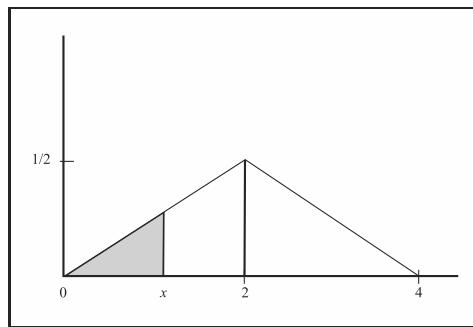


Figura 1.19: Cálculo de $F_X(x)$ para $0 \leq x \leq 2$.

Para $x \in [2, 4]$, $F_X(x)$ é a área sombreada na **Figura 1.20**, que pode ser calculada subtraindo-se de 1 (área total) a área do triângulo superior. Logo,

$$F_X(x) = 1 - \frac{1}{2}(4 - x) \left(1 - \frac{x}{4}\right).$$

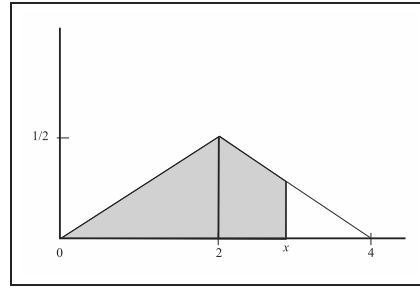


Figura 1.20: Cálculo de $F_X(x)$ para $2 \leq x \leq 4$.

Combinando os resultados obtidos, resulta a seguinte expressão para F_X :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{8}x^2 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 1 - \frac{1}{8}(4-x)^2 & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

Veja a **Figura 1.21**; para $0 \leq x < 2$, o gráfico de F_X é uma parábola côncava para cima; para $2 \leq x \leq 4$, o gráfico de F_X é uma parábola côncava para baixo.

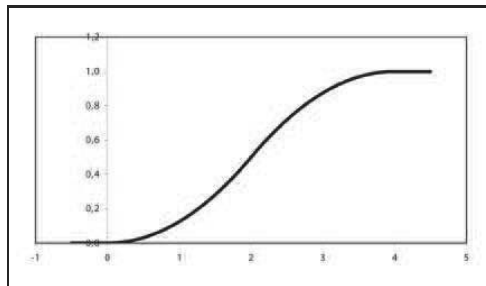


Figura 1.21: Função de distribuição acumulada.

DISTRIBUIÇÃO UNIFORME

FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE

Uma v.a. contínua X tem distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$ (finito) se sua função de densidade é constante nesse intervalo, ou seja, temos de ter

$$f(x) = k \quad \forall x \in [a, b].$$

Então, o gráfico da fdp. de X é como o ilustrado na **Figura 1.22**.

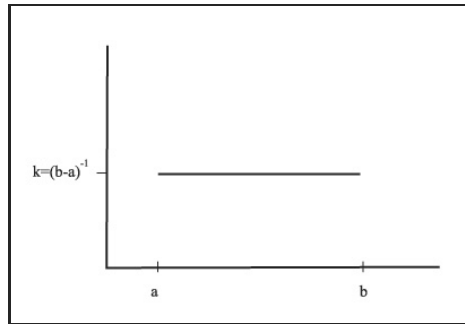


Figura 1.22: Densidade da distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$.

Para que tal função seja uma fdp, temos de ter $k > 0$ e a área do retângulo tem de ser 1, ou seja,

$$(b - a) \times k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{b - a}$$

Logo, a função de densidade de uma v.a. uniforme no intervalo $[a, b]$ é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } x \in [a, b] \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.6)$$

Os valores a e b são chamados *parâmetros* da distribuição uniforme; note que ambos têm de ser finitos para que a integral seja igual a 1. Quando $a = 0$ e $b = 1$ temos a uniforme padrão, denotada por $\mathcal{U}(0, 1)$.

FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

Por definição, temos que

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x)$$

e essa probabilidade é dada pela área sob a curva de densidade à esquerda de x , conforme ilustrado na **Figura 1.23**

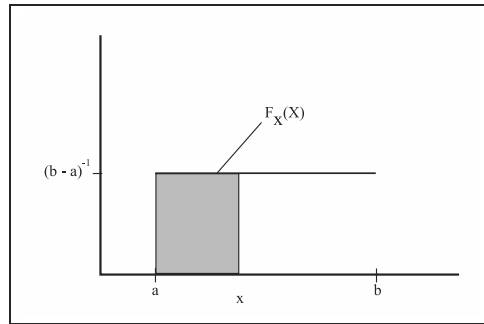


Figura 1.23: Cálculo da fda da densidade uniforme.

Essa área é a área de um retângulo com base $(x - a)$ e altura $\frac{1}{b-a}$. Logo,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases} \quad (1.7)$$

O gráfico dessa fda é dado na **Figura 1.24**.

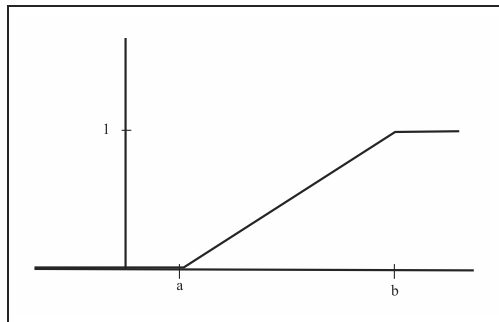


Figura 1.24: Função de distribuição acumulada da distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$.

ESPERANÇA E VARIÂNCIA

Das propriedades da esperança e das características da densidade uniforme, sabemos que $E(X)$ é o ponto médio do intervalo $[a, b]$:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

O cálculo da variância requer cálculo integral, e pode-se mostrar

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Resumo

Nesta aula você iniciou o estudo sobre variáveis aleatórias contínuas, aprendendo os seguintes conceitos:

- **Função de densidade de probabilidade** é uma função $f(x)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- $f(x) \geq 0$
- a área total sob o gráfico de $f(x)$ tem que ser igual a 1.

- Dada uma função de densidade $f(x)$ referente a uma v.a. X , então $P(a \leq X \leq b)$ é a área sob a curva limitada pelos pontos a e b .

- A **função de distribuição acumulada** é definida como

$$F(x) = \Pr(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- A **densidade uniforme** no intervalo (a, b) é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } x \in [a, b] \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{a+b}{2} \\ Var(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

Exercício 1.1.

Considere a seguinte função:

$$g(x) = \begin{cases} K(2-x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

1. Esboce o gráfico de $g(x)$.
2. Encontre o valor de K para que $g(x)$ seja uma função de densidade de probabilidade.
3. Encontre a função de distribuição acumulada.
4. Calcule os quartis da distribuição.

Exercício 1.2.

A demanda diária de arroz num supermercado, em centenas de quilos, é uma v.a. com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -\frac{x}{3} + 1 & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$$

1. Qual é a probabilidade de se vender mais de 150kg num dia escolhido ao acaso?
2. Qual a quantidade de arroz que deve ser deixada à disposição dos clientes diariamente para que não falte arroz em 95% dos dias?

Exercício 1.3.

Seja X uma v.a. com função de densidade de probabilidade dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule $\Pr\left(X \leq \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)$.

Exercício 1.4.

Latas de coca-cola são enchidas num processo automático segundo uma distribuição uniforme no intervalo (em ml) $[345, 355]$.

1. Qual é a probabilidade de uma lata conter mais de 353 ml?
2. Qual é a probabilidade de uma lata conter menos de 346 ml?
3. Qualquer lata com volume 4 ml abaixo da média pode gerar reclamação do consumidor e com volume 4 ml acima da média pode transbordar no momento de abertura, devido à pressão interna. Qual é a proporção de latas problemáticas?

Exercício 1.5.

Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$, com $a < b$. Se $E(X) = 7,5$ e $\text{Var}(X) = 6,75$, determine os valores de a e b .

SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS**Exercício 1.1.**

1. Veja a **Figura 1.25**. Note que $g(0) = 2K$ e $g(1) = K$ e $g(x)$ é uma função linear.

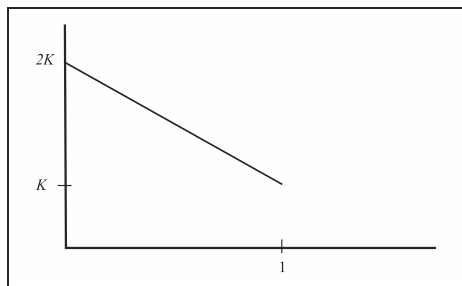


Figura 1.25: Gráfico de $g(x)$.

2. A área total, que deve ser igual a 1, é a área de um trapézio com altura $h = 1$, base maior igual a $2K$ e base menor igual a K . Logo,

$$1 = \frac{K + 2K}{2} \times 1 \Rightarrow K = \frac{2}{3}$$

3. Para cada $x \in [0, 1]$, $F_X(x)$ é a área de um trapézio de altura x , base menor igual a $f_X(x) = \frac{2}{3}(2-x)$ e base maior igual a $\frac{4}{3}$. Veja a **Figura 1.26**. Logo,

$$F_X(x) = \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}(2-x)}{2}x = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(2-x)x \quad 0 \leq x \leq 1$$

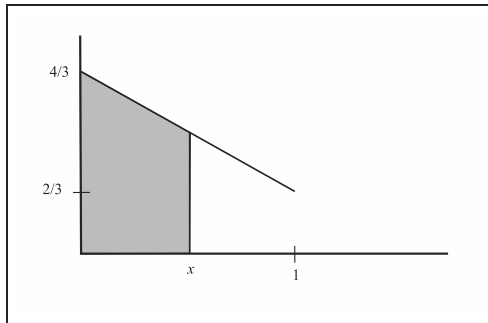


Figura 1.26: Cálculo da fda de X .

Resulta que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

4. Sejam Q_1 , Q_2 e Q_3 os três quartis:

$$\begin{aligned} F_X(Q_1) &= 0,25 \Rightarrow \frac{4}{3}Q_1 - \frac{1}{3}Q_1^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow 16Q_1 - 4Q_1^2 = 3 \Rightarrow \\ 4Q_1^2 - 16Q_1 + 3 &= 0 \Rightarrow Q_1^2 - 4Q_1 + 0,75 = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$Q_1 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 0,75}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{13}}{2}$$

A raiz que fornece solução no domínio de X é:

$$Q_1 = \frac{4 - \sqrt{13}}{2} = 0,19722$$

$$F_X(Q_2) = 0,5 \Rightarrow \frac{4}{3}Q_2 - \frac{1}{3}Q_2^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 8Q_2 - 2Q_2^2 = 3 \Rightarrow$$

$$2Q_2^2 - 8Q_2 + 3 = 0 \Rightarrow Q_2^2 - 4Q_2 + 1,5 = 0 \Rightarrow$$

$$Q_2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1,5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2}$$

A raiz que fornece solução no domínio de X é:

$$Q_2 = \frac{4 - \sqrt{10}}{2} = 0,41886$$

$$F_X(Q_3) = 0,75 \Rightarrow \frac{4}{3}Q_3 - \frac{1}{3}Q_3^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow 16Q_3 - 4Q_3^2 = 9 \Rightarrow$$

$$4Q_3^2 - 16Q_3 + 9 = 0 \Rightarrow Q_3^2 - 4Q_3 + \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$Q_3 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 2,25}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{2}$$

A raiz que fornece solução no domínio de X é:

$$Q_3 = \frac{4 - \sqrt{7}}{2} = 0,67712$$

Exercício 1.2.

Seja X a v.a. que representa a demanda diária de arroz, em centenas de quilos.

1. Na **Figura 1.27**, temos o gráfico da fdp de X , onde a área do triângulo sombreado representa $\Pr(X \geq 1,5)$. Nesse triângulo, a base é $3 - 1,5 = 1,5$, e a altura é $f(1,5) = \frac{-1,5}{3} + 1$. Logo,

$$\Pr(X \geq 1,5) = \frac{1}{2} \times 1,5 \times 0,5 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

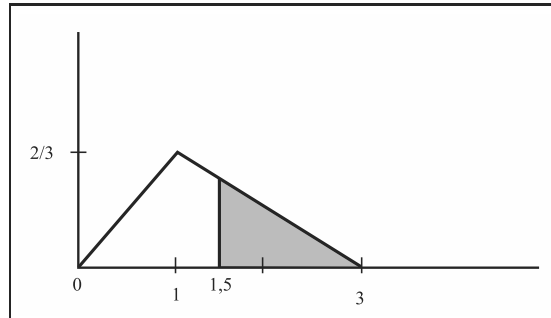


Figura 1.27: Gráfico da fdp de X .

2. Seja k o valor a estocar. Para que a demanda seja atendida, é necessário que a quantidade demandada seja menor que a quantidade em estoque. Logo, queremos encontrar o valor de k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,95$.

Como $\Pr(X \leq 1) = \frac{1}{3}$, k tem de ser maior que 1, ou seja, k está no triângulo superior. Veja a **Figura 1.28**.

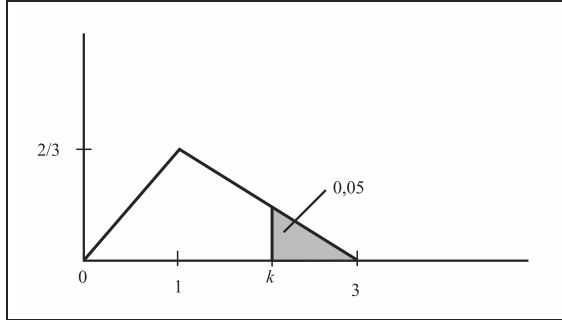


Figura 1.28: Cálculo do tamanho do estoque.

Mas $\Pr(X \leq k) = 0,95$ é equivalente a $\Pr(X > k) = 0,05$. Logo,

$$\begin{aligned} 0,05 &= \frac{1}{2}(3-k) \left(-\frac{k}{3} + 1 \right) \Rightarrow \\ 0,1 &= (3-k) \left(\frac{-k+3}{3} \right) \Rightarrow \\ 0,3 &= 9 - 6k + k^2 \Rightarrow \\ k^2 - 6k + 8,7 &= 0 \Rightarrow \\ k &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 8,7}}{2} \end{aligned}$$

A raiz que dá a solução dentro do domínio de X é:

$$k = \frac{6 - \sqrt{36 - 4 \times 8,7}}{2} = 2,45 \text{ centenas de quilos}$$

Exercício 1.3.

Sabemos que $\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$. Assim,

$$\begin{aligned} \Pr\left(X \leq \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right) &= \frac{\Pr\left[\left(X \leq \frac{1}{2}\right) \cap \left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)\right]}{\Pr\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)} \\ &= \frac{\Pr\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)}{\Pr\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)} \end{aligned}$$

Veja a **Figura 1.29**.

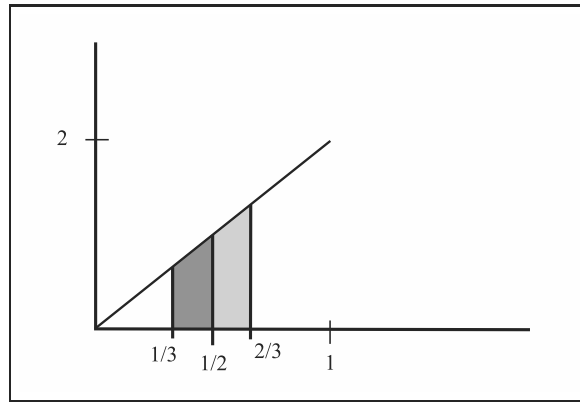


Figura 1.29: Áreas dos trapézios.

Ambos os termos referem-se a áreas de trapézios. O numerador refere-se à área do trapézio sombreado de cinza-escuro e o denominador refere-se ao trapézio correspondente a toda a área sombreada (cinza-claro e cinza-escuro).

O trapézio cinza-escuro tem altura $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, base maior igual a $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ e base menor igual a $f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

O trapézio sombreado completo tem altura $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, base maior igual a $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ e base menor igual a $f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Logo,

$$\Pr\left(X \leq \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{1+\frac{2}{3}}{2} \times \frac{1}{6}}{\frac{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{3} \times \frac{1}{6}}{2 \times \frac{1}{3}} = \frac{5}{12}$$

Exercício 1.4.

Seja X = “conteúdo da lata de coca-cola”. Então, $X \sim U[345, 355]$

1. Pede-se

$$\begin{aligned} \Pr(X > 353) &= 1 - \Pr(X \leq 353) = 1 - F_X(353) \\ &= 1 - \frac{353 - 345}{355 - 345} = 0,2 \end{aligned}$$

2. Pede-se

$$\begin{aligned}\Pr(X < 346) &= \Pr(X \leq 346) = F_X(346) \\ &= \frac{346 - 345}{355 - 345} = 0,1\end{aligned}$$

3. Pede-se

$$\begin{aligned}\Pr(350 - 4 < X < 350 + 4) &= \Pr(346 < X < 354) \\ &= \Pr(346 < X \leq 354) \\ &= \Pr(X \leq 354) - \Pr(X \leq 346) \\ &= \frac{354 - 345}{355 - 345} - \frac{346 - 345}{355 - 345} = 0,8\end{aligned}$$

Logo, a proporção de latas problemáticas é $1 - 0,8 = 0,2$, ou seja, 20% das latas são problemáticas. Note que essa é uma proporção bastante alta!

Exercício 1.5.

É dado que

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2} &= 7,5 \\ \frac{(b-a)^2}{12} &= 6,75\end{aligned}$$

Da primeira equação resulta que $a = 15 - b$. Substituindo na segunda equação:

$$\begin{aligned}\frac{(b - 15 + b)^2}{12} &= 6,75 \Rightarrow (2b - 15)^2 = 81 \Rightarrow \\ |2b - 15| &= 9 \Rightarrow 2b - 15 = \pm 9\end{aligned}$$

As soluções são $b = 12$ e $b = 3$. Mas $b = 3$ implica que $a = 12$; como $b > a$, essa não é uma solução possível. Assim, $a = 3$ e $b = 12$.

Aula 2

A DISTRIBUIÇÃO NORMAL – 1ª PARTE

Objetivos

Nesta aula, você estudará a distribuição normal, que é uma das mais importantes distribuições contínuas. Você verá a definição geral desta distribuição, mas nos concentraremos, nesse primeiro momento, na distribuição normal padrão, com ênfase no cálculo de probabilidades associadas a essa variável. Assim, você verá os seguintes tópicos nesta aula:

- 1 definição da distribuição normal;
- 2 média e variância da distribuição normal;
- 3 a distribuição normal padrão;
- 4 tabela da distribuição normal padrão.

FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE

Uma v.a. contínua X tem distribuição normal se sua função de densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right], \quad -\infty < x < \infty \quad (2.1)$$

Analisando essa expressão, podemos ver que ela está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e depende de dois parâmetros: μ e σ . Outras características importantes dessa função são as seguintes:

1. ela é simétrica em torno do ponto $x = \mu$;
2. o gráfico da função tem forma de sino;
3. quando $x \rightarrow \pm\infty$, $f_X(x) \rightarrow 0$;
4. o ponto $x = \mu$ é o ponto de máximo e nesse ponto, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$;
5. os pontos $x = \mu - \sigma$ e $x = \mu + \sigma$ são pontos de inflexão, ou seja, nesses pontos, a curva muda de concavidade. Para $x < \mu - \sigma$ ou $x > \mu + \sigma$, a função é côncava para cima e para $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$, a função é côncava para baixo.

Na **Figura 2.1** ilustram-se essas características da densidade normal.

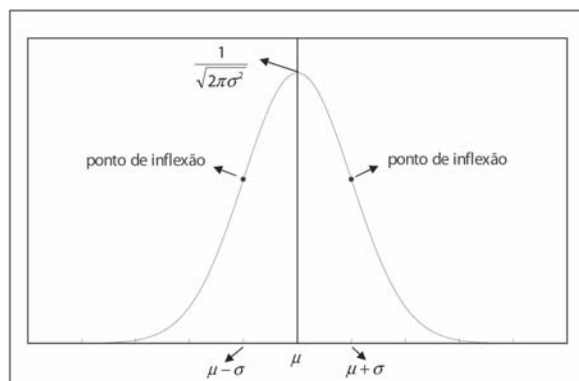


Figura 2.1: Ilustração das principais características da densidade normal.

Pode-se mostrar, usando técnicas de cálculo integral, que a área sob a curva de densidade normal é igual a 1 e, como a função exponencial é sempre não negativa, resulta que a função f_X dada na equação (2.1) realmente define uma função de densidade de probabilidade.

ESPERANÇA E VARIÂNCIA

Os parâmetros μ e σ da densidade normal definem a média e o desvio padrão da distribuição, respectivamente:

$$X \sim N(\mu; \sigma^2) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \mu \\ Var(X) = \sigma^2 \\ DP(X) = \sigma \end{cases}$$

Vamos usar a seguinte notação: indicaremos o fato de a v.a. X ter distribuição normal com média μ e variância σ^2 pela notação $X \sim N(\mu; \sigma^2)$. Na **Figura 2.2**, temos os gráficos das seguintes distribuições normais: $N(0; 1)$ e $N(2; 1)$, ou seja, duas distribuições normais com médias diferentes e variâncias iguais. Note que o efeito de mudar a média é simplesmente deslocar o gráfico, mudando o seu eixo de simetria.

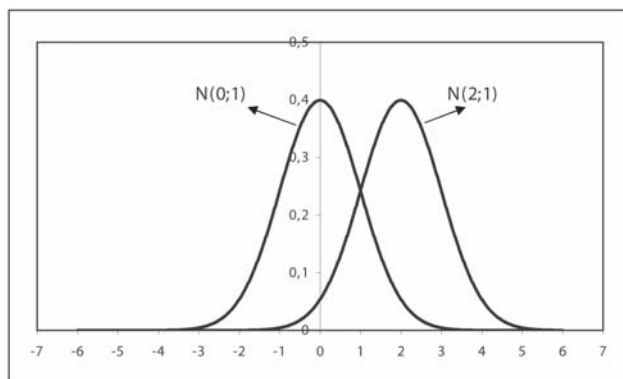


Figura 2.2: Distribuições normais com mesma variância e médias diferentes.

Na **Figura 2.3**, temos duas distribuições normais com a mesma média, mas com variâncias diferentes. Note que a distribuição continua em forma de sino, mas a dispersão muda – lembre-se de que variância e desvio padrão são medidas de dispersão. Como o máximo da função é $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$, quanto maior a variância, “mais baixa” é a curva; para compensar esse fato e continuar com área sob a curva igual a 1, a curva fica mais “espalhada”, ou seja, mais dispersa.

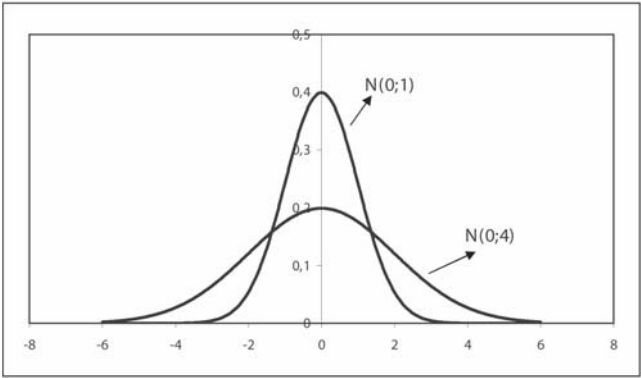


Figura 2.3: Distribuições normais com mesma média e variâncias diferentes.

FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

Como antes, a função de distribuição acumulada é $F(x) = \Pr(X \leq x)$. Na Figura 2.4 temos as respectivas fda para as densidades $N(0; 1)$, $N(2; 1)$ e $N(0; 4)$. Note que, pela simetria da curva em torno da média, qualquer que seja a densidade normal, $F(\mu) = 0,5$, ou seja, o eixo de simetria divide a área em duas partes iguais. No gráfico da fda, podemos ver que, para as densidades $N(0; 1)$ e $N(0; 4)$, $F(0) = 0,5$ e para a densidade $N(2; 1)$, $F(2) = 0,5$.

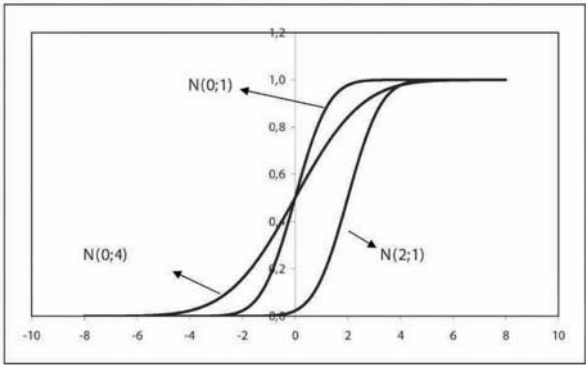


Figura 2.4: Função de distribuição acumulada de algumas densidades normais.

A DENSIDADE NORMAL PADRÃO

Quando $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, temos a densidade normal padrão, cuja fdp é usualmente representada pela letra grega ϕ :

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right), \quad -\infty < z < +\infty$$

É comum também representar uma variável aleatória com distribuição normal padronizada pela letra Z . Além de ser um caso especial, a densidade normal padrão tem papel importante no cálculo de probabilidades associadas às densidades normais, como veremos na próxima aula.

A TABELA DA NORMAL PADRÃO

Na última aula, você aprendeu que o cálculo de probabilidades associadas a variáveis aleatórias contínuas envolve cálculo de áreas sob a curva de densidade (mais precisamente, cálculo de integral da fdp). Isso, obviamente, continua valendo para a densidade normal. A diferença está no fato de que o cálculo de áreas sob a curva normal envolve métodos numéricos mais complexos e, para facilitar esses cálculos, podemos usar uma tabela em que alguns valores já se encontram calculados.

Este curso terá como base a **Tabela 2.1** apresentada na última página desta aula, embora muitos livros utilizem a tabela da distribuição acumulada dada na **Tabela 2.2**, que discutiremos no final desta aula.

A **Tabela 2.1** será usada para calcular probabilidades associadas a uma variável aleatória normal padrão Z . Assim, com essa tabela, poderemos calcular probabilidades do tipo $\Pr(Z > 1)$, $\Pr(Z \leq 3)$, $\Pr(-1 \leq Z \leq 2)$ etc.

Vamos analisar cuidadosamente esta tabela. A partir do cabeçalho e do gráfico na tabela, podemos ver que as entradas no corpo da tabela fornecem probabilidades do tipo $\Pr(0 \leq Z \leq z)$, ou seja, probabilidades de valores de Z pertencerem ao intervalo $[0, z]$.

Com relação à abscissa z , seus valores são apresentados na tabela ao longo da coluna lateral à esquerda em conjunto com a linha superior, ambas sombreadas de cinza. Na coluna à esquerda, temos a casa inteira e a primeira casa decimal; na linha superior, temos a segunda casa decimal. Por exemplo, ao longo da primeira linha da tabela, temos probabilidades associadas às abscissas $0,00; 0,01; 0,02, \dots, 0,09$; na segunda linha da tabela, temos probabilidades associadas às abscissas $0,10; 0,11; 0,12; \dots, 0,19$; na última linha da tabela, temos probabilidades associadas às abscissas $4,00; 4,01; 4,02; \dots; 4,09$.

A entrada $0,00000$ no canto superior esquerdo da tabela corresponde à seguinte probabilidade: $\Pr(0 \leq Z \leq 0,00)$, ou seja, $\Pr(Z = 0)$ e, como visto, essa probabilidade é nula, uma vez que, para qualquer variável aleatória contínua X , $\Pr(X = x_0) = 0$. A segunda entrada na primeira linha, $0,00399$, corresponde a $\Pr(0 \leq Z \leq 0,01)$, que é a área sob a curva de densidade normal padronizada compreendida entre os valores 0 e $0,01$ (veja o gráfico na tabela).

Note que esta tabela apresenta probabilidades correspondentes a abscissas positivas, ou seja, esta tabela trata de área sob a curva no lado positivo do eixo. Para calcular áreas no lado negativo, teremos de usar o fato de a curva da densidade normal ser simétrica. É interessante que, no cálculo de probabilidades associadas a variáveis aleatórias normais, você faça um esboço da curva de densidade, sombreando a área correspondente à probabilidade desejada. Vamos terminar esta aula apresentando vários exemplos de cálculos de probabilidades de uma v.a. Z com distribuição normal padrão, ou seja, no que segue, $Z \sim N(0; 1)$.

Exemplo 2.1.

Calcule $\Pr(0 \leq Z \leq 1,22)$.

Solução:

Veja a **Figura 2.5**, queremos calcular a área (probabilidade) da parte sombreada. Essa probabilidade é dada diretamente na **Tabela 2.1**, utilizando a entrada correspondente à linha 1,2 e à coluna com o valor 2 (veja a **Figura 2.6**). O resultado é $\Pr(0 \leq Z \leq 1,22) = 0,38877$.

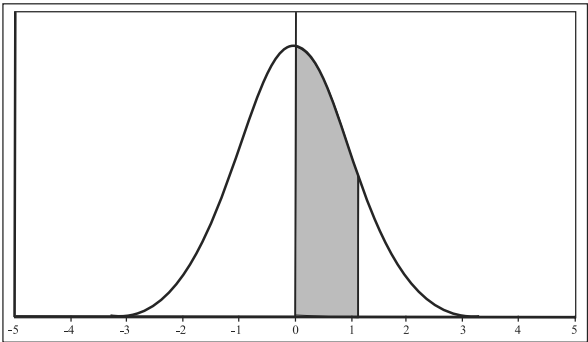


Figura 2.5: Cálculo de $\Pr(0 \leq Z \leq 1,22)$.

Casa inteira 1º decimal	2º decimal			
	0	1	2	3
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824

Figura 2.6: Uso da **Tabela 2.1** no cálculo de $\Pr(0 \leq Z \leq 1,22)$.

Exemplo 2.2.

Calcule $\Pr(1 \leq Z \leq 2)$.

Solução:

Essa probabilidade corresponde à área sombreada na **Figura 2.7**. Note que essa área pode ser obtida subtraindo-se a área que abrange o intervalo $[0,1]$, da área que abrange o intervalo $[0,2]$. A primeira área corresponde a $\Pr(0 \leq Z \leq 1)$ e a segunda área corresponde a $\Pr(0 \leq Z \leq 2)$. Assim,

$$\begin{aligned} \Pr(1 \leq Z \leq 2) &= \Pr(0 \leq Z \leq 2) - \Pr(0 \leq Z < 1) \\ &= \Pr(0 \leq Z \leq 2) - \Pr(0 \leq Z \leq 1) \\ &= \text{tab}(2) - \text{tab}(1) \\ &= 0,47725 - 0,34134 = 0,13591 \end{aligned}$$

Note a convenção que adotaremos: $\text{tab}(z) = \Pr(0 \leq Z \leq z)$ corresponde à entrada na **Tabela 2.1**.

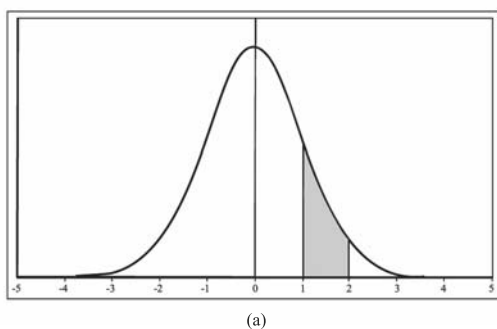


Figura 2.7: Cálculo de $\Pr(1 \leq Z \leq 2)$.

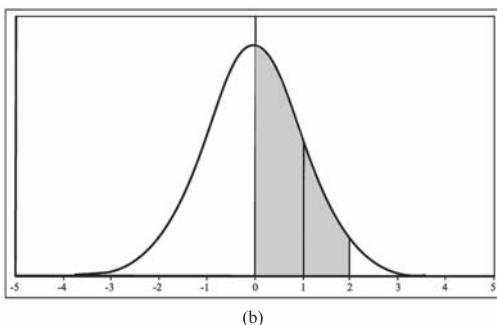


Figura 2.8: Cálculo de $\Pr(0 \leq Z \leq 2)$.

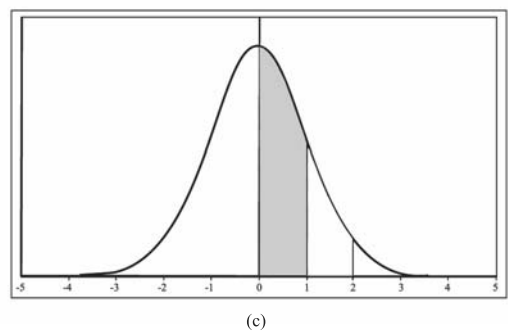


Figura 2.9: Cálculo de $\Pr(0 \leq Z \leq 1)$.

Exemplo 2.3.

Calcule $\Pr(Z \geq 1)$.

Solução:

$\Pr(Z \geq 1)$ é a área sombreada na **Figura 2.10**, que pode ser calculada, lembrando que a área à direita do eixo de simetria é igual a 0,5. Assim, a probabilidade pedida pode ser obtida subtraindo-se de 0,5 a área hachurada, isto é:

$$\begin{aligned}\Pr(Z \geq 1) &= 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0,5 - 0,34134 = 0,15866\end{aligned}$$

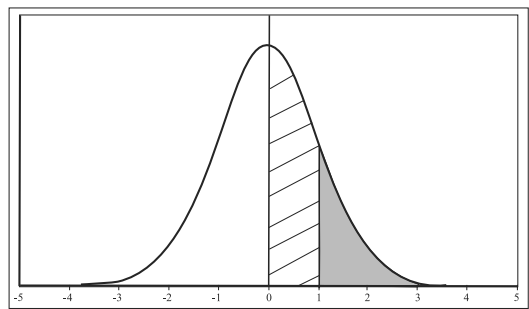


Figura 2.10: Cálculo de $\Pr(Z \geq 1)$.

Exemplo 2.4.

Calcule $\Pr(Z \leq 1,5)$.

Solução:

$\Pr(Z \leq 1,5)$ é a área à esquerda de 1,5, sombreada de cinza claro e de cinza escuro na **Figura 2.11**. Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 \Pr(Z \leq 1,5) &= \Pr(Z < 0) + \Pr(0 \leq Z \leq 1,5) \\
 &= 0,5 + \text{tab}(1,5) \\
 &= 0,5 + 0,43319 = 0,93319
 \end{aligned}$$

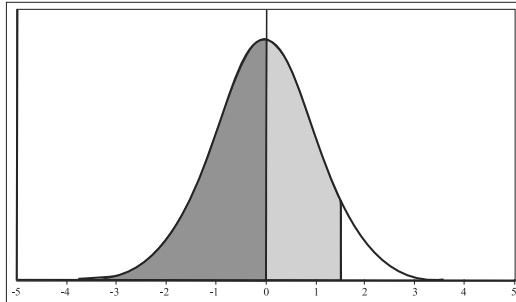


Figura 2.11: Cálculo de $\Pr(Z \leq 1,5)$.

Exemplo 2.5.

Calcule $\Pr(Z \leq -0,5)$.

Solução:

$\Pr(Z \leq -0,5)$ é a área sombreada de cinza escuro na **Figura 2.12**. Note que, por simetria, essa área é igual à área sombreada de cinza claro. Esta, por sua vez, pode ser obtida subtraindo-se de 0,5 (área à direita do eixo de simetria) a área hachurada. Mais precisamente:

$$\begin{aligned}
 \Pr(Z \leq -0,5) &= \Pr(Z \geq 0,5) \\
 &= 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 0,5) \\
 &= 0,5 - \text{tab}(0,5) \\
 &= 0,5 - 0,19146 \\
 &= 0,30854
 \end{aligned}$$

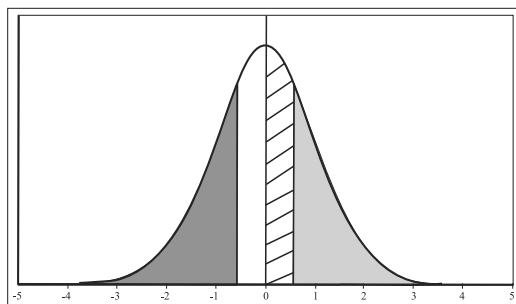


Figura 2.12: Cálculo de $\Pr(Z \leq -0,5)$.

Exemplo 2.6.

Calcule $\Pr(-1,5 \leq Z \leq 0)$.

Solução:

$\Pr(-1,5 \leq Z \leq 0)$ é a área sombreada de cinza claro na **Figura 2.13**, que, pela simetria da curva, é igual à área sombreada de cinza escuro. Mais precisamente:

$$\begin{aligned}\Pr(-1,5 \leq Z \leq 0) &= \Pr(0 \leq Z \leq 1,5) \\ &= \text{tab}(1,5) = 0,43319\end{aligned}$$

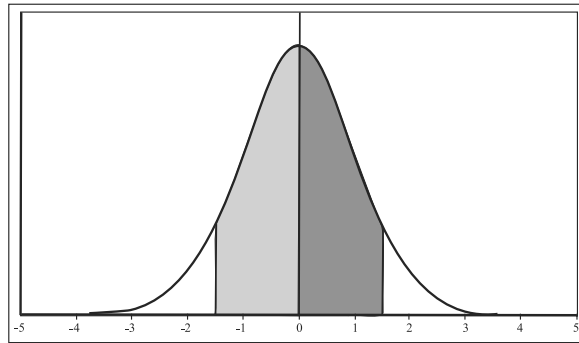


Figura 2.13: Cálculo de $\Pr(-1,5 \leq Z \leq 0)$.

Exemplo 2.7.

Calcule $\Pr(-1,32 \leq Z \leq 2,05)$.

Solução:

$\Pr(-1,32 \leq Z \leq 2,05)$ é a área sombreada de cinza claro na **Figura 2.14**. Note que essa área pode ser decomposta na área à esquerda do eixo de simetria mais a área à direita do eixo de simetria. A área à direita do eixo de simetria nada mais é que $\text{tab}(2,05)$. Com relação à área sombreada à esquerda do eixo de simetria, ela é igual à área hachurada no lado direito e essa última é $\text{tab}(1,32)$. Assim,

$$\begin{aligned}\Pr(-1,32 \leq Z \leq 2,05) &= \Pr(-1,32 \leq Z \leq 0) + \Pr(0 \leq Z \leq 2,05) \\ &= \Pr(0 \leq Z \leq 1,32) + \Pr(0 \leq Z \leq 2,05) \\ &= \text{tab}(1,32) + \text{tab}(2,05) \\ &= 0,40658 + 0,47982 = 0,88640\end{aligned}$$

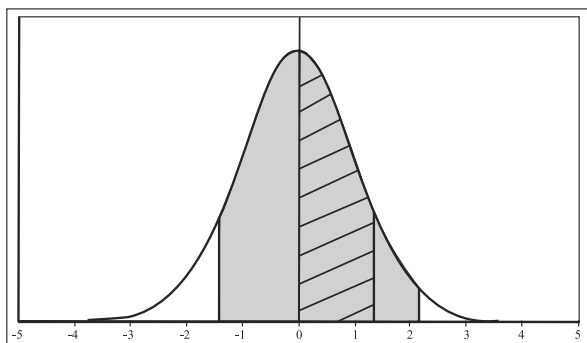


Figura 2.14: Cálculo de $\Pr(-1,32 \leq Z \leq 2,05)$.

Exemplo 2.8.

Calcule $\Pr(-2,33 \leq Z \leq -1,00)$.

Solução:

$\Pr(-2,33 \leq Z \leq -1,00)$ é a área sombreada de cinza claro na **Figura 2.15**. Por simetria, essa área é igual à área sombreada de cinza escuro. Assim,

$$\begin{aligned}
 \Pr(-2,33 \leq Z \leq -1,00) &= \Pr(1,00 \leq Z \leq 2,33) \\
 &= \Pr(0,00 \leq Z \leq 2,33) - \Pr(0,00 \leq Z \leq 1,00) \\
 &= \text{tab}(2,33) - \text{tab}(1,00) \\
 &= 0,49010 - 0,34134 \\
 &= 0,14876
 \end{aligned}$$

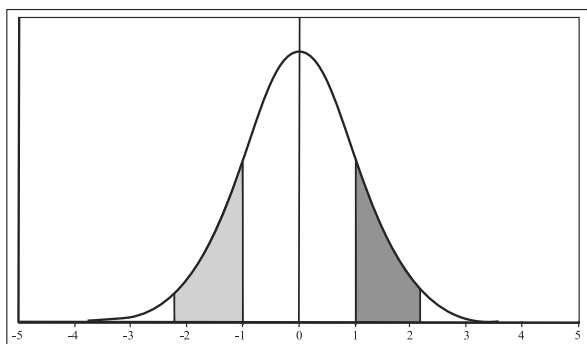


Figura 2.15: Cálculo de $\Pr(-2,33 \leq Z \leq -1,00)$.

A TABELA DA DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA DA NORMAL PADRÃO

Muitos livros trabalham com a tabela da distribuição acumulada da normal padrão, que representaremos pela letra grega fi maiúscula, Φ :

$$\Phi(z) = \Pr(Z \leq z).$$

A **Tabela 2.2** é apresentada ao final desta aula. Note que nesta tabela são dadas abscissas negativas e positivas, variando de $-4,09$ a $+4,09$. Na primeira parte, estamos trabalhando com as abscissas negativas e, na segunda parte, com as abscissas positivas.

Vamos usar a **Tabela 2.2** para refazer os exemplos vistos anteriormente.

Exemplo 2.9.

$$\Pr(0 \leq Z \leq 1,22) = \Phi(1,22) - \Phi(0) = 0,88777 - 0,5 = 0,38877$$

$$\Pr(1 \leq Z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0,97725 - 0,84134 = 0,13591$$

$$\Pr(Z \geq 1) = 1,0 - \Phi(1) = 1,0 - 0,84134 = 0,15866$$

$$\Pr(Z \leq 1,5) = \Phi(1,5) = 0,93319$$

$$\Pr(Z \leq -0,5) = \Phi(-0,5) = 0,30854$$

$$\Pr(-1,5 \leq Z \leq 0) = \Phi(0) - \Phi(-1,5) = 0,5 - 0,06681 = 0,43319$$

$$\Pr(-1,32 \leq Z \leq 2,05) = \Phi(2,05) - \Phi(-1,32) = 0,97982 - 0,09342 = 0,88640$$

$$\Pr(-2,33 \leq Z \leq -1,00) = \Phi(-1,00) - \Phi(-2,33) = 0,15866 - 0,00990 = 0,14876$$

Exercício 2.1.

Usando a **Tabela 2.1**, calcule as seguintes probabilidades:

1. $\Pr(-2,34 \leq 1,02)$
2. $\Pr(1,36 \leq Z \leq 4,50)$
3. $\Pr(Z \geq -2,35)$
4. $\Pr(Z > 4,80)$
5. $\Pr(Z \leq -4,89)$
6. $\Pr(1,54 \leq Z < 3,12)$

7. $\Pr(-1,22 < Z < -0,89)$
8. $\Pr(Z < -2)$
9. $\Pr(Z > -2)$
10. $\Pr(-2,56 < Z < 5,00)$

Exercício 2.2.

Calcule as probabilidades do exercício anterior usando a **Tabela 2.2**.

SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Exercício 2.1.

1. $\Pr(-2,34 \leq Z \leq 1,02) = \text{tab}(1,02) + \text{tab}(2,34) = 0,34614 + 0,49036 = 0,83650$
2. $\Pr(1,36 \leq Z \leq 4,50) = \text{tab}(4,50) - \text{tab}(1,36) = 0,5 - 0,41308 = 0,08692$
3. $\Pr(Z \geq -2,35) = 0,5 + \text{tab}(2,35) = 0,5 + 0,49061 = 0,99061$
4. $\Pr(Z > 4,80) = 0,5 - \text{tab}(4,80) = 0,5 - 0,5 = 0$
5. $\Pr(Z \leq -4,89) = \Pr(Z \geq 4,89) = 0,5 - \text{tab}(4,89) = 0,5 - 0,5 = 0$
6. $\Pr(1,54 \leq Z < 3,12) = \text{tab}(3,12) - \text{tab}(1,54) = 0,49910 - 0,43822 = 0,06088$
7. $\Pr(-1,22 < Z < -0,89) = \Pr(0,89 < Z < 1,22) = \text{tab}(1,22) - \text{tab}(0,89) = 0,38877 - 0,31327 = 0,07550$
8. $\Pr(Z < -2) = \Pr(Z > 2) = 0,5 - \text{tab}(2,0) = 0,5 - 0,47725 = 0,02275$
9. $\Pr(Z > -2) = 0,5 + \text{tab}(2,0) = 0,5 + 0,47725 = 0,97725$
10. $\Pr(-2,56 < Z < 5,00) = \text{tab}(5,00) + \text{tab}(2,56) = 0,5 + 0,49477 = 0,99477$

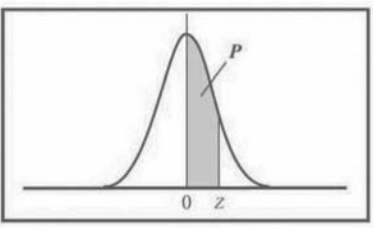
Exercício 2.2.

1. $\Pr(-2,34 \leq Z \leq 1,02) = \Phi(1,02) - \Phi(-2,34) = 0,84614 - 0,00964 = 0,83650$
2. $\Pr(1,36 \leq Z \leq 4,50) = \Phi(4,50) - \Phi(1,36) = 1,0 - 0,91308 = 0,08692$
3. $\Pr(Z \geq -2,35) = 1,0 - \Phi(-2,35) = 1,0 - 0,00939 = 0,99061$
4. $\Pr(Z > 4,80) = 1,0 - \Phi(4,80) = 1,0 - 1,0 = 0$
5. $\Pr(Z \leq -4,89) = \Phi(-4,89) = 0$
6. $\Pr(1,54 \leq Z < 3,12) = \Phi(3,12) - \Phi(1,54) = 0,99910 - 0,93822 = 0,06088$
7. $\Pr(-1,22 < Z < -0,89) = \Phi(-0,89) - \Phi(-1,22) = 0,18673 - 0,11123 = 0,07550$
8. $\Pr(Z < -2) = \Pr(Z \leq -2) = \Phi(-2,0) = 0,02275$
9. $\Pr(Z > -2) = 1,0 - \Phi(-2,0) = 1,0 - 0,02275 = 0,97725$
10. $\Pr(-2,56 < Z < 5,00) = \Phi(5,00) - \Phi(-2,56) = 1,0 - 0,00523 = 0,99477$

Distribuição normal padrão

Valores de p

$p = \Pr(0 \leq Z \leq z)$



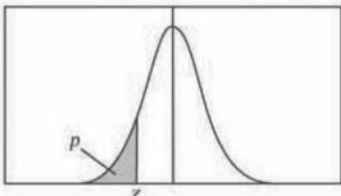
Casa inteira e 1ª Decimal	2ª decimal									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41308	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2,0	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361
2,5	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0,49609	0,49621	0,49632	0,49643
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736
2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861
3,0	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,3	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997
4,0	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998

Tabela 2.1: Para abscissas maiores que 4,09, use a probabilidade de 0,50000.

Distribuição acumulada da normal padrão

Valores de p

$p = \Phi(z) = \Pr(Z \leq z)$



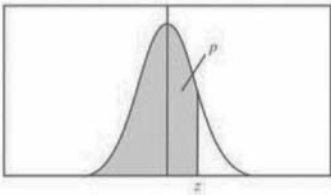
Casa inteira e 1ª Decimal	2ª decimal									
	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
-4,0	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003
-3,9	0,00003	0,00003	0,00004	0,00004	0,00004	0,00004	0,00004	0,00004	0,00005	0,00005
-3,8	0,00005	0,00005	0,00005	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006	0,00007	0,00007	0,00007
-3,7	0,00008	0,00008	0,00008	0,00008	0,00009	0,00009	0,00010	0,00010	0,00010	0,00011
-3,6	0,00011	0,00012	0,00012	0,00013	0,00013	0,00014	0,00014	0,00015	0,00015	0,00016
-3,5	0,00017	0,00017	0,00018	0,00019	0,00019	0,00020	0,00021	0,00022	0,00022	0,00023
-3,4	0,00024	0,00025	0,00026	0,00027	0,00028	0,00029	0,00030	0,00031	0,00032	0,00034
-3,3	0,00035	0,00036	0,00038	0,00039	0,00040	0,00042	0,00043	0,00045	0,00047	0,00048
-3,2	0,00050	0,00052	0,00054	0,00056	0,00058	0,00060	0,00062	0,00064	0,00066	0,00069
-3,1	0,00071	0,00074	0,00076	0,00079	0,00082	0,00084	0,00087	0,00090	0,00094	0,00097
-3,0	0,00100	0,00104	0,00107	0,00111	0,00114	0,00118	0,00122	0,00126	0,00131	0,00135
-2,9	0,00139	0,00144	0,00149	0,00154	0,00159	0,00164	0,00169	0,00175	0,00181	0,00187
-2,8	0,00193	0,00199	0,00205	0,00212	0,00219	0,00226	0,00233	0,00240	0,00248	0,00256
-2,7	0,00264	0,00272	0,00280	0,00289	0,00298	0,00307	0,00317	0,00326	0,00336	0,00347
-2,6	0,00357	0,00368	0,00379	0,00391	0,00402	0,00415	0,00427	0,00440	0,00453	0,00466
-2,5	0,00480	0,00494	0,00508	0,00523	0,00539	0,00554	0,00570	0,00587	0,00604	0,00621
-2,4	0,00639	0,00657	0,00676	0,00695	0,00714	0,00734	0,00755	0,00776	0,00798	0,00820
-2,3	0,00842	0,00866	0,00889	0,00914	0,00939	0,00964	0,00990	0,01017	0,01044	0,01072
-2,2	0,01101	0,01130	0,01160	0,01191	0,01222	0,01255	0,01287	0,01321	0,01355	0,01390
-2,1	0,01426	0,01463	0,01500	0,01539	0,01578	0,01618	0,01659	0,01700	0,01743	0,01786
-2,0	0,01831	0,01876	0,01923	0,01970	0,02018	0,02068	0,02118	0,02169	0,02222	0,02275
-1,9	0,02330	0,02385	0,02442	0,02500	0,02559	0,02619	0,02680	0,02743	0,02807	0,02872
-1,8	0,02938	0,03005	0,03074	0,03144	0,03216	0,03288	0,03362	0,03438	0,03515	0,03593
-1,7	0,03673	0,03754	0,03836	0,03920	0,04006	0,04093	0,04182	0,04272	0,04363	0,04457
-1,6	0,04551	0,04648	0,04746	0,04846	0,04947	0,05050	0,05155	0,05262	0,05370	0,05480
-1,5	0,05592	0,05705	0,05821	0,05938	0,06057	0,06178	0,06301	0,06426	0,06552	0,06681
-1,4	0,06811	0,06944	0,07078	0,07215	0,07353	0,07493	0,07636	0,07780	0,07927	0,08076
-1,3	0,08226	0,08379	0,08534	0,08692	0,08851	0,09012	0,09176	0,09342	0,09510	0,09680
-1,2	0,09853	0,10027	0,10204	0,10383	0,10565	0,10749	0,10935	0,11123	0,11314	0,11507
-1,1	0,11702	0,11900	0,12100	0,12302	0,12507	0,12714	0,12924	0,13136	0,13350	0,13567
-1,0	0,13786	0,14007	0,14231	0,14457	0,14686	0,14917	0,15151	0,15386	0,15625	0,15866
-0,9	0,16109	0,16354	0,16602	0,16853	0,17106	0,17361	0,17619	0,17879	0,18141	0,18406
-0,8	0,18673	0,18943	0,19215	0,19489	0,19766	0,20045	0,20327	0,20611	0,20897	0,21186
-0,7	0,21476	0,21770	0,22065	0,22363	0,22663	0,22965	0,23270	0,23576	0,23885	0,24196
-0,6	0,24510	0,24825	0,25143	0,25463	0,25785	0,26109	0,26435	0,26763	0,27093	0,27425
-0,5	0,27760	0,28096	0,28434	0,28774	0,29116	0,29460	0,29806	0,30153	0,30503	0,30854
-0,4	0,31207	0,31561	0,31918	0,32276	0,32636	0,32997	0,33360	0,33724	0,34090	0,34458
-0,3	0,34827	0,35197	0,35569	0,35942	0,36317	0,36693	0,37070	0,37448	0,37828	0,38209
-0,2	0,38591	0,38974	0,39358	0,39743	0,40129	0,40517	0,40905	0,41294	0,41683	0,42074
-0,1	0,42465	0,42858	0,43251	0,43644	0,44038	0,44433	0,44828	0,45224	0,45620	0,46017
-0,0	0,46414	0,46812	0,47210	0,47608	0,48006	0,48405	0,48803	0,49202	0,49601	0,50000

Tabela 2.2: Esta parte da tabela contém as abscissas negativas. Para abscissas menores que $-4,09$, use a probabilidade de $0,00000$.

Distribuição acumulada da normal padrão

Valores de p

$$p = \Phi(z) = \Pr(Z \leq z)$$



Casa inteira e 1ª Decimal	2ª decimal									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Tabela 2.3: Esta parte da tabela contém as abscissas positivas. Para abscissas maiores que 4,09, use a probabilidade de 1,00000.

Aula 3

A DISTRIBUIÇÃO NORMAL – 2ª PARTE

Objetivo

Nesta aula, serão apresentados resultados básicos sobre a distribuição normal que permitirão que você calcule probabilidades associadas a qualquer variável aleatória normal, e isso ampliará o escopo de aplicações práticas.

CÁLCULOS COM A DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Na aula anterior, você viu como usar a tabela da distribuição normal padrão para calcular probabilidades associadas à variável normal padronizada. Essa tabela é necessária para fazer os cálculos, pois não é “fácil” calcular áreas sob a curva da densidade normal padrão.

Aquela tabela faz referência ao caso em que $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$. Será que teremos que usar uma tabela diferente para outros valores de μ e σ ? Felizmente, a resposta é NÃO, graças a uma propriedade muito interessante da distribuição normal que estabelece o seguinte resultado:



Se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, então

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (3.1)$$

tem distribuição $N(0; 1)$.

Note que a transformação $\frac{X - \mu}{\sigma}$ é uma transformação linear, que é uma transformação biunívoca. Vejamos como usar esse resultado para calcular probabilidades de uma v.a. normal qualquer.

Consideremos, por exemplo, $X \sim N(1; 4)$, ou seja, X é uma v.a. normal com média 1 e variância 4. Suponhamos que se deseje calcular $\Pr(X \leq 3)$. Temos a seguinte equivalência de eventos:

$$X \leq 3 \iff \frac{X - 1}{\sqrt{4}} \leq \frac{3 - 1}{\sqrt{4}}$$

Veja que subtraímos a mesma constante e dividimos pela mesma constante em ambos os lados da desigualdade. Mas, pelo resultado acima, $Z = \frac{X - 1}{\sqrt{4}} \sim N(0; 1)$. Logo,

$$\Pr(X \leq 3) = \Pr\left(\frac{X - 1}{\sqrt{4}} \leq \frac{3 - 1}{\sqrt{4}}\right) = \Pr\left(Z \leq \frac{3 - 1}{\sqrt{4}}\right)$$

e caímos novamente no cálculo de probabilidades da Normal padrão, que é feito com auxílio da **Tabela 2.1**, apresentada na aula anterior.

Completando o cálculo, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \Pr(X \leq 3) &= \Pr\left(Z \leq \frac{3-1}{\sqrt{4}}\right) \\
 &= \Pr(Z \leq 1) \\
 &= 0,5 + \text{tab}(1) \\
 &= 0,84134
 \end{aligned}$$

Na **Figura 3.1** ilustra-se a equivalência dessas probabilidades: no primeiro gráfico, a área sombreada corresponde a $\Pr(X \leq 3)$ e, no segundo gráfico, a área sombreada corresponde a $\Pr(Z \leq 1)$. Pelo resultado acima, essas duas áreas são iguais.

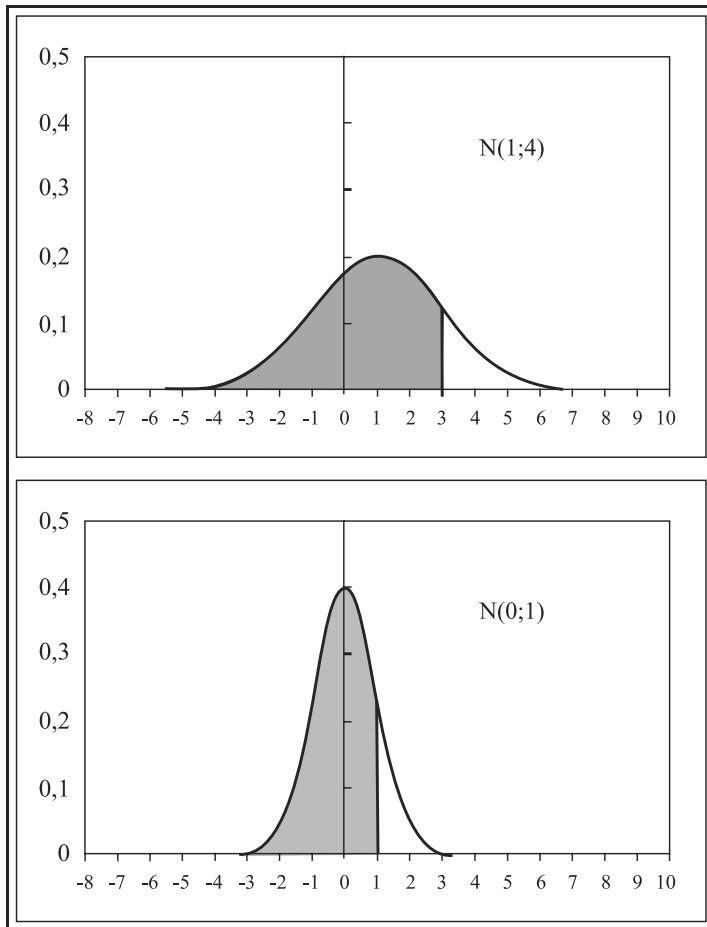


Figura 3.1: Cálculo de $\Pr(X \leq 3)$, $X \sim N(1;4)$.

É interessante lembrar que a transformação dada na equação (3.1) corresponde a calcular o escore padronizado associado à abscissa x . Assim, cálculos de probabilidades de v.a. normais sempre envolverão o cálculo do escore padronizado da(s) abscissa(s) de interesse.

Como na aula anterior, vamos apresentar vários exemplos para fixar os conceitos e procedimentos. Nesses exemplos apresentaremos os cálculos em termos da **Tabela 2.1** e da **Tabela 2.2**, usando a mesma notação utilizada na aula anterior: na **Tabela 2.1**, obtemos $\text{tab}(z) = \Pr(0 \leq Z \leq z)$ e, na **Tabela 2.2**, obtemos $\Phi(z) = \Pr(Z \leq z)$. É importante que você faça um esboço do gráfico da $N(0;1)$ sombreando a área desejada.

Exemplo 3.1.

Se $X \sim N(3;9)$, calcule $\Pr(-1 \leq X \leq 4)$.

