Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Álgebra Linear II

Volume 2

Hernando Bedoya
Maria Lúcia T. Villela
Ricardo Camelier

GOVERNO DO
Rio de Janeiro

SECRETARIA DE CIÊNCIA,
TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério da
Educação

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PÁTRIA EDUCADORA

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

NOVA CEDAE

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua da Ajuda, 5 – Centro – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20040-000
Tel.: (21) 2333-1112 Fax: (21) 2333-1116

Material Didático

Elaboração de Conteúdo
Hernando Bedoya
Maria Lúcia T. Villela
Ricardo Camelier

Coordenação Geral
Marcelo Corrêa

Biblioteca
Raquel Cristina da Silva Tiellet
Simone da Cruz Correa de Souza
Vera Vani Alves de Pinho

Coordenação de Produção
Marcelo Freitas

Revisão Linguística e Tipográfica
Patrícia Paula

Ilustração
Ronaldo d'Aguiar Silva

Capa
Sami Souza

Programação Visual
Nilda Helena Lopes da Silva

Produção Gráfica
Patrícia Esteves
Ulisses Schnaider

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.
Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Luiz Fernando de Souza Pezão

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Gustavo Tutuca

Instituições Consorciadas

CEFET/RJ - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca
Diretor-geral: Carlos Henrique Figueiredo Alves

IFF - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense
Reitor: Luiz Augusto Caldas Pereira

FAETEC - Fundação de Apoio à Escola Técnica
Presidente: Wagner Granja Victer

UENF - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Reitor: Silvério de Paiva Freitas

UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Reitor: Ricardo Vieiralves de Castro

UFF - Universidade Federal Fluminense
Reitor: Sidney Luiz de Matos Mello

UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Reitor: Roberto Leher

UFRRJ - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Reitora: Ana Maria Dantas Soares

UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Reitor: Luiz Pedro San Gil Jutuca

Sumário

Aula 19

Operadores Ortogonais

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender o conceito e as propriedades apresentadas sobre operadores ortogonais;
2. aplicar os conceitos apresentados em exemplos importantes.

OPERADORES ORTOGONAIS

Pré-requisitos
Aulas 10 a 14, 17 e 18.

Você deve se lembrar de que um operador linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dito *ortogonal* se existe uma base ortonormal α de $\mathbb{R}^n$ tal que a matriz de T na base α é uma matriz ortogonal, isto é, se a matriz $[T]_\alpha$ é ortogonal.

Veremos que os operadores ortogonais estão bem definidos no sentido de que o fato de ser um operador ortogonal não depende da base ortonormal escolhida, ou seja, se a matriz $[T]_\alpha$, numa certa base ortonormal α de $\mathbb{R}^n$, for ortogonal, então a matriz $[T]_\beta$ também será ortogonal para qualquer outra base ortonormal β de $\mathbb{R}^n$.

Na verdade, temos o seguinte resultado:

Teorema 19.1.

Sejam $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear ortogonal e α e β duas bases ortonormais de $\mathbb{R}^n$. Se a matriz $[T]_\alpha$ é ortogonal, então a matriz $[T]_\beta$ também será ortogonal.

Demonstração

O teorema sobre mudança de base para operadores lineares, visto no curso de Álgebra Linear I, nos garante que

$$[T]_\beta = P^{-1}[T]_\alpha P,$$

onde P é a matriz mudança de base, da base β para a base α. Como α e β são duas bases ortonormais de $\mathbb{R}^n$, temos que P é uma matriz ortogonal e, pelo **Teorema 10.1.** da Aula 10, segue-se que

$$P^{-1} = P^t,$$

onde P^t é a transposta da matriz P. Assim,

$$[T]_\beta = P^t[T]_\alpha P.$$

Como $[T]_\alpha$ é uma matriz ortogonal por hipótese e como o produto de matrizes ortogonais é também uma matriz ortogonal, concluímos que $[T]_\beta$ também será uma matriz ortogonal.

O resultado anterior simplifica um problema crucial: para verificarmos se um dado operador linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$é ortogonal, basta considerar qualquer base ortonormal α de $\mathbb{R}^n$ e verificar se a matriz $[T]_\alpha$ é uma matriz ortogonal.

Exemplo 19.1.

Verifique que o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x,y,z) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta,\ x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta,\ z),$$

com $\theta \in [0,2\pi)$, é um operador ortogonal.

Solução:

De fato, escolhendo a base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, dada por

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \quad \mathbf{e}_2 = (0,1,0) \text{ e } \mathbf{e}_3 = (0,0,1),$$

obtemos

$$\begin{array}{l} T(\mathbf{e}_1) = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, 0) \\ T(\mathbf{e}_2) = (-\,\mathrm{sen}\,\theta\ \ \cos\theta, 0) \\ T(\mathbf{e}_3) = (0,0,1). \end{array}$$

Portanto, a matriz que representa T nesta base é dada por

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que A é uma matriz ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Mais ainda, A é uma rotação de θ radianos em torno do eixo-z (Exemplo 17.1 da Aula 17). Assim, o operador linear T é um operador ortogonal.

O próximo teorema segue imediatamente do **Teorema 10.2** da Aula 10.

Teorema 19.2.

Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador ortogonal. Então as seguintes propriedades são válidas:

1. T transforma bases ortonormais em bases ortonormais, ou seja, se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, então $\{T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, \ldots, T\mathbf{v}_n\}$ também é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

2. T preserva o produto interno, ou seja, para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vale que
$$\langle T\mathbf{u}, T\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle.$$

3. T preserva a norma, ou seja, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vale que

$$||T\mathbf{v}|| = ||\mathbf{v}||.$$

Exemplo 19.2.

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador ortogonal, então sua matriz na base canônica é da forma

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

onde $\theta \in [0\,,\,2\pi)$.

Solução:

De fato, sendo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador ortogonal, sua matriz na base canônica de $\mathbb{R}^2$ será uma matriz ortogonal de ordem 2. Mas, pelos Exemplos 10.1 e 10.2 da Aula 10, sabemos que toda matriz ortogonal de ordem 2 é da forma

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Sabemos também que a primeira matriz representa uma rotação de θ radianos, no sentido anti-horário, em torno da origem, e a segunda matriz representa uma reflexão em torno da reta pela origem que forma um ângulo de $\theta/2$ radianos com o semieixo x positivo.

Exemplo 19.3.

a. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que leva o segmento de reta de extremidades $(-6,2)$ e $(-1,2)$ ao segmento de reta de extremidades $(-2,6)$ e $(1,2)$, respectivamente (veja a **Figura 19.1**).

b. Mostre que a transformação acima é uma rotação. Determine, também, o ângulo dessa rotação.

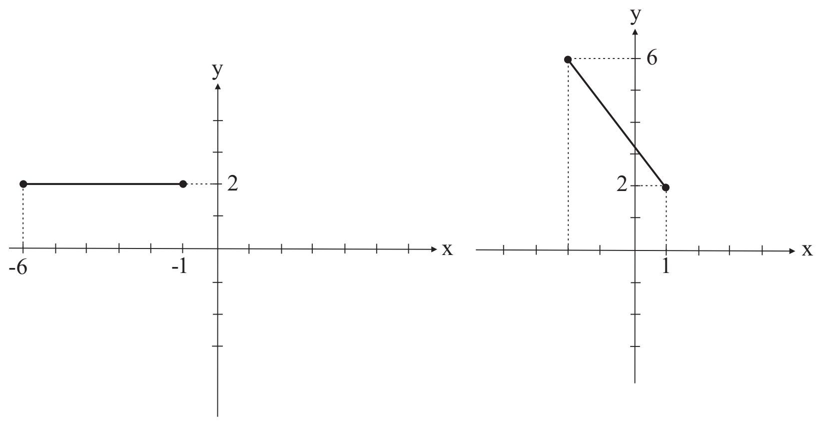


Figura 19.1: O operador T.

Solução:

a. Queremos encontrar escalares $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que a matriz que representa T na base canônica seja dada por

$$[T] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Da condição sobre as extremidades, temos

$$T(-6,2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ e}$$
$$T(-1\,,\,2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

o que nos dá o sistema linear

$$\begin{cases} -6a + 2b &= -2 \\ -6c + 2d &= 6 \\ -a + 2b &= 1 \\ -c + 2d &= 2. \end{cases}$$

É fácil ver que a solução desse sistema é dada por:

$$a = 3/5; \quad b = 4/5; \quad c = -4/5 \quad \text{e} \quad d = 3/5.$$

Assim,

$$[T] = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

b. Como as colunas da matriz $[T]$, representadas pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (3/5\,, -4/5)$ e $\mathbf{v}_2 = (4/5\,,\,3/5)$, formam uma base ortonormal de

$\mathbb{R}^2$, concluímos que a matriz $[T]$ é ortogonal e, consequentemente, o operador linear T é um operador ortogonal. Além disso, $\det[T] = 1$ e, assim, o operador T é uma rotação de $\mathbb{R}^2$ cujo ângulo θ é dado por

$$\theta = -\arccos(3/5).$$

Exercício 19.1.