Solução: Cálculo usando a **Tabela 2.2**:

$$\begin{aligned} \Pr(-1 \leq X \leq 4) &= \Pr\left(\frac{-1-3}{\sqrt{9}} \leq \frac{X-3}{\sqrt{9}} \leq \frac{4-3}{\sqrt{9}}\right) \\ &= \Pr(-1,33 \leq Z \leq 0,33) \quad \text{Veja a Figura 3.2.} \\ &= \Phi(0,33) - \Phi(-1,33) \\ &= 0,62930 - 0,09176 = 0,53754 \end{aligned}$$

Cálculo usando a **Tabela 2.1**:

$$\begin{aligned} \Pr(-1 \leq X \leq 4) &= \Pr\left(\frac{-1-3}{\sqrt{9}} \leq \frac{X-3}{\sqrt{9}} \leq \frac{4-3}{\sqrt{9}}\right) \\ &= \Pr(-1,33 \leq Z \leq 0,33) \quad \text{Veja a Figura 3.2.} \\ &= \text{tab}(0,33) + \text{tab}(1,33) \\ &= 0,12930 + 0,40824 = 0,53754 \end{aligned}$$

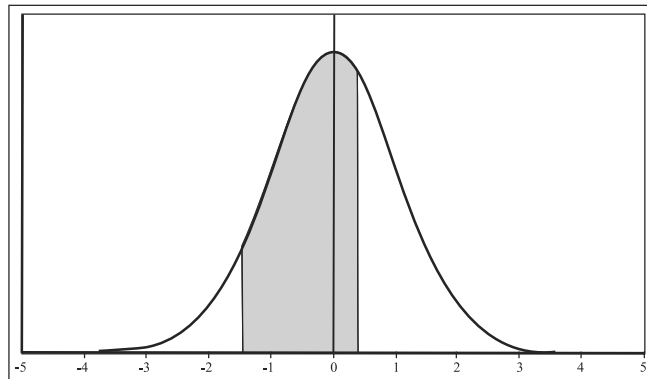


Figura 3.2: Cálculo de $\Pr(-1 \leq X \leq 4)$, $X \sim N(3;9)$: curva da Normal padrão com $-1,33 \leq Z \leq 0,33$.

Exemplo 3.2.

Se $X \sim N(2; 5)$, calcule $\Pr(-1 \leq X \leq 4)$.

Solução:

Cálculo usando a **Tabela 2.2**:

$$\begin{aligned} \Pr(-1 \leq X \leq 4) &= \Pr\left(\frac{-1-2}{\sqrt{5}} \leq \frac{X-2}{\sqrt{5}} \leq \frac{4-2}{\sqrt{5}}\right) \\ &= \Pr(-1,34 \leq Z \leq 0,89) \quad \text{Veja a Figura 3.3.} \\ &= \Phi(0,89) - \Phi(-1,34) \\ &= 0,81327 - 0,09012 = 0,72315 \end{aligned}$$

Cálculo usando a **Tabela 2.1**:

$$\begin{aligned} \Pr(-1 \leq X \leq 4) &= \Pr\left(\frac{-1-2}{\sqrt{5}} \leq \frac{X-2}{\sqrt{5}} \leq \frac{4-2}{\sqrt{5}}\right) \\ &= \Pr(-1,34 \leq Z \leq 0,89) \quad \text{Veja a Figura 3.3.} \\ &= \text{tab}(0,89) + \text{tab}(1,34) \\ &= 0,31327 + 0,40988 = 0,72315 \end{aligned}$$

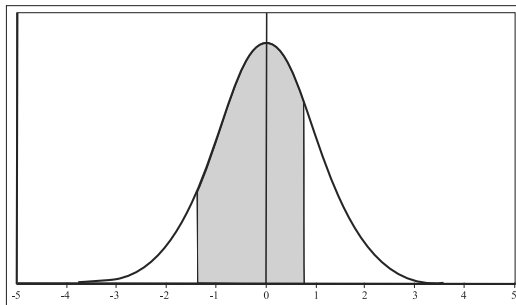


Figura 3.3: Cálculo de $\Pr(-1 \leq X \leq 4)$, $X \sim N(2; 5)$: curva da Normal padrão com $-1,34 \leq Z \leq 0,89$.

Exemplo 3.3.

Se $X \sim N(5, 1)$, calcule $\Pr(X > 7)$.

Solução:

Cálculo usando a **Tabela 2.2**:

$$\begin{aligned}\Pr(X > 7) &= \Pr\left(\frac{X-5}{1} > \frac{7-5}{1}\right) \\ &= \Pr(Z > 2) \quad \text{Veja a Figura 3.4.} \\ &= 1,0 - \Phi(2,0) \\ &= 1,0 - 0,97725 = 0,02275\end{aligned}$$

Cálculo usando a **Tabela 2.1**:

$$\begin{aligned}\Pr(X > 7) &= \Pr\left(\frac{X-5}{1} > \frac{7-5}{1}\right) \\ &= \Pr(Z > 2) \quad \text{Veja a Figura 3.4.} \\ &= 0,5 - \text{tab}(2,0) \\ &= 0,5 - 0,47725 = 0,02275\end{aligned}$$

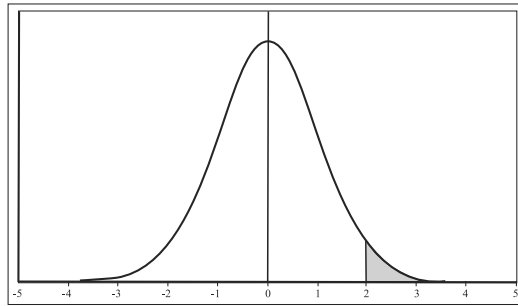


Figura 3.4: Cálculo de $\Pr(X > 7)$, $X \sim N(5, 1)$: curva da Normal padrão com $Z > 2$.

Exemplo 3.4.

Se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, calcule $\Pr(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$.

Solução:

Note que essa probabilidade corresponde à probabilidade de X estar a uma distância de um desvio padrão da média.

Cálculo usando a **Tabela 2.2**:

$$\begin{aligned}\Pr(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) &= \Pr\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Pr(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= \Phi(1,0) - \Phi(-1,0) \\ &= 0,84134 - 0,15866 = 0,68268\end{aligned}$$

Cálculo usando a **Tabela 2.1**:

$$\begin{aligned}
 \Pr(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) &= \Pr\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) \\
 &= \Pr(-1 \leq Z \leq 1) \\
 &= \text{tab}(1, 0) + \text{tab}(1, 0) \\
 &= 2 \times 0.34134 = 0,68268
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.5.

Se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, calcule $\Pr(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$.

Solução:

Note que essa probabilidade corresponde à probabilidade de X estar a uma distância de dois desvios padrões da média.

Cálculo usando a **Tabela 2.2**:

$$\begin{aligned}
 \Pr(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) &= \Pr\left(\frac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma}\right) \\
 &= \Pr(-2 \leq Z \leq 2) \\
 &= \Phi(2, 0) - \Phi(-2, 0) \\
 &= 0.97725 - 0.02275 = 0,95450
 \end{aligned}$$

Cálculo usando a **Tabela 2.1**:

$$\begin{aligned}
 \Pr(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) &= \Pr\left(\frac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma}\right) \\
 &= \Pr(-2 \leq Z \leq 2) \\
 &= \text{tab}(2, 0) + \text{tab}(2, 0) \\
 &= 2 \times 0.47725 = 0,95450
 \end{aligned}$$

Essa probabilidade nos diz que, para *qualquer* distribuição normal, 95,45% dos valores estão a dois desvios padrões da média (acima ou abaixo).

Exemplo 3.6.

Se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, calcule $\Pr(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$.

Solução:

Note que essa probabilidade corresponde à probabilidade de X estar a uma distância de três desvios padrões da média.

Cálculo usando a **Tabela 2.2**:

$$\begin{aligned}\Pr(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) &= \Pr\left(\frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Pr(-3 \leq Z \leq 3) \\ &= \Phi(3, 0) - \Phi(-3, 0) \\ &= 0.99865 - 0.00135 = 0,9973\end{aligned}$$

Cálculo usando a **Tabela 2.1**:

$$\begin{aligned}\Pr(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) &= \Pr\left(\frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Pr(-3 \leq Z \leq 3) \\ &= \text{tab}(3, 0) + \text{tab}(3, 0) \\ &= 2 \times 0.49865 = 0,9973\end{aligned}$$

Essa probabilidade nos diz que, para *qualquer* distribuição normal, 99,73% dos valores estão a três desvios padrões da média (acima ou abaixo).

Veja a **Figura 3.5** para uma ilustração desses resultados.

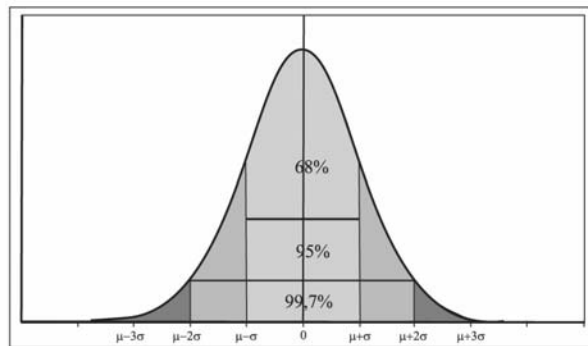


Figura 3.5: Ilustração da distribuição normal.

Lembre-se de que o teorema de Chebyshev fornecia percentuais análogos para qualquer distribuição. Para distribuições normais, os resultados desses três exemplos mostram percentuais mais precisos.

Exemplo 3.7.

Determine o valor de k tal que $\Pr(Z \leq k) = 0,90$.

Solução:

Lembre-se de que $Z \sim N(0; 1)$.

Nos exemplos anteriores, tínhamos a abscissa e queríamos a probabilidade (área); neste exemplo, temos a probabilidade e queremos a abscissa. Esta é uma situação comum em problemas de tomada de decisão, conforme veremos em exemplos mais adiante.

Vamos “traduzir” essa probabilidade em termos da **Tabela 2.1**. O primeiro ponto a observar é o seguinte: $\Pr(Z \leq k)$ indica a área à esquerda de k ; como essa área à esquerda de k é maior que 0,5, temos de ter $k > 0$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}\Pr(Z \leq k) &= 0,90 \iff \\ \Pr(Z \leq 0) + \Pr(0 < Z \leq k) &= 0,90 \iff \\ 0,5 + \Pr(0 < Z \leq k) &= 0,90 \iff \\ \Pr(0 < Z \leq k) &= 0,40 \iff \\ \text{tab}(k) &= 0,40\end{aligned}$$

Esta última igualdade nos diz que k é a abscissa correspondente ao valor 0,40 na **Tabela 2.1**. Para identificar k , temos que buscar no corpo da **Tabela 2.1** o valor mais próximo de 0,40. Na linha correspondente ao valor 1,2 encontramos as entradas 0,39973 e 0,40147. Como a primeira está mais próxima de 0,40, olhamos qual é a abscissa correspondente: a linha é 1,2 e a coluna é 8, o que nos dá a abscissa de 1,28, ou seja, $k = 1,28$.

Exemplo 3.8.

Se $X \sim N(3; 4)$ calcule k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,90$.

Solução:

A diferença em relação ao exemplo anterior é que a distribuição não é mais a normal padrão. Mas o raciocínio é análogo, e podemos concluir que k tem de ser maior que a média. Vamos traduzir a proba-

bilidade dada em termos da normal padronizada.

$$\begin{aligned}\Pr(X \leq k) &= 0,90 \iff \\ \Pr\left(\frac{X-3}{2} \leq \frac{k-3}{2}\right) &= 0,90 \iff \\ \Pr\left(Z \leq \frac{k-3}{2}\right) &= 0,90\end{aligned}$$

Pelo mesmo motivo que $k > 0$ no exemplo anterior, aqui devemos ter $\frac{k-3}{2} > 0$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}\Pr\left(Z \leq \frac{k-3}{2}\right) &= 0,90 \iff \\ \Pr(Z \leq 0) + \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{k-3}{2}\right) &= 0,90 \iff \\ 0,5 + \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{k-3}{2}\right) &= 0,90 \iff \\ \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{k-3}{2}\right) &= 0,40 \iff \\ \frac{k-3}{2} &= 1,28 \iff k = 5,56\end{aligned}$$

Exemplo 3.9.

Se $X \sim N(3;4)$, calcule k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,05$.

Solução:

Em termos da normal padronizada, temos a seguinte probabilidade:

$$\begin{aligned}\Pr(X \leq k) &= 0,05 \iff \\ \Pr\left(\frac{X-3}{2} \leq \frac{k-3}{2}\right) &= 0,05 \iff \\ \Pr\left(Z \leq \frac{k-3}{2}\right) &= 0,05\end{aligned}$$

Como a área (probabilidade) à esquerda de $\frac{k-3}{2}$ é 0,05 que menor do que 0,5, isso significa que $\frac{k-3}{2}$ tem de ser negativo. Veja a **Figura 3.6**.

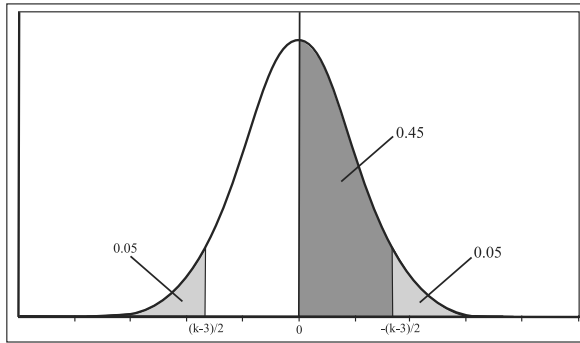


Figura 3.6: $Pr(Z \leq \frac{k-3}{2}) = 0,05$, então por simetria, $Pr(Z \geq -\frac{k-3}{2}) = 0,05$ também.

A abscissa simétrica a $\frac{k-3}{2}$ é $-\frac{k-3}{2} = \frac{3-k}{2}$. Então, a área acima dessa abscissa também é 0,05. Logo,

$$Pr\left(Z \leq \frac{k-3}{2}\right) = 0,05 \iff$$

$$Pr\left(Z \geq -\frac{k-3}{2}\right) = 0,05 \iff$$

$$Pr\left(Z \geq \frac{3-k}{2}\right) = 0,05 \iff$$

$$Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{3-k}{2}\right) = 0,45 \iff$$

$$\text{tab}\left(\frac{3-k}{2}\right) = 0,45$$

O valor mais próximo de 0,45 no corpo da **Tabela 2.1** é 0,44950 que corresponde à abscissa 1,64, e isso nos dá que

$$\frac{3-k}{2} = 1,64 \Rightarrow k = -0,28$$

Exemplo 3.10.

Se $X \sim N(3;4)$ calcule k tal que $Pr(|X-3| \leq k) = 0,95$.

Solução:

Usando as propriedades da função módulo, temos o seguinte:

$$Pr(|X-3| \leq k) = 0,95 \iff$$

$$Pr(-k \leq X-3 \leq k) = 0,95 \iff$$

$$\Pr(3 - k \leq X \leq k + 3) = 0,95 \iff$$

$$\Pr\left(\frac{3 - k - 3}{2} \leq \frac{X - 3}{2} \leq \frac{k + 3 - 3}{2}\right) = 0,95 \iff$$

$$\Pr\left(\frac{-k}{2} \leq Z \leq \frac{k}{2}\right) = 0,95$$

Veja a **Figura 3.7**.

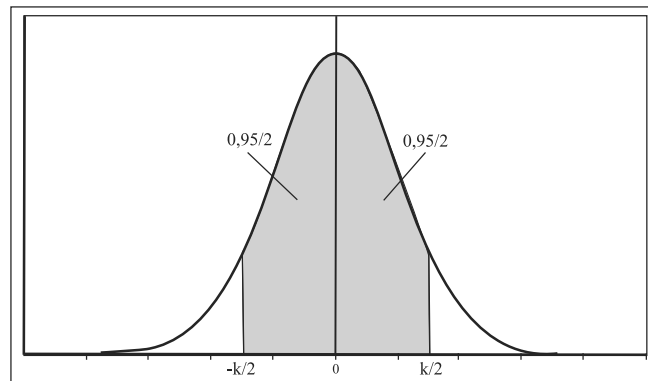


Figura 3.7: Curva da Normal padrão com $\frac{-k}{2} \leq Z \leq \frac{k}{2}$.

Podemos ver que

$$\Pr\left(\frac{-k}{2} \leq Z \leq \frac{k}{2}\right) = 0,95 \iff$$

$$\Pr\left(\frac{-k}{2} \leq Z \leq 0\right) + \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{k}{2}\right) = 0,95 \iff$$

$$2 \times \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{k}{2}\right) = 0,95 \iff$$

$$\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{k}{2}\right) = 0,475 \iff$$

$$\text{tab}\left(\frac{k}{2}\right) = 0,475 \iff$$

$$\frac{k}{2} = 1,96 \iff k = 3,92$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

A distribuição normal é um modelo probabilístico que se aplica a diversas situações práticas. Vamos finalizar esta aula com alguns exemplos práticos, mas, na terceira parte do curso, você verá mais aplicações no contexto da inferência estatística, em que decisões têm de ser tomadas com base nos resultados obtidos a partir de uma amostra.

Exemplo 3.11.

O saldo médio dos clientes de um banco é uma v.a. normal com média R\$ 2.000, 00 e desvio padrão R\$ 250,00. Os clientes com os 10% maiores saldos médios recebem tratamento VIP, enquanto aqueles com os 5% menores saldos médios serão “convidados” a mudar de banco.

1. Quanto você precisa de saldo médio para se tornar um cliente VIP?
2. Abaixo de qual saldo médio o cliente será “convidado” a mudar de banco?

Solução:

Seja $X = \text{“saldo médio”}$; é dado que $X \sim N(2000; 250^2)$.

1. Temos que determinar o valor de k tal que $\Pr(X \geq k) = 0,10$. Note que isso equivale a calcular o 90º percentil da distribuição. A área à esquerda de k tem de ser 0,90; logo, k tem de ser maior que a média.

$$\Pr(X \geq k) = 0,10 \iff$$

$$\Pr\left(\frac{X - 2000}{250} \geq \frac{k - 2000}{250}\right) = 0,10 \iff$$

$$\Pr\left(\frac{X - 2000}{250} \leq \frac{k - 2000}{250}\right) = 0,90 \iff$$

$$\Pr\left(Z \leq \frac{k - 2000}{250}\right) = 0,90 \iff$$

$$\Pr(Z \leq 0) + \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{k - 2000}{250}\right) = 0,90 \iff$$

$$\begin{aligned}\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{k-2000}{250}\right) &= 0,90 - 0,50 \iff \\ \text{tab}\left(\frac{k-2000}{250}\right) &= 0,40 \iff \\ \frac{k-2000}{250} &= 1,28 \iff k = 2320\end{aligned}$$

Os clientes com saldo médio maior ou igual a R\$ 2.320,00 terão tratamento VIP.

2. Temos de determinar o valor de k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,05$. Note que isso equivale a calcular o 5º percentil da distribuição. A área à esquerda de k tem de ser 0,05; logo, k tem de ser menor que a média.

$$\begin{aligned}\Pr(X \leq k) &= 0,05 \iff \\ \Pr\left(\frac{X-2000}{250} \leq \frac{k-2000}{250}\right) &= 0,05 \iff \\ \Pr\left(Z \geq -\frac{k-2000}{250}\right) &= 0,05 \iff \\ \Pr\left(Z \geq \frac{2000-k}{250}\right) &= 0,05 \iff \\ \text{tab}\left(\frac{2000-k}{250}\right) &= 0,45 \iff \\ \frac{2000-k}{250} &= 1,64 \iff k = 1590\end{aligned}$$

Os clientes com saldo médio inferior a R\$ 1.590,00 serão “convidados” a mudar de banco.

Exemplo 3.12.

Uma máquina de empacotar determinado produto oferece variações de peso que se distribuem segundo uma distribuição normal com desvio padrão de 20 gramas. Em quanto deve ser regulado o peso médio desses pacotes para que apenas 10% deles tenham menos que 500 gramas?

Solução:

Esse é um exemplo clássico de aplicação da distribuição normal. Seja X o peso dos pacotes em gramas. Então, $X \sim N(\mu; 400)$. Temos de ter $\Pr(X \leq 500) = 0,10$. Note que o peso médio tem de ser superior a 500 g.

$$\begin{aligned}
\Pr(X \leq 500) &= 0,10 \iff \\
\Pr\left(\frac{X - \mu}{20} \leq \frac{500 - \mu}{20}\right) &= 0,10 \iff \\
\Pr\left(Z \leq \frac{500 - \mu}{20}\right) &= 0,10 \iff \\
\Pr\left(Z \geq -\frac{500 - \mu}{20}\right) &= 0,10 \iff \\
\Pr\left(Z \geq \frac{\mu - 500}{20}\right) &= 0,10 \iff \\
\text{tab}\left(\frac{\mu - 500}{20}\right) &= 0,40 \iff \\
\frac{\mu - 500}{20} &= 1,28 \iff \mu = 525,6
\end{aligned}$$

A máquina tem de ser regulada com um peso médio de 525,6g para que apenas 10% dos pacotes tenham peso inferior a 500g.

Exemplo 3.13.

Uma máquina fabrica tubos metálicos cujos diâmetros podem ser considerados uma variável aleatória normal com média 200mm e desvio padrão 2mm. Verifica-se que 15% dos tubos estão sendo rejeitados como grandes e 10% como pequenos.

1. Quais são as tolerâncias de especificação para esse diâmetro?
2. Mantidas essas especificações, qual deverá ser a regulação média da máquina para que a rejeição por diâmetro grande seja nula? Nesse caso, qual será a porcentagem de rejeição por diâmetro pequeno?

Solução:

Seja D = diâmetro dos tubos. Então $D \sim N(200, 2^2)$.

1. Sejam k_I e k_S as especificações inferior e superior, respectivamente. Isso significa que tubos com diâmetro menor que k_I são rejeitados como pequenos e tubos com diâmetro maior que k_S são rejeitados como grandes.

$$\begin{aligned}
 \Pr(D < k_I) &= 0,10 \Rightarrow \\
 \Pr\left(\frac{D-200}{2} < \frac{k_I-200}{2}\right) &= 0,10 \Rightarrow \\
 \Pr\left(Z < \frac{k_I-200}{2}\right) &= 0,10 \Rightarrow \\
 \Pr\left(Z > -\frac{k_I-200}{2}\right) &= 0,10 \Rightarrow \\
 \Pr\left(Z > \frac{200-k_I}{2}\right) &= 0,10 \Rightarrow \\
 \Pr\left(0 \leq Z < \frac{200-k_I}{2}\right) &= 0,40 \Rightarrow \\
 \text{tab}\left(\frac{200-k_I}{2}\right) &= 0,40 \Rightarrow \\
 \frac{200-k_I}{2} &= 1,28 \Rightarrow k_I = 197,44
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pr(D > k_S) &= 0,15 \Rightarrow \\
 \Pr\left(\frac{D-200}{2} > \frac{k_S-200}{2}\right) &= 0,15 \Rightarrow \\
 \Pr\left(0 \leq Z < \frac{k_S-200}{2}\right) &= 0,35 \Rightarrow \\
 \text{tab}\left(\frac{k_S-200}{2}\right) &= 0,35 \Rightarrow \\
 \frac{k_S-200}{2} &= 1,03 \Rightarrow k_S = 202,06
 \end{aligned}$$

Logo, tubos com diâmetro menor que 197,44 são rejeitados como pequenos e tubos com diâmetros maiores que 202,06 são rejeitados como grandes.

2. Com a nova regulamentação, temos que $D \sim N(\mu; 2^2)$ e μ deve ser tal que

$$\begin{aligned}
 \Pr(D > 202,06) &= 0 \Rightarrow \\
 \Pr\left(\frac{D-\mu}{2} > \frac{202,06-\mu}{2}\right) &= 0 \Rightarrow \\
 \Pr\left(Z > \frac{202,06-\mu}{2}\right) &= 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{202,06 - \mu}{2}\right) &= 0,5 \Rightarrow \\ \text{tab}\left(\frac{202,06 - \mu}{2}\right) &= 0,5 \Rightarrow \\ \frac{202,06 - \mu}{2} &\simeq 4,5 \Rightarrow \mu \simeq 193,06\end{aligned}$$

Com essa média, a porcentagem de rejeição por diâmetro pequeno é

$$\begin{aligned}\Pr(D < 197,44) &= \Pr\left(\frac{D - 193,06}{2} < \frac{197,44 - 193,06}{2}\right) \\ &= \Pr(Z < 2,19) \\ &= \Pr(Z \leq 0) + \Pr(0 < Z < 2,19) \\ &= 0,5 + \text{tab}(2,19) = 0,9857\end{aligned}$$

Com essa nova regulamentação, a rejeição por diâmetro grande é nula, mas a rejeição por diâmetro pequeno é muito alta! Veja a **Figura 3.8**, na qual ficam claros os resultados obtidos.

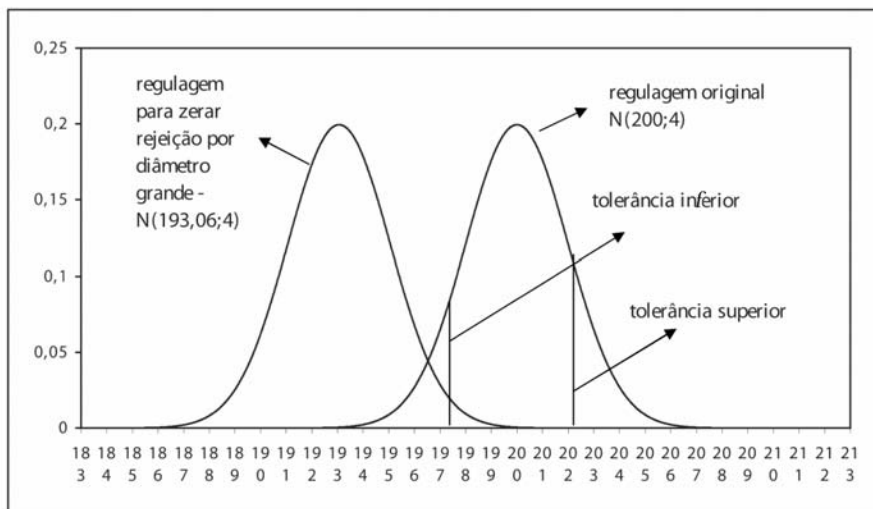


Figura 3.8: Regulagem da máquina que fabrica tubos metálicos.

Exemplo 3.14.

Em um grande complexo industrial, o departamento de manutenção tem instruções para substituir as lâmpadas antes que se queiem. Os registros indicam que a duração das lâmpadas, em horas, tem distribuição normal, com média de 900 horas e desvio padrão de 75 horas. Quando devem ser trocadas as lâmpadas, de modo que no máximo 5% delas queimem antes de serem trocadas?

Solução:

Seja $T =$ “tempo de duração (em horas) das lâmpadas”; então, $T \sim N(900; 75^2)$. Temos que determinar t tal que $\Pr(T \leq t) = 0,05$.

$$\begin{aligned}
 \Pr(T \leq t) = 0,05 &\iff \Pr\left(\frac{T - 900}{75} \leq \frac{t - 900}{75}\right) = 0,05 \iff \\
 &\iff \Pr\left(Z \geq -\frac{t - 900}{75}\right) = 0,05 \iff \\
 &\iff \Pr\left(Z \geq \frac{900 - t}{75}\right) = 0,05 \iff \\
 &\iff \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{900 - t}{75}\right) = 0,45 \iff \\
 &\iff \text{tab}\left(\frac{900 - t}{75}\right) = 0,45 \iff \\
 &\iff \frac{900 - t}{75} = 1,64 \iff t = 777
 \end{aligned}$$

As lâmpadas devem ser trocadas com 777 horas de uso para que apenas 5% se queimem antes da troca.

Exercício 3.1.

Na distribuição normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, encontre:

1. $\Pr(X \leq \mu + 2\sigma)$
2. $\Pr(|X - \mu| \leq \sigma)$
3. $\Pr(|X - \mu| \leq 1,96\sigma)$
4. o número k tal que $\Pr(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = 0,99$
5. o número k tal que $\Pr(X > k) = 0,90$.

Exercício 3.2.

Suponha que os tempos de vida de duas marcas de aparelhos elétricos sejam variáveis aleatórias D_1 e D_2 , onde $D_1 \sim N(42, 36)$ e $D_2 \sim N(45, 9)$. Se o aparelho deve ser usado por um período de 45 horas, qual marca deve ser preferida? E se for por um período de 49 horas?

Exercício 3.3.

Numa distribuição normal, 31% dos elementos são menores que 45 e 8% são maiores que 64. Calcular os parâmetros que definem a distribuição.

Exercício 3.4.

As vendas de um determinado produto têm distribuição aproximadamente normal, com média de 500 unidades e desvio padrão de 50 unidades. Se a empresa decide fabricar 600 unidades no mês em estudo, qual a probabilidade de que não possa atender a todos os pedidos desse mês, por estar com a produção esgotada?

Exercício 3.5.

Um produto alimentício é ensacado automaticamente, sendo o peso médio de 50kg por saco, com desvio padrão de 1,6kg. Os clientes exigem que, para cada saco fornecido com menos de 48kg, o fornecedor pague uma indenização de 5 u.m.

1. Para 200 sacos fornecidos, qual o custo médio com indenização?
2. Para que o custo calculado no item anterior caia para 50 u.m., qual deveria ser a nova regulação média da máquina?
3. Como o fornecedor acha que, no custo global, é desvantajoso aumentar a regulação da máquina, ele quer comprar uma nova máquina. Qual deveria ser o desvio padrão dessa máquina para que, trabalhando com peso médio de 50kg, em apenas 3% dos sacos se pague indenização?

Exercício 3.6.

Um teste de aptidão para o exercício de certa profissão exige uma sequência de operações a serem executadas rapidamente uma após a outra. Para passar no teste, o candidato deve completá-lo em, no máximo, 80 minutos.

Admita que o tempo, em minutos, para completar a prova seja uma variável aleatória normal com média 90 minutos e desvio padrão 20 minutos.

1. Que porcentagem dos candidatos tem chance de ser aprovada?
2. Os 5% melhores receberão um certificado especial. Qual o tempo máximo para fazer jus a tal certificado?

Exercício 3.7.

O diâmetro X de rolamentos de esfera fabricados por certa fábrica tem distribuição normal com média 0,6140 e desvio padrão 0,0025. O lucro T de cada esfera depende do seu diâmetro:

- $T = 0,10$ se a esfera é boa, isto é, $0,6100 < X < 0,6180$
- $T = 0,05$ se a esfera é recuperável, isto é, $0,6080 < X < 0,6100$ ou $0,6180 < X < 0,6200$
- $T = -0,10$ se a esfera é defeituosa, isto é, $X < 0,6080$ ou $X > 0,6200$

Calcule as probabilidades de as esferas serem boas, recuperáveis e defeituosas, e o lucro médio.

Exercício 3.8.

Uma empresa produz televisores e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar algum defeito grave no prazo de 6 meses.

Ela produz televisores do tipo **A**, comum, e do tipo **B**, de luxo, com um lucro respectivo de 1.000 u.m. e 2.000 u.m. caso não haja restituição, e com prejuízo de 3.000 u.m. e 8.000 u.m., se houver restituição.

Suponha que o tempo para ocorrência de algum defeito grave seja, em ambos os casos, uma v.a. com distribuição normal com médias de 9 meses e 12 meses e desvios padrões de 2 meses e 3 meses. Se tivesse que planejar uma estratégia de marketing para a empresa, você incentivaria as vendas dos aparelhos tipo **A** ou tipo **B**?

Exercício 3.9.

A distribuição dos pesos de coelhos criados em uma granja pode ser representada por uma distribuição normal com média de 5kg e desvio padrão de 0,8 kg.

Um abatedouro comprará 5.000 coelhos e pretende classificá-los de acordo com o peso da seguinte forma: 20% dos leves como pequenos, os 55% seguintes como médios, os 15% seguintes como grandes e os 10% mais pesados como extras. Quais os limites de peso para cada classificação?

Exercício 3.10.

Considere uma v.a. $X \sim N(3, 25)$:

1. Calcule $\Pr(-3 \leq X \leq 3)$
2. Calcule $\Pr(-2 \leq X \leq 8)$
3. Encontre o valor de k tal que $\Pr(X > k) = 0,05$.
4. Encontre o valor de k tal que $\Pr(X > k) = 0,80$.

Exercício 3.11.

Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Encontre a mediana e o intervalo interquartil de X .

Exercício 3.12.

O 90º percentil de uma v.a. $N(\mu, \sigma^2)$ é 50, enquanto o 15º percentil é 25. Encontre os valores dos parâmetros da distribuição.

Exercício 3.13.

Uma enchedora automática enche garrafas de acordo com uma distribuição normal de média 1.000 ml. Deseja-se que no máximo uma garrafa em 100 saia com menos de 990ml. Qual deve ser o maior desvio padrão tolerável?

SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Exercício 3.1.

1. $\Pr(X \leq \mu + 2\sigma) = \Pr\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma}\right)$
 $= \Pr(Z \leq 2)$
 $= 0,5 + \text{tab}(2) = 0,97725$

2. $\Pr(|X - \mu| \leq \sigma) = \Pr(-\sigma \leq X - \mu \leq \sigma)$
 $= \Pr\left(-\frac{\sigma}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\sigma}{\sigma}\right)$
 $= \Pr(-1 \leq Z \leq 1)$
 $= 2 \times \Pr(0 \leq Z \leq 1)$
 $= 2 \times \text{tab}(1) = 0,68268$

3. $\Pr(|X - \mu| \leq 1,96\sigma) = \Pr(-1,96\sigma \leq X - \mu \leq 1,96\sigma)$
 $= \Pr\left(-1,96\frac{\sigma}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq 1,96\frac{\sigma}{\sigma}\right)$
 $= \Pr(-1,96 \leq Z \leq 1,96)$
 $= 2 \times \Pr(0 \leq Z \leq 1,96)$
 $= 2 \times \text{tab}(1,96) = 0,95$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & \Pr(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = 0,99 \Leftrightarrow \\
 & \Pr\left(\frac{\mu - k\sigma - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\mu + k\sigma - \mu}{\sigma}\right) = 0,99 \Leftrightarrow \\
 & \Pr(-k \leq Z \leq k) = 0,99 \Leftrightarrow \\
 & \Pr(0 \leq Z \leq k) = 0,495 \Leftrightarrow \\
 & \text{tab}(k) = 0,495 \Leftrightarrow k = 2,58
 \end{aligned}$$

5. Deve-se notar aqui o seguinte fato; como a probabilidade à direita de k é 0,90, maior que 0,5, então k tem de estar à esquerda da média. Veja a **Figura 3.9**.

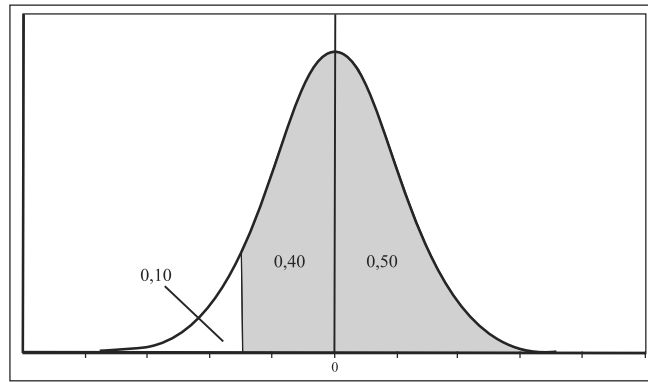


Figura 3.9: $\Pr(X > k) = 0,90$ é equivalente a $\Pr(X \leq k) = 0,10$

$$\begin{aligned}
 \Pr(X > k) = 0,90 & \Leftrightarrow \Pr(X \leq k) = 0,10 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \Pr\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{k - \mu}{\sigma}\right) = 0,10 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \Pr\left(Z \leq \frac{k - \mu}{\sigma}\right) = 0,10 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \Pr\left(Z \geq -\frac{k - \mu}{\sigma}\right) = 0,10 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \Pr\left(Z \geq \frac{\mu - k}{\sigma}\right) = 0,10 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{\mu - k}{\sigma}\right) = 0,40 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \text{tab}\left(\frac{\mu - k}{\sigma}\right) = 0,40 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \frac{\mu - k}{\sigma} = 1,28 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \mu - k = 1,28\sigma \Leftrightarrow k = \mu - 1,28\sigma
 \end{aligned}$$

Exercício 3.2.

O aparelho a ser usado tem que ser aquele que apresenta a maior probabilidade de funcionar pelo menos durante o tempo necessário.

Caso 1: O tempo necessário é de 45 horas.

$$\begin{aligned}\Pr(D_1 \geq 45) &= \Pr\left(\frac{D_1 - 42}{6} \geq \frac{45 - 42}{6}\right) \\ &= \Pr(Z \geq 0,5) \\ &= 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 0,5) \\ &= 0,5 - \text{tab}(0,5) \\ &= 0,3085\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(D_2 \geq 45) &= \Pr\left(\frac{D_2 - 45}{3} \geq \frac{45 - 45}{3}\right) \\ &= \Pr(Z \geq 0) = 0,5\end{aligned}$$

Logo, o aparelho 2 tem maior probabilidade de funcionar durante as 45 horas necessárias e, por isso, nesse caso, deve ser o escolhido.

Caso 2: O tempo necessário é de 49 horas.

$$\begin{aligned}\Pr(D_1 \geq 49) &= \Pr\left(\frac{D_1 - 42}{6} \geq \frac{49 - 42}{6}\right) \\ &= \Pr(Z \geq 1,17) \\ &= 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 1,17) \\ &= 0,5 - \text{tab}(1,17) = 0,1210\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(D_2 \geq 49) &= \Pr\left(\frac{D_2 - 45}{3} \geq \frac{49 - 45}{3}\right) \\ &= \Pr(Z \geq 1,33) \\ &= 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 1,33) \\ &= 0,5 - \text{tab}(1,33) = 0,0918\end{aligned}$$

Logo, o aparelho 1 tem maior probabilidade de funcionar durante as 49 horas necessárias e, portanto, deve ser o escolhido nesse caso.

Exercício 3.3.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\begin{aligned} \Pr(X < 45) &= 0,31 \Rightarrow \\ \Pr\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{45 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,31 \Rightarrow \\ \Pr\left(Z < \frac{45 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,31 \Rightarrow \\ \Pr\left(Z > -\frac{45 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,31 \Rightarrow \\ \Pr\left(Z > \frac{\mu - 45}{\sigma}\right) &= 0,31 \Rightarrow \\ \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{\mu - 45}{\sigma}\right) &= 0,19 \Rightarrow \\ \text{tab}\left(\frac{\mu - 45}{\sigma}\right) &= 0,19 \Rightarrow \\ \frac{\mu - 45}{\sigma} &= 0,5 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Note que a abscissa $\frac{45 - \mu}{\sigma}$ tem de ser negativa, daí a inversão de sinal!

$$\begin{aligned} \Pr(X > 64) &= 0,08 \Rightarrow \\ \Pr\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{64 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,08 \Rightarrow \\ \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{64 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,42 \Rightarrow \\ \text{tab}\left(\frac{64 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,42 \Rightarrow \\ \frac{64 - \mu}{\sigma} &= 1,41 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Temos duas equações e duas incógnitas. Da primeira equação tiramos que

$$\mu = 45 + 0,5\sigma$$

Substituindo na segunda, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{64 - (45 + 0,5\sigma)}{\sigma} &= 1,41 \Rightarrow \\ 64 - 45 - 0,5\sigma &= 1,41\sigma \Rightarrow \\ 1,91\sigma &= 19 \Rightarrow \sigma \simeq 10 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\mu = 45 + 0,5 \times 10 = 50$$

Exercício 3.4.

Seja X = número de unidades vendidas. Então, $X \sim N(500, 50^2)$. Se a empresa fabricou 600 unidades no mês em estudo, a probabilidade de não poder atender à demanda é

$$\begin{aligned}\Pr(X > 600) &= \Pr\left(\frac{X - 500}{50} > \frac{600 - 500}{50}\right) \\ &= \Pr(Z > 2) \\ &= 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0,5 - \text{tab}(2) = 0,0228\end{aligned}$$

Exercício 3.5.

Seja X = peso do saco em kg. Então, $X \sim N(50; 1,6^2)$. Veja a **Figura 3.10**.

1. Para um saco qualquer, a probabilidade de pagar indenização é

$$\begin{aligned}\Pr(X < 48) &= \Pr\left(\frac{X - 50}{1,6} < \frac{48 - 50}{1,6}\right) \\ &= \Pr(Z < -1,25) \\ &= \Pr(Z > 1,25) \\ &= 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 1,25) \\ &= 0,5 - \text{tab}(1,25) = 0,1056\end{aligned}$$

Seja Y = número de sacos, em um conjunto de 200, com peso menor que 48kg. Então, $Y \sim \text{bin}(200; 0,1056)$.

O número médio de sacos com peso menor que 48 é $200 \times 0,1056$. O custo médio com indenização será de $5 \times 200 \times 0,1056 = 105,6$ u.m.

2. Para reduzir o custo para 50 u.m., temos

$$5 \times 200 \times \Pr(\text{pagar indenização em um saco}) = 50 \Rightarrow$$

$$\Pr(X < 48) = 0,05,$$

mas

$$\begin{aligned}\Pr(X < 48) &= 0,05 \Leftrightarrow \\ \Pr\left(\frac{X - \mu}{1,6} < \frac{48 - \mu}{1,6}\right) &= 0,05 \Leftrightarrow \\ \Pr\left(Z < \frac{48 - \mu}{1,6}\right) &= 0,05 \Leftrightarrow \\ \Pr\left(Z > -\frac{48 - \mu}{1,6}\right) &= 0,05 \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{\mu - 48}{1,6}\right) &= 0,45 \Leftrightarrow \\ \text{tab}\left(\frac{\mu - 48}{1,6}\right) &= 0,45 \Leftrightarrow \\ \frac{\mu - 48}{1,6} &= 1,64 \Leftrightarrow \mu = 50,624 \text{ kg}\end{aligned}$$

Veja a **Figura 3.10** para ilustração das probabilidades envolvidas:

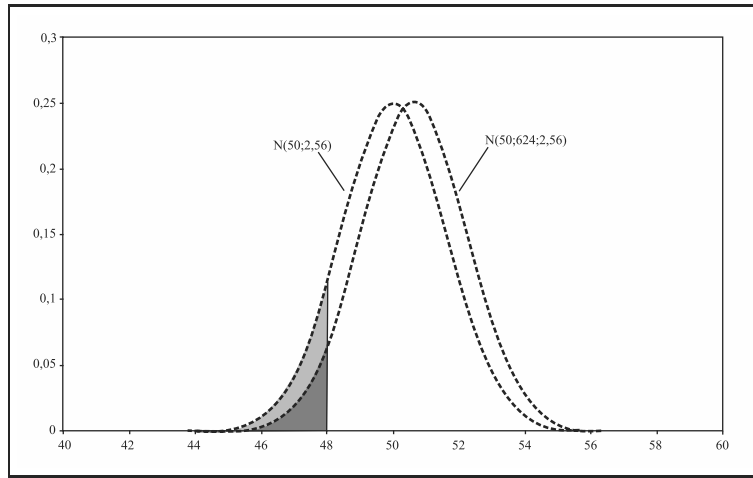


Figura 3.10: Compare $X \sim N(50; 1,6^2)$ e $X \sim N(50,624; 1,6^2)$.

3. Com a média fixada em 50, o que se pretende agora é controlar a variabilidade do processo, medida pelo desvio padrão, ou seja, o peso dos pacotes agora é $X \sim N(50, \sigma^2)$. A regra para indenização continua a mesma; logo,

$$\begin{aligned}\Pr(X < 48) &= 0,03 \Leftrightarrow \\ \Pr\left(\frac{X - 50}{\sigma} < \frac{48 - 50}{\sigma}\right) &= 0,03 \Leftrightarrow \\ \Pr\left(Z < -\frac{2}{\sigma}\right) &= 0,03 \Leftrightarrow \\ \Pr\left(Z > \frac{2}{\sigma}\right) &= 0,03 \Leftrightarrow \\ \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{2}{\sigma}\right) &= 0,47 \Leftrightarrow \\ \text{tab}\left(\frac{2}{\sigma}\right) &= 0,47 \Leftrightarrow \\ \frac{2}{\sigma} &= 1,88 \Leftrightarrow \sigma = 1,064\end{aligned}$$

Na **Figura 3.11**, temos o gráfico que ilustra as duas probabilidades.

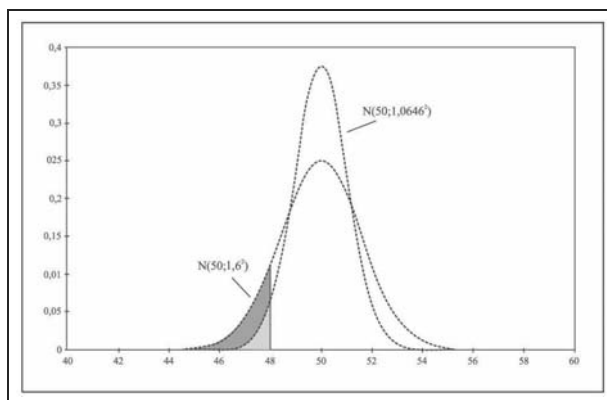


Figura 3.11: Compare $X \sim N(50; 1, 6^2)$ e $X \sim N(50; 1, 0646^2)$.

Exercício 3.6.

Seja T = tempo de execução, em minutos. Então, $T \sim N(90, 20^2)$.

$$\begin{aligned}
 1. \quad \Pr(T \leq 80) &= \Pr\left(\frac{T - 90}{20} \leq \frac{80 - 90}{20}\right) \\
 &= \Pr(Z \leq -0,5) = \Pr(Z \geq 0,5) \\
 &= 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 0,5) \\
 &= 0,5 - \text{tab}(0,5) = 0,3085
 \end{aligned}$$

2. Os melhores têm de ter tempo menor, ou seja, queremos determinar k tal que

$$\begin{aligned}
 \Pr(T \leq k) &= 0,05 \Rightarrow \\
 \Pr\left(\frac{T - 90}{20} \leq \frac{k - 90}{20}\right) &= 0,05 \Rightarrow \\
 \Pr\left(Z \leq \frac{k - 90}{20}\right) &= 0,05 \Rightarrow \\
 \Pr\left(Z \geq -\frac{k - 90}{20}\right) &= 0,05 \Rightarrow \\
 \Pr\left(Z \geq \frac{90 - k}{20}\right) &= 0,05 \Rightarrow \\
 \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{90 - k}{20}\right) &= 0,45 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{tab}\left(\frac{90-k}{20}\right) &= 0,45 \Rightarrow \\ \frac{90-k}{20} &= 1,64 \Rightarrow k = 57,2\end{aligned}$$

Então, para fazer jus ao certificado especial, o candidato tem de executar a tarefa em, no máximo, 57,2 minutos.

Exercício 3.7.

Seja D = diâmetro dos rolamentos de esfera. Então, $D \sim N(0,6140; 0,0025^2)$.

Vamos denotar por B, R e F os eventos “esfera boa”, “esfera recuperável” e “esfera defeituosa”, respectivamente.

$$\begin{aligned}\Pr(B) &= \Pr(0,610 < D < 0,618) \\ &= \Pr\left(\frac{0,610 - 0,614}{0,0025} < \frac{D - 0,614}{0,0025} < \frac{0,618 - 0,614}{0,0025}\right) \\ &= \Pr(-1,6 < Z < 1,6) \\ &= 2 \times \Pr(0 \leq Z < 1,6) \\ &= 2 \times \text{tab}(1,6) = 0,8904\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(R) &= \Pr[(0,608 < D < 0,610) \cup (0,618 < D < 0,620)] \\ &= \Pr(0,608 < D < 0,610) + \Pr(0,618 < D < 0,620) \\ &= \Pr\left(\frac{0,608 - 0,614}{0,0025} < \frac{D - 0,614}{0,0025} < \frac{0,610 - 0,614}{0,0025}\right) + \\ &\quad + \Pr\left(\frac{0,618 - 0,614}{0,0025} < \frac{D - 0,614}{0,0025} < \frac{0,620 - 0,614}{0,0025}\right) \\ &= \Pr(-2,4 < Z < -1,6) + \Pr(1,6 < Z < 2,4) \\ &= 2 \times \Pr(1,6 < Z < 2,4) \\ &= 2 \times [\text{tab}(2,4) - \text{tab}(1,6)] \\ &= 2 \times [0,4918 - 0,4452] = 0,0932\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(F) &= \Pr[(D < 0,608) \cup (D > 0,620)] \\ &= \Pr(D < 0,608) + \Pr(D > 0,620) \\ &= \Pr\left(\frac{D - 0,614}{0,0025} < \frac{0,608 - 0,614}{0,0025}\right) + \Pr\left(\frac{D - 0,614}{0,0025} > \frac{0,620 - 0,614}{0,0025}\right) \\ &= \Pr(Z < -2,4) + \Pr(Z > 2,4) \\ &= 2 \times \Pr(Z > 2,4) \\ &= 2 \times [0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 2,4)] \\ &= 2 \times [0,5 - \text{tab}(2,4)] = 0,0164\end{aligned}$$

Com relação ao lucro, temos a seguinte fdp

t	0,10	0,05	-0,10
$\Pr(T = t)$	0,8904	0,0932	0,0164

Logo,

$$E(T) = 0,10 \times 0,8904 + 0,05 \times 0,0932 - 0,10 \times 0,0164 = 0,09206$$

Exercício 3.8.

Defina as seguintes variáveis aleatórias:

T_A : tempo, em meses, para ocorrência de defeito nos televisores tipo A

T_B : tempo, em meses, para ocorrência de defeito nos televisores tipo B

L_A : lucro com televisores tipo A

L_B : lucro com televisores tipo B

Temos que

$$T_A \sim N(9, 2^2)$$

$$T_B \sim N(12, 3^2)$$

$$\begin{aligned} \Pr(T_A > 6) &= \Pr\left(\frac{T_A - 9}{2} > \frac{6 - 9}{2}\right) \\ &= \Pr(Z > -1,5) \\ &= \Pr(-1,5 < Z < 0) + \Pr(Z \geq 0) \\ &= \Pr(0 < Z < 1,5) + 0,5 \\ &= \text{tab}(1,5) + 0,5 = 0,9332 \end{aligned}$$

Logo, para os televisores do tipo A , a probabilidade de restituição por defeito grave é $1 - 0,9332 = 0,0668$.

$$\begin{aligned} \Pr(T_B > 6) &= \Pr\left(\frac{T_B - 12}{3} > \frac{6 - 12}{3}\right) \\ &= \Pr(Z > -2,0) \\ &= \Pr(-2,0 < Z < 0) + \Pr(Z \geq 0) \\ &= \Pr(0 < Z < 2,0) + 0,5 \\ &= \text{tab}(2,0) + 0,5 = 0,9772 \end{aligned}$$

Logo, para os televisores do tipo B , a probabilidade de restituição por defeito grave é $1 - 0,9772 = 0,0228$. Com esses resultados, obtemos as seguintes distribuições para os lucros:

x	1000	-3000
$\Pr(L_A = x)$	0,9332	0,0668

x	2000	-8000
$\Pr(L_B = x)$	0,9772	0,0228

Logo, os lucros médios são:

$$E(L_A) = 1000 \times 0,9332 - 3000 \times 0,0668 = 732,8$$

$$E(L_B) = 2000 \times 0,9772 - 8000 \times 0,0228 = 1772$$

Como o lucro esperado (lucro médio) com os televisores do tipo B é maior, deve-se investir nas vendas desse tipo de televisor.

Exercício 3.9.

Defina a v.a. X = peso dos coelhos. Então, $X \sim N(5; 0,8^2)$.

Vamos denotar por a, b e c os limites para as classes de peso.

$$\Pr(X < a) = 0,20 \Leftrightarrow$$

$$\Pr\left(\frac{X-5}{0,8} < \frac{a-5}{0,8}\right) = 0,20 \Leftrightarrow$$

$$\Pr\left(Z < \frac{a-5}{0,8}\right) = 0,20 \Leftrightarrow$$

$$\Pr\left(Z > -\frac{a-5}{0,8}\right) = 0,20 \Leftrightarrow$$

$$\Pr\left(Z > \frac{5-a}{0,8}\right) = 0,20 \Leftrightarrow$$

$$\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{5-a}{0,8}\right) = 0,30 \Leftrightarrow$$

$$\text{tab}\left(\frac{5-a}{0,8}\right) = 0,30 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5-a}{0,8} = 0,84 \Leftrightarrow a = 4,328$$

$$\Pr(X < b) = 0,75 \Leftrightarrow$$

$$\Pr\left(\frac{X-5}{0,8} < \frac{b-5}{0,8}\right) = 0,75 \Leftrightarrow$$

$$\Pr\left(Z < \frac{b-5}{0,8}\right) = 0,75 \Leftrightarrow$$

$$\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{b-5}{0,8}\right) = 0,25 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}\text{tab}\left(\frac{b-5}{0,8}\right) &= 0,25 \Leftrightarrow \\ \frac{b-5}{0,8} &= 0,67 \Leftrightarrow b = 5,536\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X < c) &= 0,90 \Leftrightarrow \\ \Pr\left(\frac{X-5}{0,8} < \frac{c-5}{0,8}\right) &= 0,90 \Leftrightarrow \\ \Pr\left(Z < \frac{c-5}{0,8}\right) &= 0,90 \Leftrightarrow \\ \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{c-5}{0,8}\right) &= 0,40 \Leftrightarrow \\ \text{tab}\left(\frac{c-5}{0,8}\right) &= 0,40 \Leftrightarrow \\ \frac{c-5}{0,8} &= 1,28 \Leftrightarrow c = 6,024\end{aligned}$$

Os coelhos são classificados como pequenos se o peso for menor que 4,328kg; como médios se o peso estiver entre 4,328 e 5,536kg; como grandes se o peso estiver entre 5,536 e 6,024kg e como extragrandes se o peso for maior que 6,024kg.

Exercício 3.10.

$$X \sim N(3, 25) :$$

$$\begin{aligned}1. \quad \Pr(-3 \leq X \leq 3) &= \Pr\left(\frac{-3-3}{5} \leq \frac{X-3}{5} \leq \frac{3-3}{5}\right) \\ &= \Pr(-1,2 \leq Z \leq 0) \\ &= \Pr(0 \leq Z \leq 1,2) \\ &= \text{tab}(1,2) = 0,38493 \\ \\ 2. \quad \Pr(-2 \leq X \leq 8) &= \Pr\left(\frac{-2-3}{5} \leq \frac{X-3}{5} \leq \frac{8-3}{5}\right) \\ &= \Pr(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= \Pr(-1 \leq Z \leq 0) + \Pr(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 2 \times \Pr(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 2 \times \text{tab}(1,0) = 0,68268\end{aligned}$$

3. Note que k tem de ser maior que a média.

$$\begin{aligned}
 \Pr(X > k) &= 0,05 \iff \\
 \Pr\left(\frac{X-3}{5} > \frac{k-3}{5}\right) &= 0,05 \iff \\
 \Pr\left(Z > \frac{k-3}{5}\right) &= 0,05 \iff \\
 \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{k-3}{5}\right) &= 0,45 \iff \\
 \text{tab}\left(\frac{k-3}{5}\right) &= 0,45 \iff \\
 \frac{k-3}{5} &= 1,64 \iff k = 11,2
 \end{aligned}$$

4. Note que k tem de ser menor que a média.

$$\begin{aligned}
 \Pr(X > k) &= 0,80 \iff \\
 \Pr\left(\frac{X-3}{5} > \frac{k-3}{5}\right) &= 0,80 \iff \\
 \Pr\left(Z > \frac{k-3}{5}\right) &= 0,80 \iff \\
 \Pr\left(\frac{k-3}{5} \leq Z \leq 0\right) + \Pr(Z > 0) &= 0,80 \iff \\
 \Pr\left(0 \leq Z \leq -\frac{k-3}{5}\right) + 0,5 &= 0,80 \iff \\
 \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{3-k}{5}\right) &= 0,30 \iff \\
 \text{tab}\left(\frac{3-k}{5}\right) &= 0,30 \\
 \frac{3-k}{5} &= 0,84 \iff k = -1,2
 \end{aligned}$$

Exercício 3.11.

Como a distribuição normal é simétrica, resulta que $Q_2 = \mu$ (a média, a mediana e a moda sempre coincidem numa distribuição simétrica unimodal).

$$\begin{aligned}
\Pr(X < Q_1) &= 0,25 \iff \\
\Pr\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{Q_1 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,25 \iff \\
\Pr\left(Z < \frac{Q_1 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,25 \iff \\
\Pr\left(Z > -\frac{Q_1 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,25 \iff \\
\Pr\left(Z > \frac{\mu - Q_1}{\sigma}\right) &= 0,25 \iff \\
\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{\mu - Q_1}{\sigma}\right) &= 0,5 - 0,25 \iff \\
\text{tab}\left(\frac{\mu - Q_1}{\sigma}\right) &= 0,25 \iff \\
\frac{\mu - Q_1}{\sigma} &= 0,67 \iff \\
Q_1 &= \mu - 0,67\sigma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(X > Q_3) &= 0,25 \iff \\
\Pr\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{Q_3 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,25 \iff \\
\Pr\left(Z > \frac{Q_3 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,25 \iff \\
\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{Q_3 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,25 \iff \\
\text{tab}\left(\frac{Q_3 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,25 \iff \\
\frac{Q_3 - \mu}{\sigma} &= 0,67 \iff \\
Q_3 &= \mu + 0,67\sigma
\end{aligned}$$

Logo,

$$IQ = Q_3 - Q_1 = (\mu + 0,67\sigma) - (\mu - 0,67\sigma) = 1,34\sigma$$

Exercício 3.12.

Temos que $P_{90} = 50$ e $P_{15} = 25$. Logo, a média tem de estar entre 25 e 50.

$$\begin{aligned}
P_{90} = 50 &\Rightarrow \\
\Pr(X < 50) &= 0,90 \Rightarrow \\
\Pr\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{50 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,90 \Rightarrow \\
\Pr\left(Z < \frac{50 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,90 \Rightarrow \\
\Pr(Z \leq 0) + \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{50 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,90 \Rightarrow \\
0,5 + \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{50 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,90 \Rightarrow \\
\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{50 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,40 \Rightarrow \\
\text{tab}\left(\frac{50 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,40 \Rightarrow \\
\frac{50 - \mu}{\sigma} &= 1,25 \Rightarrow \\
\mu &= 50 - 1,25\sigma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{15} = 25 &\Rightarrow \\
\Pr(X < 25) &= 0,15 \Rightarrow \\
\Pr\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{25 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,15 \Rightarrow \\
\Pr\left(Z < \frac{25 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,15 \Rightarrow \\
\Pr\left(Z > -\frac{25 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,15 \Rightarrow \\
\Pr\left(Z > \frac{\mu - 25}{\sigma}\right) &= 0,15 \Rightarrow \\
\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{\mu - 25}{\sigma}\right) &= 0,35 \Rightarrow \\
\text{tab}\left(\frac{\mu - 25}{\sigma}\right) &= 0,35 \Rightarrow \\
\frac{\mu - 25}{\sigma} &= 1,04 \Rightarrow \\
\mu &= 25 + 1,04\sigma
\end{aligned}$$

Temos um sistema com duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} \mu = 50 - 1,25\sigma \\ \mu = 25 + 1,04\sigma \end{cases}$$

Daí resulta que

$$50 - 1,25\sigma = 25 + 1,04\sigma \implies$$

$$25 = (1,25 + 1,04)\sigma \implies$$

$$\sigma = 10,92$$

Logo,

$$\mu = 50 - 1.25 \times 10.92 = 36,35$$

Exercício 3.13.

Seja $X =$ “conteúdo da garrafa (em ml)”, então $X \sim N(1000; \sigma^2)$.

Queremos que $\Pr(X < 990) \leq 0,01$.

Seja σ_0 o valor do desvio padrão de X tal que $\Pr(X < 990) = 0,01$. Então, qualquer valor de σ tal que $\sigma < \sigma_0$ resulta em

$$\Pr(X < 990) < 0,01.$$

Veja a **Figura 3.12**.

A cauda inferior da distribuição corresponde a $\Pr(X < 990)$ e quanto menor σ , menor essa probabilidade.

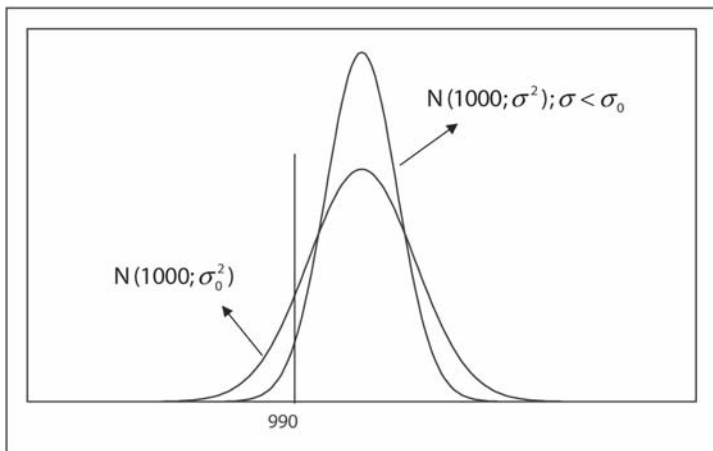


Figura 3.12: A cauda esquerda corresponde a $\Pr(X < 990)$.

Logo,

$$\Pr(X < 990) \leq 0,01 \iff$$

$$\Pr\left(\frac{X - 1000}{\sigma} < \frac{990 - 1000}{\sigma}\right) \leq 0,01 \iff$$

$$\Pr\left(Z < \frac{990 - 1000}{\sigma}\right) \leq 0,01 \iff$$

$$\Pr\left(Z > -\frac{990 - 1000}{\sigma}\right) \leq 0,01 \iff$$

$$\Pr\left(Z > \frac{10}{\sigma}\right) \leq 0,01 \iff$$

$$\Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) \geq 0,5 - 0,01 = 0,49 \iff$$

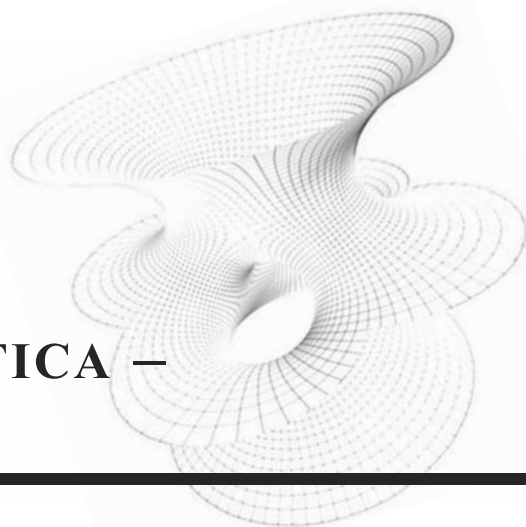
$$\text{tab}\left(\frac{10}{\sigma}\right) \geq 0,49 \iff$$

$$\frac{10}{\sigma} \geq 2,33 \iff$$

$$\sigma \leq \frac{10}{2,33} = 4,2918$$

Aula 4

INFERÊNCIA ESTATÍSTICA – CONCEITOS BÁSICOS



O b j e t i v o s

Na primeira parte do curso foi visto como resumir um conjunto de dados por meio de tabelas de frequências, gráficos e medidas de posição e dispersão. Depois, foram estudados modelos probabilísticos, discretos ou contínuos, para descrever determinados fenômenos. Agora, essas ferramentas serão utilizadas no estudo de um importante ramo da Estatística, conhecido como Inferência Estatística, que busca métodos de fazer afirmações sobre características de uma população, conhecendo-se apenas resultados de uma amostra.

Nesta aula, você estudará os seguintes conceitos:

- 1 população e amostra;
- 2 amostra aleatória simples;
- 3 estatísticas e parâmetros;
- 4 estimador;
- 5 distribuição amostral de um estimador.

INFERÊNCIA ESTATÍSTICA – CONCEITOS BÁSICOS

INTRODUÇÃO

No estudo da estatística descritiva na primeira parte do curso, vimos que população é o conjunto de elementos para os quais se deseja estudar determinada(s) característica(s). Vimos também que uma amostra é um subconjunto da população.

No estudo da inferência estatística, o objetivo principal é obter informações sobre uma população a partir das informações de uma amostra e aqui vamos precisar de definições mais formais de população e amostra. Para facilitar a compreensão desses conceitos, iremos apresentar alguns exemplos a título de ilustração.

Exemplo 4.1.

Em um estudo antropométrico em nível nacional, uma amostra de 5.000 adultos é selecionada dentre os adultos brasileiros e uma das variáveis de estudo é a altura.

Neste exemplo, a população é o conjunto de todos os brasileiros adultos. No entanto, o interesse (um deles, pelo menos) está na altura dos brasileiros. Assim, nesse estudo, a cada sujeito da população associamos um número correspondente à sua altura. Se determinado sujeito é sorteado para entrar na amostra, o que nos interessa é esse número, ou seja, sua altura.

Como vimos, essa é a definição de variável aleatória: uma função que associa a cada ponto do espaço amostral um número real. Dessa forma, a nossa população pode ser representada pela variável aleatória $X = \text{“altura do adulto brasileiro”}$. Como essa é uma v.a. contínua, a ela está associada uma função de densidade de probabilidade f e da literatura, sabemos que é razoável supor que essa densidade seja a densidade normal. Assim, nossa população, nesse caso, é representada por uma v.a. $X \sim N(\mu; \sigma^2)$. Conhecendo os valores de μ e σ , teremos informações completas sobre a nossa população.

Uma forma de obtermos os valores de μ e σ é medindo as alturas de todos os brasileiros adultos. Mas esse seria um procedimento caro e demorado. Uma solução, então, é retirar uma amostra (subconjunto) da população e estudar essa amostra.

Suponhamos que essa amostra seja retirada com reposição e que os sorteios sejam feitos de forma independente, isto é, o resultado de cada extração não altere o resultado das demais extrações. Ao sortearmos o primeiro elemento, estamos realizando um experimento que dá origem à v.a. X_1 = “altura do primeiro elemento”; o segundo elemento dá origem à v.a. X_2 = “altura do segundo elemento” e assim por diante.

Como as extrações são feitas com reposição, todas as v.a. X_1, X_2, \dots têm a mesma distribuição, que reflete a distribuição da altura de todos os brasileiros adultos. Para uma amostra específica, temos os valores observados x_1, x_2, \dots dessas variáveis aleatórias.

Exemplo 4.2.

Consideremos, agora, um exemplo baseado em pesquisas eleitorais, em que estamos interessados no resultado do segundo turno de uma eleição presidencial brasileira. Mais uma vez, nossos sujeitos de pesquisa são pessoas com 16 anos ou mais, aptas a votar. O interesse final é saber a proporção de votos de um e outro candidato.

Vamos considerar uma situação simplificada em que não estamos considerando votos nulos, indecisos etc. Então, cada sujeito de pesquisa dá origem a uma variável aleatória binária, isto é, uma v.a. que assume apenas dois valores.

Como visto, podemos representar esses valores por 1 (candidato A) e 0 (candidato B), o que define uma variável aleatória de Bernoulli, ou seja, essa população pode ser representada pela v.a. $X \sim \text{Bern}(p)$. O parâmetro p representa a probabilidade de um sujeito dessa população votar no candidato A. Uma outra interpretação é que p representa a proporção populacional de votantes no candidato A.

Para obtermos informação sobre p , retira-se uma amostra da população e, como antes, vamos supor que essa amostra seja retirada com reposição. Ao sortearmos o primeiro elemento, estamos realizando um experimento que dá origem à v.a. X_1 = “voto do primeiro elemento”; o segundo elemento dá origem à v.a. X_2 = “voto do segundo elemento” e assim por diante.

Como as extrações são feitas com reposição, todas as v.a. X_1, X_2, \dots têm a mesma distribuição de Bernoulli populacional, isto é, $X_i \sim \text{Bern}(p), i = 1, 2, \dots$

POPULAÇÃO

A inferência estatística trata do problema de se obter informação sobre uma população a partir de uma amostra. Embora a população real possa ser constituída de pessoas, empresas, animais etc.

As pesquisas estatísticas buscam informações sobre determinadas características dos sujeitos, características essas que podem ser representadas por números. Sendo assim, a cada sujeito da população está associado um número, o que nos permite apresentar a seguinte definição.

Definição 4.1.

A **população** de uma pesquisa estatística pode ser representada por uma variável aleatória X que descreve a característica de interesse.

Os métodos de inferência nos permitirão obter estimativas dos parâmetros de tal variável aleatória, que pode ser contínua ou discreta.

AMOSTRA ALEATÓRIA SIMPLES

Como já dito, é bastante comum o emprego da amostragem em pesquisas estatísticas. Nas pesquisas por amostragem, uma amostra é selecionada da população de interesse e todas as conclusões serão baseadas apenas nessa amostra. Para que seja possível inferir resultados para a população a partir da amostra, é necessário que esta seja “representativa” da população.

Embora existam vários métodos de seleção de amostras, vamos nos concentrar, aqui, no caso mais simples, que é a *amostragem aleatória simples*. Segundo tal método, toda amostra de mesmo tamanho n tem igual chance (probabilidade) de ser sorteada. É possível extrair amostras aleatórias simples com e sem reposição.

Quando estudamos as distribuições binomial e hipergeométrica, vimos que a distribuição binomial correspondia a extrações com reposição e a distribuição hipergeométrica correspondia a extrações sem reposição. No entanto, para populações

grandes – ou infinitas – extrações com e sem reposição não levam a resultados muito diferentes.

Assim, no estudo da Inferência Estatística, vamos sempre lidar com amostragem aleatória simples *com* reposição. Esse método de seleção atribui a cada elemento da população a mesma probabilidade de ser selecionado e esta probabilidade se mantém constante ao longo do processo de seleção da amostra (se as extrações fossem sem reposição isso não aconteceria).

No restante desse curso, vamos omitir a expressão “com reposição”, ou seja, o termo amostragem (ou amostra) aleatória simples sempre se referirá à amostragem com reposição. Por simplicidade, muitas vezes abreviaremos o termo amostra aleatória simples por *aas*.

Uma forma de se obter uma amostra aleatória simples é escrever os números ou nomes dos elementos da população em cartões iguais, colocar esses cartões em uma urna misturando-os bem e fazer os sorteios necessários, tendo o cuidado de colocar cada cartão sorteado na urna antes do próximo sorteio. Na prática, em geral, são usados programas de computador, uma vez que as populações tendem a ser muito grandes.

Agora vamos formalizar o processo de seleção de uma amostra aleatória simples, de forma a relacioná-lo com os problemas de inferência estatística que você vai estudar.

Seja uma população representada por uma variável aleatória X . De tal população será sorteada uma amostra aleatória simples com reposição de tamanho n . Como visto nos exemplos anteriores, cada sorteio dá origem a uma variável aleatória X_i e, como os sorteios são com reposição, todas essas variáveis têm a mesma distribuição de X . Isso nos leva à seguinte definição.

Definição 4.2.

Uma **amostra aleatória simples** (*aas*) de tamanho n de uma v.a. X (população) é um conjunto de n v.a. X_1, X_2, \dots, X_n independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.).

É interessante notar a convenção usual: o valor observado de uma v.a. X é representado pela letra minúscula correspondente. Assim, depois do sorteio de uma *aas* de tamanho n , temos valores observados x_1, x_2, \dots, x_n das respectivas variáveis aleatórias.

ESTATÍSTICAS E PARÂMETROS

Obtida uma amostra, é possível calcular diversas dessas características desta amostra, como, por exemplo, a média, a mediana, a variância etc. Qualquer uma dessas características é uma função de X_1, X_2, \dots, X_n e, portanto, o seu valor depende da amostra sorteada.

Sendo assim, cada uma dessas características ou funções é também uma v.a. Por exemplo, a média amostral é a v.a. definida por

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Temos a seguinte definição:

Definição 4.3.

Uma **estatística amostral** ou **estimador** T é qualquer função da amostra X_1, X_2, \dots, X_n , isto é,

$$T = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

onde g é uma função qualquer.

As estatísticas amostrais que consideraremos neste curso são:

- média amostral

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad (4.1)$$

- variância amostral

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (4.2)$$

Para uma amostra específica, o valor obtido para o estimador será denominado **estimativa** e, em geral, serão representadas por letras minúsculas. Por exemplo, temos as seguintes notações correspondentes à média amostral e à variância: \bar{x} e s^2 .

Outras estatísticas possíveis são o mínimo amostral, o máximo amostral, a amplitude amostral etc.

De forma análoga, temos as características de interesse da população. No entanto, para diferenciar as duas situações (população e amostra), atribuímos nomes diferentes.

Definição 4.4.

Parâmetro é uma característica da população.

Assim, se a população é representada pela v.a. X , alguns parâmetros são a esperança $E(X)$ e a variância $Var(X)$ de X .

Com relação às características mais usuais, vamos usar a seguinte nota,ção:

Característica	Parâmetro (população)	Estatística (amostra)
Média	μ	\bar{X}
Variância	σ^2	S^2
Número de elementos	N	n

Lembre-se de que, para uma v.a. discreta (finita) uniforme,

$$\mu = E(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

$$Var(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [X_i - E(X)]^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [X_i - \mu]^2$$

DISTRIBUIÇÕES AMOSTRAIS

Nos problemas de inferência, estamos interessados em estimar um parâmetro θ da população por meio de uma amostra X_1, X_2, \dots, X_n . Para isso, usamos uma estatística T (por exemplo, a média amostral) e, com base no valor obtido para T , a partir de uma amostra particular, iremos tomar as decisões que o problema exige. Já foi dito que T é uma v.a., uma vez que depende da amostra sorteada; amostras diferentes fornecerão diferentes valores para T .

Consideremos o seguinte exemplo, onde nossa população é o conjunto $\{1, 3, 6, 8\}$, isto é, este é o conjunto dos valores da

característica de interesse da população em estudo. Assim, para esta população, ou seja, para essa v.a. X , temos

$$E(X) = \mu = \frac{1}{4}(1 + 3 + 6 + 8) = 4,5$$

$$Var(X) = \sigma^2 = \frac{1}{4} \left[(1 - 4,5)^2 + (3 - 4,5)^2 + (6 - 4,5)^2 + (8 - 4,5)^2 \right] = 7,25$$

Suponha que dessa população iremos extrair uma aas de tamanho dois e a estatística que iremos calcular é a média amostral.

Algumas possibilidades de amostra são $\{1,1\}$, $\{1,3\}$, $\{6,8\}$, para as quais os valores da média amostral são 1, 2 e 7, respectivamente. Podemos ver, então, que há uma variabilidade nos valores da estatística e, assim, seria interessante que conhecêssemos tal variabilidade. Conhecendo tal variabilidade, temos condições de saber “quão infelizes” podemos ser no sorteio da amostra.

No exemplo acima, as amostras $\{1,1\}$ e $\{8,8\}$ são as que têm média amostral mais afastada da verdadeira média populacional. Se esses valores tiverem chance muito mais alta do que os valores mais próximos de $E(X)$, podemos ter sérios problemas.

Para conhecer o comportamento da média amostral, teríamos que conhecer todos os possíveis valores de \bar{X} , o que equivaleria a conhecer todas as possíveis amostras de tamanho dois de tal população. Nesse exemplo, como só temos quatro elementos na população, a obtenção de todas as aas de tamanho dois não é difícil.

Lembre-se de que o nosso estudo de análise combinatória: como o sorteio é feito com reposição, em cada um dos sorteios temos quatro possibilidades. Logo, o número total de amostras aleatórias simples é $4 \times 4 = 16$. Por outro lado, em cada sorteio, cada elemento da população tem a mesma chance de ser sorteado; como são quatro elementos, cada elemento tem probabilidade $1/4$ de ser sorteado.

Finalmente, como os sorteios são independentes, para obter a probabilidade de um par de elementos pertencer à amostra, basta multiplicar as probabilidades (lembre-se de que $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$ quando A e B são independentes). A independência dos sorteios é garantida pela reposição de cada elemento sorteado.

Na **Tabela 4.1**, a seguir, listamos todas as possíveis amostras, com suas respectivas probabilidades e para cada uma delas, apresentamos o valor da média amostral.

Tabela 4.1

Amostra	Probabilidade	Média amostral \bar{x}
(1,1)	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(1+1)/2 = 1$
(1,3)	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(1+3)/2 = 2$
(1,6)	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(1+6)/2 = 3,5$
(1,8)	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(1+8)/2 = 4,5$
(3,1)	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(3+1)/2 = 2$
(3,3)	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(3+3)/2 = 3$
(3,6)	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(3+6)/2 = 4,5$
(3,8)	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(3+8)/2 = 5,5$
(6,1)	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(6+1)/2 = 3,5$
(6,3)	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(6+3)/2 = 4,5$
(6,6)	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(6+6)/2 = 6$
(6,8)	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(6+8)/2 = 7$
(8,1)	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(8+1)/2 = 4,5$
(8,3)	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(8+3)/2 = 5,5$
(8,6)	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(8+6)/2 = 7$
(8,8)	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(8+8)/2 = 8$

Analisando esta tabela, podemos ver que os possíveis valores \bar{X} são 1; 2; 3; 3,5; 4,5; 5,5; 6; 7; 8 e podemos construir a sua função de distribuição de probabilidade, notando, por exemplo, que o valor 2 pode ser obtido por meio de duas amostras: (1,3) ou (3,1). Como essas amostras correspondem a eventos mutuamente exclusivos, a probabilidade de se obter uma média amostral igual a 2 é

$$\begin{aligned}
 \Pr(\bar{X} = 2) &= \Pr(\{1,3\} \cup \{3,1\}) \\
 &= \Pr(\{1,3\}) + \Pr(\{3,1\}) \\
 &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16}
 \end{aligned}$$

Com o mesmo raciocínio, obtemos a seguinte função de distribuição de probabilidade para \bar{X} :

\bar{x}	1	2	3	3,5	4,5	5,5	6	7	8
$\Pr(\bar{X} = \bar{x})$	1/16	2/16	1/16	2/16	4/16	2/16	1/16	2/16	1/16

Note que a v.a. de interesse aqui é \bar{X} ! Daí, segue que

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= 1 \times \frac{1}{16} + 2 \times \frac{2}{16} + 3 \times \frac{1}{16} + 3,5 \times \frac{2}{16} + \\ &\quad + 4,5 \times \frac{5}{16} + 5,5 \times \frac{2}{16} + 6 \times \frac{1}{16} + 7 \times \frac{2}{16} + 8 \times \frac{1}{16} \\ &= 4,5 = \mu \\ \text{Var}(\bar{X}) &= (1 - 4,5)^2 \times \frac{1}{16} + (2 - 4,5)^2 \times \frac{2}{16} + (3 - 4,5)^2 \times \frac{1}{16} + \\ &\quad + (3,5 - 4,5)^2 \times \frac{2}{16} + (4,5 - 4,5)^2 \times \frac{5}{16} + (5,5 - 4,5)^2 \times \frac{2}{16} + \\ &\quad + (6 - 4,5)^2 \times \frac{1}{16} + (7 - 4,5)^2 \times \frac{2}{16} + (8 - 4,5)^2 \times \frac{1}{16} \\ &= 3,625 = \frac{7,25}{2} = \frac{\sigma^2}{2} = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Neste exemplo, podemos ver que $E(\bar{X}) = \mu$ e $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{2}$, onde 2 é o tamanho da amostra. Esses resultados estão nos dizendo que, em média (esperança), a estatística \bar{X} é igual à média da população e que sua variância é igual à variância da população dividida pelo tamanho da amostra.

Na **Figura 4.1**, temos os gráficos da função de distribuição de probabilidade de X (população) na parte (a) e de \bar{X} (amostra) na parte (b). Podemos ver que a média de ambas é 4,5 (ambas são simétricas em torno de 4,5) e que a distribuição de \bar{X} tem menor dispersão em torno dessa média. Note que essa média e essa variância são calculadas ao longo de todas as possíveis aas de tamanho 2.

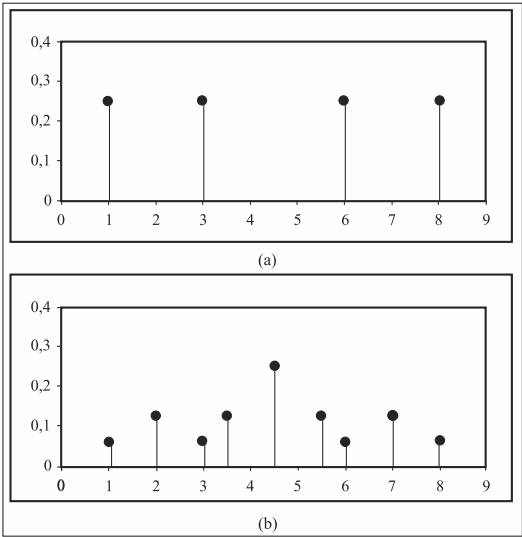


Figura 4.1: Função de distribuição de probabilidade de X e de \bar{X} para aas de tamanho 2 tirada da população $\{1, 3, 6, 8\}$.

Consideremos, agora, a mesma situação, só que, em vez de estudarmos a média amostral, uma medida de posição, vamos estudar a dispersão. Como foi visto, a variância populacional é $Var(X) = 7,25$. Para a amostra, vamos trabalhar com dois estimadores. Um deles vai ser S^2 , definido na Equação (4.2) e o outro vai ser

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (4.3)$$

Da mesma forma que fizemos para a média amostral, vamos calcular o valor dessas estatísticas para cada uma das amostras.

Na **Tabela 4.2**, temos os resultados parciais e globais de interesse.

Tabela 4.2

Amostra	\bar{x}	$(x_1 - \bar{x})^2$	$(x_2 - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^2 (x_i - \bar{x})^2$	S^2	$\hat{\sigma}^2$
(1, 1)	1	$(1 - 1)^2$	$(1 - 1)^2$	0	0	0
(1, 3)	2	$(1 - 2)^2$	$(3 - 2)^2$	2	2	1
(1, 6)	3,5	$(1 - 3,5)^2$	$(6 - 3,5)^2$	12,5	12,5	6,25
(1, 8)	4,5	$(1 - 4,5)^2$	$(8 - 4,5)^2$	24,5	24,5	12,25
(3, 1)	2	$(3 - 2)^2$	$(1 - 2)^2$	2	2	1
(3, 3)	3	$(3 - 3)^2$	$(3 - 3)^2$	0	0	0
(3, 6)	4,5	$(3 - 4,5)^2$	$(6 - 4,5)^2$	4,5	4,5	2,25
(3, 8)	5,5	$(3 - 5,5)^2$	$(8 - 5,5)^2$	12,5	12,5	6,25
(6, 1)	3,5	$(6 - 3,5)^2$	$(1 - 3,5)^2$	12,5	12,5	6,25
(6, 3)	4,5	$(6 - 4,5)^2$	$(3 - 4,5)^2$	4,5	4,5	2,25
(6, 6)	6	$(6 - 6)^2$	$(6 - 6)^2$	0	0	0
(6, 8)	7	$(6 - 7)^2$	$(8 - 7)^2$	2	2	1
(8, 1)	4,5	$(8 - 4,5)^2$	$(1 - 4,5)^2$	24,5	24,5	12,25
(8, 3)	5,5	$(8 - 5,5)^2$	$(3 - 5,5)^2$	12,5	12,5	6,25
(8, 6)	7	$(8 - 7)^2$	$(6 - 7)^2$	2	2	1
(8, 8)	8	$(8 - 8)^2$	$(8 - 8)^2$	0	0	0

Podemos ver que a função de distribuição de probabilidade de S^2 é:

s^2	0	2	4,5	12,5	24,5
$\Pr(S^2 = s^2)$	4/16	4/16	2/16	4/16	2/16

e a função de distribuição de probabilidade de $\hat{\sigma}^2$ é:

k	0	1	2,25	6,25	12,25
$\Pr(\hat{\sigma}^2 = k)$	4/16	4/16	2/16	4/16	2/16

Para essas distribuições, temos:

$$\begin{aligned} E(S^2) &= 0 \times \frac{4}{16} + 2 \times \frac{4}{16} + 4,5 \times \frac{2}{16} + 12,5 \times \frac{4}{16} + 24,5 \times \frac{2}{16} \\ &= \frac{116}{16} = 7,25 = \sigma^2 = \text{Var}(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}^2) &= 0 \times \frac{4}{16} + 1 \times \frac{4}{16} + 2,25 \times \frac{2}{16} + 6,25 \times \frac{4}{16} + 12,25 \times \frac{2}{16} \\ &= \frac{58}{16} = 3,625 \end{aligned}$$

Vemos que, em média, S^2 é igual à variância populacional, o que não ocorre com $\hat{\sigma}^2$.

Estes dois exemplos ilustram o fato de que qualquer estatística amostral $\hat{\sigma}^2$ é uma variável aleatória, que assume diferentes valores para cada uma das diferentes amostras.

Tais valores nos forneceria, juntamente com a probabilidade de cada amostra, a função de distribuição de probabilidades de T , caso fosse possível, obter todas as aas de tamanho n da população.

Isso nos leva à seguinte definição, que é um conceito central na Inferência Estatística.

Definição 4.5.

A **função de distribuição amostral** de uma estatística T é a função de distribuição de probabilidades de T ao longo de todas as possíveis amostras de tamanho n .

Podemos ver que a obtenção da distribuição amostral de qualquer estatística T é um processo tão ou mais complicado do que trabalhar com a população inteira. Na prática, o que temos é uma única amostra e com esse resultado é que temos de tomar as decisões pertinentes ao problema em estudo. Esta tomada de decisão, no entanto, será facilitada se conhecermos resultados teóricos sobre o comportamento da distribuição amostral.

PROPRIEDADES DE ESTIMADORES

No exemplo anterior, relativo à variância amostral, vimos que $E(S^2) = \sigma^2$ e $E(\hat{\sigma}^2) \neq \sigma^2$. Analogamente, vimos também que $E(\bar{X}) = \mu$. Vamos entender direito o que esses resultados significam, antes de passar à definição formal da propriedade envolvida.

Dada uma população, existem várias amostras de tamanho n que podem ser sorteadas. Cada uma dessas amostras resulta em um valor diferente da estatística de interesse (\bar{X} e S^2 , por exemplo). O que esses resultados estão mostrando é como esses diferentes valores se comportam em relação ao verdadeiro (mas desconhecido) valor do parâmetro.

Considere a **Figura 4.2**, onde o alvo representa o valor do parâmetro e os “tiros”, indicados pelos símbolo x, representam os diferentes valores amostrais da estatística de interesse.

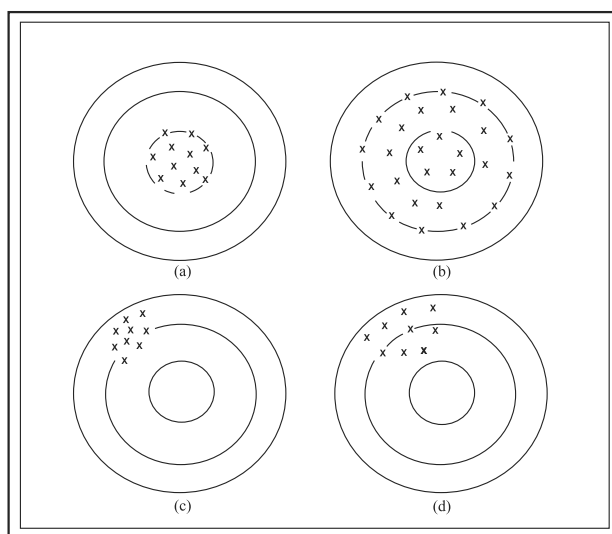


Figura 4.2: Propriedades de estimadores.

Nas partes (a) e (b) da figura, os tiros estão em torno do alvo, enquanto nas partes (c) e (d) isso não acontece.

Comparando as partes (a) e (b), podemos ver que na parte (a), os tiros estão mais concentrados em torno do alvo, isto é, têm menor dispersão. Isso reflete uma pontaria mais certa do atirador em (a).

Analogamente, nas partes (c) e (d), embora ambos os atiradores estejam com a mira deslocada, os tiros do atirador (c) estão mais concentrados em torno de um alvo; o deslocamento poderia até ser resultado de um desalinhamento da arma. Já o atirador (d), além de estar com o alvo deslocado, ele tem os tiros mais espalhados, o que reflete menor precisão.

Traduzindo esta situação para o contexto de estimadores e suas propriedades, temos o seguinte:

Nas partes (a) e (b), temos dois estimadores que fornecem estimativas centradas em torno do verdadeiro valor do parâmetro, ou seja, as diferentes amostras fornecem valores distribuídos em torno do verdadeiro valor do parâmetro. A diferença é que em (b) esses valores estão mais dispersos e, assim, temos mais chance de obter uma amostra “infeliz”, ou seja, uma amostra que forneça um resultado muito afastado do valor do parâmetro. Essas duas propriedades estão associadas à esperança e à variância do estimador, que são medidas de centro e dispersão, respectivamente.

Nas partes (c) e (d), as estimativas estão centradas em torno de um valor diferente do parâmetro de interesse e, na parte (d), a dispersão é maior.

Temos, assim, ilustrados os seguintes conceitos.

Definição 4.6.

Um estimador T é dito um **estimador não-viesado** do parâmetro θ , se $E(T) = \theta$.

Como nos exemplos vistos, essa esperança é calculada ao longo de todas as possíveis amostras, ou seja, é a esperança da distribuição amostral de T . Nas partes (a) e (b) da **Figura 4.2**, os estimadores são não-viesados e nas partes (c) e (d), os estimadores são viesados.

Com relação aos estimadores \bar{X} , S^2 e $\hat{\sigma}^2$, temos que os dois primeiros são não-viesados para estimar a média e a variância populacionais, respectivamente, enquanto $\hat{\sigma}^2$ é viesado para estimar a variância populacional. Essa é a razão para se usar S^2 , e não $\hat{\sigma}^2$.

Definição 4.7.

Se T_1 e T_2 são dois estimadores não-viesados do parâmetro θ , diz-se que T_1 é **mais eficiente** que T_2 , se $Var(T_1) < Var(T_2)$.

Na **Figura 4.2**, o estimador da parte (a) é mais eficiente que o estimador da parte (b).

Resumo

- A população de uma pesquisa estatística é descrita por uma variável aleatória X , que descreve a característica de interesse. Essa v.a. pode ser discreta ou contínua.
- O método de amostragem aleatória simples atribui, a cada amostra de tamanho n , igual probabilidade de ser sorteada. Se os sorteios dos elementos da amostra são feitos com reposição, cada sujeito da população tem a mesma probabilidade de ser sorteado e essa probabilidade se mantém constante. Dessa forma, uma amostra aleatória simples com reposição (abreviaremos por aas nesse texto) de uma população X é um conjunto X_1, X_2, \dots, X_n de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, todas com a mesma distribuição da população X .
- Uma estatística ou estimador T é qualquer função de X_1, X_2, \dots, X_n , isto é, $T = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Como o estimador depende da amostra sorteada, ele é também uma variável aleatória. Os estimadores descrevem características da amostra.
- Um parâmetro é uma característica da população.
- As características que iremos estudar são a média (μ e \bar{X}) e a variância (σ^2 e S^2).
- Como cada estimador é uma variável aleatória, ele pode ser descrito pela sua função de distribuição, que é chamada distribuição amostral do estimador. A distribuição amostral de um estimador é a distribuição ao longo de todas as possíveis amostras de mesmo tamanho n .

Resumo

- Como sempre, a média e a variância de uma distribuição de probabilidades são parâmetros de posição e dispersão. No caso da distribuição amostral de um estimador, esses parâmetros referem-se à distribuição ao longo de todas as possíveis amostras. Assim, a média de uma distribuição amostral refere-se à média dos possíveis valores do estimador ao longo de todas as possíveis amostras e a variância reflete a dispersão desses valores em torno dessa média.
- Um estimador é não-viesado se a sua média é igual ao parâmetro que ele pretende estimar. Isso significa que os valores do estimador ao longo de todas as possíveis amostras estão centrados no parâmetro populacional.
- Dados dois estimadores não-viesados de um mesmo parâmetro, T_1 e T_2 , diz-se que T_1 é mais eficiente que T_2 se sua variância for menor, ou seja, se $Var(T_1) < Var(T_2)$.

Exercício 4.1.

Para fixar as ideias sobre os conceitos apresentados nesta aula, você irá trabalhar com amostras aleatórias simples de tamanho três retiradas da população $\{1, 2, 4, 6, 8\}$.

Pelo princípio da multiplicação, o número total de amostras é $5 \times 5 \times 5 = 125$ e cada uma dessas amostras tem probabilidade $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$.

Vamos considerar os seguintes estimadores para a média da população:

$$\text{média amostral: } \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

$$\text{média amostral ponderada: } \bar{X}_p = \frac{X_1 + 2X_2 + X_3}{4}$$

$$\text{ponto médio: } \Delta = \frac{\min(X_1, X_2, X_3) + \max(X_1, X_2, X_3)}{2}$$

O que você irá mostrar é

- (i) \bar{X} e \bar{X}_p são não-viesados e que \bar{X} é mais eficiente que \bar{X}_p ;
- (ii) Δ é viesado, mas sua variância é menor que a variância de \bar{X} e de \bar{X}_p .

Para isso, você irá seguir os seguintes passos:

1. Calcule a média μ e a variância σ^2 da população.
2. Nas cinco tabelas a seguir, você tem listadas as 125 amostras. Para cada uma das amostras, calcule os valores dos estimadores. Para as seis primeiras amostras, os cálculos já estão feitos, a título de ilustração. Você não precisa indicar todas as contas; apenas use a máquina de calcular e anote o resultado obtido.
3. Obtenha a função de distribuição de probabilidade, explicitando os diferentes valores de cada um dos estimadores e suas respectivas probabilidades.
4. Calcule a esperança e a variância de cada um dos estimadores.
5. Verifique as afirmativas feitas no enunciado do problema.

Amostra			Estimador		
X_1	X_2	X_3	\bar{X}	\bar{X}_p	Δ
1	1	1	$\frac{1+1+1}{3} = 1$	$\frac{1+2 \times 1+1}{4} = 1$	$\frac{1+1}{2} = 1$
1	1	2	$\frac{1+1+2}{3} = \frac{4}{3}$	$\frac{1+2 \times 1+2}{4} = \frac{5}{4}$	$\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$
1	1	4	$\frac{1+1+4}{3} = 2$	$\frac{1+2 \times 1+4}{4} = \frac{7}{4}$	$\frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$
1	1	6	$\frac{1+1+6}{3} = \frac{8}{3}$	$\frac{1+2 \times 1+6}{4} = \frac{9}{4}$	$\frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$
1	1	8	$\frac{1+1+8}{3} = \frac{10}{3}$	$\frac{1+2 \times 1+8}{4} = \frac{11}{4}$	$\frac{1+8}{2} = \frac{9}{2}$
1	2	1	$\frac{1+2+1}{3} = \frac{4}{3}$	$\frac{1+2 \times 2+1}{4} = \frac{6}{4}$	$\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$
1	2	2			
1	2	4			
1	2	6			
1	2	8			
1	4	1			
1	4	2			
1	4	4			
1	4	6			
1	4	8			
1	6	1			
1	6	2			
1	6	4			
1	6	6			
1	6	8			
1	8	1			
1	8	2			
1	8	4			
1	8	6			
1	8	8			

Amostra			Estimador		
X_1	X_2	X_3	\bar{X}	\bar{X}_p	Δ
2	1	1			
2	1	2			
2	1	4			
2	1	6			
2	1	8			
2	2	1			
2	2	2			
2	2	4			
2	2	6			
2	2	8			
2	4	1			
2	4	2			
2	4	4			
2	4	6			
2	4	8			
2	6	1			
2	6	2			
2	6	4			
2	6	6			
2	6	8			
2	8	1			
2	8	2			
2	8	4			
2	8	6			
2	8	8			

Amostra			Estimador		
X_1	X_2	X_3	\bar{X}	\bar{X}_p	Δ
4	1	1			
4	1	2			
4	1	4			
4	1	6			
4	1	8			
4	2	1			
4	2	2			
4	2	4			
4	2	6			
4	2	8			
4	4	1			
4	4	2			
4	4	4			
4	4	6			
4	4	8			
4	6	1			
4	6	2			
4	6	4			
4	6	6			
4	6	8			
4	8	1			
4	8	2			
4	8	4			
4	8	6			
4	8	8			

Amostra			Estimador		
X_1	X_2	X_3	\bar{X}	\bar{X}_p	Δ
6	1	1			
6	1	2			
6	1	4			
6	1	6			
6	1	8			
6	2	1			
6	2	2			
6	2	4			
6	2	6			
6	2	8			
6	4	1			
6	4	2			
6	4	4			
6	4	6			
6	4	8			
6	6	1			
6	6	2			
6	6	4			
6	6	6			
6	6	8			
6	8	1			
6	8	2			
6	8	4			
6	8	6			
6	8	8			

Amostra			Estimador		
X_1	X_2	X_3	\bar{X}	\bar{X}_p	Δ
8	1	1			
8	1	2			
8	1	4			
8	1	6			
8	1	8			
8	2	1			
8	2	2			
8	2	4			
8	2	6			
8	2	8			
8	4	1			
8	4	2			
8	4	4			
8	4	6			
8	4	8			
8	6	1			
8	6	2			
8	6	4			
8	6	6			
8	6	8			
8	8	1			
8	8	2			
8	8	4			
8	8	6			
8	8	8			

SOLUÇÃO DO EXERCÍCIO

Exercício 4.1.

Para a população, temos que

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1+2+4+6+8}{5} = 4,2 \\ \sigma^2 &= \frac{1^2+2^2+4^2+6^2+8^2}{5} - (4,2)^2 = 6,56\end{aligned}$$

Completando-se as tabelas dadas, chegamos às seguintes funções de distribuição de probabilidade dos estimadores:

\bar{X}	$\Pr(\bar{X} = x)$	Cálculo de $E(\bar{X})$	Cálculo de $Var(\bar{X})$
x	p	px	$E(\bar{X}^2)$
3/3	1/125	3/375	$(3/3)^2 (1/125)$
4/3	3/125	12/375	$(4/3)^2 (3/125)$
5/3	3/125	15/375	$(5/3)^2 (3/125)$
6/3	4/125	24/375	$(6/3)^2 (4/125)$
7/3	6/125	42/375	$(7/3)^2 (6/125)$
8/3	6/125	48/375	$(8/3)^2 (6/125)$
9/3	9/125	81/375	$(9/3)^2 (9/125)$
10/3	9/125	90/375	$(10/3)^2 (9/125)$
11/3	12/125	132/375	$(11/3)^2 (12/125)$
12/3	10/125	120/375	$(12/3)^2 (10/125)$
13/3	9/125	117/375	$(13/3)^2 (9/125)$
14/3	12/125	168/375	$(14/3)^2 (12/125)$
15/3	6/125	90/375	$(15/3)^2 (6/125)$
16/3	12/125	192/375	$(16/3)^2 (12/125)$
17/3	3/125	51/375	$(17/3)^2 (3/125)$
18/3	10/125	180/375	$(18/3)^2 (10/125)$
20/3	6/125	120/375	$(20/3)^2 (6/125)$
22/3	3/125	66/375	$(22/3)^2 (3/125)$
24/3	1/125	24/375	$(24/3)^2 (1/125)$
Soma		1575/375	22305 / (9×125)

Logo,

$$E(\bar{X}) = \frac{1575}{375} = 4,2 = \mu$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{22305}{9 \times 125} - (4,2)^2 = 2,186667 = \frac{6,56}{3} = \frac{\sigma^2}{3}$$

\bar{X}_p	$\Pr(\bar{X}_p = x)$	Cálculo de $E(\bar{X}_p)$	Cálculo de $Var(\bar{X}_p)$
x	p	px	$E(\bar{X}_p^2)$
4/4	1/125	4/500	$(4/4)^2 (1/125)$
5/4	2/125	10/500	$(5/4)^2 (2/125)$
6/4	2/125	12/500	$(6/4)^2 (2/125)$
7/4	4/125	28/500	$(7/4)^2 (4/125)$
8/4	3/125	24/500	$(8/4)^2 (3/125)$
9/4	4/125	36/500	$(9/4)^2 (4/125)$
10/4	6/125	60/500	$(10/4)^2 (6/125)$
11/4	6/125	66/500	$(11/4)^2 (6/125)$
12/4	8/125	96/500	$(12/4)^2 (8/125)$
13/4	4/125	52/500	$(13/4)^2 (4/125)$
14/4	10/125	140/500	$(14/4)^2 (10/125)$
15/4	4/125	60/500	$(15/4)^2 (4/125)$
16/4	9/125	144/500	$(16/4)^2 (9/125)$
17/4	4/125	68/500	$(17/4)^2 (4/125)$
18/4	10/125	180/500	$(18/4)^2 (10/125)$
19/4	4/125	76/500	$(19/4)^2 (4/125)$
20/4	8/125	160/500	$(20/4)^2 (8/125)$
21/4	4/125	84/500	$(21/4)^2 (4/125)$
22/4	8/125	176/500	$(22/4)^2 (8/125)$
23/4	2/125	46/500	$(23/4)^2 (2/125)$
24/4	7/125	168/500	$(24/4)^2 (7/125)$
25/4	2/125	50/500	$(25/4)^2 (2/125)$
26/4	6/125	156/500	$(26/4)^2 (6/125)$
28/4	4/125	112/500	$(28/4)^2 (4/125)$
30/4	2/125	60/500	$(30/4)^2 (2/125)$
32/4	1/125	32/500	$(32/4)^2 (1/125)$
Soma		2100/500	40200/(16 × 125)

Logo,

$$E(\bar{X}_p) = 4,2 = \mu$$

$$Var(\bar{X}_p) = \frac{40200}{16 \times 125} - (4,2)^2 = 2,46$$

Δ x	$\Pr(\Delta = x)$ p	Cálculo de $E(\Delta)$ $p \cdot x$	Cálculo de $Var(\Delta)$ $E(\Delta^2)$
2/2	1/125	2/250	$(2/2)^2 (1/125)$
3/2	6/125	18/250	$(3/2)^2 (6/125)$
4/2	1/125	4/250	$(4/2)^2 (1/125)$
5/2	12/125	60/250	$(5/2)^2 (12/125)$
6/2	6/125	36/250	$(6/2)^2 (6/125)$
7/2	18/125	126/250	$(7/2)^2 (18/125)$
8/8	13/125	104/250	$(8/2)^2 (13/125)$
9/2	24/125	216/250	$(9/2)^2 (24/125)$
10/2	24/125	240/250	$(10/2)^2 (24/125)$
12/2	13/125	156/250	$(12/2)^2 (13/125)$
14/2	6/125	84/250	$(14/2)^2 (6/125)$
16/2	1/125	16/250	$(16/2)^2 (1/125)$
Soma		1062/250	9952/(4 × 125)

Logo,

$$E(\Delta) = \frac{1062}{250} = 4,248$$

$$Var(\Delta) = \frac{9952}{4 \times 125} - (4,248)^2 = 1,858496$$

Na tabela a seguir, apresentamos o resumo dos resultados obtidos.

	Parâmetro populacional	Estimador		
		\bar{X}	\bar{X}_p	Δ
Média	$\mu = 4,2$	4,2000	4,2000	4,2480
Variância	$\sigma^2 = 6,56$	2,1867	2,4600	1,8585

Conclui-se que \bar{X} e \bar{X}_p são estimadores não-viesados de μ e que \bar{X} é mais eficiente que \bar{X}_p , uma vez que $Var(\bar{X}) < Var(\bar{X}_p)$.

O estimador Δ é viesado, pois $E(\Delta) \neq \mu$. No entanto, a variância desse estimador é menor que as variâncias dos dois estimadores não-viesados.

Aula 5



DISTRIBUIÇÃO AMOSTRAL DA MÉDIA

Objetivos

Nesta aula, você irá aprofundar seus conhecimentos sobre a distribuição amostral da média amostral. Na aula anterior, analisamos, por meio de alguns exemplos, o comportamento da média amostral; mas, naqueles exemplos, a população era pequena e foi possível obter todas as amostras, ou seja, foi possível obter a distribuição amostral exata. Nesta aula, veremos resultados teóricos sobre a distribuição amostral da média amostral, que nos permitirão fazer análises sem ter que listar todas as amostras.

Os principais resultados que estudaremos são:

- 1 média e variância da distribuição amostral da média;
- 2 distribuição amostral da média para populações normais;
- 3 Teorema Central do Limite.

DISTRIBUIÇÃO AMOSTRAL DA MÉDIA

MÉDIA E VARIÂNCIA DA DISTRIBUIÇÃO AMOSTRAL DA MÉDIA

Na aula anterior, vimos, por meio de exemplos, que a média amostral \bar{X} é um estimador não-viesado da média populacional μ . Na verdade, temos o seguinte resultado geral.

Teorema 5.1.

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória simples de tamanho n de uma população representada pela variável aleatória X com média μ e variância σ^2 . Então,

$$E(\bar{X}) = \mu \quad (5.1)$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (5.2)$$

É importante notar que esse resultado se refere a qualquer população X . O que ele estabelece é que as médias amostrais das diferentes amostras aleatórias simples de tamanho n tendem a “acertar o alvo” da média populacional μ ; lembre-se da **Figura 4.2**, partes (a) e (b). Além disso, à medida que o tamanho amostral n aumenta, a dispersão em torno do alvo, medida por $Var(\bar{X})$, vai diminuindo e tende a zero quando $n \rightarrow \infty$.

O desvio padrão da distribuição amostral de qualquer estatística é usualmente chamado de erro padrão. Então, o erro padrão da média amostral é $EP(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

DISTRIBUIÇÃO AMOSTRAL DA MÉDIA PARA POPULAÇÕES NORMAIS

Na prática estatística, várias populações podem ser descritas, aproximadamente, por uma distribuição normal. Obviamente, o teorema anterior continua valendo no caso de uma população normal, mas temos uma característica a mais da distribuição amostral da média: ela é também normal.

Teorema 5.2.

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória simples de tamanho n de uma **população normal**, isto é, uma população representada por uma variável aleatória normal X com média μ e variância σ^2 . Então, a distribuição amostral da média amostral \bar{X} é normal com média μ e variância σ^2/n , ou seja,

$$X \sim N(\mu; \sigma^2) \implies \bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Na **Figura 5.1** ilustra-se o comportamento da distribuição amostral da média amostral com base em amostras de tamanho $n = 3$ para uma população normal com média 2 e variância 9. A título de comparação, apresenta-se a distribuição populacional. Podemos ver que ela é mais dispersa que a distribuição amostral de \bar{X} , mas ambas estão centradas no verdadeiro valor populacional $\mu = 2$.

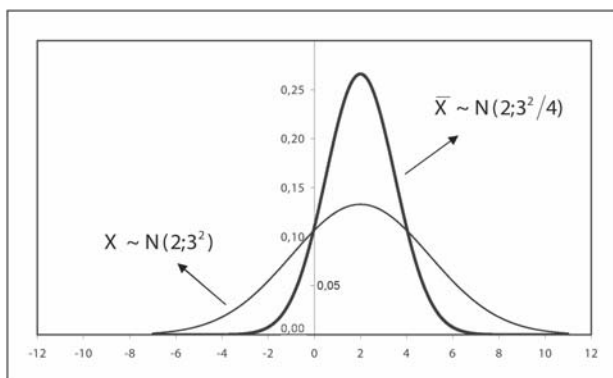


Figura 5.1: Distribuição amostral de \bar{X} com base em aas de tamanho $n = 2$ de uma população $N(2; 9)$.

Exemplo 5.1.

A capacidade máxima de um elevador é de 500kg. Se a distribuição dos pesos dos usuários é $N(70; 100)$, qual é a probabilidade de que sete pessoas ultrapassem este limite? E de seis pessoas?

Solução:

Podemos considerar os sete passageiros como uma amostra aleatória simples da população de todos os usuários, representada pela v.a. $X \sim N(70; 100)$. Seja, então, X_1, \dots, X_7 uma aas de tamanho $n = 7$. Se o peso máximo é 500kg, para que sete pessoas ultrapassem o limite de segurança, temos

$$\sum_{i=1}^7 X_i > 500 \Rightarrow \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 X_i > \frac{500}{7} \Rightarrow \bar{X} > 71,729$$

Mas, pelo Teorema 5.2, sabemos que

$$\bar{X} \sim N\left(70; \frac{100}{7}\right)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Pr(\bar{X} > 71,729) &= \Pr\left(\frac{\bar{X} - 70}{\sqrt{\frac{100}{7}}} > \frac{71,729 - 70}{\sqrt{\frac{100}{7}}}\right) \\ &= \Pr(Z > 0,46) = 0,5 - \text{tab}(0,46) \\ &= 0,5 - 0,17724 = 0,32276 \end{aligned}$$

Com seis pessoas, teríamos de ter

$$\begin{aligned} \Pr\left(\bar{X} > \frac{500}{6}\right) &= \Pr\left(Z > \frac{83,333 - 70}{\sqrt{\frac{100}{6}}}\right) \\ &= \Pr(Z > 3,53) = 0,5 - \text{tab}(3,53) \\ &= 0,5 - 0,49979 = 0,00021 \end{aligned}$$

Podemos ver que existe uma probabilidade alta (0,32 ou 32% de chance) de sete pessoas ultrapassem o limite de segurança. Já com seis pessoas, essa probabilidade é bastante pequena. Assim, o número máximo de pessoas no elevador deve ser estabelecido como seis ou menos.

Exemplo 5.2.

Uma v.a. X tem distribuição normal com média 100 e desvio padrão 10.

1. Calcule $\Pr(90 < X < 110)$.

2. Se \bar{X} é a média de uma amostra aleatória simples de 16 elementos retirados dessa população, calcule $\Pr(90 < \bar{X} < 110)$.
3. Construa, em um único sistema de coordenadas, os gráficos das distribuições de X e \bar{X} .
4. Que tamanho deveria ter a amostra para que $\Pr(90 < \bar{X} < 110) = 0,95$?

Solução:

$$\begin{aligned}
 1. \Pr(90 < X < 110) &= \Pr\left(\frac{90 - 100}{10} < Z < \frac{110 - 100}{10}\right) \\
 &= \Pr(-1 < Z < 1) = \Pr(-1 < Z < 0) + \Pr(0 < Z < 1) \\
 &= 2 \times \Pr(0 < Z < 1) = 2 \times \text{tab}(1, 0) = 0,68268
 \end{aligned}$$

$$2. \text{ Com } n = 16, \text{ resulta que } \bar{X} \sim N\left(100; \frac{100}{16}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \Pr(90 < \bar{X} < 110) &= \Pr\left(\frac{90 - 100}{\sqrt{\frac{100}{16}}} < Z < \frac{110 - 100}{\sqrt{\frac{100}{16}}}\right) \\
 &= \Pr(-4 < Z < 4) = \Pr(-4 < Z < 0) + \Pr(0 < Z < 4) \\
 &= 2 \times \Pr(0 < Z < 4) = 2 \times \text{tab}(4, 0) \approx 1,00
 \end{aligned}$$

3. Veja a **Figura 5.2**. Como visto, a distribuição amostral com $n = 16$ é menos dispersa que a distribuição populacional e, então, podemos ver que, entre 90 e 110, temos concentrada praticamente toda a distribuição de \bar{X} .

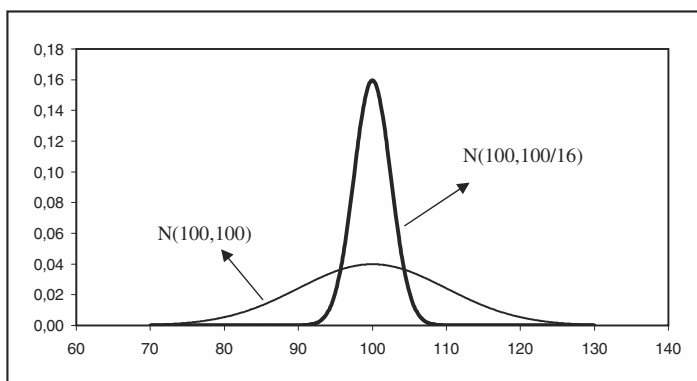


Figura 5.2: Distribuição amostral de \bar{X} com base em amostras de tamanho $n = 16$ de uma população $N(100; 100)$.

4. Queremos que $\Pr(90 < \bar{X} < 110) = 0,95$, ou seja,

$$\begin{aligned}\Pr(90 < \bar{X} < 110) &= 0,95 \iff \\ \Pr\left(\frac{90 - 100}{\sqrt{\frac{100}{n}}} < Z < \frac{110 - 100}{\sqrt{\frac{100}{n}}}\right) &= 0,95 \iff \\ \Pr(-\sqrt{n} < Z < \sqrt{n}) &= 0,95 \iff \\ 2 \times \Pr(0 < Z < \sqrt{n}) &= 0,95 \iff \\ 2 \times \text{tab}(\sqrt{n}) &= 0,95 \iff \text{tab}(\sqrt{n}) = 0,475 \iff \\ \sqrt{n} &= 1,96 \iff n \approx 4\end{aligned}$$

A título de ilustração, apresentam-se na **Figura 5.3** as distribuições amostrais de \bar{X} para $n = 16$ e $n = 4$.

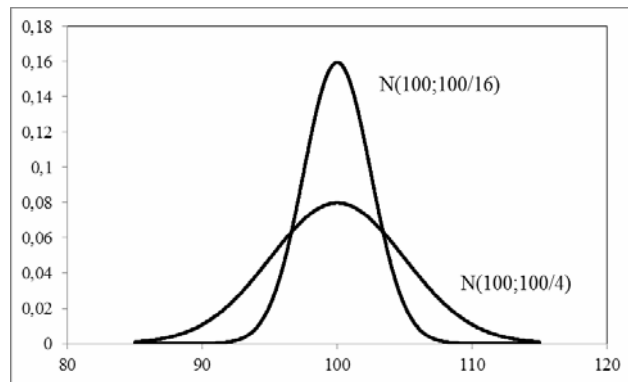


Figura 5.3: Distribuição amostral de \bar{X} com base em amostras de tamanhos $n = 16$ e $n = 4$ de uma população $N(100; 100)$.

Exemplo 5.3.

A máquina de empacotar um determinado produto o faz segundo uma distribuição normal, com média μ e desvio padrão 10g.

1. Em quanto deve ser regulado o peso médio μ para que apenas 10% dos pacotes tenham menos do que 500g?
2. Com a máquina assim regulada, qual a probabilidade de que o peso total de quatro pacotes escolhidos ao acaso seja inferior a 2kg?

Solução:

1. Seja X a variável aleatória que representa o peso dos pacotes. Sabemos, então, que $X \sim N(\mu; 100)$. Queremos que

$$\begin{aligned}\Pr(X < 500) &= 0,10 \Rightarrow \\ \Pr\left(\frac{X - \mu}{10} < \frac{500 - \mu}{10}\right) &= 0,10 \Rightarrow \\ \Pr\left(Z < \frac{500 - \mu}{10}\right) &= 0,10\end{aligned}$$

Então, na densidade normal padrão, à esquerda da abscissa $\frac{500 - \mu}{10}$ temos que ter uma área (probabilidade) de 0,10. Logo, essa abscissa tem que ser negativa. Usando a simetria da densidade normal, temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned}\Pr\left(Z < \frac{500 - \mu}{10}\right) &= 0,10 \iff \\ \Pr\left(Z > -\frac{500 - \mu}{10}\right) &= 0,10 \iff \\ \Pr\left(Z > \frac{\mu - 500}{10}\right) &= 0,10 \iff \\ \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{\mu - 500}{10}\right) &= 0,40 \iff \\ \text{tab}\left(\frac{\mu - 500}{10}\right) &= 0,40 \iff \\ \frac{\mu - 500}{10} &= 1,28 \iff \\ \mu &= 512,8 \text{ g}\end{aligned}$$

Veja a **Figura 5.4** onde são ilustradas essas equivalências.

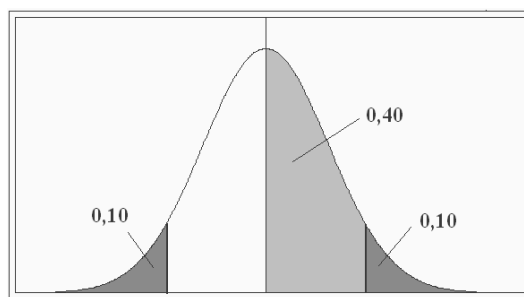


Figura 5.4: Equivalências usadas na solução do exemplo acima.

2. Sejam X_1, X_2, X_3, X_4 os pesos dos 4 pacotes da amostra. Queremos que $\sum_{i=1}^4 X_i < 2000\text{g}$. Isso é equivalente a $\bar{X} < 500$. Logo,

$$\begin{aligned}\Pr(\bar{X} < 500) &= \Pr\left(\frac{\bar{X} - 512,8}{\sqrt{\frac{100}{4}}} < \frac{500 - 512,8}{\sqrt{\frac{100}{4}}}\right) \\ &= \Pr(Z < -2,56) = \Pr(Z > 2,56) \\ &= 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 2,56) \\ &= 0,5 - \text{tab}(2,56) \\ &= 0,5 - 0,49477 = 0,00523\end{aligned}$$

Com a máquina regulada para 512,8g, há uma probabilidade de 0,00523 de que uma amostra de 4 pacotes apresente peso médio inferior a 500g. Note que, com um pacote apenas, essa probabilidade é de 10%. Por isso, as inspeções de controle de qualidade são sempre feitas com base em amostras de tamanho $n > 1$.

Exercício 5.1.

Os comprimentos das peças produzidas por determinada máquina têm distribuição normal com uma média de 172mm e desvio padrão de 5mm. Calcule a probabilidade de uma amostra aleatória simples de 16 peças ter comprimento médio:

1. entre 169mm e 175mm;
2. maior que 178mm;
3. menor que 165mm.

Exercício 5.2.

Qual deverá ser o tamanho de uma amostra aleatória simples a ser retirada de uma população $N(150; 13^2)$ para que $\Pr(|\bar{X} - \mu| < 6,5) = 0,95$?

TEOREMA CENTRAL DO LIMITE

Os resultados vistos anteriormente são válidos para populações normais, isto é, se uma população é normal com média μ e variância σ^2 , então a distribuição amostral de \bar{X} é também normal com média μ e variância σ^2/n , onde n é o tamanho da amostra. O Teorema Central do Limite que veremos a seguir nos fornece um resultado análogo para qualquer distribuição populacional, desde que o tamanho da amostra seja suficientemente grande.