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma reflexão num plano π de $\mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0,-1) = (-1,0,1)$. Determine a matriz que representa o operador T com respeito à base canônica.

2. Determine os autovalores e os autovetores associados da transformação linear T do exercício anterior.

Aula 20

PROJEÇÕES ORTOGONAIS – 1ª PARTE

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender o conceito de projeção ortogonal em dimensão 2;
2. aplicar os conceitos apresentados em exemplos importantes.

Projeções ortogonais – 1ª Parte

Pré-requisitos
Aulas 10 a 14, 17, 18 e 19.

Nesta e na próxima aula, vamos apresentar um tipo de transformação usada em áreas como a Computação Gráfica e o Desenho Geométrico. Trata-se das projeções ortogonais. Nesta primeira aula, trabalharemos com as projeções ortogonais em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 20.1.

Determine a matriz que representa a projeção ortogonal sobre o eixo-x, isto é, sobre a reta de equação cartesiana $y = 0$.

Solução:

Geometricamente, essa transformação é representada pela **Figura 20.1**.

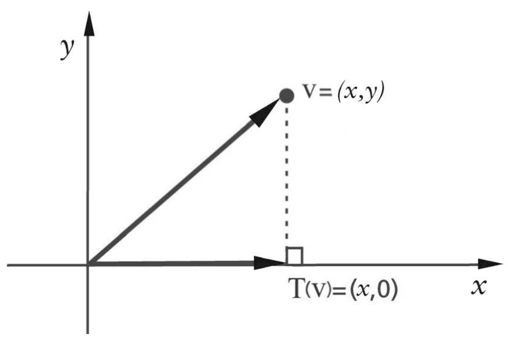


Figura 20.1: A projeção ortogonal no eixo-x.

Assim, temos a transformação linear

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$T(x,y) = (x,0).$$

Denotando por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$, temos que

$$T(\mathbf{e}_1) = T(1,0) = (1,0) = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2$$

$$T(\mathbf{e}_2) = T(0,1) = (0,0) = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2.$$

Portanto, a matriz que representa a transformação T na base canônica é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos imediatamente algumas propriedades dessa projeção ortogonal.

1. A matriz A e, portanto, o operador T, não é inversível, pois $\det(A) = 0$.
2. Como $T(\mathbf{e}_2) = 0 \cdot \mathbf{e}_2$, então $\lambda_2 = 0$ é um autovalor de T com autovetor associado $\mathbf{e}_2 = (0,1)$. Não é difícil ver que o autoespaço associado a $\lambda_2 = 0$ é exatamente o eixo-y, isto é, a reta de equação cartesiana $x = 0$.
3. Como $T(\mathbf{e}_1) = 1 \cdot \mathbf{e}_1$, então $\lambda_1 = 1$ é um autovalor de T com autovetor associado $\mathbf{e}_1 = (1,0)$. Não é difícil ver que o autoespaço associado a $\lambda_1 = 1$ é exatamente o eixo-x, isto é, a reta de equação cartesiana $y = 0$.
4. O operador T é diagonalizável e seu polinômio característico é $p(x) = x(x-1)$.

Exemplo 20.2.

Determine a matriz que representa a projeção ortogonal sobre o eixo-y, isto é, sobre a reta de equação cartesiana $x = 0$.

Solução:

A projeção ortogonal no o eixo-y é dada pela transformação linear

$$\begin{aligned} &T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &T(x,y) = (0,y). \end{aligned}$$

Geometricamente, esta transformação é representada pela **Figura 20.2**.

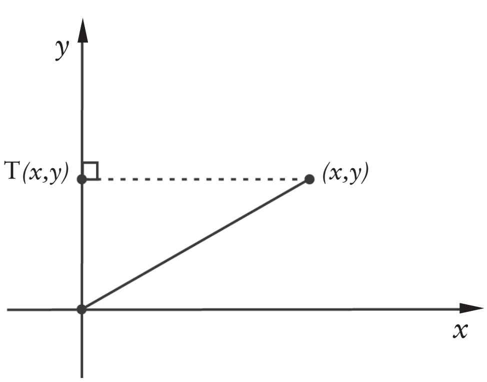


Figura 20.2: A projeção ortogonal no eixo-y.

Como no Exemplo 20.1, temos que

$$T(\mathbf{e}_1) = T(1,0) = (0,0) = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2$$
$$T(\mathbf{e}_2) = T(0,1) = (0,1) = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2.$$

Portanto, a matriz que representa a transformação T na base canônica é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como antes, vemos que:

1. A matriz A e, portanto, o operador T, não é inversível, pois $\det(A) = 0$.

2. Como $T(\mathbf{e}_1) = 0 \cdot \mathbf{e}_1$, então $\lambda_1 = 0$ é um autovalor de T com autovetor associado $\mathbf{e}_1 = (1,\ 0)$. Não é difícil ver que o autoespaço associado a $\lambda_1 = 0$ é exatamente o eixo-x, isto é, a reta de equação cartesiana $y = 0$.