Teorema 5.3 (Teorema Central do Limite).

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória simples de uma população X tal que $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$. Então, a distribuição de \bar{X} converge para a distribuição normal com média μ e variância σ^2/n quando $n \rightarrow \infty$. Equivalentemente,

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightarrow N(0, 1)$$

A interpretação prática do Teorema Central do Limite é a seguinte: para amostras “grandes” de qualquer população, podemos aproximar a distribuição amostral de \bar{X} por uma distribuição normal com a mesma média populacional e variância igual à variância populacional dividida pelo tamanho da amostra.

Quão grande deve ser a amostra para se obter uma boa aproximação depende das características da distribuição populacional. Se a distribuição populacional não se afastar muito de uma distribuição normal, a aproximação será boa, mesmo para tamanhos pequenos de amostra. Na **Figura 5.5** ilustra-se esse teorema para a distribuição exponencial, ou seja, para uma população distribuída segundo uma exponencial com parâmetro $\lambda = 1$.

O gráfico superior representa a distribuição populacional e os histogramas representam a distribuição amostral de \bar{X} ao longo de 5.000 amostras de tamanhos 10, 50, 100 e 250. Assim, podemos ver que, embora a população seja completamente diferente da normal, a distribuição amostral de \bar{X} vai se tornando cada vez mais próxima da normal à medida que n aumenta.

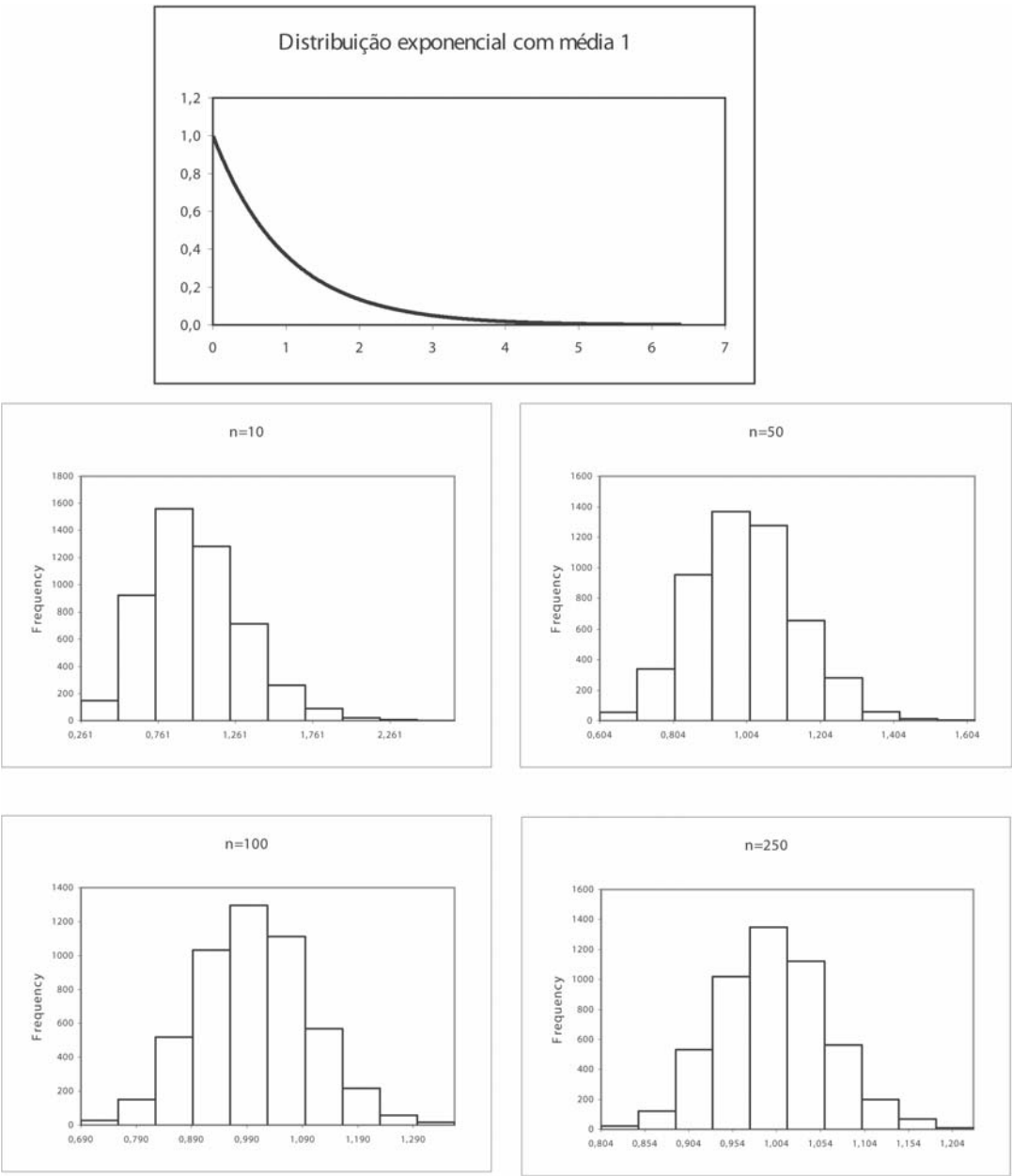


Figura 5.5: Ilustração do Teorema Central do Limite para uma população $X \sim \exp(1)$.

Em termos práticos, esse teorema é de extrema importância, por isso é chamado teorema central e, em geral, amostras de tamanho $n > 30$ já fornecem uma aproximação razoável.

Exemplo 5.4.

Uma moeda é lançada 50 vezes, com o objetivo de se verificar sua honestidade. Se ocorrem 36 caras nos 50 lançamentos, o que podemos concluir?

Solução:

Neste caso, a população pode ser representada por uma variável de Bernoulli X com parâmetro p , isto é, X assume o valor 1 com probabilidade p na ocorrência de cara e assume o valor 0 com probabilidade $1 - p$ na ocorrência de coroa. Para uma variável de Bernoulli, temos que $E(X) = p$ e $Var(X) = p(1 - p)$ (volte à Aula 13 de Métodos Estatísticos 1, se necessário).

Como são feitos 50 lançamentos, o tamanho da amostra é 50 (n grande!) e, pelo Teorema Central do Limite, \bar{X} é aproximadamente normal com média $E(\bar{X}) = p$ e variância $Var(\bar{X}) = \frac{p(1-p)}{50}$.

Suponhamos que a moeda seja honesta, isto é, que $p = 1/2$. Nessas condições, qual é a probabilidade de obtermos 36 caras em 50 lançamentos? Com a hipótese de honestidade da moeda, o teorema central do limite nos diz que

$$\bar{X} \sim N\left(\frac{1}{2}, \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{50}\right)$$

A probabilidade de se obter 36 ou mais caras em 50 lançamentos é equivalente à probabilidade de \bar{X} ser maior ou igual a $\frac{36}{50} = 0,72$ e essa probabilidade é

$$\begin{aligned} \Pr(\bar{X} \geq 0,72) &= \Pr\left(\frac{\bar{X}-0,5}{\sqrt{\frac{1}{200}}} \geq \frac{0,72-0,5}{\sqrt{\frac{1}{200}}}\right) \\ &= \Pr(Z \geq 3,11) = 0,5 - \Pr(0 \leq Z < 3,11) = \\ &= 0,5 - \text{tab}(3,11) = 0,5 - 0,49906 = 0,00094 \end{aligned}$$

Note que essa probabilidade é bastante pequena, ou seja, há uma pequena probabilidade de obtermos 36 ou mais caras em um lançamento de uma moeda honesta. Isso pode nos levar a suspeitar sobre a honestidade da moeda!

Exercício 5.3.

O fabricante de uma lâmpada especial afirma que o seu produto tem vida média de 1.600 horas, com desvio padrão de 250 horas. O dono de uma empresa compra 100 lâmpadas desse fabricante. Qual é a probabilidade de que a vida média dessas lâmpadas ultrapasse 1.650 horas?

Resumo

Nesta aula, foram estudadas propriedades da média amostral \bar{X} . Ao final, você deverá ser capaz de compreender perfeitamente os seguintes resultados:

- Dada uma aas (amostra aleatória simples com reposição) X_1, X_2, \dots, X_n de uma população X com média μ e variância σ^2 , a média amostral \bar{X} é um estimador não-viesado de μ com variância igual à variância populacional dividida pelo tamanho amostral n , isto é,

$$E(\bar{X}) = \mu,$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- O desvio padrão da distribuição amostral de qualquer estatística é usualmente chamado de *erro padrão*. Então, o erro padrão da média amostral é

$$EP(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Nas condições anteriores e com a hipótese adicional da população X ser normal, a distribuição amostral de \bar{X} também é normal, isto é,

$$X \sim N(\mu; \sigma^2) \implies \bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

- O teorema central do limite é um dos mais importantes teoremas da teoria inferencial. Ele nos dá informações sobre a distribuição amostral de \bar{X} para amostras *grandes* de qualquer população. Mais precisamente, se X_1, X_2, \dots, X_n é uma amostra aleatória simples de uma população X tal que $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$, então a distribuição de \bar{X} converge para a distribuição normal com média μ e variância σ^2/n quando $n \rightarrow \infty$. Equivalentemente,

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightarrow N(0, 1)$$

ou

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \rightarrow N(0, 1)$$

Exercício 5.4.

Uma amostra de tamanho $n = 18$ é extraída de uma população normal com média 15 e desvio padrão 2,5. Calcule a probabilidade de que a média amostral

1. esteja entre 14,5 e 16,0;
2. seja maior que 16,1.

Exercício 5.5.

Volte ao Exemplo 5.3. Depois de regulada a máquina, prepara-se uma carta de controle de qualidade. Uma amostra de 4 pacotes será sorteada a cada hora. Se a média da amostra for inferior a 497g ou superior a 520g, a produção deve ser interrompida para ajuste da máquina, isto é, ajuste do peso médio.

1. Qual é a probabilidade de uma parada desnecessária?
2. Se a máquina se desregulou para $\mu = 500$ g, qual é a probabilidade de se continuar a produção fora dos padrões desejados?

Exercício 5.6.

Uma empresa produz parafusos em duas máquinas. O comprimento dos parafusos produzidos em ambas é aproximadamente normal com média de 20mm na primeira máquina e 25mm na segunda máquina e desvio padrão comum de 4mm.

Uma caixa com 16 parafusos, sem identificação, é encontrada e o gerente de produção determina que, se o comprimento médio for maior que 23mm, então a caixa será identificada como produzida pela máquina 2.

Especifique os possíveis erros nessa decisão e calcule as suas probabilidades.

Exercício 5.7.

Definimos a variável $e = \bar{X} - \mu$ como sendo o *erro amostral* da média, onde \bar{X} é a média de uma amostra de tamanho n de uma população com média μ e desvio padrão σ .

1. Determine $E(e)$ e $Var(e)$.
2. Se a população é normal com $\sigma = 20$, que proporção das amostras de tamanho 100 terá erro amostral absoluto maior do que duas unidades?
3. Neste caso, qual deve ser o valor de δ para que $\Pr(|e| > \delta) = 0,01$?
4. Qual deve ser o tamanho da amostra para que 95% dos erros amostrais absolutos sejam inferiores a uma unidade?

Exercício 5.8.

Uma fábrica produz parafusos especiais, para atender um determinado cliente, que devem ter comprimento de 8,5cm. Como os parafusos grandes podem ser reaproveitados a um custo muito baixo, a fábrica precisa controlar apenas a proporção de parafusos pequenos. Para que o processo de produção atinja o lucro mínimo desejável, é necessário que a proporção de parafusos pequenos seja no máximo de 5%.

1. Supondo que a máquina que produz os parafusos o faça de modo que os comprimentos tenham distribuição normal com média μ e desvio padrão de 1,0cm, em quanto deve ser regulada a máquina para satisfazer as condições de lucratividade da empresa?
2. Para manter o processo sob controle, é programada uma carta de qualidade. A cada hora será sorteada uma amostra de quatro parafusos e, se o comprimento médio dessa amostra for menor que 9,0cm, o processo de produção é interrompido para uma nova regulagem da máquina. Qual é a probabilidade de uma parada desnecessária?
3. Se a máquina se desregulou de modo que o comprimento médio passou a ser 9,5cm, qual é a probabilidade de se continuar o processo de produção fora dos padrões desejados?

Exercício 5.9.

A divisão de inspeção do Departamento de Pesos e Medidas de uma determinada cidade está interessada em calcular a real quantidade de refrigerante que é colocada em garrafas de dois litros, no setor de engarrafamento de uma grande empresa de refrigerantes.

O gerente do setor de engarrafamento informou à divisão de inspeção que o desvio padrão para garrafas de dois litros é de 0,05 litro. Uma amostra aleatória de 100 garrafas de dois litros, obtida deste setor de engarrafamento, indica uma média de 1,985 litro. Qual é a probabilidade de se obter uma média amostral de 1,985 ou menos, caso a afirmativa do gerente esteja certa? O que se pode concluir?

SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS**Exercício 5.1.**

Seja X = comprimento das peças; então $X \sim N(172; 25)$ e $n = 16$

$$\begin{aligned} 1. \Pr(169 \leq \bar{X} \leq 175) &= \Pr\left(\frac{169 - 172}{\sqrt{\frac{25}{16}}} \leq \frac{\bar{X} - 172}{\sqrt{\frac{25}{16}}} \leq \frac{175 - 172}{\sqrt{\frac{25}{16}}}\right) \\ &= \Pr(-2,4 \leq Z \leq 2,4) = 2 \times \Pr(0 \leq Z \leq 2,4) \\ &= 2 \times \text{tab}(2,4) = 2 \times 0,4918 = 0,9836 \end{aligned}$$

$$2. \Pr(\bar{X} > 178) = \Pr\left(Z > \frac{178 - 172}{\sqrt{\frac{25}{16}}}\right) = \Pr(Z > 4,8) \approx 0$$

$$3. \Pr(\bar{X} < 165) = \Pr\left(Z < \frac{165 - 172}{\sqrt{\frac{25}{16}}}\right) = \Pr(Z < -5,6) \approx 0$$

Exercício 5.2.

Temos que $X \sim N(150; 13^2)$ e queremos determinar n para que $\Pr(|\bar{X} - \mu| < 6,5) = 0,95$.

$$\begin{aligned}
 \Pr(|\bar{X} - 150| < 6,5) &= 0,95 \iff \\
 \Pr(-6,5 < \bar{X} - 150 < 6,5) &= 0,95 \iff \\
 \Pr\left(-\frac{6,5}{\frac{13}{\sqrt{n}}} < \frac{\bar{X} - 150}{\frac{13}{\sqrt{n}}} < \frac{6,5}{\frac{13}{\sqrt{n}}}\right) &= 0,95 \iff \\
 \Pr(-0,5\sqrt{n} < Z < 0,5\sqrt{n}) &= 0,95 \iff \\
 2 \times \Pr(0 < Z < 0,5\sqrt{n}) &= 0,95 \iff \\
 \Pr(0 < Z < 0,5\sqrt{n}) &= 0,475 \iff \\
 \text{tab}(0,5\sqrt{n}) &= 0,475 \iff 0,5\sqrt{n} = 1,96 \iff \\
 \sqrt{n} = \frac{1,96}{0,5} = 3,92 &\iff n = (3,92)^2 \approx 16
 \end{aligned}$$

Exercício 5.3.

Podemos aceitar que as 200 lâmpadas compradas sejam uma amostra aleatória simples da população referente às lâmpadas produzidas por esse fabricante. Como $n = 100$ é um tamanho suficientemente grande de amostra, podemos usar o Teorema Central do Limite, que nos diz que $\bar{X} \approx N\left(1600; \frac{250^2}{100}\right)$. Logo,

$$\begin{aligned}
 \Pr(\bar{X} > 1650) &= \Pr\left(\frac{\bar{X} - 1600}{\sqrt{\frac{250^2}{100}}} > \frac{1650 - 1600}{\sqrt{\frac{250^2}{100}}}\right) \\
 &= \Pr(Z > 2,0) = 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 2) \\
 &= 0,5 - \text{tab}(2,0) = 0,5 - 0,47725 = 0,02275
 \end{aligned}$$

Exercício 5.4.

$$\bar{X} \sim N\left(15; \frac{2,5^2}{18}\right)$$

$$\begin{aligned}
 1. \Pr(14,5 \leq \bar{X} \leq 16) &= \Pr\left(\frac{14,5 - 15}{\sqrt{\frac{2,5^2}{18}}} \leq Z \leq \frac{16 - 15}{\sqrt{\frac{2,5^2}{18}}}\right) \\
 &= \Pr(-0,85 \leq Z \leq 1,70) \\
 &= \Pr(-0,85 \leq Z \leq 0) + \Pr(0 < Z \leq 1,70) \\
 &= \Pr(0 \leq Z \leq 0,85) + \Pr(0 \leq Z \leq 1,70) \\
 &= \text{tab}(0,85) + \text{tab}(1,70) = 0,75777
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \Pr(\bar{X} > 16,1) &= \Pr\left(Z > \frac{16,1 - 15}{\sqrt{\frac{2,5^2}{18}}}\right) \\
&= \Pr(Z > 1,87) \\
&= 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 1,87) \\
&= 0,5 - \text{tab}(1,87) = 0,03074
\end{aligned}$$

Exercício 5.5.

$$X \sim N(512, 8; 100)$$

1. Parada desnecessária: amostra indica que o processo está fora de controle ($\bar{X} < 497$ ou $\bar{X} > 520$), quando, na verdade, o processo está ajustado ($\mu = 512, 8$). Neste caso, podemos usar a notação de probabilidade condicional para auxiliar na solução do exercício. Queremos calcular

$$\begin{aligned}
&\Pr[(\bar{X} < 497) \cup (\bar{X} > 520) | \bar{X} \sim N(512, 8; \frac{100}{4})] \\
&= \Pr[\bar{X} < 497 | \bar{X} \sim N(512, 8; 25)] + \Pr[\bar{X} > 520 | \bar{X} \sim N(512, 8; 25)] \\
&= \Pr\left(Z < \frac{497 - 512, 8}{5}\right) + \Pr\left(Z > \frac{520 - 512, 8}{5}\right) \\
&= \Pr(Z < -3, 16) + \Pr(Z > 1, 44) \\
&= \Pr(Z > 3, 16) + \Pr(Z > 1, 44) \\
&= [0, 5 - \Pr(0 \leq Z \leq 3, 16)] + [0, 5 - \Pr(0 \leq Z \leq 1, 44)] \\
&= 0, 5 - \text{tab}(3, 16) + 0, 5 - \text{tab}(1, 44) \\
&= 1, 0 - 0, 49921 - 0, 42507 \\
&= 0, 07572
\end{aligned}$$

2. Agora queremos

$$\begin{aligned}
&\Pr[497 \leq \bar{X} \leq 520 | \bar{X} \sim N(500; 25)] \\
&= \Pr\left(\frac{497 - 500}{5} \leq Z \leq \frac{520 - 500}{5}\right) \\
&= \Pr(-0, 6 \leq Z \leq 4) \\
&= \Pr(-0, 6 \leq Z < 0) + \Pr(0 \leq Z \leq 4) \\
&= \Pr(0 \leq Z \leq 0, 6) + \Pr(0 \leq Z \leq 4) \\
&= \text{tab}(0, 6) + \text{tab}(4, 0) \\
&= 0, 72572
\end{aligned}$$

Note que a probabilidade de uma parada desnecessária é pequena, à custa de alta probabilidade de se operar fora de controle.

Exercício 5.6.

Os erros são

E_1 : estabelecer que são da máquina 1, quando, na verdade, foram produzidos pela máquina 2 ou

E_2 : estabelecer que são da máquina 2, quando, na verdade, foram produzidos pela máquina 1.

A regra de decisão é a seguinte:

$$\bar{X} > 23 \implies \text{máquina 2}$$

$$\bar{X} \leq 23 \implies \text{máquina 1}$$

Na máquina 1, o comprimento é $N(20; 16)$ e, na máquina 2, $N(25; 16)$.

$$\begin{aligned} \Pr(E_1) &= \Pr\left[\bar{X} \leq 23 \mid \bar{X} \sim N\left(25; \frac{16}{1}\right)\right] \\ &= \Pr\left(Z \leq \frac{23 - 25}{1}\right) = \Pr(Z \leq -2) \\ &= \Pr(Z \geq 2) = 0,5 - \text{tab}(2, 0) \\ &= 0,5 - 0,47725 = 0,02275 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(E_2) &= \Pr\left[\bar{X} > 23 \mid \bar{X} \sim N\left(20; \frac{16}{1}\right)\right] \\ &= \Pr\left(Z > \frac{23 - 20}{1}\right) \\ &= \Pr(Z > 3) \\ &= 0,5 - \text{tab}(3, 0) \\ &= 0,5 - 0,49865 \\ &= 0,00135 \end{aligned}$$

Exercício 5.7.

Note que e é igual a \bar{X} menos uma constante e sabemos que $E(\bar{X}) = \mu$ e $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

1. Das propriedades da média e da variância, resulta que

$$E(e) = E(\bar{X}) - \mu = \mu - \mu = 0$$

$$\text{Var}(e) = \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

2. $X \sim N(\mu; 20^2)$ e $n = 100$. Queremos

$$\begin{aligned}
 \Pr(|e| > 2) &= \Pr(e < -2) + \Pr(e > 2) \\
 &= \Pr(\bar{X} - \mu < -2) + \Pr(\bar{X} - \mu > 2) \\
 &= \Pr\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{20}{10}} < -\frac{2}{\frac{20}{10}}\right) + \Pr\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{20}{10}} > \frac{2}{\frac{20}{10}}\right) \\
 &= \Pr(Z < -1) + \Pr(Z > 1) \\
 &= 2 \times \Pr(Z > 1) \\
 &= 2 \times [0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 1)] \\
 &= 2 \times [0,5 - \text{tab}(1, 0)] \\
 &= 0,31732
 \end{aligned}$$

3. $\Pr(|e| > \delta) = 0,01 \iff \Pr(e < -\delta) + \Pr(e > \delta) = 0,01 \iff$

$$\begin{aligned}
 &\Pr(\bar{X} - \mu < -\delta) + \Pr(\bar{X} - \mu > \delta) = 0,01 \iff \\
 &\Pr\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{20}{10}} < -\frac{\delta}{\frac{20}{10}}\right) + \Pr\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{20}{10}} > \frac{\delta}{\frac{20}{10}}\right) = 0,01 \iff \\
 &\Pr\left(Z < -\frac{\delta}{2}\right) + \Pr\left(Z > \frac{\delta}{2}\right) = 0,01 \iff \\
 &2 \times \Pr\left(Z > \frac{\delta}{2}\right) = 0,01 \iff \Pr\left(Z > \frac{\delta}{2}\right) = 0,005 \iff \\
 &0,5 - \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{\delta}{2}\right) = 0,005 \iff \Pr\left(0 \leq Z \leq \frac{\delta}{2}\right) = 0,495 \iff \\
 &\text{tab}\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0,495 \iff \frac{\delta}{2} = 2,58 \iff \delta = 5,16
 \end{aligned}$$

4. $\Pr(|e| < 1) = 0,95 \iff$

$$\begin{aligned}
 &\Pr(-1 < \bar{X} - \mu < 1) = 0,95 \iff \\
 &\Pr\left(-\frac{1}{\frac{20}{\sqrt{n}}} < Z < \frac{1}{\frac{20}{\sqrt{n}}}\right) = 0,95 \iff \\
 &\Pr\left(-\frac{1}{\frac{20}{\sqrt{n}}} < Z < 0\right) + \Pr\left(0 \leq Z < \frac{1}{\frac{20}{\sqrt{n}}}\right) = 0,95 \iff \\
 &2 \times \Pr\left(0 \leq Z < \frac{1}{\frac{20}{\sqrt{n}}}\right) = 0,95 \iff \\
 &\Pr\left(0 \leq Z < \frac{1}{\frac{20}{\sqrt{n}}}\right) = 0,475 \iff \\
 &\frac{\sqrt{n}}{20} = 1,96 \iff \sqrt{n} = 39,2 \iff n \approx 1537
 \end{aligned}$$

Exercício 5.8.

Parafusos pequenos: $X < 8,5$, onde X é o comprimento do parafuso.

1. $X \sim N(\mu; 1)$. Como $\Pr(X < 8,5) = 0,05$, resulta que $8,5$ tem de ser menor que μ , ou seja, a abscissa $8,5 - \mu$ tem de estar no lado negativo da escala da normal padronizada.

$$\begin{aligned}\Pr(X < 8,5) &= 0,05 \iff \\ \Pr\left(Z < \frac{8,5 - \mu}{1}\right) &= 0,05 \iff \\ \Pr\left(Z > -\frac{8,5 - \mu}{1}\right) &= 0,05 \iff \\ \Pr(0 \leq Z \leq \mu - 8,5) &= 0,45 \iff \\ \mu - 8,5 = 1,64 &\iff \mu = 10,14\end{aligned}$$

2. Parada desnecessária: amostra indica processo fora de controle ($\bar{X} < 9$), quando, na verdade, o processo está sob controle ($\mu = 10,14$).

$$\begin{aligned}&\Pr\left[\bar{X} < 9 \mid \bar{X} \sim N\left(10,14; \frac{1}{4}\right)\right] \\ &= \Pr\left(Z < \frac{9 - 10,14}{0,5}\right) \\ &= \Pr(Z < -2,28) = \Pr(Z > 2,28) \\ &= 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 2,28) \\ &= 0,5 - \text{tab}(2,28) \\ &= 0,5 - 0,4887 = 0,0113\end{aligned}$$

3. Máquina desregulada: $\bar{X} > 9$; processo operando sem ajuste: $X \sim N(9,5; 1)$

$$\begin{aligned}&\Pr\left[\bar{X} > 9 \mid \bar{X} \sim N\left(9,5; \frac{1}{4}\right)\right] \\ &= \Pr\left(Z > \frac{9 - 9,5}{0,5}\right) = \Pr(Z > -1) \\ &= \Pr(-1 < Z < 0) + \Pr(Z \geq 0) \\ &= \Pr(0 < Z < 1) + \Pr(Z \geq 0) \\ &= \text{tab}(1,0) + 0,5 = 0,841314\end{aligned}$$

Exercício 5.9.

Afirmativa do gerente: $\mu = 2$ e $\sigma = 0,05$. Como $n = 100$, podemos usar o Teorema Central do Limite. Logo, $\bar{X} \approx N\left(2; \frac{0,05^2}{100}\right)$.

$$\begin{aligned}\Pr(\bar{X} \leq 1,985) &= \Pr\left(Z \leq \frac{1,985 - 2}{\frac{0,05}{10}}\right) \\ &= \Pr(Z \leq -3,0) = \Pr(Z \geq 3,0) \\ &= 0,5 - \text{tab}(3,0) = 0,5 - 0,49865 = 0,00135\end{aligned}$$

A probabilidade de se obter esse valor nas condições dadas pelo gerente é muito pequena, o que pode nos fazer suspeitar da veracidade das afirmativas. É provável que ou a média não seja 2 (e, sim, menor que 2), ou o desvio padrão não seja 0,05 (e, sim, maior que 0,05). Esboce gráficos da normal para compreender melhor esse comentário!

Aula 6



DISTRIBUIÇÃO AMOSTRAL DA PROPORÇÃO

Objetivos

Nesta aula, você verá uma importante aplicação do Teorema Central do Limite: iremos estudar a distribuição amostral de proporções. Assim, você verá os resultados referentes à aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal, que nos permitirá fazer inferência sobre proporções.

Você verá os seguintes resultados:

- 1 aproximação da binomial pela normal;
- 2 correção de continuidade;
- 3 distribuição amostral da proporção amostral.

APROXIMAÇÃO NORMAL DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Na aula anterior, vimos o Teorema Central do Limite, que trata da distribuição da média amostral \bar{X} quando $n \rightarrow \infty$. Esse teorema nos diz que, se X é uma população com média μ e variância σ^2 , então a distribuição amostral da média de uma amostra aleatória simples de tamanho n se aproxima de uma distribuição normal com média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$ quando $n \rightarrow \infty$.

Usando as propriedades da média e da variância, podemos estabelecer esse teorema em termos de $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, em vez de \bar{X} . Como $S_n = n\bar{X}$, então $E(S_n) = nE(\bar{X})$ e $Var(S_n) = n^2 Var(\bar{X})$; isso nos dá o seguinte resultado:

Teorema 6.1 (Teorema Central do Limite).

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória simples de uma população X tal que $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$. Então, a distribuição de $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ converge para a distribuição normal com média $n\mu$ e variância $n\sigma^2$ quando $n \rightarrow \infty$.

A variável aleatória binomial foi definida como “número de sucessos em n repetições independentes de um experimento de Bernoulli com parâmetro p ” (volte à Aula 13 de Métodos Estatísticos I, se necessário). Então, uma variável binomial é a soma de n variáveis independentes $Bern(p)$. Pelo teorema acima e usando o fato de que se $X \sim Bern(p)$, logo $E(X) = p$ e $Var(X) = p(1 - p)$, podemos dizer que a distribuição binomial com parâmetros n e p se aproxima de uma normal com média np e variância $np(1 - p)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Alguns cuidados devem ser tomados na aproximação da binomial pela normal. Um fato importante a observar é que a distribuição binomial é discreta, enquanto a variável normal é contínua.

Veja a **Figura 6.1**. Nela, o histograma representa uma v.a. X com distribuição binomial com $n = 12$ e $p = 0,5$. Os retângulos, centrados nos possíveis valores de X , têm base 1 e altura igual a $\Pr(X = k)$, de modo que a área de cada retângulo é igual a

$\Pr(X = k)$. A curva normal aí representada é de uma v.a. Y com média $\mu = 12 \times 0,5 = 6$ e variância $\sigma^2 = 12 \times 0,5 \times 0,5 = 3$.

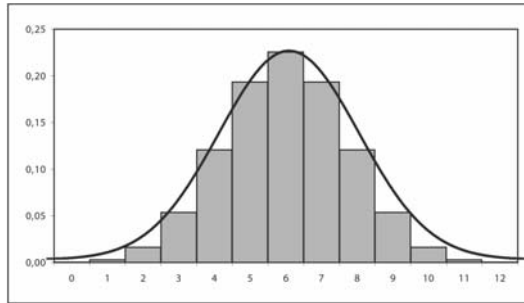


Figura 6.1: Aproximação normal da distribuição binomial.

Suponha que queiramos calcular $\Pr(X \geq 8)$. Isso equivale a somar as áreas dos quatro últimos retângulos superiores. Pela aproximação normal, no entanto, temos de calcular a área (probabilidade) acima do ponto 7,5, de modo a incluir os quatro retângulos. Assim,

$$\begin{aligned}\Pr(X \geq 8) &\approx \Pr(Y \geq 7,5) = \Pr\left(\frac{Y-6}{\sqrt{3}} \geq \frac{7,5-6}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \Pr(Z \geq 0,87) = 0,5 - \text{tab}(0,87) \\ &= 0,5 - 0,30785 = 0,19215\end{aligned}$$

O valor exato, calculado pela distribuição binomial, é $\Pr(X \geq 8) = 0,1938$.

Vamos, agora, calcular $\Pr(X > 10)$. Isso equivale à área dos dois retângulos superiores, centrados em 11 e 12 (este último não é visível, pois $\Pr(X = 12) = 0,000244$); logo, pela distribuição normal, temos de calcular $\Pr(Y \geq 10,5)$:

$$\begin{aligned}\Pr(X > 10) &\approx \Pr(Y \geq 10,5) = \Pr\left(\frac{Y-6}{\sqrt{3}} \geq \frac{10-6}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \Pr(Z \geq 2,31) = 0,5 - \text{tab}(2,31) \\ &= 0,5 - 0,48956 = 0,01044\end{aligned}$$

Se queremos $\Pr(X < 5)$, isso equivale às áreas dos quatro retângulos inferiores e, portanto,

$$\begin{aligned}
\Pr(X < 5) &\approx \Pr(Y \leq 4,5) = \Pr\left(\frac{Y-6}{\sqrt{3}} \geq \frac{5-6}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \Pr(Z \geq -0,58) = \Pr(Z \geq 0,58) \\
&= 0,5 - \text{tab}(0,58) \\
&= 0,5 - 0,21904 = 0,28096
\end{aligned}$$

Se queremos $\Pr(4 \leq X < 8)$, temos a seguinte aproximação:

$$\begin{aligned}
\Pr(4 \leq X < 8) &\approx \Pr(3,5 \leq Y \leq 7,5) \\
&= \Pr\left(\frac{3,5-6}{\sqrt{3}} \leq Z \leq \frac{7,5-6}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \Pr(-1,44 \leq Z \leq 0,87) \\
&= \Pr(-1,44 \leq Z \leq 0) + \Pr(0 \leq Z \leq 0,87) \\
&= \Pr(0 \leq Z \leq 1,44) + \Pr(0 \leq Z \leq 0,87) \\
&= \text{tab}(1,44) + \text{tab}(0,87) \\
&= 0,42507 + 0,30785 = 0,73292
\end{aligned}$$

É interessante observar que para uma variável binomial faz sentido calcular $\Pr(X = k)$; no caso da normal, essa probabilidade é nula, qualquer que seja k . Para usar a aproximação normal para calcular, por exemplo, $\Pr(X = 5)$, devemos notar que essa probabilidade equivale à área do retângulo centrado em 5 e, em termos da curva normal, temos de calcular a área compreendida entre 4,5 e 5,5:

$$\begin{aligned}
\Pr(X = 5) &\approx \Pr(4,5 \leq Y \leq 5,5) \\
&= \Pr\left(\frac{4,5-6}{\sqrt{3}} \leq Z \leq \frac{5,5-6}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \Pr(-0,87 \leq Z \leq -0,29) \\
&= \Pr(0,29 \leq Z \leq 0,87) \\
&= \text{tab}(0,87) - \text{tab}(0,29) \\
&= 0,30785 - 0,11409 = 0,19376
\end{aligned}$$

e o valor exato é 0,193359.

Esses procedimentos são chamados de *correção de continuidade*, e na **Figura 6.2** ilustra-se o procedimento geral; lembre-se de que o centro de cada retângulo é o valor da variável binomial.

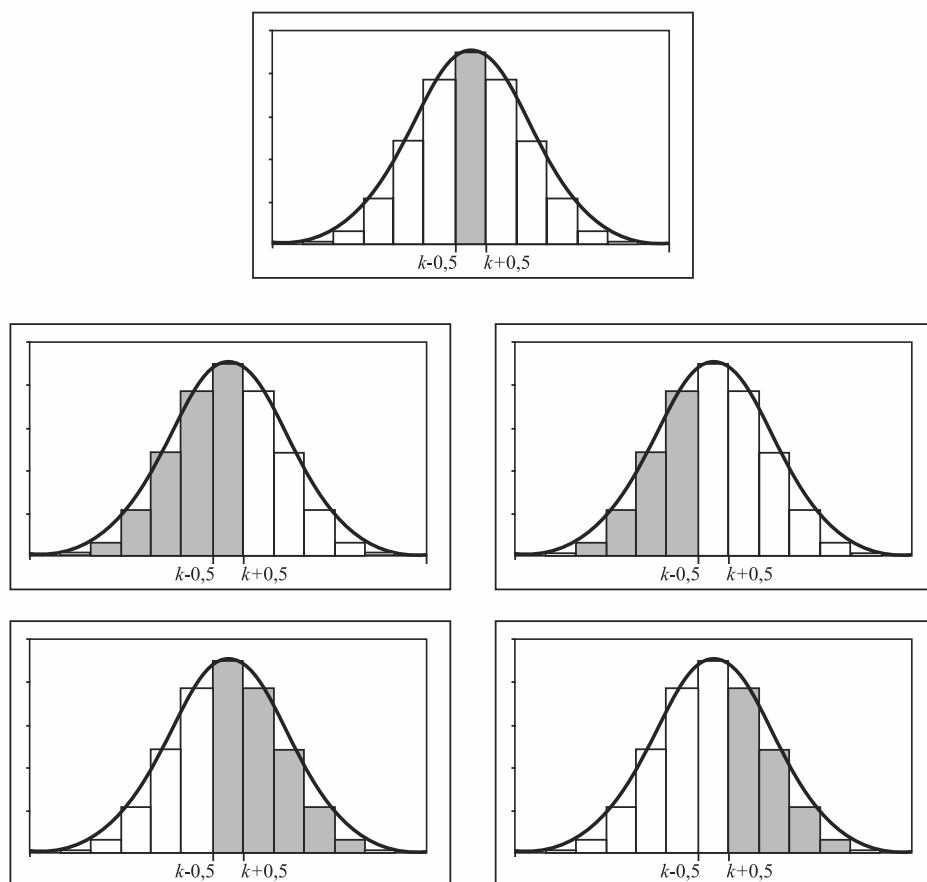


Figura 6.2: Correção de continuidade para a aproximação normal da binomial (a) $\Pr(X = k)$ (b) $\Pr(X \leq k)$ (c) $\Pr(X < k)$ (d) $\Pr(X \geq k)$ (e) $\Pr(X > k)$.

A aproximação dada pelo Teorema Central do Limite é melhor para valores grandes de n . Além disso, é importante que sejam satisfeitos os *critérios de simetria*, resumidos a seguir.



A distribuição binomial com parâmetros n e p pode ser aproximada por uma distribuição normal com média $\mu = np$ e variância $\sigma^2 = np(1 - p)$ se são satisfeitas as seguintes condições:

1. n grande (em geral, $n > 30$)
2. $np \geq 5$
3. $n(1 - p) \geq 5$

Exercício 6.1.

Em cada um dos exercícios abaixo, verifique que as condições para aproximação da binomial pela normal são satisfeitas e calcule a probabilidade pedida usando a aproximação normal.

1. $X \sim \text{bin}(18; 0,4)$; $\Pr(X \geq 15)$ e $\Pr(X < 2)$
2. $X \sim \text{bin}(40; 0,3)$; $\Pr(X < 10)$ e $\Pr(25 < X < 28)$
3. $X \sim \text{bin}(65; 0,9)$; $\Pr(X = 58)$ e $\Pr(60 < X \leq 63)$
4. $X \sim \text{bin}(100; 0,2)$; $\Pr(25 \leq X \leq 35)$
5. $X \sim \text{bin}(50; 0,2)$; $\Pr(X > 26)$ e $\Pr(5 \leq X < 10)$

A DISTRIBUIÇÃO AMOSTRAL DA PROPORÇÃO

Considere uma população em que cada elemento é classificado de acordo com a presença ou ausência de determinada característica. Por exemplo, podemos pensar em eleitores escolhendo entre dois candidatos, pessoas classificadas de acordo com o sexo, trabalhadores classificados como trabalhador com carteira assinada ou não, e assim por diante. Em termos de variável aleatória, essa população é representada por uma v.a. de Bernoulli, isto é:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se elemento possui a característica de interesse} \\ 0, & \text{se elemento não possui a característica de interesse} \end{cases}$$

Vamos denotar por p a proporção de elementos da população que possuem a característica de interesse. Então,

$$\Pr(X = 1) = p, \quad E(X) = p \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = p(1 - p).$$

Em geral, esse parâmetro é desconhecido e precisamos estimá-lo a partir de uma amostra.

Suponha, então, que dessa população seja extraída uma amostra aleatória simples X_1, X_2, \dots, X_n com reposição. Essas n extrações correspondem a n variáveis aleatórias de Bernoulli independentes e, como visto, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ tem distribuição binomial com parâmetros n e p .

Note que S_n dá o número total de “sucessos” nas n repetições, onde “sucesso”, neste caso, representa a presença da característica de interesse (volte à Aula 13 de Métodos Estatísticos I, se necessário).

Os valores possíveis de S_n são $0, 1, 2, \dots, n$. Com relação à proporção \hat{P} de elementos na amostra que possuem a característica de interesse, temos que:

$$\hat{P} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad (6.1)$$

e os valores possíveis de \hat{P} são $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$ com

$$\Pr\left(\hat{P} = \frac{k}{n}\right) = \Pr(S_n = k) \quad (6.2)$$

Analisando a expressão (6.1), podemos ver que \hat{P} nada mais é que a média amostral de $X_i \sim \text{Bern}(p)$, $i = 1, \dots, n$. Logo, o Teorema 17.1 se aplica com $E(X) = p$ e $\text{Var}(X) = p(1-p)$, ou seja:

$$\begin{aligned} E(\hat{P}) &= p \\ \text{Var}(\hat{P}) &= \frac{p(1-p)}{n} \end{aligned}$$

Vemos, então, que a proporção amostral é um estimador não-viesado da proporção populacional p . A distribuição exata é dada pela expressão (6.2).

Como a proporção amostral é uma média de uma amostra aleatória simples de uma população com distribuição de Bernoulli com parâmetro p , o Teorema Central do Limite nos diz, então, que a distribuição da proporção amostral se aproxima de uma normal com média p e variância $\frac{p(1-p)}{n}$. Como essa aproximação é uma consequência direta da aproximação normal da binomial, as mesmas regras continuam valendo: a aproximação deve ser feita se

- n for grande (em geral, $n > 30$);
- $np \geq 5$ e
- $n(1-p) \geq 5$.

Exemplo 6.1.

De um lote de produtos manufaturados, extrai-se uma amostra aleatória simples de 100 itens. Se 10% dos itens do lote são defeituosos, calcule a probabilidade de serem sorteados no máximo 12 itens defeituosos.

Solução:

As condições para utilização da aproximação normal são válidas: com $n = 100$ e $p = 0,1$ temos que:

$$100 \times 0,1 = 10 > 5$$

$$100 \times 0,9 = 90 > 5$$

Seja $X =$ “número de itens defeituosos na amostra”. Então, $X \sim \text{bin}(100; 0,1)$ e $X \approx N(10; 9)$. Queremos calcular $\Pr(X \leq 12)$. Usando a correção de continuidade e denotando por Y uma v.a. $N(10; 9)$, temos que:

$$\begin{aligned} \Pr(X \leq 12) &\approx \Pr(Y \leq 12,5) \\ &= \Pr\left(Z \leq \frac{12,5 - 10}{\sqrt{9}}\right) \\ &= \Pr(Z \leq 0,83) \\ &= 0,5 + \text{tab}(0,83) \\ &= 0,79673 \end{aligned}$$

O valor exato é $\Pr(X \leq 12) = 0,802$.

Exercício 6.2.

A confiabilidade de um componente é a probabilidade de que ele funcione sob as condições desejadas. Uma amostra aleatória simples de 1.000 desses componentes é extraída e cada componente testado. Calcule a probabilidade de obtermos pelo menos 30 itens defeituosos supondo que a confiabilidade do item seja:

1. 0,995
2. 0,85

Resumo

Nesta aula, estudamos dois resultados básicos sobre a distribuição binomial; o primeiro envolve a aproximação normal e o segundo, a distribuição amostral de proporções amostrais. Ao final, você deve compreender os seguintes resultados.

- Se $X \sim \text{bin}(n; p)$, então probabilidades desta variável podem ser aproximadas pelas probabilidades da distribuição $N[np; np(1 - p)]$, desde que sejam satisfeitas as seguintes condições:

$$\begin{aligned} n &\text{ grande (em geral, } n > 30) \\ np &\geq 5 \\ n(1 - p) &\geq 5 \end{aligned}$$

- Na aproximação da binomial pela normal, deve ser usada a correção de continuidade, conforme resumo na tabela a seguir, onde $X \sim \text{bin}(n; p)$ e $Y \sim N[np; np(1 - p)]$ (Veja também a **Figura 6.2**):

Binomial	Aproximação Normal
$\Pr(X = k)$	$\Pr(k - 0,5 \leq Y \leq k + 0,5)$
$\Pr(X \leq k)$	$\Pr(Y \leq k + 0,5)$
$\Pr(X < k)$	$\Pr(Y < k + 0,5)$
$\Pr(X \geq k)$	$\Pr(Y \geq k - 0,5)$
$\Pr(X > k)$	$\Pr(Y \geq k - 0,5)$

- Seja uma população descrita pela variável aleatória $X \sim \text{Bern}(p)$. Então,

$$\Pr(X = 1) = p, \Pr(X = 0) = 1 - p,$$

$$E(X) = p \text{ e } \text{Var}(X) = p(1 - p).$$

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma aas desta população. Definindo a proporção amostral

$$\hat{P} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

resulta que

$$\hat{P} \approx N\left(p; \frac{p(1 - p)}{n}\right)$$

e essa aproximação pode ser usada se

n for grande, (em geral $n > 30$); $np \geq 5$ e $n(1 - p) \geq 5$.

Exercício 6.3.

Use a aproximação normal para calcular as probabilidades pedidas, tendo o cuidado de verificar se as condições para essa aproximação são realmente satisfeitas.

1. $\Pr(X \leq 25)$ se $X \sim \text{bin}(50; 0,7)$
2. $\Pr(42 < X \leq 56)$ se $X \sim \text{bin}(100; 0,5)$
3. $\Pr(X > 60)$ se $X \sim \text{bin}(100; 0,5)$
4. $\Pr(X = 5)$ se $X \sim \text{bin}(20; 0,4)$
5. $\Pr(X \geq 12)$ se $X \sim \text{bin}(30; 0,3)$
6. $\Pr(9 < X < 11)$ se $X \sim \text{bin}(80; 0,1)$
7. $\Pr(12 \leq X \leq 16)$ se $X \sim \text{bin}(30; 0,2)$
8. $\Pr(X > 18)$ se $X \sim \text{bin}(50; 0,3)$
9. $\Pr(X = 6)$ se $X \sim \text{bin}(28; 0,2)$
10. $\Pr(30 \leq X < 48)$ se $X \sim \text{bin}(95; 0,4)$

Exercício 6.4.

Em uma sondagem, perguntou-se a 1.002 membros de determinado sindicato se eles haviam votado na última eleição para a direção do sindicato e 701 responderam afirmativamente. Os registros oficiais obtidos depois da eleição mostram que 61% dos membros aptos a votar de fato votaram.

Calcule a probabilidade de que, dentre 1.002 membros selecionados aleatoriamente, no mínimo 701 tenham votado, considerando que a verdadeira taxa de votantes seja de 61%. O que o resultado sugere?

Exercício 6.5.

Supondo que meninos e meninas sejam igualmente prováveis, qual é a probabilidade de nascerem 36 meninas em 64 partos?

Em geral, um resultado é considerado não-usual se a sua probabilidade de ocorrência é pequena, digamos, menor que 0,05. É não-usual nascerem 36 meninas em 64 partos?

Exercício 6.6.

Com base em dados históricos, uma companhia aérea estima em 15% a taxa de desistência entre seus clientes, isto é, 15% dos passageiros com reserva não aparecem na hora do voo. Para otimizar a ocupação de suas aeronaves, essa companhia decide aceitar 400 reservas para os voos em aeronaves que comportam apenas 350 passageiros.

Calcule a probabilidade de que essa companhia não tenha assentos suficientes em um desses voos. Essa probabilidade é alta o suficiente para a companhia rever sua política de reserva?

Exercício 6.7.

No controle de qualidade de produtos, uma técnica comumente utilizada é a *amostragem de aceitação*. Segundo essa técnica, um lote inteiro é rejeitado se contiver mais do que um número determinado de itens defeituosos. A companhia X compra parafusos de uma fábrica em lotes de 5.000 e rejeita o lote se uma amostra aleatória simples de 20 parafusos contiver pelo menos dois defeituosos.

Se o processo de fabricação tem uma taxa de 10% de defeituosos, qual é a probabilidade de um lote ser rejeitado pela companhia X?

SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS**Exercício 6.1.**

$$1. \quad 18 \times 0,4 = 7,2 > 5 \quad 18 \times 0,6 = 10,8 > 5 \quad X \approx N(7,2; 4,32)$$

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 15) &\approx \Pr\left(Z \geq \frac{14,5 - 7,2}{\sqrt{4,32}}\right) = \Pr(Z \geq 3,51) \\ &= 0,5 - 0,49978 = 0,00022 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(X < 2) &\approx \Pr\left(Z \leq \frac{1,5 - 7,2}{\sqrt{4,32}}\right) \\ &= \Pr(Z \leq -2,74) = \Pr(Z \geq 2,74) \\ &= 0,5 - 0,49693 = 0,00307 \end{aligned}$$

$$2. 40 \times 0,3 = 12 > 5$$

$$40 \times 0,7 = 28 > 5$$

$$X \approx N(12; 8,4)$$

$$\begin{aligned} \Pr(X < 10) &= \Pr\left(Z \leq \frac{9,5 - 12}{\sqrt{8,4}}\right) \\ &= \Pr(Z \leq -0,86) = \Pr(Z \geq 0,86) \\ &= 0,5 - 0,30511 = 0,19489 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(25 < X < 28) &= \Pr\left(\frac{25,5 - 12}{\sqrt{8,4}} \leq Z \leq \frac{27,5 - 12}{\sqrt{8,4}}\right) \\ &= \Pr(4,66 \leq Z \leq 5,35) \approx 0 \end{aligned}$$

$$3. 65 \times 0,9 = 58,5 > 5$$

$$65 \times 0,1 = 6,5 > 5$$

$$X \approx N(58,5; 5,85)$$

$$\begin{aligned} \Pr(X = 58) &= \Pr\left(\frac{57,5 - 58,5}{\sqrt{5,85}} \leq Z \leq \frac{58,5 - 58,5}{\sqrt{5,85}}\right) \\ &= \Pr(-0,41 \leq Z \leq 0) \\ &= \Pr(0 \leq Z \leq 0,41) = 0,15910 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(60 < X \leq 63) &= \Pr\left(\frac{60,5 - 58,5}{\sqrt{5,85}} \leq Z \leq \frac{63,5 - 58,5}{\sqrt{5,85}}\right) \\ &= \Pr(0,83 \leq Z \leq 2,07) \\ &= 0,48077 - 0,29673 = 0,18404 \end{aligned}$$

$$4. 100 \times 0,2 = 20,0 > 5$$

$$100 \times 0,8 = 80,0 > 5$$

$$X \approx N(20; 16)$$

$$\begin{aligned} \Pr(25 \leq X \leq 35) &= \Pr\left(\frac{24,5 - 20}{4} \leq Z \leq \frac{35,5 - 20}{4}\right) \\ &= \Pr(1,13 \leq Z \leq 3,88) \\ &= 0,49995 - 0,37076 = 0,12919 \end{aligned}$$

$$5. 50 \times 0,2 = 10,0 > 5$$

$$50 \times 0,8 = 40,0 > 5$$

$$X \approx N(10; 8)$$

$$\Pr(X > 26) = \Pr\left(Z \geq \frac{26,5 - 10}{\sqrt{8}}\right) = \Pr(Z \geq 5,83) \approx 0$$

$$\begin{aligned}\Pr(5 \leq X < 10) &= \Pr\left(\frac{4,5 - 10}{\sqrt{8}} \leq Z \leq \frac{9,5 - 10}{\sqrt{8}}\right) \\ &= \Pr(-1,94 \leq Z \leq -0,18) \\ &= \Pr(0,18 \leq Z \leq 1,94) \\ &= 0,47381 - 0,07142 = 0,40239\end{aligned}$$

Exercício 6.2.

1. Se a confiabilidade é 0,995, então a probabilidade de o item ser defeituoso é 0,005. Seja X = “número de defeituosos na amostra”. Então, $X \approx N(5; 4,975)$. Note que $1.000 \times 0,005 = 5$ e $1.000 \times 0,995 = 995$, de modo que podemos usar a aproximação normal.

$$\Pr(X \geq 30) \approx \Pr\left(Z \geq \frac{29,5 - 5}{\sqrt{4,975}}\right) = \Pr(Z \geq 10,98) \approx 0$$

2. $1.000 \times 0,85 = 850$ e $1.000 \times 0,15 = 150$.

$$X \approx N(150; 127,5)$$

$$\Pr(X \geq 30) \approx \Pr\left(Z \geq \frac{29,5 - 150}{\sqrt{127,5}}\right) = \Pr(Z \geq -10,67) \approx 1,0$$

Exercício 6.3.

1. $np = 35$ $n(1 - p) = 15$ $X \approx N(35; 10,5)$

$$\begin{aligned}\Pr(X \leq 25) &= \Pr\left(Z \leq \frac{25,5 - 35}{\sqrt{10,5}}\right) = \Pr(Z \leq -2,93) \\ &= 0,5 - 0,49831 = 0,00169\end{aligned}$$

2. $np = 50$ $n(1 - p) = 50$ $X \approx N(50; 25)$

$$\begin{aligned}\Pr(42 < X \leq 56) &= \Pr\left(\frac{42,5 - 50}{5} \leq Z \leq \frac{56,5 - 50}{5}\right) \\ &= \Pr(-1,5 \leq Z \leq 1,3) \\ &= 0,43319 + 0,40320 = 0,83639\end{aligned}$$

$$3. \quad np = 50 \quad n(1-p) = 50 \quad X \approx N(50; 25)$$

$$\begin{aligned} \Pr(X > 60) &= \Pr\left(Z \geq \frac{60,5 - 50}{5}\right) \\ &= \Pr(Z \geq 2,1) \\ &= 0,5 - 0,48214 = 0,01786 \end{aligned}$$

$$4. \quad np = 8 \quad n(1-p) = 12 \quad X \approx N(8; 4,8)$$

$$\begin{aligned} \Pr(X = 5) &= \Pr\left(\frac{4,5 - 8}{\sqrt{4,8}} \leq Z \leq \frac{5,5 - 8}{\sqrt{4,8}}\right) \\ &= \Pr(-1,60 \leq Z \leq -1,14) \\ &= \Pr(1,14 \leq Z \leq 1,60) \\ &= 0,44520 - 0,37286 = 0,07234 \end{aligned}$$

$$5. \quad np = 9 \quad n(1-p) = 21 \quad X \approx N(9; 6,3)$$

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 12) &= \Pr\left(Z \geq \frac{11,5 - 9}{\sqrt{6,3}}\right) \\ &= \Pr(Z \geq 1) \\ &= 0,5 - 0,34134 = 0,15866 \end{aligned}$$

$$6. \quad np = 8 \quad n(1-p) = 72 \quad X \approx N(8; 7,2)$$

$$\begin{aligned} \Pr(9 < X < 11) &= \Pr\left(\frac{9,5 - 8}{\sqrt{7,2}} \leq Z \leq \frac{10,5 - 8}{\sqrt{7,2}}\right) \\ &= \Pr(0,56 \leq Z \leq 0,93) \\ &= 0,32381 - 0,21226 = 0,11155 \end{aligned}$$

$$7. \quad np = 6 \quad n(1-p) = 24 \quad X \approx N(8; 4,8)$$

$$\begin{aligned} \Pr(12 \leq X \leq 16) &= \Pr\left(\frac{11,5 - 8}{\sqrt{4,8}} \leq Z \leq \frac{16,5 - 8}{\sqrt{4,8}}\right) \\ &= \Pr(1,60 \leq Z \leq 3,88) \\ &= 0,49995 - 0,44520 = 0,05475 \end{aligned}$$

$$8. \quad np = 15 \quad n(1-p) = 35 \quad X \approx N(15; 10,5)$$

$$\begin{aligned} \Pr(X > 18) &= \Pr\left(Z \geq \frac{18,5 - 15}{\sqrt{10,5}}\right) \\ &= \Pr(Z \geq 1,08) \\ &= 0,5 - 0,35993 = 0,14007 \end{aligned}$$

$$9. \quad np = 5,6 \quad n(1-p) = 22,4 \quad X \approx N(5,6; 4,48)$$

$$\begin{aligned} \Pr(X = 6) &= \Pr\left(\frac{5,5 - 5,6}{\sqrt{4,48}} \leq Z \leq \frac{6,5 - 5,6}{\sqrt{4,48}}\right) \\ &= \Pr(-0,05 \leq Z \leq 0,43) \\ &= 0,01994 + 0,16640 = 0,18634 \end{aligned}$$

$$10. \quad np = 38 \quad n(1-p) = 57 \quad X \approx N(38; 22,8)$$

$$\begin{aligned} \Pr(30 \leq X < 48) &= \Pr\left(\frac{29,5 - 38}{\sqrt{22,8}} \leq Z \leq \frac{47,5 - 38}{\sqrt{22,8}}\right) \\ &= \Pr(-1,78 \leq Z \leq 1,99) \\ &= 0,47670 + 0,46246 = 0,93916 \end{aligned}$$

Exercício 6.4.

X = “número de pessoas que votaram”. Então, $X \sim \text{bin}(1002; 0,61)$ e $X \approx N(611,22; 238,3758)$

$$\Pr(X \geq 701) \approx \Pr\left(Z \geq \frac{700,5 - 611,22}{\sqrt{238,3758}}\right) = \Pr(Z \geq 5,78) = 0$$

Se a proporção de votantes é de 61%, a probabilidade de encontrarmos 701 ou mais votantes em uma amostra de 1.002 é muito baixa. Talvez as pessoas entrevistadas não estejam sendo sinceras, com vergonha de dizer que não votaram...

Exercício 6.5.

X = “número de meninas em 64 partos”; $X \sim \text{bin}(64; 0,5)$ e $X \approx N(32; 16)$

$$\begin{aligned} \Pr(X > 36) &\approx \Pr\left(Z \geq \frac{36,5 - 32}{4}\right) \\ &= \Pr(Z \geq 1,13) \\ &= 0,5 - 0,37076 = 0,12924 \end{aligned}$$

Esse é um resultado que pode ocorrer por mero acaso, ou seja, não é um resultado não-usual.

Exercício 6.6.

X = “número de passageiros que se apresentam para o voo em questão”. $X \sim \text{bin}(400; 0,85)$ e $X \approx N(340; 51)$.

$$\begin{aligned}\Pr(X > 350) &= \Pr\left(Z \geq \frac{350,5 - 340}{\sqrt{51}}\right) \\ &= \Pr(Z \geq 1,47) \\ &= 0,5 - 0,42922 = 0,07078\end{aligned}$$

Essa é uma probabilidade um pouco alta; talvez valha a pena a companhia rever a política de reservas e aceitar menos que 400 reservas.

Exercício 6.7.

X = “número de defeituosos na amostra”; $X \sim \text{bin}(20; 0,1)$. Note que aqui não podemos usar a aproximação normal, uma vez que $20 \times 0,1 = 2 < 5$. Queremos:

$$\begin{aligned}\Pr(X \geq 2) &= 1 - \Pr(X < 2) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) \\ &= \binom{20}{0}(0,1)^0(0,9)^{20} + \binom{20}{1}(0,1)(0,9)^{19} \\ &= 0,39175\end{aligned}$$

Aula 7



INTERVALOS DE CONFIANÇA

Objetivos

Nesta aula, você aprenderá um método muito importante de estimação de parâmetros.

Na aula anterior, você viu que a média amostral \bar{X} é um bom estimador da média populacional μ . Mas vimos, também, que existe uma variabilidade nos valores de \bar{X} , ou seja, cada amostra dá origem a um valor diferente do estimador. Uma maneira de informar sobre esta variabilidade é através da estimação por intervalos.

Sendo assim, nesta aula, você aprenderá os seguintes conceitos e métodos:

- 1 intervalo de confiança;
- 2 margem de erro;
- 3 nível de confiança;
- 4 nível de significância;
- 5 intervalo de confiança para a média de uma população $N(\mu; \sigma^2)$ com variância conhecida.

IDEIAS BÁSICAS

O objetivo central da Inferência Estatística é obter informações para uma população a partir do conhecimento de uma única amostra. Em geral, a população é representada por uma variável aleatória X , com função de distribuição ou densidade de probabilidade f_X .

Dessa população, então, extrai-se uma amostra aleatória simples com reposição, que dá origem a um conjunto X_1, X_2, \dots, X_n de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, todas com a mesma distribuição f_X . Se f_X depende de um ou mais parâmetros, temos de usar a informação obtida a partir da amostra para estimar esses parâmetros, de forma a conhecermos a distribuição.

Nas aulas anteriores, por exemplo, vimos que a média amostral \bar{X} é um bom estimador da média populacional μ , no sentido de que ela tende a “acertar o alvo” da verdadeira média populacional. Mas vimos, também, que existe uma variabilidade nos valores de \bar{X} , ou seja, cada amostra dá origem a um valor diferente do estimador. Para algumas amostras, \bar{X} será maior que μ , para outras será menor e para outras será igual.

Na prática, temos apenas uma amostra e, assim, é importante que se dê alguma informação sobre essa possível variabilidade do estimador, ou seja, é importante informar o valor do estimador $\hat{\theta}$ obtido com uma amostra específica, mas é importante informar também que o verdadeiro valor do parâmetro θ poderia estar em um determinado intervalo, digamos, no intervalo $[\hat{\theta} - \varepsilon, \hat{\theta} + \varepsilon]$. Dessa forma, informamos a nossa *margem de erro* no processo de estimação; essa margem de erro é consequência do processo de seleção aleatória da amostra.

O que vamos estudar nessa aula é como obter esse intervalo, de modo a “acertar na maioria das vezes”, isto é, queremos um procedimento que garanta que, na maioria das vezes (ou das amostras possíveis), o intervalo obtido conterá o verdadeiro valor do parâmetro. A expressão “na maioria das vezes” será traduzida como “probabilidade alta”. Dessa forma, vamos lidar com afirmativas do seguinte tipo:



Com probabilidade alta (em geral, indicada por $1 - \alpha$), o intervalo $[\hat{\theta} - \text{erro}; \hat{\theta} + \text{erro}]$ conterá o verdadeiro valor do parâmetro θ .

A interpretação correta de tal afirmativa é a seguinte: se $1 - \alpha = 0,95$, por exemplo, então isso significa que o procedimento de construção do intervalo é tal que em 95% das possíveis amostras, o intervalo $[\hat{\theta} - \text{erro}; \hat{\theta} + \text{erro}]$ obtido conterá o verdadeiro valor do parâmetro. Note que cada amostra resulta em um intervalo diferente; mas, em 95% das amostras, o intervalo contém o verdadeiro valor do parâmetro. Veja, na **Figura 7.1**, dois dos intervalos não contêm o parâmetro θ .

O valor $1 - \alpha$ é chamado *nível de confiança*, enquanto o valor α é conhecido como *nível de significância*. O intervalo $[\hat{\theta} - \text{erro}; \hat{\theta} + \text{erro}]$ é chamado de *intervalo de confiança de nível de confiança $1 - \alpha$* .

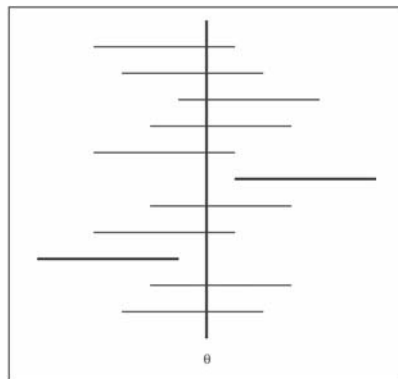


Figura 7.1: Interpretando os intervalos de confiança.

Tendo clara a interpretação do intervalo de confiança, podemos resumir a frase acima da seguinte forma:

$$\Pr\left(\theta \in [\hat{\theta} - \varepsilon; \hat{\theta} + \varepsilon]\right) = 1 - \alpha \quad (7.1)$$

Mais uma vez, a probabilidade se refere à probabilidade dentro as diversas possíveis amostras, ou seja, a probabilidade está associada à distribuição amostral de $\hat{\theta}$. Note que os limites do

intervalo dependem de $\hat{\theta}$, que depende da amostra sorteada, ou seja, os limites do intervalo de confiança são variáveis aleatórias. Cada amostra dá origem a um intervalo diferente, mas o procedimento de obtenção dos intervalos garante probabilidade $1 - \alpha$ de acerto.

INTERVALO DE CONFIANÇA PARA A MÉDIA DE UMA POPULAÇÃO NORMAL COM VARIÂNCIA CONHECIDA

Vamos, agora, introduzir os métodos para obtenção do intervalo de confiança para a média de uma população. Como visto, a média populacional é um parâmetro importante que pode ser muito bem estimado pela média amostral \bar{X} . Para apresentar as ideias básicas, vamos considerar um contexto que é pouco frequente na prática. O motivo para isso é que, em termos didáticos, a apresentação é bastante simples. Como o fundamento é o mesmo para contextos mais gerais, essa abordagem se justifica.

Consideremos uma população descrita por uma variável aleatória normal com média μ e variância σ^2 : $X \sim N(\mu; \sigma^2)$. Vamos supor que o valor de σ^2 seja conhecido e que nosso interesse seja estimar a média μ a partir de uma amostra aleatória simples X_1, X_2, \dots, X_n . Como visto na Aula 5, Teorema 5.2, a distribuição amostral de \bar{X} é normal com média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$, ou seja,

$$X \sim N(\mu; \sigma^2) \implies \bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Da definição de distribuição amostral, isso significa que os diferentes valores de \bar{X} obtidos a partir das diferentes possíveis amostras se distribuem normalmente em torno de μ com variância $\frac{\sigma^2}{n}$.

Das propriedades da distribuição normal, resulta que

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0; 1)$$

ou equivalentemente,

$$Z = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0; 1) \quad (7.2)$$

NOTAÇÃO

Vamos estabelecer a seguinte notação: vamos indicar por z_α a abscissa da curva normal padrão que deixa probabilidade (área) igual a α acima dela. Veja a **Figura 7.2**. Temos, então, que $\Pr(Z > z_\alpha) = \alpha$. Essa abscissa z_α é normalmente chamada de *valor crítico*.

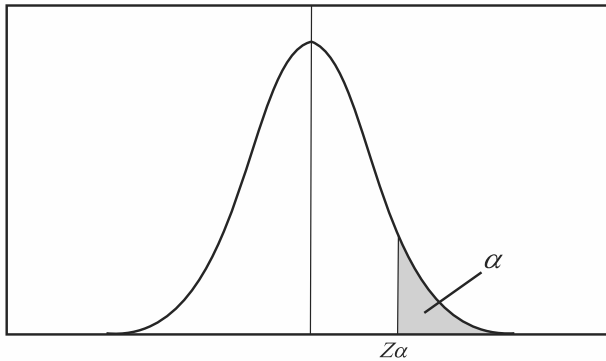


Figura 7.2: Definição do valor crítico z_α .

Consideremos, agora, o valor crítico $z_{\alpha/2}$; veja a **Figura 7.3**. Daí podemos ver que, se $Z \sim N(0, 1)$, então

$$\Pr(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha \quad (7.3)$$

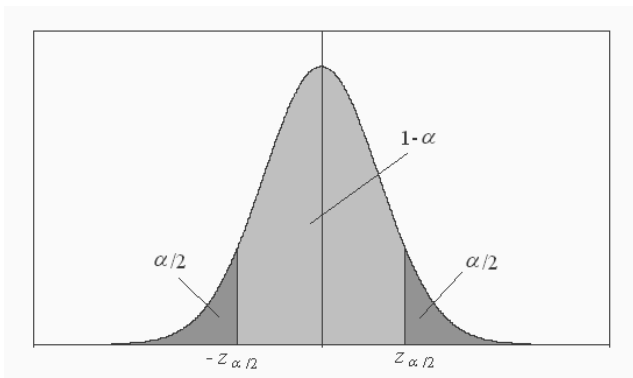


Figura 7.3: Definição do valor crítico $z_{\alpha/2}$.

Note que isso vale para a distribuição normal padrão, em geral. Então, usando os resultados das **Equações 7.2 e 7.3**, obtemos que

$$\Pr\left(-z_{\alpha/2} \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Mas isso é equivalente a

$$\begin{aligned}\Pr\left(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 1 - \alpha \iff \\ \Pr\left(-\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 1 - \alpha \iff \\ \Pr\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 1 - \alpha \quad (7.4)\end{aligned}$$

Note a última expressão; ela nos diz que

$$\Pr\left(\mu \in \left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1 - \alpha$$

Mas essa é exatamente a forma geral de um intervalo de confiança, conforme explicitado na Equação 7.1. Temos, então, a seguinte conclusão:

Definição 7.1 (Intervalo de confiança para a média de uma população normal com variância conhecida).

Seja $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ uma população, tal que a variância σ^2 é conhecida. Se X_1, X_2, \dots, X_n é uma amostra aleatória simples dessa população, então o intervalo de confiança de nível de confiança $1 - \alpha$ para a média populacional μ é dado por

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

INTERPRETAÇÃO DO INTERVALO DE CONFIANÇA PARA μ

O intervalo de confiança para μ pode ser escrito na forma $[\bar{X} - \varepsilon; \bar{X} + \varepsilon]$ onde $\varepsilon = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ é a margem de erro. Como visto, essa margem de erro está associada ao fato de que diferentes amostras fornecem diferentes valores de \bar{X} cuja média é igual a μ . As diferentes amostras fornecem diferentes intervalos de confiança, mas uma proporção de $100 \times (1 - \alpha)\%$ desses intervalos irá conter o verdadeiro valor de μ .

Note que aqui é fundamental a interpretação de probabilidade como frequência relativa: estamos considerando os diferentes intervalos que seriam obtidos, caso sorteássemos todas as possíveis amostras. Assim, o nível de confiança está associado à confiabilidade do processo de obtenção do intervalo: esse processo é tal que acertamos (isto é, o intervalo contém μ) em $100 \times (1 - \alpha)\%$ das vezes.

Na prática, temos apenas *uma* amostra e o intervalo obtido com essa amostra específica, ou contém ou não contém o verdadeiro valor de μ . A afirmativa

$$\Pr \left(\mu \in \left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \right) = 1 - \alpha$$

é válida porque ela envolve a variável aleatória \bar{X} , que tem diferentes valores para as diferentes amostras. Quando substituimos o estimador \bar{X} por uma estimativa específica \bar{x} , obtida a partir de uma amostra particular, temos apenas um intervalo e não faz mais sentido falar em probabilidade.

Para ajudar na interpretação do intervalo de confiança, suponha que, com uma amostra de tamanho 25, tenha sido obtido o seguinte intervalo de confiança com nível de confiança de 0,95:

$$\left[5 - 1,96 \times \frac{2}{\sqrt{25}}; 5 + 1,96 \times \frac{2}{\sqrt{25}} \right] = [4,216; 5,784]$$

Esse intervalo específico contém ou não contém o verdadeiro valor de μ . O que estamos dizendo é que, se repetíssemos o mesmo procedimento de sorteio de uma amostra aleatória simples da população e consequente construção do intervalo de confiança, 95% dos intervalos construídos conteriam o verdadeiro valor de μ .

Sendo assim, é *errado* dizer que há uma probabilidade de 0,95 de o intervalo específico $[4,216; 5,784]$ conter o verdadeiro valor de μ . Mas é certo dizer que com probabilidade 0,95 o intervalo $\left[\bar{X} - 1,96 \times \frac{2}{\sqrt{25}}; \bar{X} + 1,96 \times \frac{2}{\sqrt{25}} \right]$ contém μ .

Note a variável aleatória \bar{X} no limite do intervalo.

Exemplo 7.1.

Em determinada população, o peso dos homens adultos é distribuído normalmente com um desvio padrão de 16kg. Uma amostra aleatória simples de 36 homens adultos é sorteada desta população, obtendo-se um peso médio de 78,2kg. Construa um intervalo de confiança de nível de confiança 0,95 para o peso médio de todos os homens adultos dessa população.

Solução:

Vamos inicialmente determinar o valor crítico associado ao nível de confiança de 0,95. Como $1 - \alpha = 0,95$, resulta que $\alpha = 0,05$ e $\alpha/2 = 0,025$.

Analisando a **Figura 7.3**, vemos que nas duas caudas da distribuição normal padrão devemos ter 5% da área total. Logo, em cada cauda devemos ter 2,5% da área total. Em termos da tabela da distribuição normal padrão, isso significa que entre 0 e $z_{0,025}$ devemos ter $(50 - 2,5)\% = 47,5\%$. Assim, temos de procurar no corpo da tabela o valor de 0,475 para determinar a abscissa $z_{0,025}$. Veja a **Figura 7.4**.

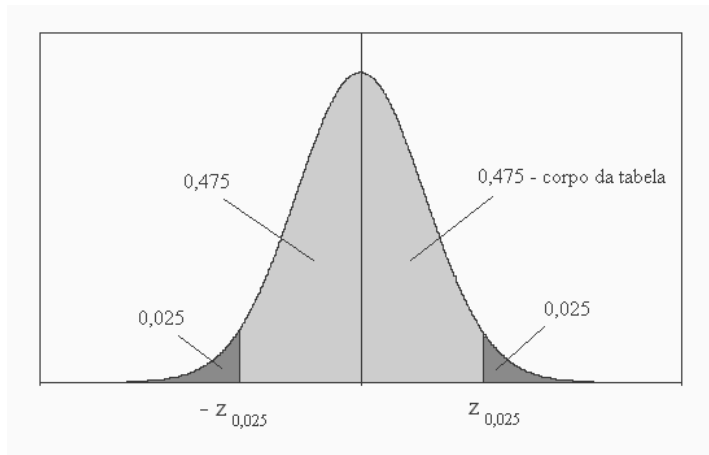


Figura 7.4: Valor crítico associado ao nível de confiança $1 - \alpha = 0,95$.

Procurando no corpo da tabela da distribuição normal padrão, vemos que o valor 0,475 corresponde à abscissa $z_{0,025} = 1,96$. Logo, nosso intervalo de confiança é

$$\left[78,2 - 1,96 \times \frac{16}{\sqrt{36}}; 78,2 + 1,96 \times \frac{16}{\sqrt{36}} \right] = [72,9733; 83,4267].$$

Esse intervalo contém ou não o verdadeiro valor de μ , mas o procedimento utilizado para sua obtenção nos garante que há 95% de chance de estarmos certos.

MARGEM DE ERRO

Vamos, agora, analisar a margem de erro do intervalo de confiança para a média de uma população normal com variância conhecida. Ela é dada por

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (7.5)$$

Lembrando que o erro padrão é o desvio padrão do estimador, podemos escrever

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} EP(\bar{X}) \quad (7.6)$$

Analizando a equação (7.5), podemos ver que ela depende diretamente do valor crítico e do desvio padrão populacional e é inversamente proporcional ao tamanho da amostra.

Na **Figura 7.5**, temos ilustrada a relação de dependência da margem de erro em relação ao desvio padrão populacional σ . Temos duas distribuições amostrais centradas na mesma média e baseadas em amostras de mesmo tamanho. Nas duas distribuições, a área total das caudas sombreadas é α , de modo que o intervalo limitado pelas linhas verticais é o intervalo de confiança de nível de confiança $1 - \alpha$. Para a distribuição mais dispersa, isto é, com σ maior, o comprimento do intervalo é maior. Esse resultado deve ser intuitivo: se há mais variabilidade na população, a nossa margem de erro tem de ser maior, mantidas fixas as outras condições (tamanho de amostra e nível de confiança).

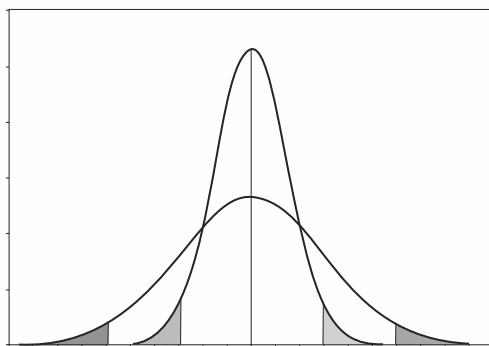


Figura 7.5: Margem de erro versus sigma: $\sigma_1 < \sigma_2 \Rightarrow \varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

Por outro lado, se mantivermos fixos o tamanho da amostra e o desvio padrão populacional, é razoável, também, esperar que a margem de erro seja maior para um nível de confiança maior. Ou seja, se queremos aumentar a probabilidade de acerto, é razoável que o intervalo seja maior. Aumentar a probabilidade de acerto significa aumentar o nível de confiança, o que acarreta em um valor crítico $z_{\alpha/2}$ maior. Veja a **Figura 7.6**, onde ilustra-se o intervalo de confiança para dois níveis de confiança diferentes: $1 - \alpha_2 > 1 - \alpha_1$. O primeiro intervalo é maior, refletindo o maior grau de confiança.

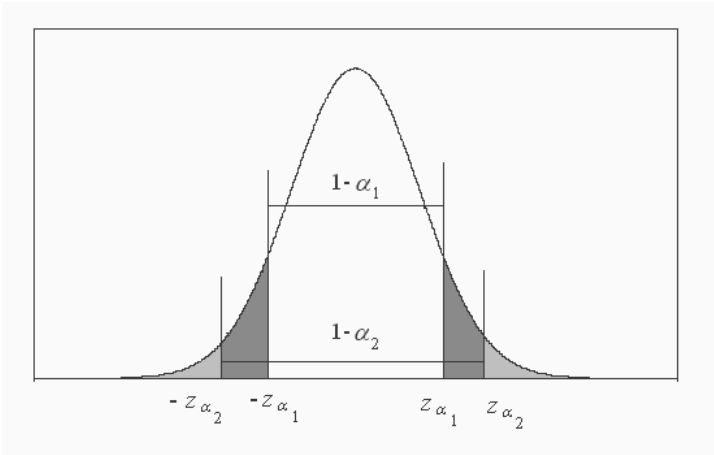


Figura 7.6: Margem de erro versus nível de confiança: $1 - \alpha_2 > 1 - \alpha_1 \Rightarrow \varepsilon_2 > \varepsilon_1$.

Finalmente, mantidos o mesmo desvio padrão populacional e o mesmo nível de confiança, quanto maior o tamanho da amostra, mais perto vamos ficando da população e, assim, vai diminuindo a nossa margem de erro.

Exemplo 7.2.

De uma população normal com variância 25 extrai-se uma amostra aleatória simples de tamanho n com o objetivo de se estimar a média populacional μ com um nível de confiança de 90% e margem de erro de 2.

Qual deve ser o tamanho da amostra?

Solução:

Para um nível de confiança 0,90, o valor do nível de significância é $\alpha = 0,10$. Então, na cauda superior da distribuição normal padrão, devemos ter uma área (probabilidade) de 0,05 e, portanto, para encontrarmos o valor de $z_{0,05}$, temos que procurar no corpo da tabela o valor 0,45 (se necessário, consulte a **Figura 7.4**). Resulta que $z_{0,05} = 1,64$. Temos, então, todos os valores necessários:

$$2 = 1,64 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1,64 \times 5}{2} = 4,1 \Rightarrow n = 16,71$$

Como o valor de n tem de ser um inteiro, uma estimativa apropriada é $n = 17$ (devemos arredondar para cima para garantir um nível de confiança no mínimo igual ao desejado).

Exemplo 7.3.

Na divulgação dos resultados de uma pesquisa, publicou-se o seguinte texto (dados fictícios): “Com o objetivo de se estimar a média de uma população, estudou-se uma amostra de tamanho $n = 45$. De estudos anteriores, sabe-se que essa população é muito bem aproximada por uma distribuição normal com desvio padrão 3, mas acredita-se que a média tenha mudado desde esse último estudo. Com os dados amostrais, obteve-se o intervalo de confiança $[1,79; 3,01]$, com uma margem de erro de 0,61.”

Quais são as informações importantes que não foram divulgadas? Como podemos obtê-las?

Solução:

Quando se divulga um intervalo de confiança para um certo parâmetro, é costume publicar também a estimativa pontual. Nesse caso, temos que informar a média amostral, que pode ser achada observando que o intervalo de confiança é simétrico em torno da média. Logo, \bar{x} é o ponto médio do intervalo:

$$\bar{x} = \frac{1,79 + 3,01}{2} = 2,4$$

Outra informação importante é o nível de confiança: o nível de confiança é encontrado a partir da abscissa $z_{\alpha/2}$:

$$0,61 = z_{\alpha/2} \times \frac{3}{\sqrt{45}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0,61 \times \sqrt{45}}{3} = 1,36$$

Consultando a tabela da distribuição normal, vemos que $\text{tab}(1,36) = 0,41308$. Veja a **Figura 7.7**: o nível de confiança é $2 \times 0,41308 = 0,82616 \approx 0,83$

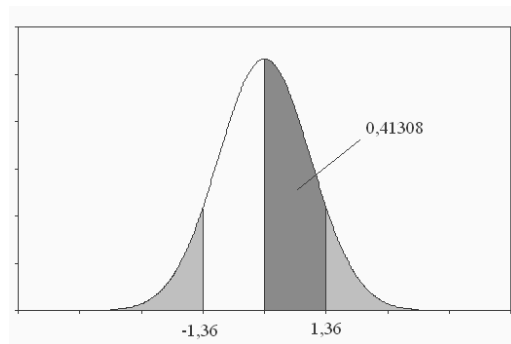


Figura 7.7: Cálculo do nível de confiança a partir de ε, σ, n .

A situação abordada aqui é pouco realista. Na prática, em geral, não conhecemos o desvio padrão da população. Nas próximas aulas iremos estudar o caso mais geral em que σ não é conhecido.

Resumo

- Como existe uma variabilidade nos valores de um estimador $\hat{\theta}$ ao longo das possíveis amostras, uma maneira de informar sobre esta variabilidade é através da estimação por intervalos de confiança. Esses intervalos, em geral, têm a forma $[\hat{\theta} - \varepsilon; \hat{\theta} + \varepsilon]$, onde ε é margem de erro.
- A obtenção de um intervalo de confiança é feita de modo que

$$\Pr(\theta \in [\hat{\theta} - \varepsilon; \hat{\theta} + \varepsilon]) = 1 - \alpha$$

- O valor $1 - \alpha$ é o nível de confiança, enquanto o valor α é o nível de significância.
- A probabilidade se refere à probabilidade dentre as diversas possíveis amostras, ou seja, a probabilidade está associada à distribuição amostral de $\hat{\theta}$. Cada amostra dá origem a um intervalo diferente, mas o procedimento de obtenção dos intervalos garante probabilidade $1 - \alpha$ de acerto, ou seja, inclusão do verdadeiro valor do parâmetro.
- A margem de erro do intervalo de confiança para a média de uma população normal com variância conhecida é

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} EP(\bar{X})$$

onde $z_{\alpha/2}$ é o valor crítico da densidade normal padrão que deixa probabilidade $\alpha/2$ acima dele.

Exercício 7.1.

1. Considere os dois intervalos de confiança a seguir, obtidos a partir de uma mesma amostra de uma população $N(\mu; 16)$. Sem fazer qualquer cálculo, identifique para qual deles o nível de confiança é maior.

$$[13,04; 16,96]$$

$$[12,42; 17,58]$$

2. Obtido um intervalo de confiança para a média de uma $N(\mu; 25)$, o que deve ser feito para se reduzir a margem de erro pela metade se não devemos alterar o nível de confiança?

Exercício 7.2.

De uma população $N(\mu; 9)$ extrai-se uma amostra aleatória simples de tamanho 25, obtendo-se $\sum_{i=1}^{25} x_i = 60$. Desenvolva detalhadamente o intervalo de confiança de 99% para a média da população.

Exercício 7.3.

Determine o tamanho da amostra necessário para se estimar a média de uma população normal com $\sigma = 4,2$ para que, com confiança de 95%, o erro máximo de estimação seja $\pm 0,05$.

Exercício 7.4.

O peso X de um certo artigo é descrito, aproximadamente, por uma distribuição normal com $\sigma = 0,58$. Uma amostra de tamanho $n = 25$ resultou em $\bar{x} = 2,8$. Desenvolva, detalhadamente, o intervalo de confiança de nível de confiança 0,90.

Exercício 7.5.

De uma população normal com $\sigma = 5$, retira-se uma amostra aleatória simples de tamanho 50, obtendo-se $\bar{x} = 42$.

1. Obtenha o intervalo de confiança para a média ao nível de significância de 5%.
2. Qual é o erro de estimação?
3. Para que o erro seja ≤ 1 , com probabilidade de acerto de 95%, qual deverá ser o tamanho da amostra?

Exercício 7.6.

Os valores da venda mensal de certo artigo é descrito, aproximadamente, pela distribuição normal com desvio padrão de R\$500,00. O gerente da loja afirma vender, em média, R\$34.700,00. O dono da loja, querendo verificar a veracidade de tal afirmativa, seleciona uma amostra aleatória das vendas em determinado mês, obtendo os seguintes valores:

33.840,00	32.960,00	41.815,00
32.940,00	32.115,00	32.740,00
35.050,00	33.010,00	33.590,00
35.060,00		

1. Obtenha o intervalo de confiança para a venda média mensal ao nível de significância de 5%.
2. Obtenha o intervalo de confiança para a venda média mensal ao nível de significância de 1%.
3. Em qual dos dois níveis de significância podemos afirmar que o gerente se baseou para fazer a afirmativa?

Exercício 7.7.

Intervalo de confiança com limites assimétricos. O tempo de execução de determinado teste de aptidão para ingresso em um estágio é normalmente distribuído com desvio padrão de 10 minutos. Uma amostra de 25 candidatos apresentou um tempo médio de 55 minutos.

Construa um intervalo de confiança de limites L_1 e L_2 ($L_1 < L_2$) de modo que seja observada a seguinte especificação: à desconfiança de que $\mu < L_1$ atribuiremos um nível de significância de 5% e à desconfiança de que $\mu > L_2$ atribuiremos o nível de significância de 10%.

SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Exercício 7.2.

É dado que $X \sim N(\mu; 9)$. Como $n = 25$, sabemos que

$$\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{9}{25}\right)$$

Com $1 - \alpha = 0,99$, temos que $\alpha = 0,01$ e $\alpha/2 = 0,005$. Assim, temos de procurar no corpo da tabela a abscissa correspondente ao valor $0,5 - 0,005 = 0,495$, o que nos dá $z_{0,005} = 2,58$. Então,

$$\Pr(-2,58 \leq Z \leq 2,58) = 0,99 \Rightarrow$$

$$\Pr\left(-2,58 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{9}{25}}} \leq 2,58\right) = 0,99 \Rightarrow$$

$$\Pr\left(-2,58 \times \sqrt{\frac{9}{25}} \leq \bar{X} - \mu \leq 2,58 \times \sqrt{\frac{9}{25}}\right) = 0,99 \Rightarrow$$

$$\Pr(-1,548 \leq \bar{X} - \mu \leq 1,548) = 0,99 \Rightarrow$$

$$\Pr(\bar{X} - 1,548 \leq \mu \leq \bar{X} + 1,548) = 0,99$$

Como a média amostral obtida é $\bar{x} = \frac{60}{25} = 2,4$, o intervalo de confiança de 99% de confiança é

$$[2,4 - 1,548; 2,4 + 1,548] = [0,852; 3,948]$$

Exercício 7.3.

Queremos $|\varepsilon| \leq 0,05$, com $\sigma = 4,2$ e $1 - \alpha = 0,95$.

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96.$$

Então,

$$\begin{aligned} 1,96 \times \frac{4,2}{\sqrt{n}} &\leq 0,05 \Rightarrow \\ \sqrt{n} &\geq \frac{1,96 \times 4,2}{0,05} = 164,64 \Rightarrow \\ n &\geq 27106,3296 \end{aligned}$$

Logo, o tamanho mínimo necessário é $n = 27107$.

Exercício 7.4.

É dado que $X \sim N(\mu; 0,58^2)$. Como $n = 25$, sabemos que

$$\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{0,58^2}{25}\right)$$

Com $1 - \alpha = 0,90$, temos que $\alpha = 0,10$ e $\alpha/2 = 0,05$. Assim, temos de procurar no corpo da tabela a abscissa correspondente ao valor $0,5 - 0,05 = 0,45$, o que nos dá $z_{0,05} = 1,64$. Então,

$$\Pr(-1,64 \leq Z \leq 1,64) = 0,90 \Rightarrow$$

$$\Pr\left(-1,64 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{0,58^2}{25}}} \leq 1,64\right) = 0,90 \Rightarrow$$

$$\Pr\left(-1,64 \times \frac{0,58}{5} \leq \bar{X} - \mu \leq 1,64 \times \frac{0,58}{5}\right) = 0,90 \Rightarrow$$

$$\Pr(-0,19024 \leq \bar{X} - \mu \leq 0,19024) = 0,90 \Rightarrow$$

$$\Pr(\bar{X} - 0,19024 \leq \mu \leq \bar{X} + 0,19024) = 0,90$$

Como a média amostral obtida é $\bar{x} = 2,8$ o intervalo de confiança de 99% de confiança é

$$[2,8 - 0,19024; 2,8 + 0,19024] = [2,60976; 2,99024]$$

Exercício 7.5.

$$\alpha = 0,05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{0,025} = 1,96$$

1. A margem de erro é

$$\varepsilon = 1,96 \times \frac{5}{\sqrt{50}} = 1,3859$$

Logo, o intervalo de confiança de nível de confiança 0,95 é

$$[42 - 1,3859; 42 + 1,3859] = [40,6141; 43,3859]$$

2. Como visto em (a) a margem de erro é $\varepsilon = 1,3859$.

3. Temos de reduzir a margem de erro; logo, o tamanho da amostra terá de ser maior que 50.

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 1,96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \leq 1 \Rightarrow \\ \sqrt{n} &\geq 1,96 \times 5 = 9,8 \Rightarrow \\ n &\geq 9,8^2 = 96,04\end{aligned}$$

Logo, n deve ser no mínimo igual a 97.

Exercício 7.6.

A média amostral é $\bar{x} = \frac{34.3120}{10} = 34.312$.

1. A margem de erro é

$$\varepsilon = 1,96 \times \frac{500}{\sqrt{10}} = 309,9$$

Logo, o intervalo de confiança de nível de confiança 95% é

$$[34.312 - 309,9; 34.312 + 309,9] = [34.002,1; 34.621,9]$$

2. A margem de erro é

$$\varepsilon = 2,58 \times \frac{500}{\sqrt{10}} = 407,93$$

Logo, o intervalo de confiança de nível de confiança 95% é

$$[34.312 - 407,93; 34.312 + 407,93] = [33.904,07; 34.719,93]$$

3. O gerente deve estar usando o nível de significância de 1% (ou nível de confiança de 99%).

Exercício 7.7.

Veja a **Figura 7.8**:

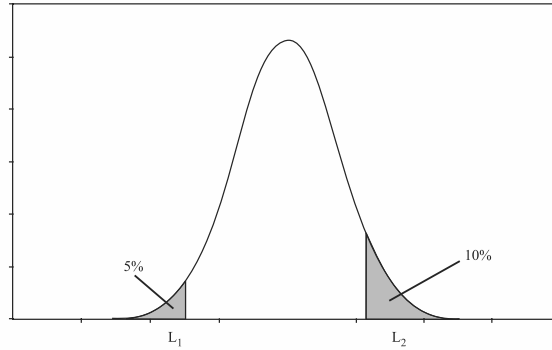


Figura 7.8: Solução do Exercício - Intervalo de confiança assimétrico.

Devemos de ter

$$\begin{aligned}\Pr(Z < z_1) &= 0,05 \Rightarrow \Pr(Z > -z_1) = 0,05 \Rightarrow \\ \text{tab}(-z_1) &= 0,45 \Rightarrow -z_1 = 1,64 \Rightarrow z_1 = -1,64\end{aligned}$$

Devemos de ter

$$\Pr(Z > z_2) = 0,10 \Rightarrow \text{tab}(z_2) = 0,40 \Rightarrow z_2 = 1,28$$

Resulta, então, que

$$\begin{aligned}\Pr(-1,64 \leq Z \leq 1,28) &= 0,85 \Rightarrow \\ \Pr\left(-1,64 \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \leq 1,28\right) &= 0,85 \Rightarrow \\ \Pr\left(-1,64 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq 1,28 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 0,85 \Rightarrow \\ \Pr\left(-\bar{X} - 1,64 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\bar{X} + 1,28 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 0,85 \Rightarrow \\ \Pr\left(\bar{X} - 1,28 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1,64 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 0,85\end{aligned}$$

Com os dados obtidos, o intervalo de confiança assimétrico é

$$\left[55 - 1,28 \times \frac{10}{\sqrt{25}}; 55 + 1,28 \times \frac{10}{\sqrt{25}}\right] = [52,44; 57,56].$$

Aula 8

INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA PROPORÇÕES – AMOSTRAS GRANDES

Objetivos

Na aula anterior, as ideias básicas da estimação por intervalos de confiança foram apresentadas. Para ilustrar o princípio utilizado na construção de tais intervalos, consideramos a situação especial de estimação da média de uma população normal com variância conhecida. Neste caso, a distribuição amostral da média amostral é normal e foi com base nessa distribuição amostral normal que obtivemos o intervalo de confiança.

Nesta aula, usaremos o resultado visto na Aula 6 que garante que a distribuição amostral da proporção amostral pode ser aproximada por uma distribuição normal, desde que utilizemos amostras grandes.

ESTIMAÇÃO DE UMA PROPORÇÃO POPULACIONAL

O contexto de interesse é o seguinte: temos uma população em que cada elemento é classificado de acordo com a presença ou ausência de determinada característica (volte à Aula 6 se necessário). Em termos de variável aleatória, essa população é representada por uma v.a. de Bernoulli, isto é:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se o elemento possui a característica de interesse} \\ 0, & \text{se o elemento não possui a característica de interesse.} \end{cases}$$

Então, $\Pr(X = 1) = p$, $E(X) = p$ e $\text{Var}(X) = p(1 - p)$. O parâmetro p é, também, a proporção de elementos da população que possuem a característica de interesse. Em geral, esse parâmetro é desconhecido e precisamos estimá-lo a partir de uma amostra.

Suponha, então, que dessa população seja extraída uma amostra aleatória simples X_1, X_2, \dots, X_n com reposição. Vimos que a proporção \hat{P} de elementos na amostra que possuem a característica de interesse, definida por

$$\hat{P} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad (8.1)$$

é um estimador não-viesado para p com variância $\frac{p(1-p)}{n}$. Mais precisamente,

$$\begin{aligned} E(\hat{P}) &= p, \\ \text{Var}(\hat{P}) &= \frac{p(1-p)}{n}. \end{aligned}$$

Como a proporção amostral é uma média de uma amostra aleatória simples de uma população com distribuição de Bernoulli com parâmetro p , o Teorema Central do Limite nos diz, então, que a distribuição de \hat{P} se aproxima de uma distribuição Normal com média p e variância $\frac{p(1-p)}{n}$. Como visto, a aproximação deve ser feita se $np \geq 5$ e $n(1-p) \geq 5$ e, em geral, essas condições são satisfeitas se $n \geq 30$. Note que, com $n = 30$, $np \geq 5$ sempre que $p \geq 0,1667$; logo, essa indicação $n \geq 30$, em geral, funciona, desde que a característica de interesse não seja extremamente rarefeita na população (em estatística, usa-se o termo populações raras nos casos em que p é muito pequeno). Caso haja suspeitas de que p seja muito pequeno, deve-se aumentar o tamanho da amostra.

Resumindo, temos o seguinte resultado:

$$\hat{P} \approx N\left(p; \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Usando as propriedades da distribuição normal, temos que

$$\frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \approx N(0; 1)$$

ou equivalentemente

$$\sqrt{n} \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1-p)}} \approx N(0; 1) \quad (8.2)$$

Vamos ver, agora, como usar esse resultado para obter um intervalo de confiança para a verdadeira proporção populacional p .

INTERVALO DE CONFIANÇA PARA A PROPORÇÃO POPULACIONAL

O procedimento de construção do intervalo de confiança para a proporção populacional é totalmente análogo ao do intervalo de confiança para a média de uma população normal com variância conhecida, visto na aula anterior. Assim, iremos usar a mesma notação, a saber: vamos representar por z_α a abscissa da curva normal padrão que deixa probabilidade (área) α acima dela. Como visto, temos o seguinte resultado, onde $Z \sim N(0; 1)$:

$$\Pr(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha \quad (8.3)$$

Veja a **Figura 8.1**.

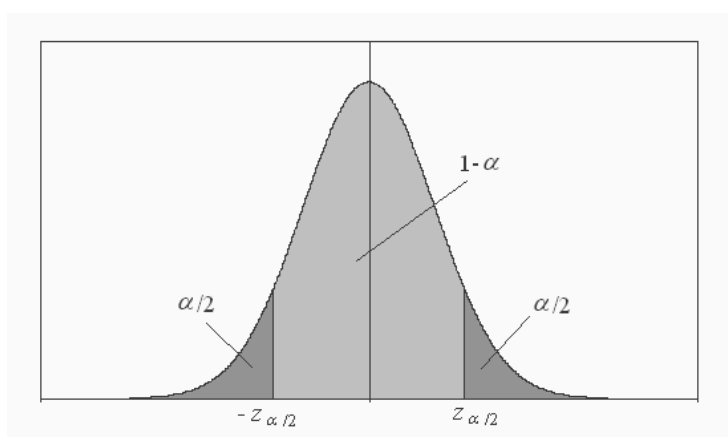


Figura 8.1: Definição do valor crítico $z_{\alpha/2}$ da $N(0; 1)$.

Como o resultado (8.3) vale para qualquer variável aleatória $N(0; 1)$, podemos usar (8.2) para obter

$$\Pr \left(-z_{\alpha/2} \leq \sqrt{n} \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1-p)}} \leq z_{\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \Pr \left(-z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \hat{P} - p \leq z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) &= 1 - \alpha \Rightarrow \\ \Pr \left(-\hat{P} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq -p \leq -\hat{P} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) &= 1 - \alpha \Rightarrow \\ \Pr \left(\hat{P} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \hat{P} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

Como no caso da média, chegamos a uma expressão do seguinte tipo:

$$\Pr \left(\hat{P} - \varepsilon \leq p \leq \hat{P} + \varepsilon \right) = 1 - \alpha$$

que é a expressão de um intervalo de confiança de nível de confiança $1 - \alpha$ para a proporção populacional.

Definição 8.1 (Intervalo de Confiança Para uma Proporção Populacional).

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória simples de uma população representada pela variável X de Bernoulli com

$$\begin{aligned} \Pr(X = 1) &= p \\ \Pr(X = 0) &= 1 - p \end{aligned}$$

Se o tamanho n da amostra é suficientemente grande [em geral, deve-se ter $np \geq 5$ e $n(1-p) \geq 5$], então o intervalo de confiança aproximado para p de nível de confiança $1 - \alpha$ é dado por

$$\left[\hat{P} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; \hat{P} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

onde $z_{\alpha/2}$ é abscissa da curva normal padrão que deixa área $\alpha/2$ acima dela.

Tanto no caso da média de uma população normal com variância conhecida, quanto no caso da proporção, a margem de erro tem a forma

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} EP(\hat{\theta})$$

onde $EP(\hat{\theta})$ representa o erro padrão do estimador em questão. No caso da média,

$$EP(\hat{\theta}) = EP(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (8.4)$$

e no caso da proporção,

$$EP(\hat{\theta}) = EP(\hat{P}) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad (8.5)$$

Analizando as expressões (8.4) e (8.5), podemos ver uma diferença fundamental: o erro padrão da proporção amostral depende do parâmetro desconhecido p . Na prática, temos de substituir esse valor por alguma estimativa prévia, obtida de outras fontes ou uma amostra piloto, ou, então, usar a própria proporção amostral obtida com a amostra usada na construção do intervalo de confiança. Com qualquer um desses procedimentos, obtemos o erro padrão estimado da proporção amostral:

$$\widehat{EP}_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n}} \quad (8.6)$$

Dessa forma, para uma determinada amostra, o intervalo de confiança se torna

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n}}; \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n}} \right]$$

No caso de se usar a própria proporção amostral, temos que $\hat{p}_0 = \hat{p}$.

Exemplo 8.1.

Um gerente de produção deseja estimar a proporção de peças defeituosas em uma de suas linhas de produção. Para isso, ele seleciona uma amostra aleatória simples de 100 peças dessa linha de produção, obtendo 30 defeituosas. Determine o intervalo de confiança para a verdadeira proporção de peças defeituosas nessa linha de produção em um nível de significância de 5%.

Solução:

O primeiro fato a observar é que a amostra é grande, o que nos permite usar a aproximação normal. Com um nível de significância de $\alpha = 0,05$, o nível de confiança é $1 - \alpha = 0,95$ e, da tabela da normal padrão, obtemos que $z_{\alpha/2} = 1,96$. Como não temos estimativa prévia da proporção de defeituosas p , temos que usar a proporção amostral $\hat{p} = 0,30$. Assim, a margem de erro é

$$\varepsilon = 1,96 \times \sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{100}} = 0,0898$$

e o intervalo de confiança é

$$[0,30 - 0,0898; 0,30 + 0,0898] = [0,2102; 0,3898]$$

DETERMINAÇÃO DO TAMANHO DA AMOSTRA

Uma questão que se coloca frequentemente é: qual o tamanho da amostra necessário para se estimar uma proporção p com uma margem de erro ε e nível de confiança $1 - \alpha$? Vamos analisar a expressão da margem de erro:

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Resolvendo para n , obtemos que

$$\sqrt{n} = z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon}$$

ou

$$n = [p(1-p)] \left(\frac{z_{\alpha/2}}{\varepsilon} \right)^2$$

Vemos, então, que n é diretamente proporcional a $p(1-p)$, ou seja, quanto maior $p(1-p)$, maior será o tamanho da amostra n . Na prática, não conhecemos p (na verdade, estamos querendo estimar esse parâmetro). Então, para determinar o tamanho de amostra necessário para uma margem de erro e um nível de confiança dados, podemos considerar o pior caso, ou seja, podemos tomar o maior valor possível de $p(1-p)$ e calcular o tamanho da amostra com base nesse pior caso. É claro que essa é uma escolha conservadora que, em alguns casos, pode levar a um tamanho de amostra desnecessariamente grande. Mas na

falta de informação melhor, essa escolha nos garante que, para um nível de confiança dado, a margem de erro será, no máximo, igual à margem de erro desejada.

Na **Figura 8.2**, temos o gráfico da função $p(1 - p)$ para valores de p no intervalo de interesse $[0, 1]$. Vemos que o máximo dessa função ocorre quando $p = 0,5$. Logo, na falta de uma estimativa melhor para p , podemos tomar $p = 0,5$ e esse valor nos garantirá que a margem de erro será menor ou igual à margem de erro desejada, para o nível de confiança escolhido.

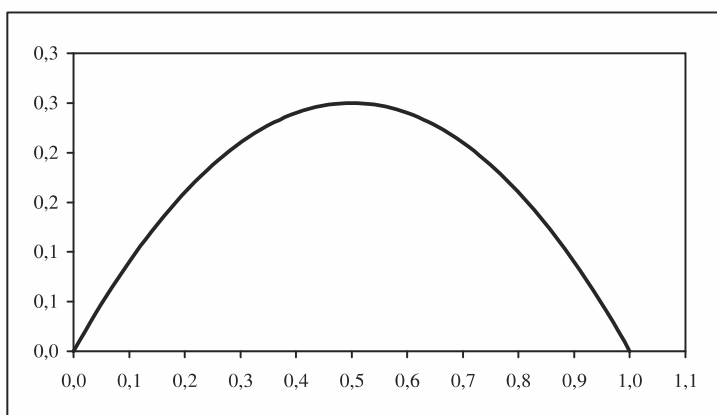


Figura 8.2: Gráfico da função $p(1 - p)$ para $0 \leq p \leq 1$.

Exemplo 8.2.

Para estudar a viabilidade de lançamento de um novo produto no mercado, o gerente de uma grande empresa contrata uma firma de consultoria estatística para estudar a aceitação do produto entre os clientes potenciais. O gerente deseja obter uma estimativa com erro máximo de 1% com probabilidade de 80% e pede ao consultor estatístico que forneça o tamanho de amostra necessário.

1. De posse das informações dadas, o consultor calcula o tamanho da amostra necessário no pior cenário. O que significa “pior cenário” nesse caso? Qual o tamanho de amostra obtido pelo consultor?
2. O gerente acha que o custo de tal amostra seria muito alto e autoriza o consultor a realizar um estudo piloto com uma

amostra de 100 pessoas para obter uma estimativa da verdadeira proporção. O resultado desse estudo piloto é uma estimativa $\hat{p} = 0,76$ de aceitação do novo produto. Com base nessa estimativa, o consultor recalcula o tamanho da amostra necessário. Qual é esse tamanho?

3. Seleccionada a amostra com o tamanho obtido no item anterior, obteve-se uma proporção de 72% de clientes favoráveis ao produto. Construa um intervalo de confiança para a verdadeira proporção com nível de confiança de 90%.

Solução:

1. O pior cenário é quando a população está dividida meio-a-meio em suas preferências, ou seja, quando $p = 0,5$. Com nível de confiança de 80%, obtemos $z_{0,10} = 1,28$. Nesse caso,

$$0,01 = 1,28 \times \sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{n}}$$

$$n = \left(\frac{1,28}{0,01}\right)^2 \times 0,25 = 4096$$

2. Vamos agora utilizar $\hat{p} = 0,76$:

$$0,01 = 1,28 \times \sqrt{\frac{0,76 \times 0,24}{n}}$$

$$n = \left(\frac{1,28}{0,01}\right)^2 \times 0,76 \times 0,24 = 2988,4 \Rightarrow n = 2989$$

3. $1 - \alpha = 0,90 \Rightarrow z_{0,05} = 1,64$

$$\varepsilon = 1,64 \times \sqrt{\frac{0,72 \times 0,28}{2989}} = 0,0135$$

e o intervalo de confiança é

$$[0,72 - 0,0135; 0,72 + 0,0135] = [0,7065; 0,7335]$$

Exemplo 8.3.

Uma associação de estudantes universitários de uma grande universidade deseja saber a opinião dos alunos sobre a proposta da reitoria a respeito do preço do bandejão. Para isso, seleciona aleatoriamente uma amostra de 200 estudantes, dos quais 120 são favoráveis à proposta da reitoria.

1. Construa um intervalo de confiança para a verdadeira proporção de alunos favoráveis à política da reitoria, ao nível de significância de 2%.
2. Qual é a margem de erro em (1)?
3. Qual deverá ser o tamanho da amostra para se ter um erro de, no máximo, 5% com nível de confiança de 98%?

Solução:

1. Com nível de significância de 2%, o nível de confiança é 98%, o que resulta em $z_{0,01} = 2,33$. Com 120 estudantes favoráveis dentre 200, temos que $\hat{p} = \frac{120}{200} = 0,6$. Logo,

$$\varepsilon = 2,33 \times \sqrt{\frac{0,6 \times 0,4}{200}} = 0,0807$$

e o intervalo de confiança é

$$[0,6 - 0,0807; 0,6 + 0,0807] = [0,5193; 0,6807]$$

2. A margem de erro é $\varepsilon = 0,0807$.
3. Queremos, agora, reduzir a margem de erro para 5%, mantendo o mesmo nível de confiança. Certamente teremos que aumentar o tamanho da amostra:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq 0,05 \Rightarrow \\ 2,33 \times \sqrt{\frac{0,6 \times 0,4}{n}} &\leq 0,05 \Rightarrow \\ \sqrt{n} &\geq \frac{2,33}{0,05} \times \sqrt{0,6 \times 0,4} \Rightarrow \\ n &\geq \left(\frac{2,33}{0,05}\right)^2 \times 0,6 \times 0,4 \Rightarrow \\ n &\geq 522 \end{aligned}$$

Se usássemos o pior cenário, isto é, $p = 0,5$, teríamos

$$\begin{aligned} n &\geq \left(\frac{2,33}{0,05}\right)^2 \times 0,25 \Rightarrow \\ n &\geq 543 \end{aligned}$$

Resumo

- No estudo da proporção amostral, a população é descrita por uma variável aleatória de Bernoulli X tal que

$$\begin{aligned}\Pr(X = 1) &= p \\ \Pr(X = 0) &= 1 - p\end{aligned}$$

em que $X = 1$ representa a presença da característica de interesse.

- Dada uma amostra X_1, X_2, \dots, X_n de tal população, a proporção \hat{P} de elementos na amostra que possuem a característica de interesse é

$$\hat{P} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}E(\hat{P}) &= p \\ \text{Var}(\hat{P}) &= \frac{p(1-p)}{n}\end{aligned}$$

- Pelo Teorema Central do Limite, resulta que

$$\hat{P} \approx N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

e essa aproximação só deve ser usada se $np \geq 5$ e $n(1-p) \geq 5$.

- A margem de erro do intervalo de confiança para a proporção populacional é

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = z_{\alpha/2} EP(\hat{P})$$

onde $z_{\alpha/2}$ é o valor crítico da densidade normal padrão que deixa probabilidade $\alpha/2$ acima dele.

- Como a margem de erro depende do parâmetro a ser estimado, uma alternativa é trabalhar com alguma estimativa prévia ou com a própria estimativa usada na construção do intervalo de confiança. Assim, o intervalo de confiança estimado para a proporção populacional p é dado por

$$\left[\hat{P} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{P}_0(1-\hat{P}_0)}{n}}; \hat{P} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{P}_0(1-\hat{P}_0)}{n}} \right]$$

Resumo

- Na determinação do tamanho amostral necessário para se obter determinada margem de erro ao nível de confiança $1 - \alpha$, podemos usar o pior cenário, que corresponde a uma população dividida ao meio, isto é, $p = 0,5$. Neste caso, o tamanho amostral é dado por

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{\varepsilon} \right)^2 p(1-p) = \frac{1}{4} \left(\frac{z_{\alpha/2}}{\varepsilon} \right)^2$$

Exercício 8.1.

Construa um intervalo de confiança para a proporção populacional em cada um dos casos listados a seguir:

1. $n = 600, \alpha = 2\%$, Número de “sucessos” na amostra = 128.
2. $n = 1200, \alpha = 10\%$, Número de “sucessos” na amostra = 710, estimativa prévia $\hat{p}_0 = 55\%$.

Exercício 8.2.

Uma amostra de 300 habitantes de uma grande cidade revelou que 180 desejavam a fluoração da água. Encontre o intervalo de confiança para a verdadeira proporção dos que não desejam a fluoração da água:

1. para um nível de significância de 5%;
2. para um nível de confiança de 96%.

Exercício 8.3.

Querendo estimar a proporção de peças defeituosas em uma linha de produção, examinou-se uma amostra de 100 peças, encontrando-se 32 defeituosas. Sabe-se que o estimador \hat{P} para esse tamanho de amostra tem desvio padrão de 3%. Calcule o intervalo de confiança ao nível de significância de 3%.

Exercício 8.4.

Em uma pesquisa de mercado, 57 das 150 pessoas entrevistadas afirmaram que comprariam determinado produto sendo lançado por uma empresa. Essa amostra é suficiente para se estimar a verdadeira proporção de futuros compradores, com uma precisão de 0,08 e uma confiança de 90%? Em caso negativo, calcule o tamanho de amostra necessário.

Exercício 8.5.

Uma amostra aleatória simples de 400 itens forneceu 100 itens correspondentes ao evento “sucesso”.

1. Qual é a estimativa pontual \hat{p} para a verdadeira proporção de “sucessos” na população?
2. Qual é o erro padrão estimado de \hat{p} ?
3. Calcule o intervalo de confiança para a verdadeira proporção de “sucessos” na população ao nível de confiança de 80%.

Exercício 8.6.

Em uma sondagem, uma estimativa preliminar de “sucessos” em uma população é de 0,35. Que tamanho deve ter uma amostra para fornecer um intervalo de confiança de 95% com uma margem de erro de 0,05?

SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS**Exercício 8.1.**

$$1. \alpha = 2\% \Rightarrow 1 - \alpha = 98\% \Rightarrow z_{0,01} = 2,33$$

$$\hat{p} = \frac{128}{600} = 0,2133$$

$$\varepsilon = 2,33 \times \sqrt{\frac{0,2133(1 - 0,2133)}{600}} = 0,03897$$

e o intervalo de confiança é

$$[0,2133 - 0,03897; 0,2133 + 0,03897] = [0,17433; 0,25227]$$

$$2. \alpha = 10\% \Rightarrow 1 - \alpha = 90\% \Rightarrow z_{0,05} = 1,64$$

$$\hat{p} = \frac{710}{1200} = 0,59167$$

$$\varepsilon = 1,64 \times \sqrt{\frac{0,55 \times 0,45}{1200}} = 0,02355$$

e o intervalo de confiança é

$$[0,59167 - 0,02355; 0,59167 + 0,02355] = [0,56812; 0,61522]$$

Exercício 8.2.

O problema pede a estimativa para a proporção dos que não querem a fluoretação. Logo, $\hat{p} = \frac{120}{300} = 0,4$.

$$1. \alpha = 5\% \Rightarrow 1 - \alpha = 95\% \Rightarrow z_{0,025} = 1,96$$

$$\varepsilon = 1,96 \times \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{300}} = 0,05544$$

e o intervalo de confiança é

$$[0,4 - 0,05544; 0,4 + 0,05544] = [0,34456; 0,45544]$$

$$2. 1 - \alpha = 96\% \Rightarrow z_{0,02} = 2,05$$

$$\varepsilon = 2,05 \times \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{300}} = 0,05798$$

e o intervalo de confiança é

$$[0,4 - 0,05798; 0,4 + 0,05798] = [0,34202; 0,45798]$$

Exercício 8.3.

É dado que $n = 100$, $\hat{p} = 0,32$ e $EP(\hat{P}) = 0,03$.

$$\alpha = 3\% \Rightarrow z_{0,015} = 2,17$$

$$\varepsilon = 2,17 \times 0,03 = 0,0651$$

$$[0,32 - 0,0651; 0,32 + 0,0651] = [0,2549; 0,3851]$$

Exercício 8.4.

$\hat{p} = \frac{57}{150} = 0,38$. Para uma margem de erro de 0,08 e um nível de confiança de 90%, o tamanho da amostra teria de ser

$$n \geq \left(\frac{1,64}{0,08} \right)^2 \times 0,38 \times 0,62 = 99,011$$

Como o tamanho da amostra é 150, essa amostra é suficiente.

Exercício 8.5.

$$1. \hat{p} = \frac{100}{400} = 0,25$$

$$2. EP(\hat{P}) = \sqrt{\frac{0,25 \times 0,75}{400}} = 0,02651$$

$$3. 1 - \alpha = 0,80 \Rightarrow z_{0,1} = 1,28$$

$$\begin{aligned} & [0,25 - 1,28 \times 0,02651; 0,25 + 1,28 \times 0,02651] \\ & = [0,22229; 0,27771] \end{aligned}$$

Exercício 8.6.

$$\hat{p}_0 = 0,35$$

$$n \geq \left(\frac{1,96}{0,05} \right)^2 \times 0,35 \times 0,65 = 349,59$$

Logo, $n \geq 350$.

Aula 9

INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA A MÉDIA DA $N(\mu; \sigma^2)$, σ^2 DESCONHECIDA

Objetivos

Nesta aula, você completará seu estudo básico sobre intervalos de confiança, analisando o problema de estimação da média de uma população normal quando não se conhece a variância desta população. Neste caso, é necessário estimar essa variância e isso introduz mais uma fonte de variabilidade nas nossas estimativas: com uma única amostra, temos que estimar a média e a variância da população.

O procedimento é análogo aos casos anteriores, mudando apenas a distribuição amostral do estimador \bar{X} . Em vez de usarmos a distribuição normal para determinar os valores críticos, usaremos a distribuição t de Student.

Você verá os seguintes conceitos:

- 1 estimação da variância de uma população;
- 2 distribuição t -Student;
- 3 distribuição amostral da média de uma população normal com variância desconhecida;
- 4 intervalo de confiança para a média de uma população normal com variância desconhecida.

IDEIAS BÁSICAS

Considere uma população descrita por uma variável aleatória normal com média μ e variância σ^2 : $X \sim N(\mu; \sigma^2)$. Nosso interesse é estimar a média μ a partir de uma amostra aleatória simples X_1, X_2, \dots, X_n .

Como visto na Aula 5, Teorema 5.2, a distribuição amostral de \bar{X} é normal com média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$, ou seja

$$X \sim N(\mu; \sigma^2) \implies \bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Assim, se o valor de σ é conhecido, resulta que

$$Z = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0; 1) \quad (9.1)$$

e esse resultado foi utilizado na construção do intervalo de confiança para a média de uma população normal com variância conhecida, fornecendo o seguinte intervalo:

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Suponhamos, agora, que a variância σ^2 não seja conhecida. Neste caso, temos que estimá-la com os dados amostrais. Na Aula 4, vimos, através de um exemplo numérico, que

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right]$$

é um estimador não-viesado de σ^2 . Isso significa que se calculássemos o valor de S^2 para cada uma das possíveis amostras aleatórias simples de tamanho n , a média desses valores seria igual a σ^2 . Dessa forma, S^2 é um “bom” estimador de σ^2 e podemos usá-lo como uma estimativa pontual de σ^2 .

Como o desvio padrão é a raiz quadrada da variância, é natural perguntar: S é um “bom” estimador de σ , ou seja, S é um estimador não-viesado de σ ?

A resposta é NÃO, mas, para grandes amostras, o viés é pequeno, de modo que, em geral, usa-se S como estimador de σ .

Sendo assim, é natural pensarmos em substituir o valor de σ por S na expressão (9.1) e utilizarmos a estatística

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S}$$

na construção de intervalos de confiança para μ . Isso é exatamente o que faremos, mas, ao introduzirmos S no lugar de σ , a distribuição amostral de T deixa de ser normal e passa a ser uma distribuição t de Student.

A distribuição t de Student (ou simplesmente distribuição t) foi obtida por William Gosset (1876-1937), que trabalhava na Cervejaria Guinness na Irlanda. Como a cervejaria não permitia a publicação de resultados de pesquisa obtidos por seus funcionários, Gosset publicou, sob o pseudônimo de Student, o artigo “The Probable Error of a Mean” na revista *Biometrika* (vol. 6, no. 1).

A DISTRIBUIÇÃO t DE STUDENT

A distribuição t de Student é uma distribuição contínua, cuja função de densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{\pi v}} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

em que $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx$.

Essa expressão, certamente, é assustadora! Mas eis uma boa notícia: não precisaremos dela para calcular probabilidades! No entanto, é interessante notar duas características básicas dessa expressão: o argumento x da função aparece elevado ao quadrado e a expressão de $f(x)$ depende de um parâmetro representado pela letra grega ν .

Da primeira observação resulta o fato de que $f(x)$ é simétrica em torno de zero, ou seja $f(x) = f(-x)$.