3. Como $T(\mathbf{e}_2) = 1 \cdot \mathbf{e}_2$, então $\lambda_2 = 1$ é um autovalor de T com autovetor associado $\mathbf{e}_2 = (0,\ 1)$. Não é difícil ver que o autoespaço associado a $\lambda_2 = 1$ é exatamente o eixo-y, isto é, a reta de equação cartesiana $x = 0$.

4. O operador T é diagonalizável com polinômio característico $p(x) = x(x-1)$.

Os Exemplos 20.1 e 20.2 são muito simples, porém são muito importantes a sua compreensão e o seu significado geométrico. Especialmente, certifique-se de que tenha entendido os autoespaços associados a cada autovalor. Usaremos essas ideias para apresentar a projeção ortogonal sobre uma reta L qualquer do $\mathbb{R}^2$ passando pela origem. Se você compreendeu bem a geometria dos exemplos anteriores, então não terá dificuldade em acompanhar o caso geral a seguir.

Exemplo 20.3.

Descreva a projeção ortogonal sobre uma reta L de $\mathbb{R}^2$ que passa pela origem.

Solução:

Suponhamos que a reta L seja paralela a um vetor unitário $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^2$, como ilustra a **Figura 20.3**.

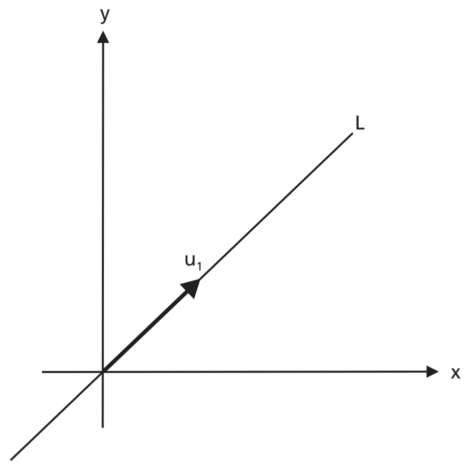


Figura 20.3: A reta L paralela ao vetor unitário $\mathbf{u}_1$.

O efeito geométrico da projeção ortogonal sobre a reta L é observado na **Figura 20.4**.

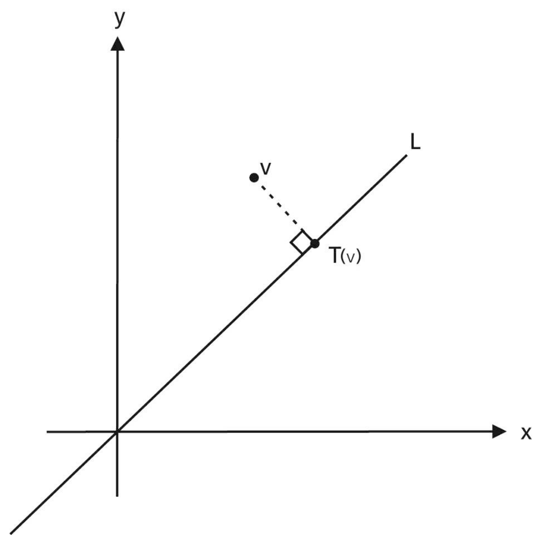


Figura 20.4: A projeção ortogonal na reta L.

A projeção ortogonal de um vetor $\mathbf{v}$ na direção do vetor $\mathbf{u}_1$ é dada por

$$\begin{array}{rcl} T:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{v} & \mapsto & T\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\, \mathbf{u}_1, \end{array}$$

de onde vemos que T é uma transformação linear. Para obter a fórmula acima, observamos que desejamos um vetor $T\mathbf{v}$ da forma $T\mathbf{v} = k\mathbf{u}_1$ de modo que $\mathbf{v} - k\mathbf{u}_1$ seja ortogonal a $\mathbf{u}_1$, como indica a **Figura 20.5**.