O parâmetro ν é chamado *graus de liberdade* (às vezes abreviado por *gl*) e está associado ao número de parcelas independentes em uma soma. Para entender esse conceito, considere o seguinte exemplo: se conhecemos a média de um conjunto de n dados, podemos atribuir valores livremente a apenas $n - 1$ desses dados, ou seja, conhecida a média e conhecidos $n - 1$ dos valores, o n -ésimo valor fica automaticamente determinado.

Suponha $n = 10$ e $\bar{x} = 80$; se conhecemos os valores de x_1, \dots, x_9 o valor de x_{10} é obtido pela expressão $10 \times 80 - \sum_{i=1}^9 x_i$. Dizemos, então, que há 9 graus de liberdade.

Cada número de graus de liberdade dá origem a uma distribuição t diferente. No entanto, pela simetria da curva, todas as distribuições t têm média 0. Além disso, o gráfico da funo de densidade da t também tem forma de sino, como a distribuição normal.

Na **Figura 9.1**, ilustram-se diferentes distribuições t ($v = 1, 2, 10, 30$) e, a título de comparação, em cada gráfico acrescenta-se também a densidade normal padrão.

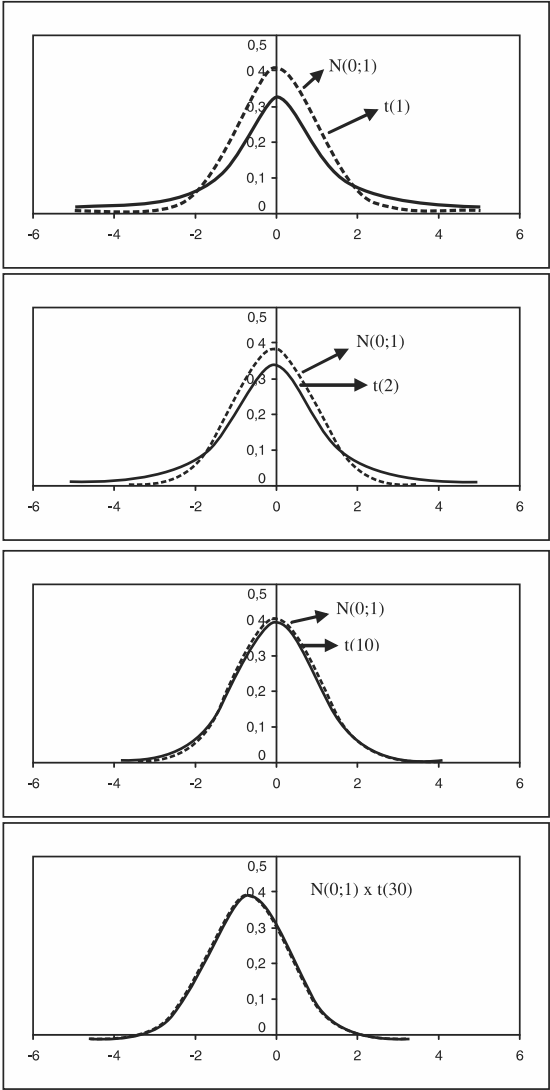


Figura 9.1: Comparação da distribuição t de Student com a $N(0;1)$.

Nos dois gráficos superiores ($\nu = 1, 2$) fica mais nítido o fato de a distribuição t ter maior dispersão (consequência do fato de substituímos σ pela sua estimativa s). Nos dois gráficos inferiores ($\nu = 10, 30$), o que chama a atenção é a quase coincidência da densidade t com a densidade $N(0; 1)$.

Esse é um resultado importante: à medida que aumenta o número de graus de liberdade, a distribuição t de Student aproxima-se da $N(0; 1)$. A variância da distribuição t com ν graus de liberdade é igual a $\frac{\nu}{\nu-2}$ ($\nu > 2$) e podemos ver que essa variância converge a 1, que é a variância da $N(0; 1)$, quando $\nu \rightarrow \infty$. Vamos representar por $t(\nu)$ a distribuição t de Student com ν graus de liberdade.

TABELA DA t -STUDENT

Ao contrário da distribuição normal, não existe uma relação entre as diferentes distribuições t ; assim, seria necessária uma tabela para cada valor de ν .

Os programas computacionais de estatística calculam probabilidades associadas a qualquer distribuição t . Mas nos livros didáticos é comum apresentar uma tabela da distribuição t que envolve os valores críticos. O motivo para isso é que a maioria das aplicações da distribuição t envolve a construção de intervalos de confiança ou de testes de hipóteses, assunto das próximas aulas.

Nessas aplicações, nosso interesse está no valor crítico associado a um nível de significância α que, como visto, é o valor da abscissa que deixa probabilidade (área) α acima dela.

Vamos representar por $t_{\nu; \alpha}$ o valor crítico da distribuição $t(\nu)$. Veja a **Figura 9.2**.

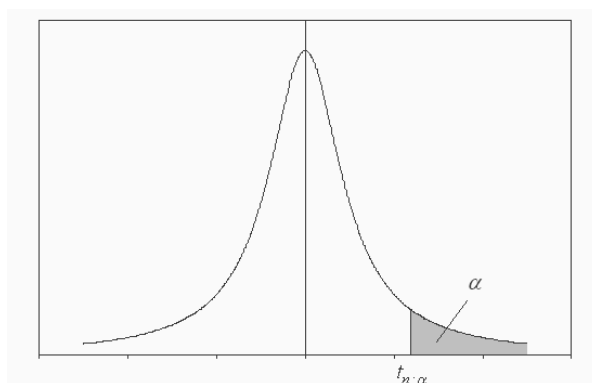


Figura 9.2: Ilustração do valor crítico $t_{\nu; \alpha}$ da distribuição $t(\nu)$.

Ao final desta aula, apresentamos a **Tabela 9.2**, que é uma apresentação usual dos valores críticos da distribuição t . Nesta tabela, cada linha corresponde a um número diferente de graus de liberdade e cada coluna corresponde a uma área α na cauda superior. No corpo da tabela temos a abscissa t_α que deixa a área α acima dela, ou seja:

$$\Pr(t(n) > t_\alpha) = \alpha$$

Vamos ver, agora, exemplos de utilização da **Tabela 9.2**.

Exemplo 9.1.

1. Na distribuição $t(15)$ encontre a abscissa $t_{15;0,05}$.
2. Na distribuição $t(23)$ encontre a abscissa t tal que $\Pr(|t(23)| > t) = 0,05$.
3. Na distribuição $t(12)$ encontre a abscissa t tal que $\Pr(|t(12)| \leq t) = 0,90$.

Solução:

1. Como o número de graus de liberdade é 15, temos de nos concentrar na linha correspondente a $gl = 15$. A abscissa $t_{0,05}$ deixa área 0,05 acima dela; logo, $t_{15;0,05} = 1,753$.
2. Usando as propriedades da função módulo, temos a seguinte equivalência:

$$\begin{aligned}\Pr(|t(23)| > t) &= 0,05 \iff \\ \Pr(t(23) < -t) + \Pr(t(23) > t) &= 0,05\end{aligned}$$

Pela simetria da densidade t , $\Pr(t(23) < -t) = \Pr(t(23) > t)$. Substituindo:

$$\begin{aligned}\Pr(t(23) > t) + \Pr(t(23) > t) &= 0,05 \iff \\ \Pr(t(23) > t) &= 0,025 \iff \\ t &= 2,069\end{aligned}$$

Esse último valor foi encontrado na **Tabela 9.2**, consultando-se a linha correspondente a 23 graus de liberdade e coluna correspondente à área superior de 0,025. Veja a **Figura 9.3.a**.

3. Das propriedades da função módulo e da simetria da densidade t resultam as seguintes equivalências. Veja a **Figura 9.3.b**:

$$\Pr(|t(12)| \leq t) = 0,90 \iff$$

$$\Pr(-t \leq t(12) \leq t) = 0,90 \iff$$

$$\Pr(-t \leq t(12) < 0) + \Pr(0 \leq t(12) \leq t) = 0,90 \iff$$

$$2 \times \Pr(0 \leq t(12) \leq t) = 0,90 \iff$$

$$\Pr(0 \leq t(12) \leq t) = 0,45 \iff$$

$$\Pr(t(12) > t) = 0,05 \iff$$

$$t = 1,782$$

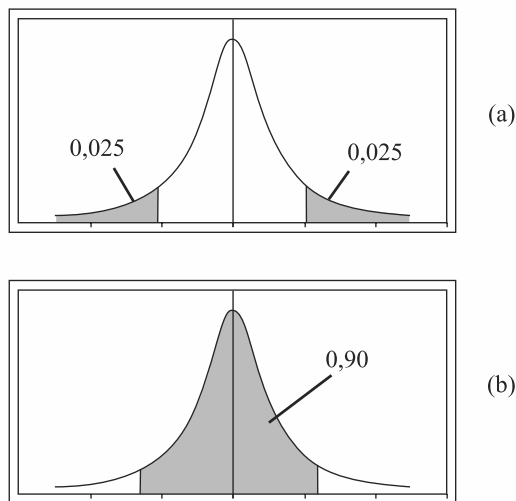


Figura 9.3: Distribuição $t(23)$ e $t(12)$, respectivamente.

Exercício 9.1.

Utilize a **Tabela 9.2** e as propriedades da função de densidade t -Student para encontrar a abscissa t que satisfaça as condições pedidas:

1. $\Pr(t(18) > t) = 0,10$
2. $\Pr(t(8) < t) = 0,90$
3. $\Pr(t(27) < t) = 0,005$
4. $\Pr(|t(30)| > t) = 0,02$
5. $\Pr(|t(24)| \leq t) = 0,80$

INTERVALO DE CONFIANÇA PARA A MÉDIA DE UMA POPULAÇÃO NORMAL COM VARIÂNCIA DESCONHECIDA

O intervalo de confiança para a média de uma população normal com variância desconhecida é obtido com base no seguinte resultado:

!

Distribuição Amostral da Média Amostral - População Normal com Variância Desconhecida

Se X_1, X_2, \dots, X_n é uma amostra aleatória simples de uma população $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, então

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t(n-1) \tag{9.2}$$

onde $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right]$.

O número de graus de liberdade $\nu = n - 1$ resulta do fato de que, na soma que define S^2 , há apenas $n - 1$ parcelas independentes, ou seja, dados S^2 e $n - 1$ das parcelas $(X_i - \bar{X})^2$, a n -ésima parcela fica automaticamente determinada.

Usando a simetria da densidade t , temos o seguinte resultado:

$$\Pr(-t_{n;\alpha/2} \leq t(n) \leq t_{n;\alpha/2}) = 1 - \alpha \tag{9.3}$$

Veja a **Figura 9.4**.

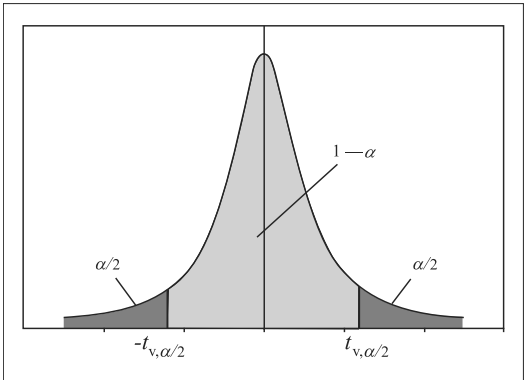


Figura 9.4: Valores críticos da t -Student para construção do intervalo de confiança da média de uma normal com variância desconhecida.

Como o resultado (9.3) vale para qualquer distribuição t , usando o resultado (9.2), obtemos:

$$\Pr \left(-t_{n-1; \alpha/2} \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \leq t_{n-1; \alpha/2} \right) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$\Pr \left(-t_{n-1; \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq t_{n-1; \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$\Pr \left(\bar{X} - t_{n-1; \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1; \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$

Essa última expressão é o intervalo de confiança para a média μ de uma população normal com variância desconhecida.



Intervalo de Confiança para a Média da $N(\mu; \sigma^2)$ – σ^2 Desconhecida

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória simples de uma população $X \sim N(\mu; \sigma^2)$. O intervalo de confiança para μ de nível de confiança $1 - \alpha$ é

$$\left[\bar{X} - t_{n-1; \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_{n-1; \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

onde $t_{n-1; \alpha/2}$ é o valor crítico da distribuição t -Student com $n - 1$ graus de liberdade que deixa área $\alpha/2$ acima dele.

MARGEM DE ERRO

Note, mais uma vez, a forma do intervalo de confiança:

$$\bar{X} \pm \varepsilon$$

onde a margem de erro ε , agora, é definida em termos do valor crítico da distribuição t e do erro padrão estimado de \bar{X} :

$$\varepsilon = t_{n-1; \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \doteq t_{n-1; \alpha/2} \widehat{EP}(\bar{X}) \quad (9.4)$$

onde

$$\widehat{EP}(\bar{X}) = \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (9.5)$$

AMOSTRAS GRANDES

Vimos que, para populações normais, a distribuição exata da estatística $T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S}$ é $t(n-1)$. Mas vimos também que, quando o número de graus de liberdade é grande, a diferença entre as distribuições t e $N(0; 1)$ tornam-se desprezíveis.

Por outro lado, se a população não é normal, mas tem média μ e variância σ^2 , o teorema central do limite nos diz que a distribuição de $\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$ se aproxima de uma $N(0; 1)$ à medida que $n \rightarrow \infty$. Pode-se mostrar que esse resultado continua valendo se substituirmos σ por seu estimador S . A conclusão dessas duas observações é a seguinte:



Dada uma amostra aleatória simples X_1, X_2, \dots, X_n de uma população X com média μ e variância σ^2 , então

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \approx N(0; 1)$$

para n suficientemente grande. Nesse caso, o intervalo de confiança aproximado de nível de confiança $1 - \alpha$ para μ é

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

Exemplo 9.2.

De uma população normal com média e variância desconhecidas, extrai-se uma amostra de tamanho 15 obtendo-se $\bar{x} = 12$ e $s^2 = 49$.

Obtenha um intervalo de confiança para a verdadeira média populacional, utilizando o nível de confiança de 95%.

Solução:

Os seguintes requisitos para o IC para μ são satisfeitos: a população é normal e a amostra é pequena. Dessa forma, temos que usar a distribuição t com $n - 1 = 14$ graus de liberdade. Como o nível de confiança é de 95%, em cada cauda da distribuição temos que ter 2,5%.

Assim, devemos procurar a abscissa $t_{14;0,025}$ procurando na linha correspondente a 14 graus de liberdade e na coluna correspondente à área de 0,025. Encontramos

$$t_{14; 0,025} = 2,145.$$

A margem de erro é

$$\varepsilon = 2,145 \times \frac{7}{\sqrt{15}} = 3,8769$$

e o intervalo de confiança

$$[12 - 3,8769; 12 + 3,8769] = [8,1231; 15,8769].$$

Exemplo 9.3.

A seguinte amostra foi extraída de uma população normal: 6, 6, 7, 8, 9, 9, 10, 11, 12. Construa o intervalo de confiança para a média populacional, com nível de significância de 10%.

Solução:

Como antes, temos uma amostra pequena de uma população normal; logo, temos que usar a distribuição t -Student. Como $n = 9$, $gl = n - 1 = 8$.

A média amostral é

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{6 + 6 + 7 + 8 + 9 + 9 + 10 + 11 + 12}{9} = \frac{78}{9} = 8,6667$$

e a variância amostral é

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} \right] = \\ &= \frac{1}{8} \left[6^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 - \frac{78^2}{9} \right] = \\ &= \frac{1}{8} \left[712 - \frac{6084}{9} \right] = \frac{36}{8} = 4,5 \end{aligned}$$

Como o nível de significância é $\alpha = 10\%$, o nível de confiança é $1 - \alpha = 90\%$. Em cauda da distribuição $t(8)$ temos que ter área igual a 5%. Assim, temos que procurar na linha correspondente a 8 graus de liberdade a abscissa relativa à área superior de 0,05. Obtemos $t_{8;0,05} = 1,860$. A margem de erro é

$$\varepsilon = 1,860 \times \sqrt{\frac{4,5}{8}} = 1,395$$

e o intervalo de confiança é

$$[8,6667 - 1,395; 8,6667 + 1,395] = [7,2717; 10,0617]$$

Exemplo 9.4.

A partir de uma amostra aleatória simples de tamanho $n = 100$, os seguintes valores foram obtidos: $\bar{x} = 12,36$ e $S^2 = 132,56$.

Obtenha um intervalo de confiança de nível de confiança 90% para a média populacional μ .

Solução:

Como o tamanho amostral é grande, podemos usar a aproximação normal. Como $1 - \alpha = 0,90$, em cada cauda temos que ter 5% e, assim, devemos procurar no corpo da tabela da distribuição normal o valor mais próximo de 0,45. Resulta que $z_{0,05} = 1,64$, o que nos dá a seguinte margem de erro:

$$\varepsilon = 1.64 \times \sqrt{\frac{132.56}{100}} = 1,8882$$

O intervalo de confiança de 90% de confiança é

$$[12.36 - 1.8882; 12.36 + 1.8882] = [10.472; 14.248]$$

RESUMO COMPARATIVO

Para finalizar a parte relativa à construção de intervalos de confiança que veremos neste curso, vamos resumir os resultados vistos nas últimas aulas. É importante notar que existem procedimentos para construção de intervalos de confiança para outros parâmetros, tal como a variância de uma população normal. O procedimento é análogo; o que muda é a distribuição amostral.

IC PARA A MÉDIA DE POPULAÇÕES NORMAIS

O contexto básico analisado nas Aulas 7 e 9 é o seguinte: de uma população *normal* extrai-se uma amostra aleatória simples X_1, X_2, \dots, X_n com o objetivo de se obter uma estimativa intervalar para a média μ . Foram consideradas duas situações: σ^2 conhecida e σ^2 desconhecida. Em ambos os casos, a expressão para o intervalo de confiança de nível de confiança $1 - \alpha$ é

$$\bar{X} \pm \varepsilon$$

com a margem de erro ε assumindo a forma geral

$$\varepsilon = \lambda_{\alpha/2} EP(\bar{X})$$

em que $\lambda_{\alpha/2}$ representa o valor crítico de alguma distribuição e $EP(\bar{X})$ é o erro padrão da média amostral.

Veja o valor crítico e o erro padrão em cada caso:

- σ^2 Conhecida

$$\begin{aligned}\lambda_{\alpha/2} &= z_{\alpha/2} \text{ quando } \bar{X} \sim N(0; 1) \\ EP(\bar{X}) &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

- σ^2 desconhecida

$$\begin{aligned}\lambda_{\alpha/2} &= t_{n-1; \alpha/2} \text{ quando } \bar{X} \sim t(n-1) \\ EP(\bar{X}) &= \frac{S}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

Quando $n > 30$, pode-se usar $z_{\alpha/2}$ no lugar de $t_{n-1; \alpha/2}$.

IC PARA UMA PROPORÇÃO

O contexto básico considerado na Aula 8 foi o seguinte: de uma população representada por uma variável aleatória $X \sim \text{Bern}(p)$ extrai-se uma amostra aleatória simples X_1, X_2, \dots, X_n com o objetivo de se estimar a proporção populacional p dos elementos que possuem determinada característica de interesse. Se a amostra é suficientemente grande (em geral, $n > 30$), o intervalo de confiança para p tem a forma

$$\hat{P} \pm \varepsilon$$

com a margem de erro ε assumindo a forma geral

$$\varepsilon = z_{\alpha/2}EP(\hat{P})$$

com

$$EP(\hat{P}) = \sqrt{\frac{\hat{p}_0(1 - \hat{p}_0)}{n}}$$

Aqui, \hat{p}_0 é uma estimativa prévia da proporção populacional p ou a própria proporção amostral \hat{p} obtida a partir da amostra.

INTERVALO DE CONFIANÇA PARA A MÉDIA DE POPULAÇÕES NÃO-NORMAIS - AMOSTRA GRANDE

Dada uma aas de tamanho grande de uma população qualquer com média μ , o intervalo de confiança de nível de confiança aproximado $1 - \alpha$ é

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Esses resultados estão resumidos na **Tabela 9.1** e na **Figura 9.5**.

Tabela 9.1: Resumo comparativo dos resultados sobre Intervalos de Confiança.

Parâmetro de interesse		Estatística amostral e sua Distribuição	Margem de erro	I.C.
Média da população $N(\mu; \sigma^2)$	σ^2 conhecida	$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0; 1)$	$\varepsilon = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} \pm \varepsilon$
	σ^2 desconhecida	$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t(n - 1)$	$\varepsilon = t_{n-1; \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$	
Proporção [média $Bern(p)$]		$\sqrt{n} \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1 - p)}} \approx N(0; 1)$	$\varepsilon = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_0(1 - \hat{p}_0)}{n}}$	$\hat{P} \pm \varepsilon$
Média de uma população X	Amostra grande	$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \approx N(0; 1)$	$\varepsilon = z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} \pm \varepsilon$

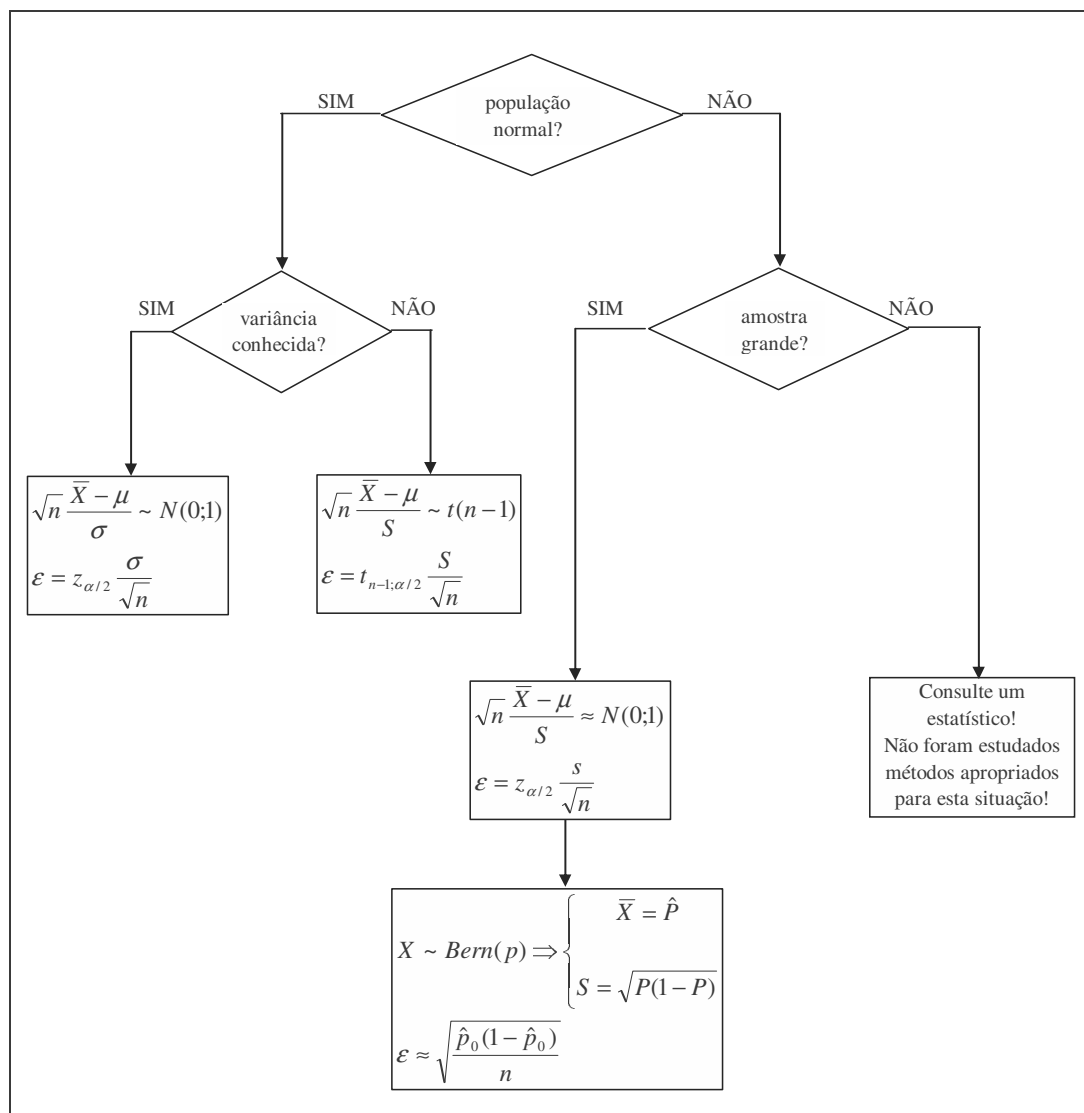


Figura 9.5: Resumo de Intervalo de Confiança.

Exercício 9.2.

Para uma distribuição t de Student com 12 graus de liberdade, encontre a probabilidade (área) de cada uma das seguintes regiões (esboce um gráfico para auxiliar na solução):

1. à esquerda de 1,782;
2. à direita de $-1,356$;
3. à direita de 2,681;
4. entre 1,083 e 3,055;
5. entre $-1,356$ e 2,179.

Exercício 9.3.

Encontre os seguintes valores críticos da distribuição t de Student:

1. $t_{15;0,05}$
2. $t_{18;0,90}$
3. $t_{25;0,975}$

Exercício 9.4.

Os tempos gastos por quinze funcionários em uma das tarefas de um programa de treinamento estão listados abaixo.

É razoável supor, nesse caso, que essa seja uma amostra aleatória simples de uma população normal, ou seja, é razoável supor que a população de todos os tempos de funcionários submetidos a esse treinamento seja aproximadamente normal.

Obtenha o intervalo de confiança de nível de confiança de 95% para o tempo médio populacional.

52	44	55	44	45	59	50	54
62	46	54	58	60	62	63	

Exercício 9.5.

Uma amostra aleatória simples de uma população normal apresenta as seguintes características:

$$n = 25 \quad \bar{x} = 500 \quad s^2 = 900$$

Construa um intervalo de confiança de nível de confiança de 98% para a média da população.

Exercício 9.6.

Em uma fábrica, uma amostra de 30 parafusos apresentou os seguintes diâmetros (em mm):

10	13	14	11	13	14	11	13	14	15
12	14	15	13	14	12	12	11	15	16
13	15	14	14	15	15	16	12	10	15

Supondo que os diâmetros sejam aproximadamente normais, obtenha um intervalo de confiança para o diâmetro médio de todos os parafusos produzidos nessa fábrica, usando o nível de significância de 2%. Para facilitar a solução do exercício, você pode usar os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 401 \quad \sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 5443$$

Exercício 9.7.

Repita o exercício anterior com os seguintes dados de uma amostra de 100 parafusos:

$$\bar{x} = 13,78 \quad s^2 = 2,865$$

SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Exercício 9.1.

1. Veja a linha 18 e a coluna 0,1000 da **Tabela 9.2**.

Resposta: $t = 1,330$

2. $0,5 + 0,5 - Pr(t(8) > t) = 0,90$

$$1 - Pr(t(8) > t) = 0,90$$

$$0,10 = Pr(t(8) > t)$$

$$t = 1,397$$

Resposta: $t = 1,397$

3. Temos que $Pr(t(27) < t) = Pr(t(27) > -t)$ por simetria.

$$\text{Daí, } Pr(t(27) > -t) = 0,05 \Rightarrow -t = 2,771 \Rightarrow t = -2,771$$

Resposta: $t = -2,771$

4. $Pr(t(30) > t) + Pr(t(30) < -t) = 0,02$

Como $Pr(t(30) > t) = Pr(t(30) < -t)$, segue que

$$2Pr(t(30) > t) = 0,02$$

$$Pr(t(30) > t) = 0,01$$

Resposta: $t = 2,457$

5. $Pr(-t \leq t(24) \leq t) = 0,80$
 $Pr(-t \leq t(24) \leq 0) + Pr(0 \leq t(24) \leq t) = 0,80$
 Como $Pr(-t \leq t(24) \leq 0) = Pr(0 \leq t(24) \leq t)$, segue que
 $2Pr(0 \leq t(24) \leq t) = 0,80$
 $Pr(0 \leq t(24) \leq t) = 0,40$
 $Pr(t(24) > t) = 0,10$
 Resposta: $t = 1,318$

Exercício 9.2.

Temos que usar a **Tabela 9.2**, concentrando-nos na linha correspondente a 12 graus de liberdade. Os valores dados podem ser encontrados no corpo da tabela nesta linha.

1. À direita de 1,782, temos uma área de 0,05; logo, à esquerda de 1,782 a área é de 0,95.
2. A área abaixo de $-1,356$ é igual à área acima de 1,356, que é de 0,10. Logo, à esquerda de $-1,356$, temos uma área de 0,10 e à direita de $-1,356$, temos uma área de 0,90.
3. À direita de 2,681 a área é 0,01.
4. À direita de 1,083 a área é 0,15; à direita de 3,055 a área é de 0,005. Logo, a área entre 1,083 e 3,055 é $0,15 - 0,005 = 0,145$.
5. Como visto no item (b), a área à direita de $-1,356$ é 0,90. A área à direita de 2,179 é 0,025. Logo, a área entre $-1,356$ e 2,179 é $0,90 - 0,025 = 0,875$.

Exercício 9.3.

1. $t_{15;0,05} = 1,753$
2. O primeiro fato a observar é que $t_{18;0,90}$ tem que ser negativo, pois à direita dele a área é de $0,90 > 0,50$. Se à direita a área é 0,90, a área à esquerda é 0,10. Pela simetria da curva, $t_{18;0,90} = -t_{18;0,10}$. Veja a **Figura 9.6**. Resulta que

$$t_{18;0,90} = -t_{18;0,10} = -1,33$$

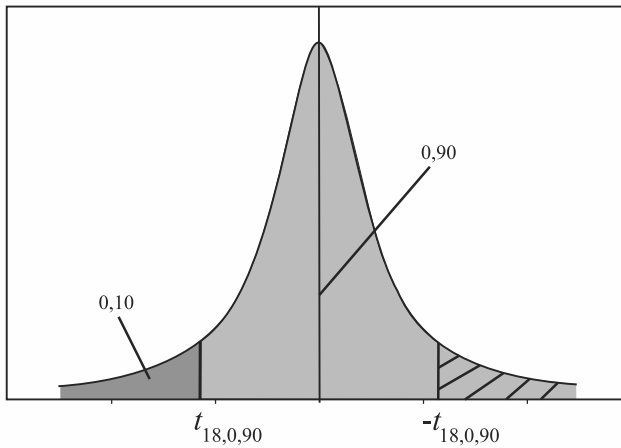


Figura 9.6: Gráfico da função $p(1-p)$ para $0 \leq p \leq 1$.

3. Analogamente, encontra-se que $t_{25;0,975} = -2,060$

Exercício 9.4.

Contexto: população normal e amostra pequena; distribuição envolvida: t -Student $n = 15$; $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow t_{14;0,025} = 2,145$

$$\bar{x} = \frac{808}{15} = 53,8667$$

$$s^2 = \frac{1}{14} \left[44176 - \frac{808^2}{15} \right] = 46,5524$$

$$\varepsilon = 2,145 \times \sqrt{\frac{46,5524}{15}} = 3,7788$$

O intervalo de confiança é

$$[53,8667 - 3,7788; 53,8667 + 3,7788] = [50,088; 57,6455]$$

Exercício 9.5.

Contexto: população normal e amostra pequena; distribuição envolvida: t -Student $t_{24;0,01} = 2,492$

$$\left[500 - 2,492 \times \sqrt{\frac{900}{25}}; 500 + 2,492 \times \sqrt{\frac{900}{25}} \right] = [485,05; 514,95]$$

Exercício 9.6.

Contexto: população normal e amostra pequena; distribuição envolvida: t -Student

$$\alpha = 2\% \Rightarrow t_{29;0,01} = 2,462$$

$$\bar{x} = \frac{401}{30} = 13,367$$

$$s^2 = \frac{1}{29} \left[5443 - \frac{401^2}{30} \right] = 2,861$$

O intervalo de confiança é substituir a próxima equação

$$\left[13,367 - 2,462 \times \sqrt{\frac{2,861}{30}}; 13,367 + 2,462 \times \sqrt{\frac{2,861}{30}} \right] = [12,607; 14,127]$$

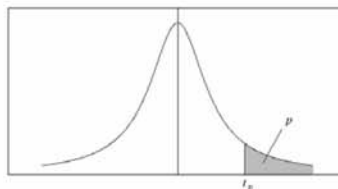
Exercício 9.7.

Como n é grande, podemos usar a abscissa da distribuição normal $z_{0,01} = 2,33$ (o valor exato é $t_{99;0,01} = 2,3646$),

$$\left[13,78 - 2,33 \times \sqrt{\frac{2,865}{100}}; 13,78 + 2,33 \times \sqrt{\frac{2,865}{100}} \right] = [13,386; 14,174]$$

Valores Críticos da t-Student

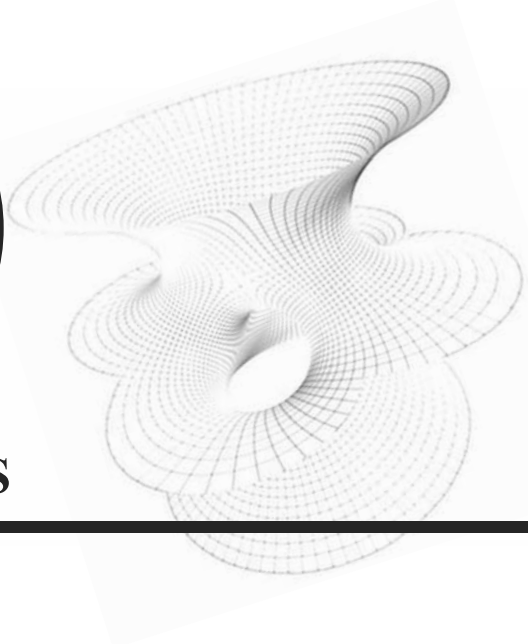
$$\Pr(t(n) > t_p) = p$$



g.l. n	Área p na cauda superior												
	0,150	0,100	0,060	0,050	0,040	0,030	0,025	0,020	0,010	0,005	0,0025	0,002	0,001
1	1,963	3,078	5,242	6,314	7,916	10,579	12,706	15,895	31,821	63,657	127,321	159,153	318,309
2	1,386	1,886	2,620	2,920	3,320	3,896	4,303	4,849	6,965	9,925	14,089	15,764	22,327
3	1,250	1,638	2,156	2,353	2,605	2,951	3,182	3,482	4,541	5,841	7,453	8,053	10,215
4	1,190	1,533	1,971	2,132	2,333	2,601	2,776	2,999	3,747	4,604	5,598	5,951	7,173
5	1,156	1,476	1,873	2,015	2,191	2,422	2,571	2,757	3,365	4,032	4,773	5,030	5,893
6	1,134	1,440	1,812	1,943	2,104	2,313	2,447	2,612	3,143	3,707	4,317	4,524	5,208
7	1,119	1,415	1,770	1,895	2,046	2,241	2,365	2,517	2,998	3,499	4,029	4,207	4,785
8	1,108	1,397	1,740	1,860	2,004	2,189	2,306	2,449	2,896	3,355	3,833	3,991	4,501
9	1,100	1,383	1,718	1,833	1,973	2,150	2,262	2,398	2,821	3,250	3,690	3,835	4,297
10	1,093	1,372	1,700	1,812	1,948	2,120	2,228	2,359	2,764	3,169	3,581	3,716	4,144
11	1,088	1,363	1,686	1,796	1,928	2,096	2,201	2,328	2,718	3,106	3,497	3,624	4,025
12	1,083	1,356	1,674	1,782	1,912	2,076	2,179	2,303	2,681	3,055	3,428	3,550	3,930
13	1,079	1,350	1,664	1,771	1,899	2,060	2,160	2,282	2,650	3,012	3,372	3,489	3,852
14	1,076	1,345	1,656	1,761	1,887	2,046	2,145	2,264	2,624	2,977	3,326	3,438	3,787
15	1,074	1,341	1,649	1,753	1,878	2,034	2,131	2,249	2,602	2,947	3,286	3,395	3,733
16	1,071	1,337	1,642	1,746	1,869	2,024	2,120	2,235	2,583	2,921	3,252	3,358	3,686
17	1,069	1,333	1,637	1,740	1,862	2,015	2,110	2,224	2,567	2,898	3,222	3,326	3,646
18	1,067	1,330	1,632	1,734	1,855	2,007	2,101	2,214	2,552	2,878	3,197	3,298	3,610
19	1,066	1,328	1,628	1,729	1,850	2,000	2,093	2,205	2,539	2,861	3,174	3,273	3,579
20	1,064	1,325	1,624	1,725	1,844	1,994	2,086	2,197	2,528	2,845	3,153	3,251	3,552
21	1,063	1,323	1,621	1,721	1,840	1,988	2,080	2,189	2,518	2,831	3,135	3,231	3,527
22	1,061	1,321	1,618	1,717	1,835	1,983	2,074	2,183	2,508	2,819	3,119	3,214	3,505
23	1,060	1,319	1,615	1,714	1,832	1,978	2,069	2,177	2,500	2,807	3,104	3,198	3,485
24	1,059	1,318	1,612	1,711	1,828	1,974	2,064	2,172	2,492	2,797	3,091	3,183	3,467
25	1,058	1,316	1,610	1,708	1,825	1,970	2,060	2,167	2,485	2,787	3,078	3,170	3,450
26	1,058	1,315	1,608	1,706	1,822	1,967	2,056	2,162	2,479	2,779	3,067	3,158	3,435
27	1,057	1,314	1,606	1,703	1,819	1,963	2,052	2,158	2,473	2,771	3,057	3,147	3,421
28	1,056	1,313	1,604	1,701	1,817	1,960	2,048	2,154	2,467	2,763	3,047	3,136	3,408
29	1,055	1,311	1,602	1,699	1,814	1,957	2,045	2,150	2,462	2,756	3,038	3,127	3,396
30	1,055	1,310	1,600	1,697	1,812	1,955	2,042	2,147	2,457	2,750	3,030	3,118	3,385
31	1,054	1,309	1,599	1,696	1,810	1,952	2,040	2,144	2,453	2,744	3,022	3,109	3,375
32	1,054	1,309	1,597	1,694	1,808	1,950	2,037	2,141	2,449	2,738	3,015	3,102	3,365
33	1,053	1,308	1,596	1,692	1,806	1,948	2,035	2,138	2,445	2,733	3,008	3,094	3,356
34	1,052	1,307	1,595	1,691	1,805	1,946	2,032	2,136	2,441	2,728	3,002	3,088	3,348
35	1,052	1,306	1,594	1,690	1,803	1,944	2,030	2,133	2,438	2,724	2,996	3,081	3,340

Tabela 9.2: Para $n > 35$, use a tabela da distribuição normal padronizada $N(0;1)$.

Aula 10



TESTES DE HIPÓTESES

O b j e t i v o s

Na teoria de estimação, vimos que é possível, por meio de estatísticas amostrais adequadas, estimar parâmetros de uma população, dentro de um certo intervalo de confiança.

Nos testes de hipóteses, em vez de se construir um intervalo de confiança no qual se espera que o parâmetro da população esteja contido, testa-se a validade de uma afirmação sobre um parâmetro da população.

Então, em um teste de hipótese, procura-se tomar decisões a respeito de uma população com base em informações obtidas de amostras desta mesma população.

Nesta aula, você aprenderá os seguintes conceitos:

- 1 hipóteses nula e alternativa;
- 2 erros tipo I e II;
- 3 estatística de teste;
- 4 regra de decisão;
- 5 região crítica;
- 6 função característica de operação;
- 7 poder do teste.

NOÇÕES BÁSICAS

Vamos trabalhar com alguns exemplos para ilustrar os conceitos básicos de que precisamos para construir testes de hipóteses estatísticos.

Exemplo 10.1.

Um detetive de polícia é encarregado da investigação de um crime. Baseado nas evidências encontradas, o detetive suspeita inicialmente do mordomo e precisa decidir, então, se o prende ou o libera. Por outro lado, o mordomo pode ser culpado ou inocente. Assim, há quatro possibilidades, resumidas no **Quadro 10.1**, que podem ocorrer quando o detetive tomar sua decisão:

- prender o mordomo, quando, na verdade, o mordomo é o assassino → decisão correta
- prender o mordomo, quando, na verdade, o mordomo é inocente → decisão errada
- liberar o mordomo, quando, na verdade, o mordomo é o assassino → decisão errada
- liberar o mordomo, quando, na verdade, o mordomo é inocente → decisão correta.

Quadro 10.1: Possibilidades sobre a decisão do detetive

		Detetive	
		Prende	Libera
Mordomo	Inocente	Errado	OK
	Culpado	OK	Errado

Se o problema do detetive fosse de origem estatística, a primeira providência que ele teria que tomar seria formular uma *hipótese nula*, que é uma afirmação sobre um parâmetro da população.

A hipótese nula, normalmente designada por H_0 , é uma afirmação que é estabelecida com o objetivo de ser testada; ela pode ser rejeitada ou não. Geralmente, a hipótese nula é formulada de tal forma que o objetivo é rejeitá-la.

No exemplo, como o detetive suspeita do mordomo, a formulação mais adequada é

H_0 : mordomo é inocente.

Se as evidências são suficientes para se rejeitar a hipótese nula, então aceita-se a *hipótese alternativa*, normalmente designada por H_1 , que será aceita se a hipótese nula for rejeitada. No exemplo, como só existem duas possibilidades, temos que

H_1 : mordomo é culpado.

Observe que o método é aplicado para se testar a hipótese nula. A hipótese alternativa será aceita se e somente se a hipótese nula for rejeitada, ou seja, a estratégia é tomar uma decisão com relação à hipótese nula.

Depois de examinar todas as evidências, o detetive deve rejeitar H_0 (e concluir que o mordomo é culpado) ou não rejeitar H_0 (e concluir que o mordomo é inocente). Note que as conclusões são sempre estabelecidas em termos da hipótese nula. Como já visto, o detetive pode cometer dois tipos de erro:

- erro tipo I: rejeitar a hipótese nula quando é verdadeira;
- erro tipo II: não rejeitar a hipótese nula quando é falsa.

No **Quadro 10.2**, temos a ilustração dessas situações.

Quadro 10.2: Possibilidades para a decisão

		Decisão	
		Rejeitar H_0	Não rejeitar H_0
Possibilidades	H_0 verdadeira	Erro I	OK
	H_0 falsa	OK	Erro II

Evidentemente, o erro tipo I pode ser evitado se nunca rejeitarmos a hipótese nula. No exemplo, isso significa que o detetive nunca cometeria o erro de condenar um homem inocente. De forma análoga, o erro tipo II pode ser evitado se sempre rejeitarmos a hipótese nula, e, no exemplo, o detetive nunca liberaria um assassino.

A teoria estatística de testes de hipóteses trata de regras de decisão, baseadas em probabilidades, que tentam balancear esses dois tipos de erro.

Exemplo 10.2.

Uma empresa compra anéis de vedação de dois fabricantes. Segundo informações dos fabricantes, os anéis do fabricante 1 têm diâmetro médio de 14 cm com desvio padrão de 1,2 cm e os anéis do fabricante 2 têm diâmetro médio de 15 cm com desvio padrão de 2,0 cm. Ambos os processos de produção geram anéis com diâmetros cuja distribuição é aproximadamente normal.

Uma caixa com 16 anéis sem identificação é encontrada pelo gerente do almoxarifado. Embora ele suspeite que a caixa seja oriunda do fabricante 1, decide fazer uma medição dos anéis e basear sua decisão no diâmetro médio da amostra: se o diâmetro médio for maior que 14,5 cm, ele identificará a caixa como oriunda do fabricante 2; caso contrário, ele identificará a caixa como oriunda do fabricante 1.

Esse é um problema típico de decisão empresarial. Vamos analisar esse processo decisório sob o ponto de vista estatístico, estudando os possíveis erros e suas probabilidades de ocorrência.

Uma primeira observação é que existem apenas duas possibilidades para a origem dos anéis de vedação. Como ele suspeita que a caixa venha do fabricante 1, vamos estabelecer a hipótese nula de forma que o resultado desejado seja rejeitá-la. Definimos, então, a hipótese nula como sendo

$$H_0 : \text{anéis vêm do fabricante 2}$$

e, obviamente, a hipótese alternativa será

$$H_1 : \text{anéis vêm do fabricante 1}$$

Se denotamos por X a variável aleatória que representa o diâmetro dos anéis, essas hipóteses se traduzem como

$$H_0 : X \sim N(15; 2, 0^2)$$

$$H_1 : X \sim N(14; 1, 2^2)$$

A regra de decisão do gerente é baseada na média amostral observada para os 16 anéis encontrados. Como dito, nossa de-

cisão deve ser expressa sempre em termos de H_0 . Logo, a regra de decisão é

$$\begin{aligned}\bar{x} &\leq 14,5 \implies \text{rejeito } H_0 \\ \bar{x} &> 14,5 \implies \text{não rejeito } H_0\end{aligned}$$

Os erros associados a essa regra de decisão são:

- Erro I: rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira
 Erro II: não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa

Se H_0 é verdadeira, a amostra vem de uma população normal com média 15 e desvio padrão 2,0. Nesse caso, a média amostral com base em amostra de tamanho 16 é também normal com média 15 e desvio padrão $\frac{2,0}{\sqrt{16}}$. Se H_0 é falsa, a amostra vem de uma população normal com média 14 e desvio padrão 1,2.

Nesse caso, a média amostral com base em amostra de tamanho 16 é também normal com média 14 e desvio padrão $\frac{1,2}{\sqrt{16}}$.

Então, as probabilidades associadas aos erros podem ser expressas em termos de probabilidade condicional:

$$\begin{aligned}\Pr(\text{Erro I}) &= \Pr\left[\bar{X} \leq 14,5 \mid \bar{X} \sim N\left(15; \frac{2,0^2}{16}\right)\right] \\ \Pr(\text{Erro II}) &= \Pr\left[\bar{X} > 14,5 \mid \bar{X} \sim N\left(14; \frac{1,2^2}{16}\right)\right]\end{aligned}$$

Na **Figura 10.1**, a probabilidade associada ao erro I corresponde à área sombreada de cinza-claro, enquanto a área sombreada de cinza-escuro corresponde à probabilidade do erro tipo II.

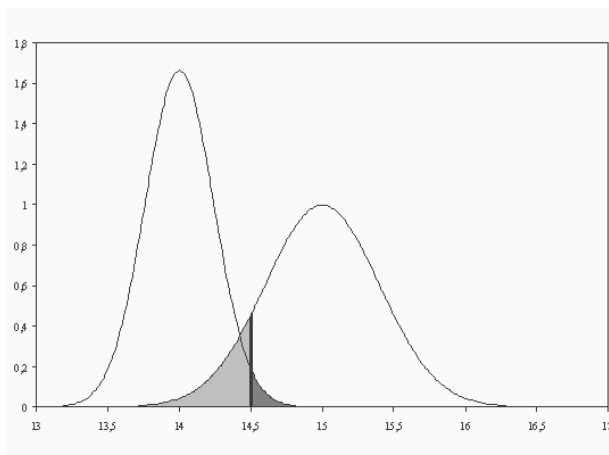


Figura 10.1: Probabilidades dos erros I e II.

Vamos calcular essas probabilidades. Em geral, a probabilidade do erro tipo I é denotada por α e a probabilidade do erro tipo II por β . Assim,

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \Pr(\text{Erro I}) \\
 &= \Pr\left[\bar{X} \leq 14,5 \mid \bar{X} \sim N\left(15; \frac{2,0^2}{16}\right)\right] \\
 &= \Pr\left(Z \leq \frac{14,5 - 15}{\frac{2}{4}}\right) \\
 &= \Pr(Z \leq -1,00) \\
 &= \Pr(Z \geq 1,00) \\
 &= 0,5 - \text{tab}(1,00) = 0,5 - 0,34134 \\
 &= 0,15866
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta &= \Pr(\text{Erro II}) \\
 &= \Pr\left[\bar{X} > 14,5 \mid \bar{X} \sim N\left(14; \frac{1,2^2}{16}\right)\right] \\
 &= \Pr\left(Z > \frac{14,5 - 14}{\frac{1,2}{4}}\right) \\
 &= \Pr(Z > 1,67) \\
 &= 0,5 - \text{tab}(1,67) = 0,04746
 \end{aligned}$$

É importante você entender a sutileza da notação. A decisão do gerente tem de ser tomada em função do resultado amostral observado; assim, usamos a notação \bar{x} . Lembre-se de que usamos letras minúsculas para representar o valor observado de uma variável aleatória.

Quando falamos da probabilidade do erro ou mesmo da regra de decisão em termos gerais, estamos considerando o procedimento decisório geral. Como esse procedimento depende da amostra sorteada, temos de expressar as probabilidades dos erros e a regra de decisão levando em conta as possíveis amostras, ou seja, temos de levar em conta a variável aleatória \bar{X} que descreve a média amostral de uma possível amostra aleatória simples de tamanho n .

No exemplo, a regra de decisão geral é: se $\bar{X} > 14,5$, o gerente classifica como produção do fabricante 2. Assim, se a caixa em questão tiver uma média de, por exemplo, 14,4, o gerente classificará a caixa como produzida pelo fabricante 1.

Exemplo 10.3.

Para resumir os resultados do exemplo anterior, podemos construir o seguinte quadro:

		Gerente decide que origem é do	
		Fabricante 1	Fabricante 2
Fabricante Verdadeiro	2	Erro I ($\alpha = 0,15866$)	OK
	1	OK	Erro II ($\beta = 0,04746$)

Vemos aí que a probabilidade do erro tipo I é maior. Analisando a **Figura 10.1**, podemos ver também que, se mudarmos a regra de decisão escolhendo um valor de corte diferente de 14,5, essas probabilidades se alterarão. Aumentando α , diminui β e vice-versa.

Vamos, agora, estabelecer uma nova regra de decisão de modo que a probabilidade do erro tipo I passe a ser 0,05. A nossa região de rejeição, ou *região crítica*, continua tendo a forma $\bar{X} \leq k$. Pela **Figura 10.1**, vemos que k tem de ser menor que 14,5.

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 0,05 \\
 \Pr \left[\bar{X} \leq k \mid \bar{X} \sim N \left(15; \frac{2,0^2}{16} \right) \right] &= 0,05 \\
 \Pr \left(Z \leq \frac{k-15}{\frac{2}{4}} \right) &= 0,05 \\
 \Pr \left(Z \geq -\frac{k-15}{0,5} \right) &= 0,05 \\
 0,5 - \text{tab} \left(-\frac{k-15}{0,5} \right) &= 0,05 \\
 \text{tab} \left(-\frac{k-15}{0,5} \right) &= 0,45 \\
 -\frac{k-15}{0,5} &= 1,64 \\
 k &= 14,18
 \end{aligned}$$

Com essa nova regra de decisão, o erro tipo II passa a ter

probabilidade:

$$\begin{aligned}
 \beta &= \Pr(\text{Erro II}) \\
 &= \Pr\left[\bar{X} > 14,18 \mid \bar{X} \sim N\left(14; \frac{1,2^2}{16}\right)\right] \\
 &= \Pr\left(Z > \frac{14,18 - 14}{\frac{1,2}{4}}\right) \\
 &= \Pr(Z > 0,6) \\
 &= 0,5 - \text{tab}(0,6) = 0,27425.
 \end{aligned}$$

Exemplo 10.4.

Suponha, agora, que o gerente queira igualar as probabilidades de erro. Qual é a regra de decisão?

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \beta \\
 \Pr\left[\bar{X} \leq k \mid \bar{X} \sim N\left(15; \frac{2,0^2}{16}\right)\right] &= \Pr\left[\bar{X} > k \mid \bar{X} \sim N\left(14; \frac{1,2^2}{16}\right)\right] \\
 \Pr\left(Z \leq \frac{k - 15}{\frac{2,0}{4}}\right) &= \Pr\left(Z > \frac{k - 14}{\frac{1,2}{4}}\right) \\
 \frac{k - 15}{0,5} &= -\frac{k - 14}{0,3} \\
 0,3k - 4,5 &= -0,5k + 7 \\
 0,8k &= 11,5 \\
 k &= 14,375
 \end{aligned}$$

Neste caso, as probabilidades dos erros tipo I e II são

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \beta = \Pr\left[\bar{X} \leq 14,375 \mid \bar{X} \sim N\left(15; \frac{2,0^2}{16}\right)\right] \\
 &= \Pr\left(Z \leq \frac{14,375 - 15}{0,5}\right) \\
 &= \Pr(Z \leq -1,25) \\
 &= \Pr(Z \geq 1,25) \\
 &= 0,5 - \text{tab}(1,25) = 0,10565
 \end{aligned}$$

Exemplo 10.5.

O procedimento de se fixar a probabilidade α do erro tipo I é o mais utilizado pois, em geral, na prática a situação não é tão simples como a escolha entre duas decisões.

Suponha, nos dois exemplos anteriores, que a empresa compre anéis de diversos fabricantes mas, pelas características de produção do fabricante 2, os anéis produzidos por ele sejam especiais para a empresa. Assim, é importante identificar corretamente a origem, caso eles sejam oriundos do fabricante 2. Nesta situação, nossas hipóteses passariam a ser:

H_0 : anéis são produzidos pelo fabricante 2

H_1 : anéis não são produzidos pelo fabricante 2

Queremos que a probabilidade α seja pequena; assim, podemos fixar α como 0,05 ou mesmo 0,01. De posse do valor dessa probabilidade, poderíamos estabelecer a região crítica ou região de rejeição. A diferença fundamental aqui está no cálculo da probabilidade do erro tipo II: não existe um único valor de β , já que, sob H_1 , a distribuição pode ter qualquer média.

Exemplo 10.6.

Considere a seguinte regra de decisão sobre a honestidade de uma moeda. Se em três lançamentos aparecerem três coroas, decidimos rejeitar a hipótese de que a moeda é honesta. Como devemos estabelecer as hipóteses nula e alternativa? Como devemos proceder para calcular α e β ?

Em termos gerais, a questão que se coloca é se a moeda é honesta ou não. Como regra geral, neste curso, deveremos sempre definir a hipótese nula de modo que ela represente um único valor do parâmetro de interesse, ou seja, a hipótese nula deve ser uma *hipótese simples*.

Neste exemplo, a distribuição em questão é uma binomial com parâmetros $n = 3$ e p desconhecido. Moeda honesta significa $p = \frac{1}{2}$. Logo, nossas hipóteses devem ser:

$$H_0 : p = \frac{1}{2}$$

$$H_1 : p \neq \frac{1}{2}$$

Seja X = número de coroas nos três lançamentos. Então, $X \sim \text{bin}(3; p)$. Nossa regra de decisão é rejeitar H_0 se $X = 3$. A probabilidade do erro tipo I é:

$$\begin{aligned}\alpha &= \Pr\left[X = 3 | X \sim \text{bin}\left(3; \frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Não é possível calcular $\beta = \Pr(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa})$, pois a hipótese alternativa (aquela que devemos considerar quando H_0 não é aceita) não estipula um valor único para p . Mas neste exemplo simples, podemos obter uma expressão para β em função de p . Note que

$$\begin{aligned}\beta &= \Pr[X < 3 | X \sim \text{bin}(3; p)] \\ &= 1 - \Pr[X \geq 3 | X \sim \text{bin}(3; p)] \\ &= 1 - \Pr[X = 3 | X \sim \text{bin}(3; p)] \\ &= 1 - p^3\end{aligned}$$

Exercício 10.1.

Estabeleça as hipóteses nula e alternativa para as seguintes situações:

1. Depois de uma pane geral no sistema de informação de uma empresa, o gerente administrativo deseja saber se houve alteração no tempo de processamento de determinada atividade. Antes da pane, o tempo de processamento podia ser aproximado por uma variável aleatória normal com média de 100 minutos e desvio padrão de 10 minutos. O gerente acredita que a pane não tenha alterado a variabilidade do processo.
2. O dono de uma média empresa decide investigar a alegação de seus empregados de que o salário médio na sua empresa é menor que o salário médio nacional, que é de 900 reais.
3. Uma empresa fabricante de balas afirma que o peso médio de suas balas é de pelo menos dois gramas.

Exercício 10.2.

Considere uma população normal com variância 225, da qual se extrai uma amostra aleatória simples de tamanho 25. Deseja-se testar as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \mu = 40$$

$$H_1 : \mu = 45$$

1. Se a região crítica é $RC : \bar{X} > 43$ calcule as probabilidades dos erros tipo I e II.
2. Determine a região crítica da forma $\bar{X} > k$ tal que a probabilidade do erro tipo I seja 0,10. Nesse caso, qual é a probabilidade do erro tipo II?

CONCEITOS BÁSICOS

O contexto em que se baseia a teoria de teste de hipótese é basicamente o mesmo da teoria de estimação por intervalo de confiança. Temos uma população representada por uma variável aleatória X cuja distribuição de probabilidade depende de algum parâmetro θ . O interesse agora está em testar a veracidade de alguma afirmativa sobre θ .

HIPÓTESE NULA

A hipótese nula, representada por H_0 , é a hipótese básica que queremos testar. Em geral, definimos a hipótese nula de modo que o nosso objetivo seja rejeitar H_0 . Nesse texto consideraremos apenas hipóteses nulas simples, isto é, hipóteses que estabelecem que o parâmetro de interesse é *igual* a um determinado valor. A forma geral é:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

Alguns exemplos são:

$$H_0 : \mu = 6 \quad H_0 : p = 0,5 \quad H_0 : \sigma^2 = 25$$

O procedimento de teste de hipótese resultará em uma *regra de decisão* que nos permitirá *rejeitar* ou *não rejeitar* H_0 .

HIPÓTESE ALTERNATIVA

A hipótese alternativa, representada por H_1 , é a hipótese que devemos considerar no caso de rejeição da hipótese nula. A forma mais geral de H_1 é a hipótese *bilateral*

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Em algumas situações, podemos ter informação que nos permita restringir o domínio da hipótese alternativa. Por exemplo, se uma empresa farmacêutica está testando um novo medicamento para enxaqueca no intuito de reduzir o tempo entre a ingestão do medicamento e o alívio dos sintomas, uma possível hipótese alternativa é

$$H_1 : \mu < 10$$

Temos, então, hipóteses unilaterais à esquerda

$$H_1 : \theta < \theta_0$$

e hipóteses unilaterais à direita:

$$H_1 : \theta > \theta_0$$

A escolha entre essas formas de hipótese alternativa se faz com base no conhecimento sobre o problema sendo considerado.

ESTATÍSTICA DE TESTE, ERROS E REGRA DE DECISÃO

Assim como na construção dos intervalos de confiança, usaremos uma estatística amostral apropriada para construir o nosso teste de hipótese, e, nesse contexto, essa estatística é chamada *estatística de teste*.

As estatísticas de teste usuais são a média amostral \bar{X} , a proporção amostral \hat{P} e a variância amostral S^2 , que serão usadas na construção de testes sobre a média, a proporção e a variância populacionais, respectivamente.

O procedimento de decisão é definido em termos da hipótese nula H_0 : as decisões possíveis são (i) rejeitar ou (ii) não rejeitar H_0 . Conforme resumo apresentado no **Quadro 10.2**, existem duas possibilidades de erro:

Erro tipo I: rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira

Erro tipo II: não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa

A decisão sobre a hipótese nula é tomada com base em uma regra que estabelece um conjunto de valores, chamado *região crítica* ou *região de rejeição*, de modo que, se o valor observado da estatística amostral cair nessa região, rejeitaremos H_0 ; caso contrário, não rejeitaremos H_0 . Vamos denotar por RC a região crítica.

REGIÃO CRÍTICA E NÍVEL DE SIGNIFICÂNCIA

Em geral, a definição da região crítica é feita da seguinte forma: RC é o conjunto de valores cuja probabilidade de ocorrência é *pequena* sob a hipótese de veracidade de H_0 .

Exemplo 10.7.

Se, ao lançarmos uma moeda 30 vezes, obtivermos 28 caras, iremos desconfiar da hipótese de honestidade da moeda, porque a probabilidade de obtermos 28 caras ou mais em 30 lançamentos de uma moeda honesta é de 0,000000433996, uma probabilidade bastante pequena.

É claro que o evento “28 caras ou mais em 30 lançamentos” é um evento possível (acertar a sena no jogo da mega-sena também é...), mas, sob o ponto de vista do teste de hipótese, a obtenção de tal evento será uma evidência de que a nossa hipótese nula de honestidade da moeda não é muito plausível.

Nesse caso, não diremos que a moeda não é honesta (não podemos dizer que é impossível acertar a sena!); nossa conclusão é que não há evidência suficiente para apoiar a hipótese nula. (Situação análoga ocorre quando um júri diz que o réu é “não-culpado”.)

A definição de “probabilidade pequena” se faz por meio da escolha do *nível de significância* α do teste, que é a probabilidade do erro tipo I, isto é,

$$\alpha = \Pr(\text{erro tipo I}) = \Pr(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira})$$

Em geral, o valor de α é pequeno e as escolhas mais comuns são $\alpha = 0,05$ e $\alpha = 0,01$.

Definido o nível de significância α , podemos estabelecer a região crítica usando a distribuição amostral da estatística de teste.

FUNÇÃO CARACTERÍSTICA DE OPERAÇÃO E PODER DO TESTE

No procedimento de teste de hipótese, as decisões possíveis são rejeitar ou não rejeitar H_0 . Definem-se, assim, as seguintes funções em termos das probabilidades de cada uma delas. A *função característica de operação* é definida como

$$\beta(\theta) = \Pr(\text{não rejeitar } H_0 \mid \theta)$$

Define-se a *função poder do teste* como

$$Q(\theta) = 1 - \beta(\theta) = \Pr(\text{rejeitar } H_0 \mid \theta)$$

Estas funções (probabilidades) estão condicionadas ao verdadeiro e desconhecido valor do parâmetro θ . Se este valor estiver no conjunto de valores definidos pela hipótese alternativa, então $Q(\theta)$ corresponde a uma probabilidade de acerto: ela mede a probabilidade de se rejeitar H_0 quando H_0 é falsa. Por outro lado, se a hipótese nula é $H_0 : \theta = \theta_0$, então

$$\begin{aligned} Q(\theta_0) &= 1 - \beta(\theta_0) \\ &= 1 - \Pr(\text{não rejeitar } H_0 \mid \theta_0) \\ &= 1 - \Pr(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}) \\ &= \Pr(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}) = \alpha \end{aligned}$$

Exemplo 10.8.

Consideremos uma população representada por uma variável aleatória normal com média μ e variância 400. Deseja-se testar

$$H_0 : \mu = 100$$

$$H_1 : \mu \neq 100$$

com base em uma amostra aleatória simples de tamanho $n = 16$. Para tal, define-se a seguinte região crítica:

$$RC : \bar{X} < 85 \text{ ou } \bar{X} > 115$$

1. Calcule a probabilidade do erro tipo I.
2. Calcule a função poder do teste para os seguintes valores de μ : 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125. Quanto vale a função poder do teste quando $\mu = 100$?

Solução:

Como queremos fazer um teste sobre a média da população, é natural usarmos \bar{X} como estatística de teste. Como a população é normal com média μ e variância 400, sabemos que \bar{X} também é normal com média μ e variância $\frac{400}{16} = 25$.

1. Sob a hipótese nula, $\mu = 100$. Então,

$$\begin{aligned} \alpha &= \Pr(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}) \\ &= \Pr[\{\bar{X} < 85\} \cup \{\bar{X} > 115\} \mid \bar{X} \sim N(100; 25)] \\ &= \Pr[\bar{X} < 85 \mid \bar{X} \sim N(100; 25)] + \Pr[\bar{X} > 115 \mid \bar{X} \sim N(100; 25)] \\ &= \Pr\left(Z < \frac{85 - 100}{5}\right) + \Pr\left(Z > \frac{115 - 100}{5}\right) \\ &= \Pr(Z < -3) + \Pr(Z > 3) \\ &= 2 \times \Pr(Z > 3) \\ &= 2 \times [0,5 - \text{tab}(3)] = 0,0027 \end{aligned}$$

2. A função poder é dada por

$$\begin{aligned} 1 - \beta(\mu) &= 1 - \Pr(\text{não rejeitar } H_0 \mid \mu) \\ &= 1 - \Pr(85 \leq \bar{X} \leq 115 \mid \mu) \\ &= 1 - \Pr[85 \leq \bar{X} \leq 115 \mid \bar{X} \sim N(\mu; 25)] \\ &= 1 - \Pr\left(\frac{85 - \mu}{5} \leq Z \leq \frac{115 - \mu}{5}\right) \end{aligned}$$

Vamos ilustrar o cálculo para $\mu = 75$:

$$\begin{aligned} 1 - \beta(75) &= 1 - \Pr(2 \leq Z \leq 8) \\ &= 1 - [\text{tab}(8) - \text{tab}(2)] = 0,97725 \end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos a seguinte tabela:

μ	$1 - \beta(\mu)$
75	0,97725
80	0,84134
85	0,50000
90	0,15866
95	0,02278
100	0,00270
105	0,02278
110	0,15866
115	0,50000
120	0,84134
125	0,97725

Observe que, para $\mu = 100$, valor da hipótese nula, a função poder é igual à probabilidade do erro tipo I (nível de significância). É interessante notar também que quanto mais distante do valor $\mu_0 = 100$, maior o poder do teste, ou seja, há uma probabilidade mais alta de se rejeitar H_0 quando o valor alternativo μ está bem distante de μ_0 .

Exemplo 10.9.

Considere a situação do exemplo anterior, com as seguintes diferenças: o tamanho da amostra é $n = 100$, e a região crítica passa a ser

$$RC : \bar{X} < 94 \text{ ou } \bar{X} > 106$$

Note que é razoável “estreitar” a região crítica, já que a amostra é maior. Vamos calcular α e a função poder do teste para os mesmos valores.

Solução:

Como antes, a função poder é dada por

$$\begin{aligned} Q(\mu) &= 1 - \Pr(\text{não rejeitar } H_0 | \mu) \\ &= 1 - \Pr(94 \leq \bar{X} \leq 106 | \mu) \\ &= 1 - \Pr[94 \leq \bar{X} \leq 106 | \bar{X} \sim N(\mu; 4)] \\ &= 1 - \Pr\left(\frac{94 - \mu}{2} \leq Z \leq \frac{106 - \mu}{2}\right) \end{aligned}$$

com os seguintes valores:

μ	$Q(\mu)$
75	1,00000
80	1,00000
85	0,99999
90	0,97725
95	0,30854
100	0,00270
105	0,30854
110	0,97725
115	0,99999
120	1,00000
125	1,00000

Note que esse teste tem o mesmo nível de significância do exemplo anterior: $\alpha = Q(100) = 0,0027$.

Na **Figura 10.2**, temos o gráfico da função poder para os dois exemplos. Note que o poder do teste baseado em uma amostra de tamanho 100 é sempre maior que o poder do teste baseado em uma amostra de tamanho 16.

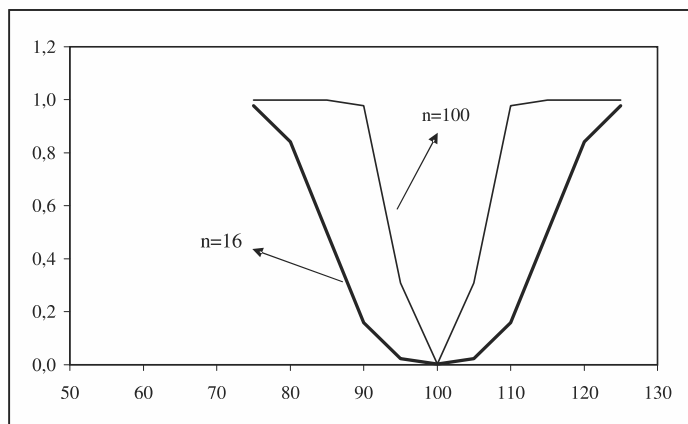


Figura 10.2: Comparação do poder de dois testes.

Exercício 10.3.

Considere uma população normal com variância 225, da qual se extrai uma amostra aleatória simples de tamanho 25. Deseja-se testar as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \mu = 40$$

$$H_1 : \mu \neq 40$$

e para isso define-se a seguinte região crítica:

$$RC : \bar{X} > 46 \text{ ou } \bar{X} < 34.$$

1. Calcule a probabilidade do erro tipo I.
2. Obtenha a expressão geral para a função poder do teste.
3. Calcule o poder do teste para os seguintes valores de $\mu : 20, 22, 24, \dots, 56, 58, 60$.
4. Esboce o gráfico da função poder.

Resumo

Nesta aula, estudamos os conceitos básicos da teoria de testes de hipóteses, em que o interesse está em testar a validade de uma afirmação sobre um parâmetro da população. Então, em um teste de hipótese, procura-se tomar decisões a respeito de uma população, com base em informações obtidas de amostras desta mesma população.

Ao final desta aula, você deve ser capaz de entender perfeitamente os seguintes conceitos.

- A *hipótese nula*, representada por H_0 , é a hipótese básica que queremos testar. Nesse texto consideraremos apenas hipóteses nulas simples do tipo

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

- A *hipótese alternativa*, representada por H_1 , é a hipótese que devemos considerar no caso de rejeição da hipótese nula. A forma mais geral de H_1 é a hipótese *bilateral*, mas podemos ter hipóteses unilaterais à esquerda e hipóteses unilaterais à direita:

$$H_1 : \theta \neq \theta_0 \quad H_1 : \theta < \theta_0 \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

Resumo

- A *estatística de teste* é a estatística amostral apropriada para construir o nosso teste de hipótese. As estatísticas de teste usuais são a média amostral \bar{X} e a proporção amostral \hat{P} , que serão usadas na construção de testes sobre a média e a proporção populacionais, respectivamente.
- O procedimento de decisão é definido em termos da hipótese nula H_0 , com as seguintes decisões possíveis
 - i. rejeitar H_0 ou
 - ii. não rejeitar H_0 .

- Os erros possíveis no processo de decisão baseado em um teste de hipótese são

Erro tipo I: rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira

Erro tipo II: não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa

- A *região crítica* ou *região de rejeição* é o conjunto de valores da estatística de teste que levam à rejeição de H_0 ; a região crítica será denotada por RC .
- Em geral, a definição da região crítica é feita fixando-se a probabilidade do erro tipo I; essa probabilidade é chamada *nível de significância* e será indicada pela letra grega alfa: α .
- A *função característica de operação* é definida como

$$\beta(\theta) = \Pr(\text{não rejeitar } H_0 \mid \theta)$$

Para valores de θ fora da região crítica, essa probabilidade corresponde à probabilidade de um acerto.

- A *função poder do teste* é definida como

$$Q(\theta) = 1 - \beta(\theta) = \Pr(\text{rejeitar } H_0 \mid \theta)$$

Para valores de θ dentro da região crítica, essa probabilidade corresponde à probabilidade de um acerto.

Exercício 10.4.

Considere uma população normal com variância 64, da qual se extrai uma amostra aleatória simples de tamanho 16. Deseja-se testar as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \mu = 23$$

$$H_1 : \mu = 28$$

1. Se a região crítica é $RC : \bar{X} > 25,5$ calcule as probabilidades dos erros tipo I e II.
2. Determine a região crítica da forma $\bar{X} > k$ tal que a probabilidade do erro tipo I seja 0,05. Nesse caso, qual é a probabilidade do erro tipo II?

Exercício 10.5.

Desejando-se testar as hipóteses

$$H_0 : \mu = 45$$

$$H_1 : \mu < 45$$

sobre a média μ de uma população normal com variância 36, estabeleceu-se a seguinte região crítica com base em amostra aleatória simples de tamanho $n = 16$:

$$RC : \bar{X} < 41,25$$

1. Calcule a probabilidade do erro tipo I.
2. Calcule o poder do teste para os seguintes valores de $\mu : 30, 31, \dots, 59, 60$.
3. Esboce o gráfico da função poder plotando os pontos $(\mu; Q(\mu))$.

Exercício 10.6.

Para uma população representada por uma variável de Bernoulli com parâmetro p , deseja-se testar a hipótese

$$H_0 : p = 0,5$$

$$H_1 : p \neq 0,5$$

Com base em uma amostra de tamanho 10, é estabelecida a seguinte região crítica:

$$RC : X = 0, 1, 2, 8, 9, 10$$

onde X = “número de sucessos na amostra”.

1. Determine o nível de significância α .
2. Calcule o poder do teste para os seguintes valores de p : 0,2; 0,4; 0,6; 0,8. Esboce o gráfico da função poder.

SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Exercício 10.1.

1. Antes da pane: $T \sim N(100; 100)$

Depois da pane: $T \sim N(\mu; 100)$

$$H_0 : \mu = 100$$

$$H_1 : \mu \neq 100$$

2. É razoável supor que o gerente queira negar a afirmação dos empregados. Assim, podemos estabelecer:

$$H_0 : \mu \geq 900$$

$$H_1 : \mu < 900$$

3. $H_0 : \mu \geq 2$
 $H_1 : \mu < 2$

Exercício 10.2.

$$\left. \begin{matrix} X \sim N(\mu; 225) \\ n = 25 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{225}{25}\right) \text{ ou } \bar{X} \sim N(\mu; 9)$$

1. $\alpha = \Pr(\bar{X} > 43 | \bar{X} \sim N(40; 9))$
 $= \Pr\left(Z > \frac{43 - 40}{3}\right)$
 $= \Pr(Z > 1,00)$
 $= 0,5 - \text{tab}(1,00)$
 $= 0,15866$

$$\begin{aligned}
 \beta &= \Pr(\bar{X} \leq 43 | \bar{X} \sim N(45; 9)) \\
 &= \Pr\left(Z \leq \frac{43 - 45}{3}\right) \\
 &= \Pr(Z \leq -0,67) \\
 &= \Pr(Z \geq 0,67) \\
 &= 0,5 - \text{tab}(0,67) \\
 &= 0,25143
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \alpha &= 0,10 \\
 \Pr[\bar{X} > k | \bar{X} \sim N(40; 9)] &= 0,10 \\
 \Pr\left(Z > \frac{k - 40}{3}\right) &= 0,10 \\
 \text{tab}\left(\frac{k - 40}{3}\right) &= 0,40 \\
 \frac{k - 40}{3} &= 1,28 \\
 k &= 43,84
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta &= \Pr(\bar{X} \leq 43,84 | \bar{X} \sim N(45; 9)) \\
 &= \Pr\left(Z \leq \frac{43,84 - 45}{3}\right) \\
 &= \Pr(Z \leq -0,39) \\
 &= \Pr(Z \geq 0,39) \\
 &= 0,5 - \text{tab}(0,39) \\
 &= 0,34827
 \end{aligned}$$

Exercício 10.3.

$$\left. \begin{array}{l} X \sim N(\mu; 225) \\ n = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{225}{25}\right) \text{ ou } \bar{X} \sim N(\mu; 9)$$

$$\begin{aligned}
 1. \quad \alpha &= \Pr[\bar{X} < 34 | \bar{X} \sim N(40; 9)] + \Pr[\bar{X} > 46 | \bar{X} \sim N(40; 9)] \\
 &= \Pr\left(Z < \frac{34 - 40}{3}\right) + \Pr\left(Z > \frac{46 - 40}{3}\right) \\
 &= \Pr(Z < -2) + \Pr(Z > 2) \\
 &= 2 \times \Pr(Z > 2) \\
 &= 2 \times [0,5 - \text{tab}(2)] \\
 &= 0,0455
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad Q(\mu) &= \Pr(\text{rejeitar } H_0 | \mu) \\
 &= \Pr[\bar{X} < 34 | \bar{X} \sim N(\mu; 9)] + \Pr[\bar{X} > 46 | \bar{X} \sim N(\mu; 9)] \\
 &= \Pr\left(Z < \frac{34 - \mu}{3}\right) + \Pr\left(Z > \frac{46 - \mu}{3}\right)
 \end{aligned}$$

3. Vamos fazer os cálculos para $\mu = 20, 22, 58, 60$.

$$\begin{aligned}
 Q(20) &= \Pr\left(Z < \frac{34 - 20}{3}\right) + \Pr\left(Z > \frac{46 - 20}{3}\right) \\
 &= \Pr(Z < 4,67) + \Pr(Z > 8,67) \\
 &\approx 1 + 0 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q(60) &= \Pr\left(Z < \frac{34 - 60}{3}\right) + \Pr\left(Z > \frac{46 - 60}{3}\right) \\
 &= \Pr(Z < -8,67) + \Pr(Z > -4,67) \\
 &= \Pr(Z > 8,67) + \Pr(Z < 4,67) = Q(20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q(22) &= \Pr\left(Z < \frac{34 - 22}{3}\right) + \Pr\left(Z > \frac{46 - 22}{3}\right) \\
 &= \Pr(Z < 4,00) + \Pr(Z > 8,00) \approx 1 + 0 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q(58) &= \Pr\left(Z < \frac{34 - 58}{3}\right) + \Pr\left(Z > \frac{46 - 58}{3}\right) \\
 &= \Pr(Z < -8,00) + \Pr(Z > -4,00) \\
 &= \Pr(Z > 8,00) + \Pr(Z < 4,00) = Q(22)
 \end{aligned}$$

Podemos ver que a função poder é simétrica; assim, só precisamos calcular $Q(\mu)$ para $\mu = 20, 22, 24, \dots, 38, 40$. Os resultados estão na tabela a seguir e o gráfico está na **Figura 10.3**.

μ	$Q(\mu)$	μ	$Q(\mu)$
20	0,99999847	60	0,99999847
22	0,99996833	58	0,99996833
24	0,99957094	56	0,99957094
26	0,99616962	54	0,99616962
28	0,97724987	52	0,97724987
30	0,90878883	50	0,90878883
32	0,74750899	48	0,74750899
34	0,50003167	46	0,50003167
36	0,25292160	44	0,25292160
38	0,09504160	42	0,09504160
40	0,04550026		

4. O gráfico da função poder está na **Figura 10.3**.

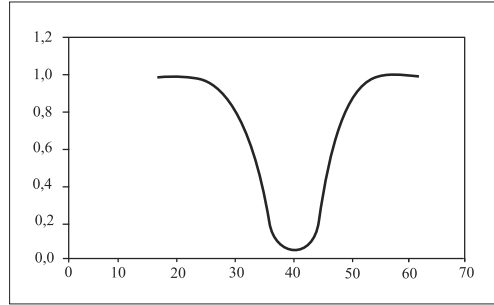


Figura 10.3: Solução do Exercício 10.3.

Exercício 10.4.

$$\bar{X} \sim N(\mu; 4)$$

$$\begin{aligned} 1. \quad \alpha &= \Pr(\bar{X} > 25,5 | \bar{X} \sim N(23; 2)) \\ &= \Pr\left(Z > \frac{25,5 - 23}{2}\right) \\ &= \Pr(Z > 1,25) \\ &= 0,5 - \text{tab}(1,25) \\ &= 0.10565 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \Pr(\bar{X} \leq 25,5 | \bar{X} \sim N(28; 2)) \\ &= \Pr\left(Z \leq \frac{25,5 - 28}{2}\right) \\ &= \Pr(Z \leq -1,25) \\ &= \Pr(Z > 1,25) \\ &= 0.10565 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \alpha &= 0,05 \\ \Pr(\bar{X} > k | \bar{X} \sim N(23; 2)) &= 0,05 \\ \Pr\left(Z > \frac{k - 23}{2}\right) &= 0,05 \\ \text{tab}\left(\frac{k - 23}{2}\right) &= 0,45 \\ \frac{k - 23}{2} &= 1,64 \\ k &= 26,28 \end{aligned}$$

Exercício 10.5.

A função poder do teste é

$$\begin{aligned} Q(\mu) &= \Pr(\text{rejeitar } H_0 | \mu) \\ &= \Pr(\bar{X} < 41,25 | \bar{X} \sim N(\mu; 1, 5^2)) \\ &= \Pr\left(Z < \frac{\mu - 41,25}{1,5}\right) \end{aligned}$$

e $\alpha = Q(45)$. Na tabela a seguir são dados os valores de $Q(\mu)$.

μ	$Q(\mu)$	μ	$Q(\mu)$
30	1,0000000	46	0,0007711
31	1,0000000	47	0,0000632
32	1,0000000	48	0,0000034
33	1,0000000	49	0,0000001
34	0,9999993	50	0,0000000
35	0,9999845	51	0,0000000
36	0,9997673	52	0,0000000
37	0,9976967	53	0,0000000
38	0,9848699	54	0,0000000
39	0,9331928	55	0,0000000
40	0,7976717	56	0,0000000
41	0,5661838	57	0,0000000
42	0,3085375	58	0,0000000
43	0,1216726	59	0,0000000
44	0,0333764	60	0,0000000
45	0,0062097		

Na **Figura 10.4**, temos o esboço do gráfico da função poder.

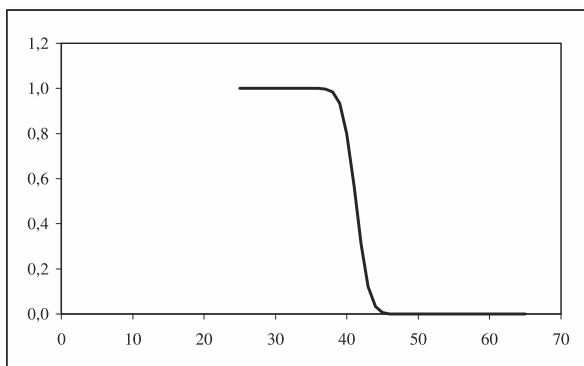


Figura 10.4: Função poder do teste do Exercício 10.5.

Exercício 10.6.

Sabemos que $X \sim bin(10;p)$.

1. $\alpha = \Pr(X = 0 | p = 0,5) + \Pr(X = 1 | p = 0,5) +$
 $+ \Pr(X = 2 | p = 0,5) + \Pr(X = 8 | p = 0,5) +$
 $+ \Pr(X = 9 | p = 0,5) + \Pr(X = 10 | p = 0,5)$

$= 0,5^{10} + \binom{10}{1} (0,5) (0,5)^9 + \binom{10}{2} (0,5)^2 (0,5)^8 +$
 $+ \binom{10}{8} (0,5)^8 (0,5)^2 + \binom{10}{9} (0,5)^9 (0,5) + \binom{10}{10} (0,5)^{10}$

$= 0,000976563 + 0,009765625 + 0,043945313 +$
 $+ 0,043945313 + 0,009765625 + 0,000976563$

$= 0,109375$

2. $Q(0,2) = \Pr(X = 0 | p = 0,2) + \Pr(X = 1 | p = 0,2) +$
 $+ \Pr(X = 2 | p = 0,2) + \Pr(X = 8 | p = 0,2) +$
 $+ \Pr(X = 9 | p = 0,2) + \Pr(X = 10 | p = 0,2)$

$= 0,8^{10} + \binom{10}{1} (0,2) (0,8)^9 + \binom{10}{2} (0,2)^2 (0,8)^8 +$
 $+ \binom{10}{8} (0,2)^8 (0,8)^2 + \binom{10}{9} (0,2)^9 (0,8) + \binom{10}{10} (0,2)^{10}$

$= 0,107374182 + 0,268435456 + 0,301989888 +$
 $+ 0,00007373 + 0,00000410 + 0,00000010$

$= 0,677877453$

Analogamente, obtém-se a seguinte tabela:

p	$Q(p)$
0,1	0,9298095
0,2	0,6778775
0,3	0,3843738
0,4	0,1795843
0,5	0,1093750
0,6	0,1795843
0,7	0,3843738
0,8	0,6778775
0,9	0,9298095

Veja a **Figura 10.5**.

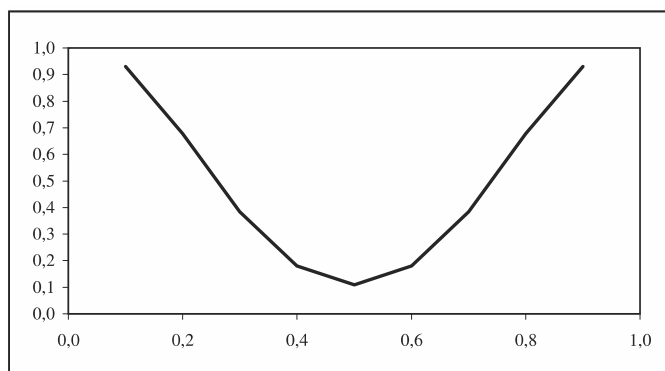


Figura 10.5: Função poder do teste do Exercício 10.6.

Aula 11



TESTES DE HIPÓTESES SOBRE A MÉDIA DE UMA POPULAÇÃO NORMAL - σ^2 CONHECIDA

O b j e t i v o s

Nesta aula, aplicaremos os conceitos básicos sobre a teoria de teste de hipótese a uma situação específica. Nosso interesse estará concentrado na média de uma população normal.

Assim, como no caso dos intervalos de confiança, nós iremos iniciar nossos estudos supondo que a variância dessa população seja conhecida. Como já dito, essa situação não é muito comum na prática, mas, em termos didáticos, a apresentação dos conceitos fica simplificada.

Entendendo bem a construção de um teste de hipótese para esse caso particular, a apresentação para as outras situações é bastante semelhante, mudando apenas a distribuição amostral.

Vamos apresentar, inicialmente, três exemplos que ilustrarão as diversas possibilidades que podem surgir na prática.

Exemplo 11.1.

Depois de uma pane geral no sistema de informação de uma empresa, o gerente administrativo deseja saber se houve alteração no tempo de processamento de determinada atividade.

Antes da pane, o tempo de processamento podia ser aproximado por uma variável aleatória normal com média de 100 minutos e desvio padrão de 10 minutos. O gerente acredita que a pane não tenha alterado a variabilidade do processo. Uma amostra de 16 tempos de processamento após a pane revela uma média de 105,5 minutos.

Ao nível de significância de 5%, qual é a conclusão sobre a alteração do tempo médio de processamento?

HIPÓTESES NULA E ALTERNATIVA

O interesse do gerente é comparar os tempos antes e depois da pane.

Antes da pane, o tempo médio de processamento era de 100 minutos. Como ele não sabe o tipo de alteração que pode ter ocorrido, precisa saber se o tempo médio depois da pane é diferente do tempo anterior. Isso nos leva às seguintes hipóteses nula e alternativa:

$$H_0 : \mu = 100$$

$$H_1 : \mu \neq 100$$

ESTATÍSTICA DE TESTE

Seja X a variável aleatória que representa o tempo de processamento. Pelos dados do problema, temos que $X \sim N(\mu; 100)$.

Antes da pane, $\mu = 100$. Como a população é normal, sabemos que a distribuição da média amostral também é normal, e como não deve ter havido alteração na variabilidade do processo, resulta que o desvio padrão é de 10 minutos em qualquer situação.

Logo,

$$\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{100}{16}\right)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\bar{X} - \mu}{2,5} \sim N(0; 1)$$

NÍVEL DE SIGNIFICÂNCIA E REGIÃO CRÍTICA

Pelo enunciado do problema, o nível de significância é de 5%. Isso significa que a probabilidade de erro tipo I é 0,05. Como visto, o erro tipo I consiste em rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira. Logo,

$$\alpha = \Pr(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeira}) = 0,05$$

Quando H_0 é verdadeira, a estatística de teste tem a distribuição

$$H_0 \text{ verdadeira} \implies \bar{X} \sim N\left(100; \frac{100}{16}\right)$$

e a nossa região crítica consiste nos valores de \bar{X} com probabilidade pequena de ocorrerem sob essa hipótese, ou seja, a região crítica consiste nos valores de \bar{X} muito afastados da média suposta de $\mu = 100$. Como a hipótese alternativa é bilateral, “muito afastado” significa “muito maior” ou “muito menor” do que $\mu = 100$. Veja a **Figura 11.1**:

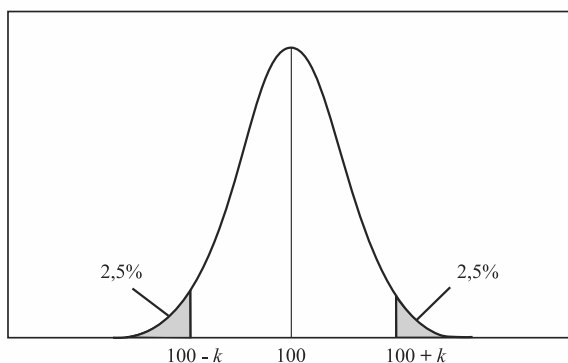


Figura 11.1: Região crítica para o teste bilateral de $H_0 : \mu = 100$.

Então, nossa região crítica é

$$\bar{X} > 100 + k \quad \text{ou} \quad \bar{X} < 100 - k$$

e isso é equivalente a

$$\bar{X} - 100 > k \quad \text{ou} \quad \bar{X} - 100 < -k$$

Usando a função módulo, podemos escrever:

$$RC : \quad |\bar{X} - 100| > k$$

e o valor da constante k é determinado pelo nível de significância:

$$0,05 = \Pr [|\bar{X} - 100| > k | \bar{X} \sim N(100; 6, 25)]$$

DETERMINAÇÃO DA REGIÃO CRÍTICA

Para determinar a região crítica, basta encontrar o valor da constante k tal que

$$\Pr [|\bar{X} - 100| > k | \bar{X} \sim N(100; 6, 25)] = 0,05 \implies$$

$$\Pr [\bar{X} - 100 > k | \bar{X} \sim N(100; 6, 25)] + \Pr [\bar{X} - 100 < -k | \bar{X} \sim N(100; 6, 25)] = 0,05 \implies$$

$$\Pr \left(Z > \frac{k}{2,5} \right) + \Pr \left(Z < \frac{-k}{2,5} \right) = 0,05 \implies$$

$$\Pr \left(Z > \frac{k}{2,5} \right) + \Pr \left(Z > \frac{k}{2,5} \right) = 0,05 \implies$$

$$\Pr \left(Z > \frac{k}{2,5} \right) = 0,025 \implies$$

$$tab \left(\frac{k}{2,5} \right) = 0,475 \implies$$

$$\frac{k}{2,5} = 1,96 \implies k = 4,9$$

A região crítica é

$$RC : \quad \bar{X} > 104,9 \quad \text{ou} \quad \bar{X} < 95,1$$

Como o valor da estatística de teste para a amostra observada está na região crítica, devemos rejeitar a hipótese nula, ou seja, as evidências amostrais indicam uma alteração do tempo de processamento da tarefa após a pane.

PODER

A função poder do teste é definida como

$$\beta(\mu) = \Pr(\text{rejeitar } H_0 | \mu)$$

Em termos da nossa região crítica, podemos escrever

$$\begin{aligned}\beta(\mu) &= \Pr[\bar{X} > 104,9 | \bar{X} \sim N(\mu; 6, 25)] + \Pr[\bar{X} < 95,1 | \bar{X} \sim N(\mu; 6, 25)] \\ &= \Pr\left(Z > \frac{104,9 - \mu}{2,5}\right) + \Pr\left(Z < \frac{95,1 - \mu}{2,5}\right)\end{aligned}$$

Calculando $\beta(\mu)$ para diferentes valores de μ , obtemos o gráfico exibido na **Figura 11.2**:

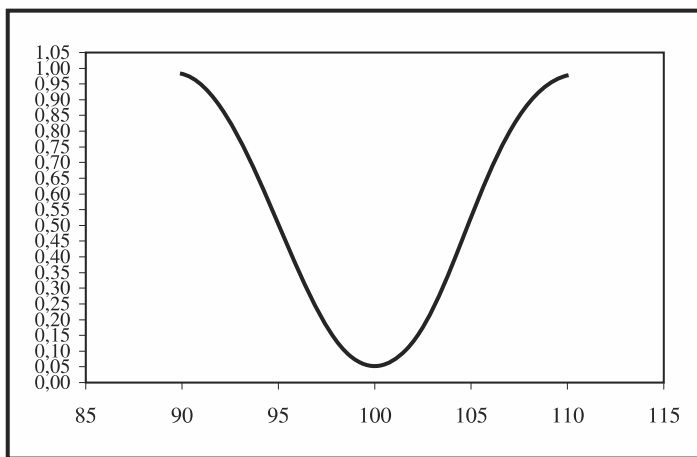


Figura 11.2: Função poder – Exemplo 11.1.

Exemplo 11.2.

Na mesma situação do exemplo anterior, é bastante razoável supor que o gerente esteja interessado apenas no caso de aumento do tempo de processamento. Afinal, se o tempo diminuir, isso significa que a tarefa vai ser executada mais rapidamente, o que representa um ganho. Então, as duas possibilidades são:

$$\begin{array}{ll}\mu \leq 100 & \text{OK!} \\ \mu > 100 & \text{Problema!}\end{array}$$

Para definir qual é a hipótese nula, vamos usar o seguinte procedimento. Como dito na aula anterior, neste curso só trabalharemos com hipóteses nulas simples, isto é, hipóteses nulas que envolvam igualdade do parâmetro a um determinado valor: $\theta = \theta_0$.

Assim, em um teste unilateral, a hipótese alternativa deve ser aquela que não envolve o sinal de igualdade.

No nosso exemplo, essa é a hipótese $\mu > 100$. A hipótese nula, tendo de ser uma hipótese simples, passa a ser $\mu = 100$, ou seja:

$$H_0 : \mu = 100$$

$$H_1 : \mu > 100$$

A estatística de teste continua sendo

$$\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{100}{16}\right)$$

O que muda é a região crítica, que agora passa a ser

$$RC : \bar{X} > 100 + k$$

Veja a **Figura 11.3**.

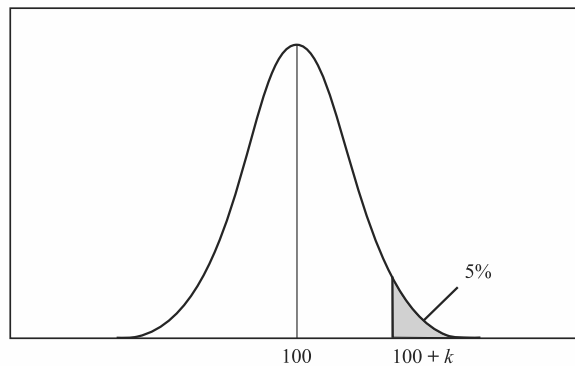


Figura 11.3: Região crítica para o teste de $H_0 : \mu = 100$ com alternativa unilateral à direita $H_1 : \mu > 100$.

Como o nível de significância é 5%, isso significa que

$$0,05 = \Pr[\bar{X} > 100 + k | \bar{X} \sim N(100; 6,25)]$$

e o valor da constante é calculado como

$$\begin{aligned}\Pr[\bar{X} > 100 + k | \bar{X} \sim N(100; 6, 25)] &= 0,05 \implies \\ \Pr\left(Z > \frac{100 + k - 100}{2,5}\right) &= 0,05 \implies \\ \text{tab}\left(\frac{k}{2,5}\right) &= 0,45 \implies \\ \frac{k}{2,5} &= 1,64 \implies k = 4,1\end{aligned}$$

e isso nos leva à região crítica

$$RC: \quad \bar{X} > 104,1$$

Como no exemplo anterior, temos de rejeitar a hipótese nula de que o tempo de processamento não se alterou, já que o valor observado da estatística amostral está na região crítica.

A função poder do teste é

$$\beta(\mu) = \Pr(\bar{X} > 104,1 | \mu)$$

cujo gráfico encontra-se na **Figura 11.4**.

Note que para valores de μ menores do que 100 a probabilidade de rejeitar H_0 é zero, o que é razoável, pois com uma hipótese unilateral à direita, só rejeitamos a hipótese nula para valores muito maiores do que 100. Se o valor observado da estatística de teste é menor do que 100, é claro que não devemos rejeitar H_0 .

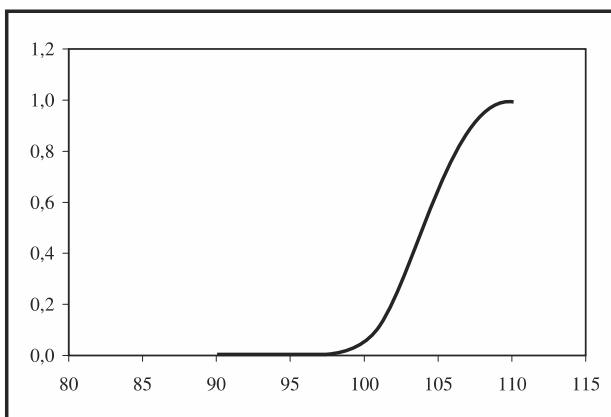


Figura 11.4: Função poder – Exemplo 11.2.

Exemplo 11.3.

O dono de uma empresa média decide investigar a alegação de seus empregados de que o salário médio na sua empresa é menor que o salário médio nacional.

Para isso, ele analisa uma amostra de 25 salários, obtendo uma média de 894,53 reais. De informações obtidas junto ao sindicato patronal, ele sabe que, em nível nacional, o salário médio é de 900 reais, com desvio padrão de 32 reais.

Supondo que seja razoável aproximar a distribuição dos salários por uma distribuição normal com o mesmo desvio padrão nacional, vamos construir um teste de hipótese apropriado, com um nível de significância de 10%.

Solução:

O problema aqui consiste em decidir se os salários são menores ou não do que a média nacional de 900 reais, ou seja, as situações de interesse são:

$$\mu < 900$$

$$\mu \geq 900$$

Como no exemplo anterior, a hipótese alternativa é aquela que não envolve o sinal de igualdade. Logo, nossas hipóteses são:

$$H_0 : \mu = 900$$

$$H_1 : \mu < 900$$

e a estatística de teste é

$$\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{32^2}{25}\right)$$

O proprietário deve rejeitar a hipótese nula se a média amostral for muito menor do que 900, ou seja, a região crítica é

$$RC : \bar{X} < 900 - k$$

Veja a **Figura 11.5**.

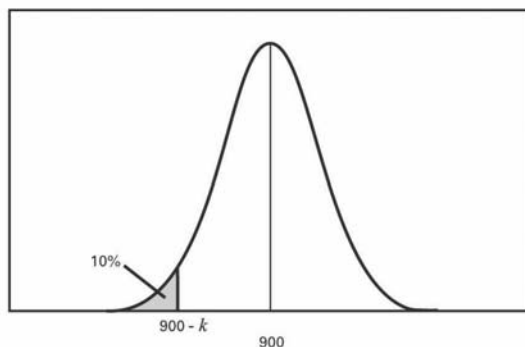


Figura 11.5: Região crítica para o teste de $H_0 : \mu = 900$ com alternativa unilateral à esquerda $H_1 : \mu < 900$.

O valor de k é determinado pelo nível de significância:

$$\Pr[\bar{X} < 900 - k \mid \bar{X} \sim N(900; 6,4^2)] = 0,10 \Rightarrow$$

$$\Pr\left(Z < \frac{900 - k - 900}{6,4}\right) = 0,10 \Rightarrow$$

$$\Pr\left(Z < -\frac{k}{6,4}\right) = 0,10 \Rightarrow$$

$$\Pr\left(Z > \frac{k}{6,4}\right) = 0,10 \Rightarrow$$

$$tab\left(\frac{k}{6,4}\right) = 0,40 \Rightarrow$$

$$\frac{k}{6,4} = 1,28 \Rightarrow k = 8,192$$

Logo, a região crítica é

$$RC : \quad \bar{X} < 891,808$$

Veja, na **Figura 11.6**, a função poder desse teste: para valores maiores do que 900, a probabilidade de rejeitar a hipótese nula é zero.

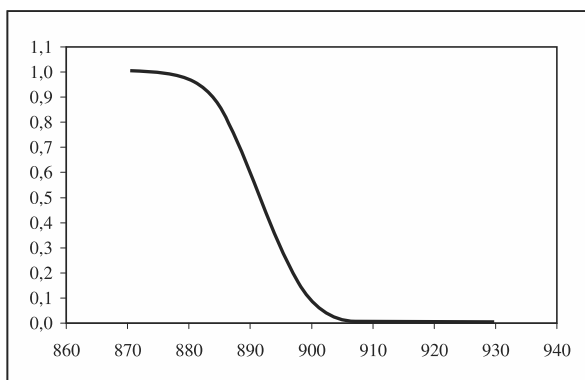


Figura 11.6: Função poder do Exemplo 11.3.

PROCEDIMENTO GERAL PARA CONSTRUÇÃO DO TESTE DE HIPÓTESE SOBRE A MÉDIA DE UMA $N(\mu; \sigma^2)$ - σ^2 CONHECIDA

Os três exemplos anteriores ilustram o procedimento para construção de um teste de hipótese sobre a média de uma população normal com variância conhecida. De posse de uma amostra aleatória simples X_1, X_2, \dots, X_n extraída de uma população $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, nosso interesse está em testar a hipótese nula

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

a um nível de significância α .

Dependendo do conhecimento sobre o problema, a hipótese alternativa pode tomar uma das três formas:

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad H_1 : \mu > \mu_0 \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

Em qualquer dos casos, a estatística de teste é a média amostral; se a variância σ^2 é conhecida, sabemos que

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

A regra de decisão consiste em rejeitar a hipótese nula se o valor de \bar{X} estiver “longe” do valor μ_0 .

No caso da hipótese alternativa bilateral, estar longe significa ser muito maior ou muito menor que μ_0 ; para a alternativa unilateral à direita, estar longe significa ser muito maior do que μ_0 e para a alternativa unilateral à esquerda, longe significa ser muito menor que μ_0 .

As expressões “muito menor” e “muito maior” ficam perfeitamente definidas a partir do valor do nível de significância α . Veja a **Figura 11.7**, em que nas partes (a), (b) e (c) ilustra-se a região crítica para as três hipóteses alternativas. Como antes, vamos denotar por z_α a abscissa da curva normal padrão que deixa área (probabilidade) α acima dela.

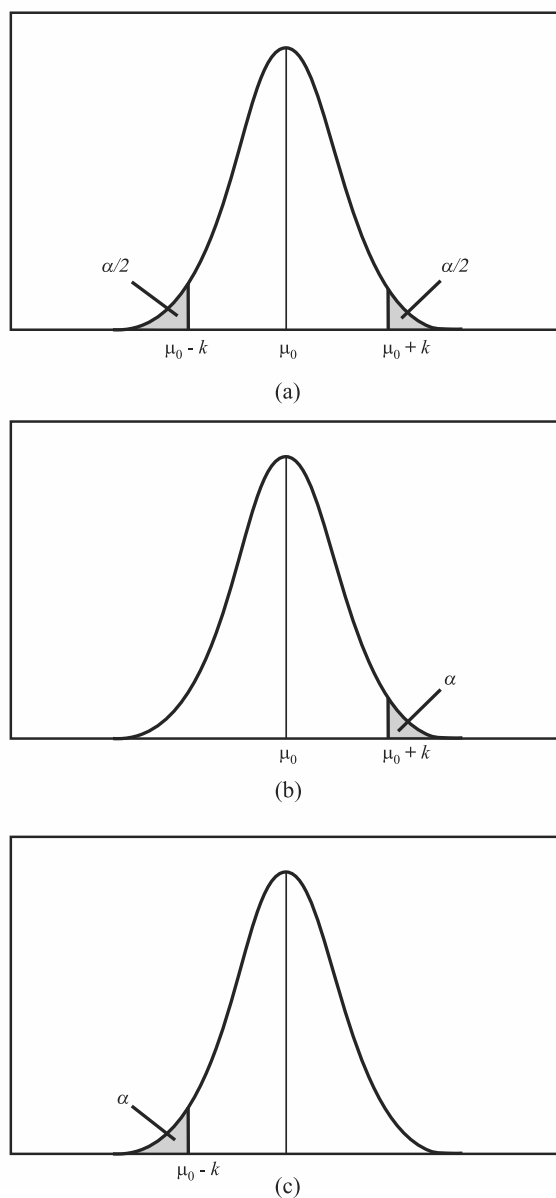


Figura 11.7: Região crítica para o teste de hipótese sobre a média μ de uma normal com variância conhecida: (a) Teste bilateral; (b) Teste unilateral à direita; (c) Teste unilateral à esquerda.

TESTE BILATERAL

Consideremos as hipóteses

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

A região crítica é (veja a **Figura 11.7.a**):

$$RC : \bar{X} > \mu_0 + k \quad \text{ou} \quad \bar{X} < \mu_0 - k$$

e se a hipótese nula é verdadeira,

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_0; \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Com nível de significância $\alpha = \text{Pr}(\text{erro I})$, temos:

$$\begin{aligned} \text{Pr}(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeira}) &= \alpha \implies \\ \text{Pr}\left[\bar{X} > \mu_0 + k | \bar{X} \sim N\left(\mu_0; \frac{\sigma^2}{n}\right)\right] &+ \text{Pr}\left[\bar{X} < \mu_0 - k | \bar{X} \sim N\left(\mu_0; \frac{\sigma^2}{n}\right)\right] = \alpha \implies \\ \text{Pr}\left(Z > \frac{\mu_0 + k - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) &+ \text{Pr}\left(Z < \frac{\mu_0 - k - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha \implies \\ \text{Pr}\left(Z > \frac{k}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) &+ \text{Pr}\left(Z < -\frac{k}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha \implies \\ \text{Pr}\left(Z > \frac{k}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) &+ \text{Pr}\left(Z > \frac{k}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha \implies \\ \text{Pr}\left(Z > \frac{k}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) &= \frac{\alpha}{2} \implies \frac{k}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = z_{\alpha/2} \implies k = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Logo, a região crítica é

$$\bar{X} > \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{ou} \quad \bar{X} < \mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

TESTE UNILATERAL À DIREITA

Consideremos as hipóteses

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

A região crítica é (veja a **Figura 11.7.b**):

$$RC : \bar{X} > \mu_0 + k$$

e se a hipótese nula é verdadeira,

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_0; \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Com nível de significância $\alpha = \Pr(\text{erro I})$, temos de ter:

$$\begin{aligned} \Pr(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeira}) &= \alpha \implies \\ \Pr\left[\bar{X} > \mu_0 + k | \bar{X} \sim N\left(\mu_0; \frac{\sigma^2}{n}\right)\right] &= \alpha \implies \\ \Pr\left(Z > \frac{\mu_0 + k - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) &= \alpha \implies \\ \Pr\left(Z > \frac{k}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) &= \alpha \implies \\ \frac{k}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = z_\alpha \implies k &= z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Logo, a região crítica é

$$\bar{X} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

TESTE UNILATERAL À ESQUERDA

Consideremos as hipóteses

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0 \\ H_1 &: \mu < \mu_0 \end{aligned}$$

A região crítica é (veja a **Figura 11.7.c**):

$$RC: \bar{X} < \mu_0 - k$$

e se a hipótese nula é verdadeira,

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_0; \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Com nível de significância $\alpha = \Pr(\text{erro I})$, temos de ter:

$$\begin{aligned}\Pr(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeira}) &= \alpha \implies \\ \Pr\left[\bar{X} < \mu_0 - k \mid \bar{X} \sim N\left(\mu_0; \frac{\sigma^2}{n}\right)\right] &= \alpha \implies \\ \Pr\left(Z < \frac{\mu_0 - k - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) &= \alpha \implies \\ \Pr\left(Z < -\frac{k}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) &= \alpha \implies \\ \Pr\left(Z > \frac{k}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) &= \alpha \implies \\ \frac{k}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = z_\alpha &\implies k = z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

Logo, a região crítica é

$$\bar{X} < \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

TESTE DE HIPÓTESE *Versus* INTERVALO DE CONFIANÇA

É interessante notar a expressão que aparece na região crítica para o teste bilateral; ela é a mesma obtida para a margem de erro do intervalo de confiança para a média de uma população normal com variância conhecida:

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Podemos ver, assim, que existe uma relação entre os dois procedimentos; na verdade, em um teste de hipótese bilateral, rejeitamos a hipótese nula H_0 se o valor observado da estatística de teste não estiver no intervalo de confiança.

VALOR P

Nos exemplos anteriores, a determinação da região crítica foi feita com base no nível de significância, isto é, fixado o nível de significância, encontramos o valor k que definia os limites entre valores prováveis (aqueles que levam à não-rejeição de H_0) e pouco prováveis (aqueles que levam à rejeição de H_0).

Um outro procedimento bastante usual, especialmente quando são utilizados programas computacionais, consiste em calcular a probabilidade de se obter um valor tão ou mais desfavorável que o valor observado, se H_0 for verdadeira.

Essa probabilidade é chamada valor P . Vamos ilustrar esse conceito considerando novamente os três exemplos anteriores.

TESTE BILATERAL – VALOR P PARA O EXEMPLO 11.1

O valor obtido com os dados amostrais para a estatística de teste é $\bar{x} = 105,5$. Como o teste é bilateral, valores “longe” de 100 são aqueles muito menores ou muito maiores que 100. O procedimento visto consistiu em dividir a probabilidade do erro tipo I igualmente nas duas caudas da distribuição normal e, dessa forma, identificamos a região crítica.

Vamos, agora, calcular o valor P para o nosso exemplo; ele é a probabilidade de obtermos um valor tão ou mais extremo que o valor observado. Como o valor observado está à direita da média, devemos calcular a seguinte probabilidade:

$$\begin{aligned} P &= \Pr(\bar{X} \geq 105,5 | H_0 \text{ verdadeira}) \\ &= \Pr\left[\bar{X} \geq 105,5 | \bar{X} \sim N\left(100; \frac{100}{16}\right)\right] \\ &= \Pr\left(Z \geq \frac{105,5 - 100}{2,5}\right) \\ &= \Pr(Z \geq 2,2) = 0,5 - \text{tab}(2,2) = 0,0139 \end{aligned}$$

Vamos analisar a **Figura 11.8**, onde está ilustrado esse valor. O valor amostral observado para \bar{X} é $\bar{x} = 105,5 = 100 + 5,5$. Como o teste é bilateral, se tivéssemos obtido o valor $\bar{x} = 100 - 5,5$, esse valor também seria considerado tão afastado de 100 quanto 105,5. Assim, para testes bilaterais, temos de considerar a probabilidade nas duas caudas da distribuição.

O que esse resultado está nos dizendo é o seguinte: se H_0 for verdadeira, a probabilidade de obtermos um valor distante de 100 por 5,5 unidades em qualquer direção é $2 \times 0,0139 = 0,0278$. Essa probabilidade é chamada *valor P* . No exemplo, vemos que o valor P é pequeno, o que significa que é pouco provável obtermos um valor tão extremo quando H_0 é verdadeira.

Logo, é razoável supormos que a hipótese nula não seja verdadeira, a mesma conclusão obtida ao trabalharmos com o nível de significância de 5%. Na verdade, rejeitaríamos a hipótese nula para qualquer nível de significância maior que 0,0278.

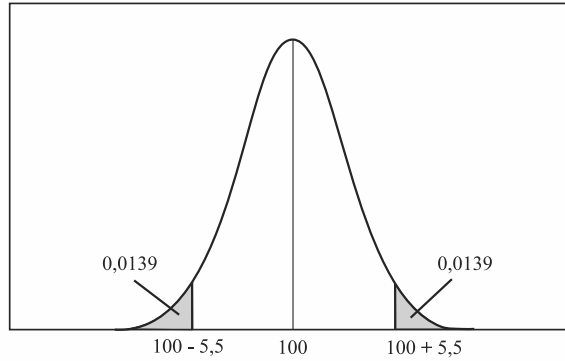


Figura 11.8: Valor P para o teste bilateral do Exemplo 11.1.

TESTE UNILATERAL À DIREITA – EXEMPLO 11.2

Como o teste é unilateral à direita, valores extremos são aqueles muito maiores que 100. Como visto acima,

$$P = 0,0139$$

Neste caso, não temos de multiplicar por 2, pois o teste é unilateral. Como o valor P é muito pequeno, temos evidência suficiente para rejeitar a hipótese nula. Essa mesma decisão seria tomada para qualquer nível de significância menor que 0,0139.

TESTE UNILATERAL À ESQUERDA – EXEMPLO 11.3

No Exemplo 11.3, temos um teste bilateral à esquerda; logo, o valor P é

$$\begin{aligned} P &= \Pr[\bar{X} \leq 894,53 | \bar{X} \sim N(900; 6,4)] \\ &= \Pr\left(Z \leq \frac{894,53 - 900}{6,4}\right) \\ &= \Pr(Z \leq -0,85) \\ &= \Pr(Z \geq 0,85) \\ &= 0,5 - \text{tab}(0,85) = 0,1977 \end{aligned}$$

Essa não é uma probabilidade pequena; ou seja, é razoável obter um valor tão ou mais extremo que 894,53 quando H_0 é verdadeira. Assim, os dados não fornecem evidência suficiente para rejeitarmos a hipótese nula.

Com base nesses exemplos, podemos concluir o seguinte:



Devemos rejeitar a hipótese nula H_0 ao nível de significância α sempre que o valor P for menor ou igual a α , ou seja:

$$\text{Rejeitamos } H_0 \iff P \leq \alpha$$

Os programas de estatística calculam valores P mais exatos do que aqueles obtidos por meio da tabela. Nas aplicações e exercícios deste curso, devemos arredondar os resultados necessários para duas casas decimais para podermos utilizar a tabela da distribuição normal.

Exemplo 11.4.

Uma amostra de tamanho $n = 25$ é extraída de uma população normal com variância 256, obtendo-se $\bar{x} = 23$. Deseja-se testar a hipótese

$$H_0 : \mu = 18$$

Determine a região crítica ao nível de significância de 1% e encontre o valor P quando

1. $H_1 : \mu \neq 18$
2. $H_1 : \mu > 18$

Solução:

1. A região crítica é

$$RC : \bar{X} > 18 + k \text{ ou } \bar{X} < 18 - k$$

Com $\alpha = 0,01$, temos

$$\begin{aligned} & \Pr \left[\bar{X} > 18 + k \mid \bar{X} \sim N \left(18; \frac{256}{25} \right) \right] + \Pr \left[\bar{X} < 18 - k \mid \bar{X} \sim N \left(18; \frac{256}{25} \right) \right] = 0,01 \implies \\ & \Pr \left(Z > \frac{18 + k - 18}{3,2} \right) + \Pr \left(Z < \frac{18 - k - 18}{3,2} \right) = 0,01 \implies \\ & \Pr \left(Z > \frac{k}{3,2} \right) + \Pr \left(Z < -\frac{k}{3,2} \right) = 0,01 \implies \\ & \Pr \left(Z > \frac{k}{3,2} \right) + \Pr \left(Z > \frac{k}{3,2} \right) = 0,01 \implies \\ & \Pr \left(Z > \frac{k}{3,2} \right) = 0,005 \implies \\ & \text{tab} \left(\frac{k}{3,2} \right) = 0,495 \implies \\ & \frac{k}{3,2} = 2,58 \implies k = 8,256 \end{aligned}$$

Logo, a região crítica é

$$\bar{X} > 26,256 \text{ ou } \bar{X} < 9,744$$

O valor P é

$$\begin{aligned} P &= 2 \times \Pr \left[\bar{X} \geq 23 \mid \bar{X} \sim N \left(18; \frac{256}{25} \right) \right] \\ &= 2 \times \Pr \left(Z \geq \frac{23 - 18}{3,2} \right) \\ &= 2 \times \Pr(Z \geq 1,56) \\ &= 2 \times [0,5 - \text{tab}(1,56)] \\ &= 2 \times [0,5 - 0,4406] \\ &= 0,1188 \end{aligned}$$

Rejeitamos H_0 a qualquer nível de significância $\alpha \geq 0,1188$. Logo, ao nível de significância de 1% (ou mesmo 5%) não podemos rejeitar H_0 . Note que o valor da estatística de teste, $\bar{x} = 23$, está fora da região crítica.

2. A região crítica é

$$RC : \bar{X} > 18 + k$$

Com $\alpha = 0,01$, temos

$$\begin{aligned} & \Pr \left[\bar{X} > 18 + k \mid \bar{X} \sim N \left(18; \frac{256}{25} \right) \right] = 0,01 \implies \\ & \Pr \left(Z > \frac{18 + k - 18}{3,2} \right) = 0,01 \implies \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr\left(Z > \frac{k}{3,2}\right) &= 0,01 \implies \\ \text{tab}\left(\frac{k}{3,2}\right) &= 0,49 \implies \\ \frac{k}{3,2} &= 2,33 \implies k = 7,456\end{aligned}$$

Logo, a região crítica é

$$\bar{X} > 25,456$$

O valor P é

$$\begin{aligned}P &= \Pr\left[\bar{X} \geq 23 \mid \bar{X} \sim N\left(18; \frac{256}{25}\right)\right] \\ &= \Pr\left(Z \geq \frac{23 - 18}{3,2}\right) \\ &= \Pr(Z \geq 1,56) \\ &= [0,5 - \text{tab}(1,56)] \\ &= [0,5 - 0,4406] \\ &= 0,0594\end{aligned}$$

Rejeitamos H_0 a qualquer nível de significância $\alpha \geq 0,0594$. Logo, ao nível de significância de 1% não podemos rejeitar H_0 . Note que o valor da estatística de teste, $\bar{x} = 23$, está fora da região crítica.

Exercício 11.1.

Uma amostra aleatória simples de tamanho $n = 9$, extraída de uma população normal e com desvio padrão 3,1 apresentou média igual a $\bar{x} = 13,35$. Deseja-se testar

$$H_0 : \mu = 12,8$$

$$H_1 : \mu \neq 12,8$$

1. Determine a região crítica correspondente ao nível de significância $\alpha = 0,02$.
2. Com base na região crítica encontrada no item anterior, estabeleça a conclusão, tendo o cuidado de usar um vocabulário que não seja puramente técnico.
3. Calcule o valor P e interprete o resultado obtido.
4. Esboce o gráfico da função poder, calculando $\beta(\mu)$ para os seguintes valores de μ :

8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Exercício 11.2.

Uma empresa fabricante de balas afirma que o peso médio de suas balas é de pelo menos 2 gramas. Pela descrição do processo de produção, sabe-se que o peso das balas distribui-se normalmente com desvio padrão de 0,5 grama. Uma amostra de 25 balas apresenta peso médio de 1,98 gramas.

O que se pode concluir sobre a afirmação do fabricante? Use um nível de significância de 5%.

Exercício 11.3.

Em uma linha de produção, peças são produzidas de modo que o comprimento seja normalmente distribuído com desvio padrão de 0,5cm. Ajustes periódicos são feitos na máquina para garantir que as peças tenham comprimento apropriado de 15cm, pois as peças muito curtas não podem ser aproveitadas (as peças longas podem ser cortadas). A cada hora são extraídas 9 peças da produção, medindo-se seu comprimento.

Estabeleça uma regra de decisão para definir se o processo está operando adequadamente. Use o nível de significância de 0,1%.

Exercício 11.4.

Depois de desenvolver um algoritmo para acelerar a execução de determinada tarefa rotineira em um escritório de contabilidade, o analista de sistema analisa uma amostra de 25 tempos, obtendo uma média 46,5 segundos. Dos dados passados, ele sabe que o tempo de execução é aproximadamente normal com média de 48,5 segundos e desvio padrão de 5 segundos.

Use o método do valor P para decidir se o algoritmo do analista realmente melhorou o desempenho do sistema.

Exercício 11.5.

Uma propaganda afirma que o consumo médio de gasolina de determinada marca de automóvel é de 12 litros por 100 quilômetros rodados, com desvio padrão de 1,0 litro. Um teste com 36 automóveis desta marca acusa um consumo médio de 12,4 litros por 100 quilômetros rodados.

O que se pode concluir sobre a propaganda?

SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Exercício 11.1.

$$X \sim N(\mu; 3, 1^2) \quad n = 9 \quad \bar{x} = 13,35$$

$$1. \alpha = 0,02 \implies z_{\alpha/2} = 2,33$$

$$RC : \bar{X} > 12,8 + k \text{ ou } \bar{X} < 12,8 - k$$

$$\Pr \left[\{ \bar{X} > 12,8 + k \} \cup \{ \bar{X} < 12,8 - k \} \mid \bar{X} \sim N \left(12,8; \frac{3,1^2}{9} \right) \right] = 0,02 \iff$$

$$\Pr \left(Z > \frac{12,8 + k - 12,8}{\frac{3,1}{3}} \right) + \Pr \left(Z < \frac{12,8 - k - 12,8}{\frac{3,1}{3}} \right) = 0,02 \iff$$

$$\Pr(Z > 0,96774k) + \Pr(Z < -0,96774k) = 0,02 \iff$$

$$2 \times \Pr(Z > 0,96774k) = 0,02 \iff$$

$$\Pr(Z > 0,96774k) = 0,01 \iff$$

$$0,96774k = 2,33 \iff k = 2,41$$

A região crítica é

$$\bar{X} > 15,21 \text{ ou } \bar{X} < 10,39$$

2. O valor observado $\bar{x} = 13,35$ não está na região crítica. Logo, não há evidência amostral suficiente para rejeitarmos a hipótese de que a média da população seja 12,8.

$$\begin{aligned} 3. \quad P &= 2 \times \Pr \left[\bar{X} \geq 13,35 \mid \bar{X} \sim N \left(12,8; \frac{3,1^2}{9} \right) \right] \\ &= 2 \times \Pr \left(Z \geq \frac{13,35 - 12,8}{\frac{3,1}{3}} \right) \\ &= 2 \times \Pr(Z \geq 0,53) \\ &= 2 \times [0,5 - \text{tab}(0,53)] \\ &= 0,4038 \end{aligned}$$

O valor P é bastante alto; logo a hipótese nula só seria rejeitada para níveis de significância maiores que 0,40. Isso é evidência de que não se pode rejeitar a hipótese nula em qualquer nível de significância razoável.

4. $\beta(\mu) = \Pr(\text{rejeitar } H_0|\mu)$

$\Pr\left[\bar{X} \geq 15,21 | \bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{3,1^2}{9}\right)\right] + \Pr\left[\bar{X} < 10,38 | \bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{3,1^2}{9}\right)\right]$

Na tabela a seguir, temos o valor de $\beta(\mu)$ para diferentes valores de μ (você pode obter valores um pouco diferentes, por causa de arredondamentos). Veja também a **Figura 11.9**.

μ	$\beta(\mu)$
8	0,98937
9	0,90914
10	0,64347
11	0,27428
12	0,05942
13	0,02184
14	0,12104
15	0,41948
16	0,77772
17	0,95839
18	0,99653

Por exemplo:

$$\begin{aligned} \beta(8) &= \Pr\left[\bar{X} > 15,21 | \bar{X} \sim N\left(8; \frac{3,1^2}{9}\right)\right] + \Pr\left[\bar{X} < 10,38 | \bar{X} \sim N\left(8; \frac{3,1^2}{9}\right)\right] \\ &= \Pr\left(Z > \frac{15,21 - 8}{\frac{3,1}{3}}\right) + \Pr\left(Z < \frac{10,38 - 8}{\frac{3,1}{3}}\right) \\ &= \Pr(Z > 6,98) + \Pr(Z < 2,30) \\ &= [0,5 - \text{tab}(6,98)] + [0,5 + \text{tab}(2,30)] \\ &= 0,5 - 0,5 + 0,5 + 0,4893 = 0,9893 \end{aligned}$$

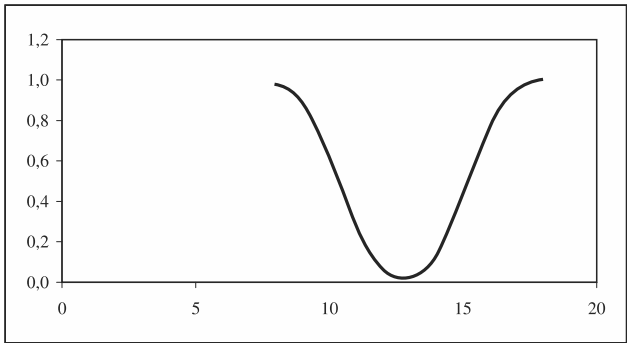


Figura 11.9: Função poder – Exercício 11.1.

Exercício 11.2.

Seja X a variável aleatória que representa o peso das balas. Então, $X \sim N(\mu; 0,25)$. Como $n = 25$, resulta que

$$\bar{X} \sim N(\mu; 0,01)$$

A afirmativa do fabricante é $\mu \geq 2$. Logo, a negação de tal afirmação é $\mu < 2$. Como essa última expressão não contém o sinal de igualdade, ela se torna a hipótese alternativa. Então, nossas hipóteses são:

$$H_0 : \mu = 2$$

$$H_1 : \mu < 2$$

A região crítica é

$$RC : \bar{X} < 2 - k$$

$$\Pr[\bar{X} < 2 - k | \bar{X} \sim N(2; 0,01)] = 0,05 \implies$$

$$\Pr\left(Z < -\frac{k}{0,1}\right) = 0,05 \implies$$

$$\Pr\left(Z > \frac{k}{0,1}\right) = 0,05 \implies$$

$$tab\left(\frac{k}{0,1}\right) = 0,45 \implies$$

$$\frac{k}{0,1} = 1,64 \implies k = 0,164$$

A região crítica é

$$\bar{X} < 2 - 0,164 = 1,836$$

Como o valor observado $\bar{x} = 1,98$ não se encontra na região crítica, não podemos rejeitar a hipótese nula. Ou seja, os dados não trazem evidência de que o fabricante esteja mentindo.

Exercício 11.3.

O problema na produção surge quando $\mu < 15$. Logo, nossas hipóteses são:

$$H_0 : \mu = 15$$

$$H_1 : \mu < 15$$

A região crítica é

$$RC : \bar{X} < 15 - k$$

$$\Pr \left[\bar{X} < 15 - k | \bar{X} \sim N \left(15; \frac{0,5^2}{9} \right) \right] = 0,001 \implies$$

$$\Pr \left(Z < \frac{15 - k - 15}{\frac{0,5}{3}} \right) = 0,001 \implies$$

$$\Pr(Z > 6k) = 0,001 \implies$$

$$tab(6k) = 0,499 \implies$$

$$6k = 3,09 \implies k = 0,515$$

Então, se $\bar{X} < 14,485$ o processo deve ser interrompido para um novo ajuste.

Exercício 11.4.

A intenção do analista é reduzir o tempo; logo, o interesse dele é que $\mu < 48,5$. A negação dessa afirmativa é $\mu \geq 48,5$. Logo, nossas hipóteses são:

$$H_0 : \mu = 48,5$$

$$H_1 : \mu < 48,5$$

A estatística amostral é

$$\bar{X} \sim N \left(\mu; \frac{5^2}{25} \right)$$

O valor obtido é $\bar{x} = 46,5$, que resulta no seguinte valor P :

$$\begin{aligned} P &= \Pr \left[\bar{X} < 46,5 | \bar{X} \sim N \left(48,5; \frac{5^2}{25} \right) \right] \\ &= \Pr \left(Z < \frac{46,5 - 48,5}{1} \right) \\ &= \Pr(Z < -2,0) \\ &= \Pr(Z > 2,0) \\ &= 0,5 - tab(2,0) \\ &= 0,02275 \end{aligned}$$

Podemos afirmar que o tempo de execução reduziu, a qualquer nível de significância inferior 2,275%. Note que rejeitamos a hipótese nula ao nível de significância de 5%, mas não a 1%!

Exercício 11.5.

Se o consumo for menor ou igual a 12 litros por 100 quilômetros, não há problema com a propaganda. O problema surge se o consumo for superior. Logo, nossas hipóteses são:

$$H_0 : \mu = 12$$

$$H_1 : \mu > 12$$

Supondo que o consumo X possa ser aproximado por uma distribuição normal, temos que

$$\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{1}{36}\right)$$

Vamos calcular o valor P :

$$\begin{aligned} P &= \Pr\left[\bar{X} > 12,4 \mid \bar{X} \sim N\left(12; \frac{1}{36}\right)\right] \\ &= \Pr\left(Z > \frac{12,4 - 12}{\frac{1}{6}}\right) \\ &= \Pr(Z > 2,4) \\ &= 0,5 - \text{tab}(2,4) \\ &= 0,0082 \end{aligned}$$

A propaganda parece ser enganosa, pois a probabilidade de se obter um consumo médio de 12,4 litros por 100 quilômetros é pequena se o consumo realmente for de 12 litros por 100 quilômetros. Note que H_0 é rejeitada para qualquer nível de significância $\alpha \geq 0,82\%$, o que inclui os níveis de significância usuais de 1% e 5%.

Aula 12



TESTES DE HIPÓTESES SOBRE PROPORÇÕES – AMOSTRAS GRANDES

Objetivos

Na aula anterior, você aprendeu a construir testes de hipóteses sobre a média de uma população normal com variância σ^2 conhecida. O procedimento baseou-se na distribuição amostral da média amostral que, com as hipóteses de normalidade e conhecimento da variância populacional, sabemos ser normal com a mesma média e variância $\frac{\sigma^2}{n}$.

Nesta aula, iremos fazer uso do Teorema Central do Limite para construir testes de hipóteses sobre proporções com base em amostras grandes. Vimos que, para amostras grandes, a distribuição amostral da proporção amostral pode ser aproximada por uma distribuição normal e, assim, o procedimento de teste de hipótese será idêntico ao estudado na aula anterior.

ESTIMAÇÃO DE UMA PROPORÇÃO POPULACIONAL

O contexto de interesse é o seguinte: temos uma população em que cada elemento é classificado de acordo com a presença ou ausência de determinada característica (volte à aula sobre Distribuição amostral da proporção, se necessário). Em termos de variável aleatória, essa população é representada por uma v.a. de Bernoulli, isto é:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se elemento possui a característica de interesse,} \\ 0 & \text{se elemento não possui a característica de interesse.} \end{cases}$$

Então, $\Pr(X = 1) = p$, $E(X) = p$ e $Var(X) = p(1 - p)$. O parâmetro p é também a proporção de elementos da população que possuem a característica de interesse. Em geral, esse parâmetro é desconhecido e queremos testar hipóteses feitas sobre seu possível valor.

Suponha, então, que dessa população seja extraída uma amostra aleatória simples X_1, X_2, \dots, X_n com reposição. Vimos que a proporção \hat{P} de elementos na amostra que possuem a característica de interesse, definida por

$$\hat{P} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad (12.1)$$

é um estimador não-viesado para p com variância $\frac{p(1-p)}{n}$. Mais precisamente,

$$\begin{aligned} E(\hat{P}) &= p \\ Var(\hat{P}) &= \frac{p(1-p)}{n} \end{aligned}$$

Como a proporção amostral é uma média de uma amostra aleatória simples de uma população com distribuição de Bernoulli com parâmetro p , o Teorema Central do Limite nos diz, então, que a distribuição de \hat{P} se aproxima de uma normal com média p e variância $\frac{p(1-p)}{n}$.

Como visto, a aproximação deve ser feita se $np \geq 5$ e $n(1 - p) \geq 5$ e, em geral, essas condições são satisfeitas se $n \geq 30$.

Note que, com $n = 30$ e $np \geq 5$ sempre temos que $p \geq 0,1667$. Logo, a indicação $n \geq 30$ funciona, desde que a característica de interesse não seja extremamente rara na população (Em estatística, usa-se o termo populações raras nos casos em que p é muito pequeno). Caso haja suspeitas de que p seja muito pequeno, deve-se aumentar o tamanho da amostra.

Resumindo, temos o seguinte resultado:

$$\hat{P} \approx N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Vamos ver como usar esse resultado para construir testes de hipóteses sobre a verdadeira proporção populacional p .

TESTE DE HIPÓTESES SOBRE PROPORÇÕES

A hipótese nula que consideraremos será uma hipótese simples, como a que segue abaixo:

$$H_0 : p = p_0$$

As hipóteses alternativas possíveis são

$$\begin{aligned} \text{Bilateral} & : H_1 : p \neq p_0 \\ \text{Unilateral à direita} & : H_1 : p > p_0 \\ \text{Unilateral à esquerda} & : H_1 : p < p_0 \end{aligned}$$

Como no caso da média, a escolha das hipóteses nula e alternativa deve ser feita levando-se em conta que a hipótese nula deve ser uma hipótese simples. Assim, você deve “traduzir” a situação de interesse do problema em uma desigualdade envolvendo a proporção p . Em seguida, determine a desigualdade que nega a desigualdade anterior. A hipótese alternativa envolve a desigualdade que não inclui o sinal de $=$.

A estatística de teste é

$$\hat{P} \approx N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Dado um nível de significância α , a região crítica é definida como o conjunto de valores que têm probabilidade pequena de

ocorrerem sob a veracidade da hipótese nula, ou seja, é o conjunto de valores “muito afastados” de p_0 .

$$\begin{array}{lll} \text{Bilateral} & : & RC : \hat{P} > p_0 + k \text{ ou } \hat{P} < p_0 - k \\ \text{Unilateral à direita} & : & RC : \hat{P} > p_0 + k \\ \text{Unilateral à esquerda} & : & RC : \hat{P} < p_0 - k \end{array}$$

O valor k é encontrado impondo-se a condição de a probabilidade do erro tipo I ser igual a α :

$$\Pr(\hat{p} \in RC | H_0 \text{ verdadeira}) = \alpha$$

Como essa probabilidade é calculada sob a hipótese de veracidade de H_0 , a variância de \hat{P} é estimada por

$$\text{Var}(\hat{P}) = \frac{p_0(1-p_0)}{n}$$

TESTE BILATERAL

Com nível de significância $\alpha = \Pr(\text{erro I})$, temos:

$$\begin{aligned} \Pr \left[\left\{ \hat{P} > p_0 + k \right\} \cup \left\{ \hat{P} < p_0 - k \right\} \mid \hat{P} \approx N \left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n} \right) \right] &= \alpha \Rightarrow \\ \Pr \left(Z > \frac{p_0 + k - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \right) + \Pr \left(Z < \frac{p_0 - k - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \right) &= \alpha \Rightarrow \\ \Pr \left(Z > \frac{k}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \right) + \Pr \left(Z < -\frac{k}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \right) &= \alpha \Rightarrow \\ 2 \times \Pr \left(Z > \frac{k}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \right) &= \alpha \Rightarrow \\ \Pr \left(Z > \frac{k}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \right) &= \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \\ \frac{k}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} &= z_{\alpha/2} \Rightarrow \\ k &= z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \end{aligned}$$

Ou seja, a região crítica para o teste bilateral é

$$\hat{P} > p_0 + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \quad \text{ou} \quad \hat{P} < p_0 - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

TESTES UNILATERAIS

Com desenvolvimento análogo, obtemos as seguintes regiões críticas:

$$\begin{aligned}\text{Teste unilateral à direita} & : \quad \hat{P} > p_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \\ \text{Teste unilateral à esquerda} & : \quad \hat{P} < p_0 - z_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\end{aligned}$$

Exemplo 12.1.

Uma amostra de 64 elementos é usada para testar

$$H_0 : p = 0,35$$

$$H_1 : p \neq 0,35$$

Estabeleça a região crítica para o nível de significância de 1%.

Solução:

A região crítica é

$$RC : \hat{P} > 0,35 + k \text{ ou } \hat{P} < 0,35 - k$$

$$\Pr \left[\left\{ \hat{P} > 0,35 + k \right\} \cup \left\{ \hat{P} < 0,35 - k \right\} \mid \hat{P} \approx N \left(0,10; \frac{0,35 \times 0,65}{64} \right) \right] = 0,01 \Rightarrow$$

$$\Pr \left(Z > \frac{0,35 + k - 0,35}{\sqrt{\frac{0,35 \times 0,65}{64}}} \right) + \Pr \left(Z < \frac{0,35 - k - 0,35}{\sqrt{\frac{0,35 \times 0,65}{64}}} \right) = 0,01 \Rightarrow$$

$$\Pr(Z > 16,77k) + \Pr(Z < -16,77k) = 0,01 \Rightarrow$$

$$2 \times \Pr(Z > 16,77k) = 0,01 \Rightarrow$$

$$\Pr(Z > 16,77k) = 0,005 \Rightarrow$$

$$\text{tab}(16,77k) = 0,495 \Rightarrow$$

$$16,77k = 2,58 \Rightarrow$$

$$k = 0,154$$

Logo, a região crítica é

$$\hat{P} > 0,504 \text{ ou } \hat{P} < 0,196$$

Exemplo 12.2.

Um fabricante afirma que no máximo 10% dos seus produtos são defeituosos. Um órgão de defesa do consumidor testa uma amostra de 81 desses itens, detectando 13,8% de defeituosos.

1. Encontre a região crítica para um nível de significância de 5%.
2. Calcule o valor P .

Solução:

A afirmativa de interesse para o fabricante é $p \leq 0,10$. A negação de tal afirmativa (questionamento do órgão de defesa do consumidor) é $p > 0,10$. Logo, nossas hipóteses são:

$$H_0 : p = 0,10$$

$$H_1 : p > 0,10$$

Note que todas as proporções estão na forma decimal. Não trabalhe com percentagens! A região crítica é

$$RC : \hat{P} > 0,10 + k$$

1. Com $\alpha = 0,05$, temos:

$$\Pr \left[\hat{P} > 0,10 + k \mid \hat{P} \approx N \left(0,10; \frac{0,10 \times 0,90}{81} \right) \right] = 0,05 \implies$$

$$\Pr \left(Z > \frac{0,10 + k - 0,10}{\sqrt{\frac{0,10 \times 0,90}{81}}} \right) = 0,05 \implies$$

$$\Pr(Z > 30k) = 0,05 \implies$$

$$tab(30k) = 0,45 \implies$$

$$30k = 1,64 \implies$$

$$k = 0,055$$

A região crítica é $\hat{P} > 0,155$ ou 15,5%. Como $\hat{p} = 13,8\%$ não está na região crítica, não podemos rejeitar a hipótese nula, ou seja, nossos dados não fornecem evidência contra o fabricante.

$$\begin{aligned}
 2. \quad P &= \Pr \left[\hat{P} > 0,138 \mid \hat{P} \approx N \left(0,10; \frac{0,10 \times 0,90}{81} \right) \right] \\
 &= \Pr \left(Z > \frac{0,138 - 0,10}{\sqrt{\frac{0,10 \times 0,90}{81}}} \right) \\
 &= \Pr(Z > 1,14) \\
 &= 0,5 - \text{tab}(1,14) \\
 &= 0,12714
 \end{aligned}$$

Logo, rejeitamos H_0 apenas para níveis de significância maiores que 12,7%. Assim, aos níveis de significância usuais, não devemos rejeitar H_0 , o que é uma evidência de que o fabricante está dizendo a verdade.

Exercício 12.1.

Em uma pesquisa com 800 estudantes universitários, 385 afirmaram possuir computador. Teste a hipótese de que pelo menos 50% dos estudantes universitários possuem computador. Use $\alpha = 0,10$.

Exercício 12.2.

Uma pesquisa entre 700 trabalhadores revela que 15,8 obtiveram seus empregos por meio de indicações de amigos ou parentes. Teste a hipótese de que mais de 10% dos trabalhadores conseguem seus empregos por indicação de amigos ou parentes, utilizando 5% como nível de significância.

Exercício 12.3.

O nível de aprovação da qualidade das refeições servidas em um restaurante universitário era 20%, quando houve uma movimentação geral dos estudantes que forçou a direção do restaurante a fazer mudanças. Feitas as mudanças, sorteou-se uma amostra de 64 estudantes usuários do restaurante e 25 aprovaram a qualidade da comida. Você diria, ao nível de significância de 5%, que as mudanças surtiram efeito?

Exercício 12.4.

Deseja-se testar a honestidade de uma moeda. Para isso, lança-se a moeda 200 vezes, obtendo-se 115 caras. Qual é a sua conclusão sobre a honestidade da moeda? Para responder a essa questão, calcule e interprete o valor P .

Exercício 12.5.

A direção de um grande jornal nacional afirma que 25% dos seus leitores são da classe A. Se, em uma amostra de 740 leitores, encontramos 156 da classe A, qual é a conclusão que tiraríamos sobre a afirmativa da direção do jornal?

SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS**Exercício 12.1.**

$$\hat{p} = \frac{385}{800} = 0,48125$$

A afirmativa de interesse é “pelo menos 50% dos estudantes possuem computador”, ou seja, $p \geq 0,5$. Logo, as hipóteses são

$$H_0 : p = 0,50$$

$$H_1 : p < 0,50$$

$$\alpha = 0,10 \implies z_{0,1} = 1,28$$

e a região crítica é

$$\hat{P} < 0,50 - 1,28 \times \sqrt{\frac{0,48125 \times (1 - 0,48125)}{800}} \quad \text{ou} \quad \hat{P} < 0,4774$$

Como o valor observado não pertence à região crítica, não podemos rejeitar a hipótese nula. Ou seja, os dados trazem evidência de que a proporção de estudantes que possuem computador é de pelo menos 50%.

Exercício 12.2.

As hipóteses são

$$H_0 : p = 0,10$$

$$H_1 : p > 0,10$$

$\alpha = 5\% \implies z_{0,05} = 1,64$. Logo, a região crítica é

$$RC : \hat{P} > 0,1 + 1,64 \sqrt{\frac{0,1 \times 0,9}{700}} \quad \text{ou} \quad \hat{P} > 0,1186$$

Rejeita-se, assim, a hipótese nula de que 10% ou menos dos trabalhadores conseguem seus empregos por indicação de parentes ou amigos.

Exercício 12.3.

O interesse é verificar se $p > 0,20$. Logo, as hipóteses são

$$H_0 : p = 0,20$$

$$H_1 : p > 0,20$$

Como $\alpha = 5\%$ e o teste é unilateral, resulta que $z_{0,05} = 1,64$. Logo, a região crítica é

$$\hat{P} > 0,20 + 1,64 \times \sqrt{\frac{0,20 \times 0,80}{64}} \text{ ou } \hat{P} > 0,282$$

Como o valor observado $\hat{p} = \frac{25}{64} = 0,39063$ está na região crítica, rejeita-se a hipótese nula, ou seja, as evidências amostrais indicam que houve melhora com as mudanças.

Exercício 12.4.

As hipóteses são

$$H_0 : p = 0,5$$

$$H_1 : p \neq 0,5$$

$$\begin{aligned} P &= 2 \times \Pr \left[\hat{P} > \frac{115}{200} \mid \hat{P} \sim N \left(0,5; \frac{0,5 \times 0,5}{200} \right) \right] \\ &= 2 \times \Pr \left(Z > \frac{0,575 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{200}}} \right) \\ &= 2 \times \Pr(Z > 2,12) \\ &= 2 \times [0,5 - \text{tab}(2,12)] \\ &= 0,034 \end{aligned}$$

Como o valor P é pequeno, a probabilidade de obtermos 115 caras em 200 lançamentos de uma moeda é pequena, o que nos leva a suspeitar da honestidade da moeda.

Exercício 12.5.

Com as informações disponíveis, nossas hipóteses são:

$$H_0 : p = 0,25$$

$$H_1 : p \neq 0,25$$

O valor obtido é $\hat{p} = \frac{156}{740} = 0,2108 < 0,25$. Nesse caso,

$$\begin{aligned}
 P &= 2 \times \Pr \left[\hat{P} < \frac{156}{740} \mid \hat{P} \sim N \left(0,25, \frac{0,25 \times 0,75}{740} \right) \right] \\
 &= 2 \times \Pr \left(Z < \frac{0,2108 - 0,25}{\sqrt{\frac{0,25 \times 0,75}{740}}} \right) \\
 &= 2 \times \Pr(Z < -2,46) \\
 &= 2 \times [0,5 - \text{tab}(2,46)] \\
 &= 0,0139
 \end{aligned}$$

Como o valor P é bastante pequeno, devemos rejeitar a hipótese nula de que a proporção de leitores da classe A é igual a 25%.

Aula 13



TESTES DE HIPÓTESES SOBRE A MÉDIA DE UMA POPULAÇÃO NORMAL – σ^2 DESCONHECIDA

O b j e t i v o s

Nesta aula, você completará seu estudo básico sobre testes de hipóteses, analisando a situação relativa a uma população normal quando não se conhece a variância desta população.

Assim como no caso do intervalo de confiança, para testar hipóteses relativas à média de tal população, é necessário estimar essa variância e isso introduz mais uma fonte de variabilidade no procedimento: com uma única amostra, queremos testar hipóteses sobre a média, mas precisamos também estimar a variância da população.

O procedimento é simples e análogo aos casos anteriores vistos nas Aulas 10 a 12; o que muda é a distribuição amostral do estimador \bar{X} . Em vez de usarmos a distribuição normal para determinar os valores críticos, usaremos novamente a distribuição t de Student.

IDEIAS BÁSICAS

Considere uma população descrita por uma variável aleatória normal com média μ e variância σ^2 : $X \sim N(\mu; \sigma^2)$. Nosso interesse é testar hipóteses sobre a média μ a partir de uma amostra aleatória simples X_1, X_2, \dots, X_n . Como visto na Aula 9, se a variância σ^2 não é conhecida, então temos de usar a estatística

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S}$$

cujas distribuição é t de Student com $n - 1$ graus de liberdade.

De posse desta estatística de teste, o procedimento de construção do teste é idêntico ao visto nas Aulas 10 a 12: identificadas a hipótese nula (sempre na forma de uma hipótese simples $\mu = \mu_0$) e a hipótese alternativa, a região crítica é formada pelos valores “muito afastados” da média suposta μ_0 . O nível de significância e o tipo de hipótese alternativa permitem a identificação precisa do que é “muito afastado”: são valores na(s) cauda(s) da distribuição de T quando a hipótese nula é verdadeira.

Vamos formalizar o procedimento geral e, em seguida, apresentaremos alguns exemplos de aplicação.

PROCEDIMENTO GERAL PARA CONSTRUÇÃO DO TESTE DE HIPÓTESE SOBRE A MÉDIA DE UMA $N(\mu; \sigma^2)$ - σ^2 DESCONHECIDA

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória simples de uma população X cuja distribuição é $N(\mu; \sigma^2)$. Nosso interesse é testar alguma hipótese sobre a média μ desta população. Em geral, a variância σ^2 não é conhecida e, portanto, vamos estimá-la por

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right]$$

Lembre-se de que S^2 é um estimador não-viesado de σ^2 .

HIPÓTESE NULA E HIPÓTESE ALTERNATIVA

A hipótese nula que iremos considerar será

$$H_0: \mu = \mu_0$$

As possíveis formas da hipótese alternativa são:

$$\text{Bilateral: } H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$\text{Unilateral à direita: } H_1: \mu > \mu_0$$

$$\text{Unilateral à esquerda: } H_1: \mu < \mu_0$$

Como antes, a escolha entre essas três possibilidades se faz com base no conhecimento do problema. Se não temos informação alguma sobre a alternativa, temos que usar um teste bilateral. A escolha entre os dois tipos de hipóteses unilaterais é feita de modo que, ao escrevermos as hipóteses do problema em linguagem simbólica, a hipótese alternativa não inclua o sinal de igualdade.

Hipóteses do problema	Hipóteses estatísticas
$\begin{cases} \mu < \mu_0 \\ \mu \geq \mu_0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$
$\begin{cases} \mu \leq \mu_0 \\ \mu > \mu_0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$

ESTATÍSTICA DE TESTE, ERROS, REGRA DE DECISÃO

Como o teste é sobre a média de uma população normal, a estatística amostral que deve ser utilizada é \bar{X} . Como a variância populacional não é conhecida, sabemos que

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t(n-1)$$

O procedimento de decisão é definido em termos da hipótese nula H_0 e as decisões possíveis são (i) rejeitar ou (ii) não rejeitar H_0 . Conforme resumo apresentado no **Quadro 10.2** (Aula 10), existem duas possibilidades de erro:

Erro tipo I : rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira.

Erro tipo II : não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa.

A regra de decisão consiste em definir a região crítica RC como o conjunto de valores cuja probabilidade de ocorrência é *pequena* sob a hipótese de veracidade de H_0 . Como a estatística de teste segue uma distribuição t de Student, valores com pequena probabilidade de ocorrência estão nas caudas da distribuição. Isso equivale a valores de \bar{X} “distantes” de μ_0 . Assim, a região crítica para cada tipo de hipótese alternativa é definida como segue:

Alternativa bilateral:	$RC : \bar{X} > \mu_0 + k \text{ ou } \bar{X} < \mu_0 - k$
Alternativa unilateral à direita:	$RC : \bar{X} > \mu_0 + k$
Alternativa unilateral à esquerda:	$RC : \bar{X} < \mu_0 - k$

Na **Figura 13.1**, ilustra-se a região crítica para cada tipo de hipótese alternativa.

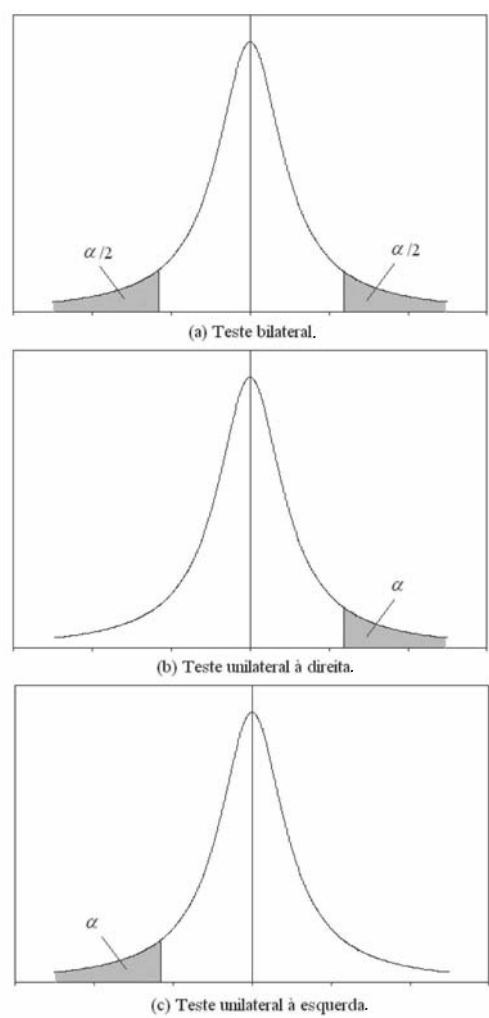


Figura 13.1: Região crítica para o teste de hipótese sobre a média μ de uma $N(\mu; \sigma^2)$ - σ^2 desconhecida.

NÍVEL DE SIGNIFICÂNCIA E REGIÃO CRÍTICA

O procedimento usual de teste de hipótese consiste em se fixar o nível de significância α , que, por definição, é a probabilidade de se cometer o erro tipo I:

$$\alpha = \text{Pr}(\text{erro tipo I}) = \text{Pr}(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira})$$

Assim, para cada tipo de hipótese alternativa a região crítica é identificada impondo-se a condição

$$\text{Pr}(T \in RC | H_0 \text{ é verdadeira}) = \alpha$$

HIPÓTESE BILATERAL

A região crítica é calculada como:

$$\begin{aligned} & \text{Pr} \left[\bar{X} > \mu_0 + k | \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sim t(n-1) \right] + \text{Pr} \left[\bar{X} < \mu_0 - k | \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sim t(n-1) \right] = \alpha \implies \\ & \text{Pr} \left[\bar{X} - \mu_0 > k | \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sim t(n-1) \right] + \text{Pr} \left[\bar{X} - \mu_0 < -k | \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sim t(n-1) \right] = \alpha \implies \\ & \text{Pr} \left[\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} > \sqrt{n} \frac{k}{S} | \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sim t(n-1) \right] + \text{Pr} \left[\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} < -\sqrt{n} \frac{k}{S} | \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sim t(n-1) \right] = \alpha \implies \\ & \text{Pr} \left[t(n-1) > \sqrt{n} \frac{k}{S} \right] + \text{Pr} \left[t(n-1) < -\sqrt{n} \frac{k}{S} \right] = \alpha \end{aligned}$$

Usando a notação $t_{n;\alpha}$ para denotar a abscissa da distribuição t de Student com n graus de liberdade, que deixa área (probabilidade) α acima dela, e lembrando que a distribuição t de Student é simétrica em torno do zero, a última equação é equivalente a

$$\begin{aligned} & \text{Pr} \left[t(n-1) > \sqrt{n} \frac{k}{S} \right] + \text{Pr} \left[t(n-1) < -\sqrt{n} \frac{k}{S} \right] = \alpha \implies \\ & \text{Pr} \left[t(n-1) > \sqrt{n} \frac{k}{S} \right] = \frac{\alpha}{2} \implies \\ & \sqrt{n} \frac{k}{S} = t_{n-1;\alpha/2} \implies \\ & k = t_{n-1;\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

e, assim, a região crítica é

$$RC: \bar{X} > \mu_0 + t_{n-1;\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \quad \text{ou} \quad \bar{X} < \mu_0 - t_{n-1;\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (13.1)$$

TESTE UNILATERAL À DIREITA

A região crítica é calculada como:

$$\begin{aligned} \Pr \left[\bar{X} > \mu_0 + k \mid \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sim t(n-1) \right] &= \alpha \implies \\ \Pr \left[\bar{X} - \mu_0 > k \mid \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sim t(n-1) \right] &= \alpha \implies \\ \Pr \left[\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} > \sqrt{n} \frac{k}{S} \mid \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sim t(n-1) \right] &= \alpha \implies \\ \Pr \left[t(n-1) > \sqrt{n} \frac{k}{S} \right] &= \alpha \implies \\ \sqrt{n} \frac{k}{S} &= t_{n-1; \alpha} \end{aligned}$$

e a região crítica é

$$RC: \bar{X} > \mu_0 + t_{n-1; \alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (13.2)$$

TESTE UNILATERAL À ESQUERDA

A região crítica é calculada como:

$$\begin{aligned} \Pr \left[\bar{X} < \mu_0 - k \mid \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sim t(n-1) \right] &= \alpha \implies \\ \Pr \left[\bar{X} - \mu_0 < -k \mid \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sim t(n-1) \right] &= \alpha \implies \\ \Pr \left[\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} < -\sqrt{n} \frac{k}{S} \mid \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sim t(n-1) \right] &= \alpha \implies \\ \Pr \left[t(n-1) < -\sqrt{n} \frac{k}{S} \right] &= \alpha \implies \\ \Pr \left[t(n-1) > \sqrt{n} \frac{k}{S} \right] &= \alpha \implies \\ \sqrt{n} \frac{k}{S} &= t_{n-1; \alpha} \end{aligned}$$

e a região crítica é

$$RC: \bar{X} < \mu_0 - t_{n-1; \alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (13.3)$$

A título de comparação com a situação da Aula 11 em que supusemos a variância conhecida, vamos considerar os mesmos exemplos, mas agora tratando a variância dada como sendo a variância amostral S^2 .

Exemplo 13.1.

Depois de uma pane geral no sistema de informação de uma empresa, o gerente administrativo deseja saber se houve alteração no tempo de processamento de determinada atividade.

Antes da pane, o tempo de processamento podia ser aproximado por uma variável aleatória normal com média de 100 minutos. Uma amostra de 16 tempos de processamento após a pane revela uma média $\bar{x} = 105,5$ minutos e um desvio padrão $S = 10$ minutos.

Ao nível de significância de 5%, qual é a conclusão sobre a alteração do tempo médio de processamento?

Solução:

Como visto no Exemplo 11.1, as hipóteses do problema são

$$\begin{aligned}\mu &= 100 \\ \mu &\neq 100\end{aligned}$$

Como a segunda expressão não envolve o sinal de igualdade, ela se torna a hipótese alternativa:

$$\begin{aligned}H_0: \mu &= 100 \\ H_1: \mu &\neq 100\end{aligned}$$

Como a variância não é conhecida, temos de usar a distribuição t de Student com $n - 1 = 16 - 1 = 15$ graus de liberdade. Para um teste bilateral com nível de significância de 5%, a abscissa de interesse é aquela que deixa área de 0,025 acima. Consultando a **Tabela 9.2** dada na Aula 9, resulta

$$t_{0,025;15} = 2,131$$

e a região crítica é

$$\bar{X} > 100 + 2,131 \times \frac{10}{\sqrt{16}} \quad \text{ou} \quad \bar{X} < 100 - 2,131 \times \frac{10}{\sqrt{16}}.$$

$$RC: \bar{X} > 105,33 \quad \text{ou} \quad \bar{X} < 94,673.$$

Como o valor observado \bar{x} está na região crítica, rejeita-se a hipótese nula, ou seja, ao nível de significância de 5%, as evidências amostrais indicam uma alteração do tempo de processamento da tarefa após a pane.

Compare com a região crítica obtida no caso da normal (Exemplo 11.1):

$$RC: \bar{X} > 104,9 \quad \text{ou} \quad \bar{X} < 95,1$$

Com o mesmo nível de significância, a região crítica no caso de variância desconhecida é mais extrema, refletindo a maior variabilidade da distribuição t .

Exemplo 13.2.

Na mesma situação do exemplo anterior, vamos considerar o caso em que o gerente esteja interessado apenas no aumento do tempo de processamento. Como visto no Exemplo 11.2 (Aula 11), as hipóteses são:

$$\begin{aligned} \mu &\leq 100 && \text{OK!} \\ \mu &> 100 && \text{Problema!} \end{aligned}$$

Solução:

Para definir qual é a hipótese nula, vamos usar o mesmo procedimento. Em um teste unilateral, a hipótese alternativa deve ser aquela que não envolve o sinal de igualdade. No nosso exemplo, essa é a hipótese $\mu > 100$. A hipótese nula, tendo que ser uma hipótese simples, passa a ser $\mu = 100$, ou seja:

$$\begin{aligned} H_0: \quad \mu &= 100 \\ H_1: \quad \mu &> 100 \end{aligned}$$

A região crítica agora é

$$RC: \bar{X} > 100 + k$$

e a abscissa é aquela que deixa área 0,05 acima em uma distribuição t com 15 graus de liberdade:

$$t_{0,05;15} = 1,753$$

o que nos leva a

$$RC: \bar{X} > 100 + 1,753 \times \frac{10}{\sqrt{16}} = 104,38$$

Essa também é uma região mais extrema que aquela encontrada para o caso da normal: $\bar{X} > 104,1$. E novamente rejeitamos a hipótese nula, ou seja, as evidências amostrais indicam um aumento do tempo de processamento da tarefa após a pane.

Exemplo 13.3.

O dono de uma média empresa decide investigar a alegação de seus empregados de que o salário médio na sua empresa é menor que o salário médio nacional. Para isso, ele analisa uma amostra de 25 salários, obtendo uma média de 894,53 reais e desvio padrão de 32 reais. De informações obtidas junto ao sindicato patronal, ele sabe que, em nível nacional, o salário médio é de 900 reais. Supondo que seja razoável aproximar a distribuição dos salários por uma distribuição normal, vamos construir um teste de hipótese apropriado, com um nível de significância de 10%.

Solução:

O problema aqui consiste em decidir se os salários são menores ou não do que a média nacional de 900 reais, ou seja, as situações de interesse são

$$\begin{aligned}\mu &< 900 \\ \mu &\geq 900\end{aligned}$$

Como no exemplo anterior, a hipótese alternativa é aquela que não envolve o sinal de igualdade. Logo, nossas hipóteses são:

$$\begin{aligned}H_0: \mu &= 900 \\ H_1: \mu &< 900\end{aligned}$$

O proprietário deve rejeitar a hipótese nula se a média amostral for muito menor do que 900, ou seja, a região crítica é

$$RC: \bar{X} < 900 - k$$

Com nível de significância de 10%, a abscissa de interesse é aquela que deixa área de 10% acima dela em uma distribuição t com 24 graus de liberdade:

$$t_{24;0,10} = 1,318$$

Logo, a região crítica é

$$\bar{X} < 900 - 1.318 \times \frac{32}{\sqrt{25}} = 891,56$$

Como o valor observado de 894,53 reais não está na região crítica, não rejeitamos H_0 , ou seja, as evidências amostrais apontam que os salários da empresa não são menores que a média nacional.

Comparando com a região crítica do caso normal, $\bar{X} < 891,808$, vemos, novamente, que no caso da t a região é mais extrema.

PODER DO TESTE

A definição da função poder do teste é exatamente a mesma:

$$\beta(\mu) = \Pr(\text{rejeitar } H_0 | \mu)$$

O problema aqui é que, para calcular $\beta(\mu)$, precisamos de um programa computacional que calcule probabilidades da distribuição t para qualquer valor da abscissa. A título de ilustração, vamos calcular o poder do Exemplo 25.1 para o valor alternativo $\mu = 95$:

$$\begin{aligned} \beta(95) &= \Pr\left[\bar{X} > 105,73 \mid \sqrt{16}\frac{\bar{X}-95}{10} \sim t(15)\right] + \Pr\left[\bar{X} < 94,673 \mid \sqrt{16}\frac{\bar{X}-95}{10} \sim t(15)\right] \\ &= \Pr\left[\sqrt{16}\frac{\bar{X}-95}{10} > \sqrt{16}\frac{105,73-95}{10}\right] + \Pr\left[\sqrt{16}\frac{\bar{X}-95}{10} < \sqrt{16}\frac{94,673-95}{10}\right] \\ &= \Pr[t(15) > 4,292] + \Pr[t(15) < -0,1308] \\ &= 0,00032 + 0,44884 = 0,44916 \end{aligned}$$

Os valores 0,00032 e 0,44884 foram obtidos com um programa computacional estatístico.

VALOR P

Assim como no caso da função poder, o cálculo do valor P requer programas computacionais que calculem probabilidades da distribuição t para qualquer abscissa. Mas a interpretação do valor P continua sendo a mesma: valores pequenos de P indicam

eventos pouco prováveis de ocorrerem quando H_0 é verdadeira. Assim, continua valendo a seguinte regra de decisão:



Devemos rejeitar a hipótese nula H_0 ao nível de significância α sempre que o valor P for menor ou igual a α , ou seja:

$$\text{Rejeitamos } H_0 \iff P \leq \alpha$$

No Exemplo 11.1, o valor P é

$$\begin{aligned} P &= 2 \times \Pr \left[\bar{X} > 105,5 \mid \sqrt{16} \frac{\bar{X} - 100}{10} \sim t(15) \right] \\ &= 2 \times \Pr \left[t(15) > \sqrt{16} \frac{105,5 - 100}{10} \right] \\ &= 2 \times \Pr [t(15) > 2,2] \\ &= 2 \times 0,02195 = 0,0439 \end{aligned}$$

Como $P < 0,05$, rejeitamos H_0 ao nível de significância de 5%.

Exercício 13.1.

Uma amostra aleatória simples de tamanho $n = 9$ extraída de uma população normal apresentou média igual a $\bar{x} = 13,35$ e desvio padrão $s = 3,1$. Deseja-se testar

$$H_0: \mu = 12,8$$

$$H_1: \mu \neq 12,8$$

- Determine a região crítica correspondente ao nível de significância $\alpha = 0,02$.
- Com base na região crítica encontrada no item anterior, estabeleça a conclusão, tendo o cuidado de usar um fraseado que não seja puramente técnico.

Exercício 13.2.

Uma empresa fabricante de balas afirma que o peso médio de suas balas é de pelo menos 2 gramas. Pela descrição do processo de produção, sabe-se que o peso das balas distribui-se normalmente. Uma amostra de 25 balas apresenta peso médio de 1,98 grama e um desvio padrão de 0,5 grama. O que se pode concluir sobre a afirmação do fabricante? Use um nível de significância de 5%.

Exercício 13.3.

Em uma linha de produção, peças são produzidas de modo que o comprimento seja normalmente distribuído. Ajustes periódicos são feitos na máquina para garantir que as peças tenham comprimento apropriado de 15 cm, pois as peças muito curtas não podem ser aproveitadas (as peças longas podem ser cortadas). A cada hora são extraídas nove peças da produção, medindo-se seu comprimento. Uma dessas amostras apresenta comprimento médio de 14,5 cm e desvio padrão de 0,5 cm. Use o nível de significância de 0,1% para testar a hipótese de que o processo esteja operando adequadamente.

Exercício 13.4.

Depois de desenvolver um algoritmo para acelerar a execução de determinada tarefa rotineira em um escritório de contabilidade, o analista de sistema analisa uma amostra de 25 tempos, obtendo uma média de 46,5 segundos e desvio padrão de 5 segundos. Dos dados passados, ele sabe que o tempo de execução é aproximadamente normal com média de 48,5 segundos. Use o nível de significância de 5% para decidir se o algoritmo do analista realmente melhorou o desempenho do sistema.

Exercício 13.5.

Uma propaganda afirma que o consumo médio de gasolina de determinada marca de automóvel é de 12 litros por 100 quilômetros rodados. Um teste com 36 automóveis desta marca acusa um consumo médio de 12,4 litros por 100 quilômetros rodados com desvio padrão de 1 litro por quilômetro rodado. O que se pode concluir sobre a propaganda? Use o nível de significância de 10%.

SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Exercício 13.1.

$n = 9, \alpha = 0,02 \Rightarrow t_{8;0,01} = 2,896$. Logo, a região crítica é

$$\begin{aligned}\bar{X} &> 12,8 + 2,896 \times \frac{3,1}{\sqrt{9}} = 15,7925 \\ \text{ou} \\ \bar{X} &< 12,8 - 2,896 \times \frac{3,1}{\sqrt{9}} = 9,80747\end{aligned}$$

Como o valor observado $\bar{x} = 13,35$ não pertence à região crítica, não podemos rejeitar H_0 .

Exercício 13.2.

A afirmativa do fabricante é $\mu \geq 2$. Logo, a negação de tal afirmação é $\mu < 2$. Como essa última expressão não contém o sinal de igualdade, ela se torna a hipótese alternativa. Então, nossas hipóteses são:

$$\begin{aligned}H_0: \quad \mu &= 2 \\ H_1: \quad \mu &< 2\end{aligned}$$

$n = 25; \alpha = 0,05 \Rightarrow t_{24;0,05} = 1,711$. Logo, a região crítica é

$$\bar{X} < 2 - 1,711 \times \frac{0,5}{\sqrt{25}} = 1,8289$$

Como o valor observado $\bar{x} = 1,98$ não pertence à região crítica, não podemos rejeitar H_0 , ou seja, as evidências amostrais indicam que as balas pesam pelo menos 2 gramas.

Exercício 13.3.

O problema na produção surge quando $\mu < 15$. Logo, nossas hipóteses são:

$$\begin{aligned}H_0: \quad \mu &= 15 \\ H_1: \quad \mu &< 15\end{aligned}$$

$n = 9, \alpha = 0,001 \Rightarrow t_{8;0,001} = 4,501$. A região crítica é

$$\bar{X} < 15 - 4,501 \times \frac{0,5}{\sqrt{9}} = 14,25$$

Como o valor observado $\bar{x} = 14,5$ não está na região crítica, não podemos rejeitar H_0 , ou seja, as evidências amostrais indicam que o processo está operando adequadamente.

Exercício 13.4.

A intenção do analista é reduzir o tempo; logo, o interesse dele é que $\mu < 48,5$. A negação dessa afirmativa é $\mu \geq 48,5$. Logo, nossas hipóteses são:

$$H_0: \mu = 48,5$$

$$H_1: \mu < 48,5$$

$n = 25, \alpha = 0,05 \implies t_{24;0,05} = 1,711$. Logo, a região crítica é

$$\bar{X} < 48,5 - 1,711 \times \frac{5}{\sqrt{25}} = 46,789$$

Como o valor observado $\bar{x} = 46,5$ pertence à região crítica, devemos rejeitar H_0 , ou seja, as evidências amostrais indicam que o analista foi bem-sucedido em reduzir o tempo de execução.

Exercício 13.5.

Se o consumo for menor ou igual a 12 litros por 100 km, não há problema com a propaganda. O problema surge se o consumo for superior. Logo, nossas hipóteses são:

$$H_0: \mu = 12$$

$$H_1: \mu > 12$$

Supondo que o consumo X possa ser aproximado por uma distribuição normal, podemos usar a distribuição $t(35)$. Com $\alpha = 100\%$, $t_{35;0,10} = 1,306$ e a região crítica é

$$\bar{X} > 12 + 1,306 \times \frac{1}{\sqrt{36}} = 12,218$$

Como o valor observado $\bar{x} = 12,4$ litros por quilômetro rodado está na região crítica, devemos rejeitar H_0 , ou seja, a propaganda parece ser enganosa.

Aula 14

RESUMO DE INFERÊNCIA ESTATÍSTICA – MÉDIAS E PROPORÇÕES

Objetivo

Com o objetivo de consolidar as ideias apresentadas sobre Inferência Estatística, vamos apresentar um grande resumo, de modo a ilustrar os aspectos comuns e importantes do material apresentado nas Aulas 4 a 13.

OBJETIVOS DA INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

O objetivo geral da Inferência Estatística é obter informações sobre determinada população – representada por uma variável aleatória X – a partir dos dados levantados para uma amostra.

Neste curso, estamos considerando que nossa amostra X_1, X_2, \dots, X_n seja uma amostra aleatória simples, o que significa dizer que as variáveis X_i , $i = 1, \dots, n$ são independentes e identicamente distribuídas, com distribuição igual à distribuição populacional.

Estamos supondo também que a variável aleatória X , que representa a população de interesse, tenha uma distribuição f que depende de algum parâmetro desconhecido θ .

Os dois objetivos específicos que consideramos foram:

1. Estimação do parâmetro θ – vimos alguns estimadores pontuais e também a estimação por intervalo de confiança.
2. Teste de hipóteses sobre o parâmetro θ .

Os parâmetros considerados foram a média e a proporção.

INFERÊNCIA SOBRE A MÉDIA DE UMA POPULAÇÃO

POPULAÇÃO NORMAL

Os dois resultados básicos envolvendo uma população normal $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ são:

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0; 1) \quad (14.1)$$

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t(n-1) \quad (14.2)$$

O resultado (14.1) deve ser usado quando se conhece a variância populacional; essa é uma situação pouco encontrada na prática, de modo que, em geral, devemos usar o resultado (14.2), em que usamos o estimador da variância populacional:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

POPULAÇÃO NÃO-NORMAL – AMOSTRA GRANDE

Quando a população não é normal, mas a amostra é grande, o teorema central do limite nos diz que

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \approx N(0; 1) \quad (14.3)$$

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \approx N(0; 1) \quad (14.4)$$

Note a diferença: quando a população é normal, os resultados (14.1) e (14.2) são exatos; aqui, o resultado é aproximado. A bondade da aproximação depende da forma da verdadeira distribuição populacional (quanto mais próxima de uma distribuição normal, melhor) e do tamanho da amostra (em geral, $n > 30$ fornece uma aproximação razoável).

ESCOLHA ENTRE AS DISTRIBUIÇÕES NORMAL E *t* DE STUDENT

Na **Figura 14.1** é dado um esquema que ilustra o processo de escolha entre as distribuições normal e *t* de Student.

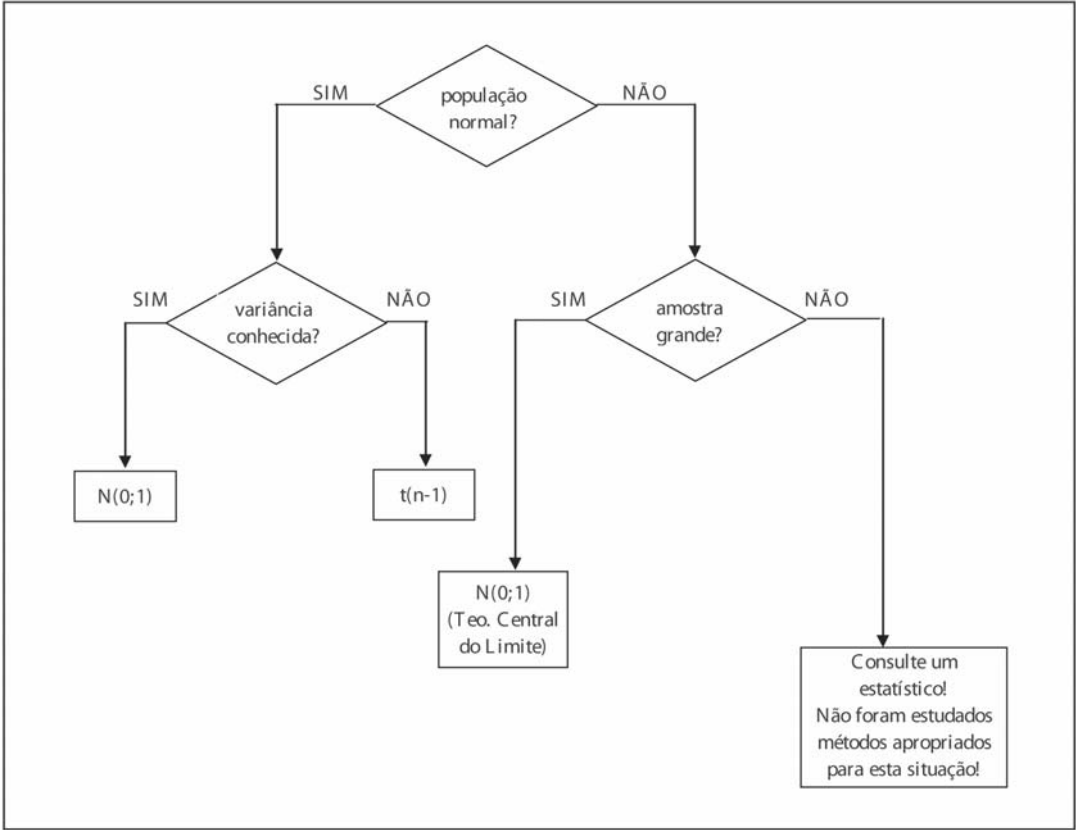


Figura 14.1: Inferência sobre a média de uma população – escolha da distribuição amostral.

INTERVALO DE CONFIANÇA E TESTE DE HIPÓTESE SOBRE A MÉDIA DE UMA POPULAÇÃO

Nos quadros a seguir, temos o resumo dos resultados vistos sobre intervalo de confiança e teste de hipótese sobre a média de uma população.

No teste de hipótese, rejeita-se a hipótese nula se o valor observado da média amostral cair na região crítica *RC*.

População Normal $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ – σ^2 Conhecida
<p>Intervalo de confiança para média</p> $\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ <p>Margem de erro: $\varepsilon = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$</p>
<p>Teste de hipótese sobre a média</p> <p>Hipótese nula $H_0: \mu = \mu_0$</p> <p>Hipótese alternativa bilateral $H_1: \mu \neq \mu_0$</p> <p>RC: $\bar{X} < \mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ou $\bar{X} > \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$</p>
<p>Hipótese alternativa unilateral à direita $H_1: \mu > \mu_0$</p> <p>RC: $\bar{X} > \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$</p>
<p>Hipótese alternativa unilateral à esquerda $H_1: \mu < \mu_0$</p> <p>RC: $\bar{X} < \mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$</p>

População Normal $X \sim N(\mu; \sigma^2) - \sigma^2$ Desconhecida
<div><div>Intervalo de confiança para a média</div><div>$\left[\bar{X} - t_{n-1; \alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_{n-1; \alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$</div><div>Margem de erro: $\varepsilon = t_{n-1; \alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$</div></div>
<div><div>Teste de hipótese sobre a média</div><div>Hipótese nula<div>$H_0: \mu = \mu_0$</div></div><div>Hipótese alternativa bilateral<div>$H_1: \mu \neq \mu_0$</div></div><div>$RC: \bar{X} < \mu_0 - t_{n-1; \alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{ou} \quad \bar{X} > \mu_0 + t_{n-1; \alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$</div></div>
<div><div>Hipótese alternativa unilateral à direita</div><div>$H_1: \mu > \mu_0$</div><div>$RC: \bar{X} > \mu_0 + t_{n-1; \alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$</div></div>
<div><div>Hipótese alternativa unilateral à esquerda</div><div>$H_1: \mu < \mu_0$</div><div>$RC: \bar{X} < \mu_0 - t_{n-1; \alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$</div></div>

Inferência sobre a Proporção Populacional

Quando a população de interesse é representada por uma variável aleatória de Bernoulli, o interesse está em estimar a proporção p de “Sucessos”. Neste caso, temos que utilizar a proporção amostral \hat{p} e temos que ter uma amostra grande ($n > 30$). Com essas hipóteses, o resultado de interesse é

$$\hat{P} \approx N \left[p, \frac{p(1-p)}{n} \right]$$

No quadro a seguir, temos o resumo dos resultados vistos sobre intervalo de confiança e teste de hipótese sobre a proporção populacional. No teste de hipótese, rejeita-se a hipótese nula se o valor observado da proporção amostral \hat{p} cair na região crítica RC .

População Bernoulli - Amostra Grande	
<p>Intervalo de confiança para a proporção</p> $\left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$ <p>Margem de erro: $\varepsilon = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$</p>	
<p>Teste de hipótese sobre a proporção</p> <p>Hipótese nula</p> $H_0: p = p_0$ <p>Hipótese alternativa bilateral</p> $H_1: p \neq p_0$ <p>$RC: \hat{P} < p_0 - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ ou $\hat{P} > p_0 + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$</p>	

<p>Hipótese alternativa unilateral à direita</p> $H_1: p > p_0$ $RC: \hat{P} > p_0 + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$
<p>Hipótese alternativa unilateral à esquerda</p> $H_1: p < p_0$ $RC: \hat{P} < p_0 - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$

Bibliografia

- [1] ANDERSON, David R.; SWEENEY, Dennis J.; WILLIAMS, Thomas A. *Estatística Aplicada à Administração e à Economia*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002
- [2] MOORE, David S.; McCabe, George P.; DUCKWORTH, William M.; SCLOVE, Stanley L. *A Prática da Estatística Empresarial – Como Usar Dados para Tomar Decisões*. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006
- [3] MORETTIN, Pedro Alberto; BUSSAB, Wilton de Oliveira. *Estatística Básica*, 5a Edição. São Paulo: Saraiva, 2006
- [4] TRIOLA, Mario F. *Introdução à Estatística*, 9a. Edição. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2005