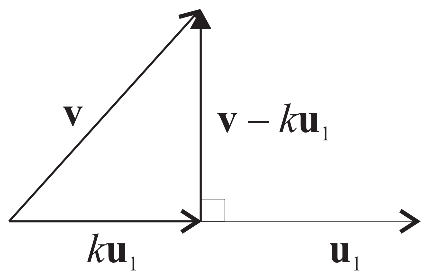


Figura 20.5: A projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ na direção de $\mathbf{u}_1$

Assim, da ortogonalidade entre $\mathbf{v} - k\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_1$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{v} - k\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle - \langle k\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle - k \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle , \end{aligned}$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} k \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \\ k &= \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle} , \end{aligned}$$

e, portanto,

$$T\mathbf{v} = k\mathbf{u}_1 = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\, \mathbf{u}_1.$$

Observe que na fórmula acima o vetor $\mathbf{u}_1$ não precisa ser unitário, mas, caso seja, como $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 1$, então a fórmula acima se simplifica para

$$T\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle\, \mathbf{u}_1.$$

Nosso problema agora é encontrar a matriz que represente a transformação T. Veremos que, escolhendo uma base ortonormal adequada de $\mathbb{R}^2$, a matriz de T nessa base é muito similar à matriz do Exemplo 20.1, visto anteriormente. Lembre que o problema da escolha de uma base ortonormal adequada já foi tratado quando estudamos as reflexões de $\mathbb{R}^2$ com respeito a uma reta qualquer passando pela origem. Veja a Aula 12.

Seja $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ onde $\mathbf{u}_1$ é um vetor unitário paralelo à reta L e u_2 é um vetor unitário normal à reta L. Veja a **Figura 20.6**.

Nesse caso, como $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 1$ e pela observação acima, temos que $T\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle\, \mathbf{u}_1$. Assim, vemos que

$$\begin{aligned} T\mathbf{u}_1 &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle\, \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1 = 1 \cdot \mathbf{u}_1 + 0 \cdot \mathbf{u}_2 \\ T\mathbf{u}_2 &= \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle\, \mathbf{u}_1 = 0 \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \cdot \mathbf{u}_1 + 0 \cdot \mathbf{u}_2. \end{aligned}$$

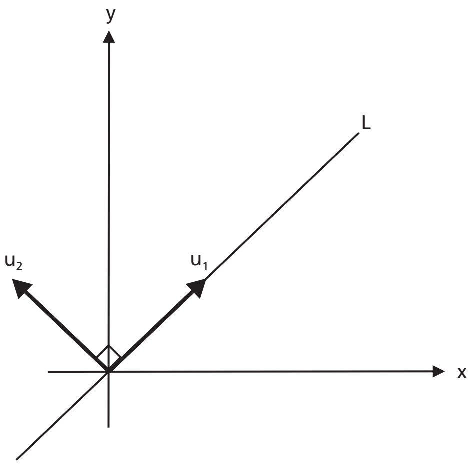


Figura 20.6: A base ortonormal $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

Portanto, a matriz que representa a transformação T na base β é dada por

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que é exatamente da mesma forma que a matriz do Exemplo 20.1. Se quisermos obter a matriz que representa T na base canônica, é só fazermos uma mudança de base. Se $\alpha = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, então

$$[T]_\alpha = P[T]_\beta P^{-1},$$

onde P é a matriz mudança de base, da base β para a base α. Como $P = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2]$, isto é, suas colunas são vetores ortonormais, então P é uma matriz ortogonal e, portanto, $P^{-1} = P^t$. Como nos Exemplos 20.1 e 20.2, temos as seguintes propriedades.

1. As matrizes $[T]_\alpha$ e $[T]_\beta$ e, portanto, o operador T, não são inversíveis, pois $\det [T]_\beta = 0$.
2. Como $T(\mathbf{u}_2) = 0 \cdot \mathbf{u}_2$, então $\lambda_2 = 0$ é um autovalor de T com autovetor associado $\mathbf{u}_2$. Não é difícil ver que o autoespaço associado a $\lambda_2 = 0$ é exatamente a reta pela origem ortogonal à reta L.
3. Como $T(\mathbf{u}_1) = 1 \cdot \mathbf{u}_1$, então $\lambda_1 = 1$ é um autovalor de T com autovetor associado $\mathbf{u}_1$. Não é difícil ver que o autoespaço associado a $\lambda_1 = 1$ é exatamente a reta L.
4. O operador T é diagonalizável e seu polinômio característico é $p(x) = x(x-1)$.

Cabe aqui, mais uma vez, ressaltar a analogia entre este terceiro exemplo e os dois primeiros. Isto se deve à escolha adequada de uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 20.1.

1. Determine a matriz da projeção ortogonal sobre a reta $y = \sqrt{3}x$ com respeito à base canônica.

2. Determine os autovalores e os autoespaços associados da transformação linear do exercício anterior.

Aula 21

PROJEÇÕES ORTOGONAIS – 2ª PARTE

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender o conceito de projeção ortogonal em dimensão 3;
2. aplicar os conceitos apresentados em exemplos importantes.

PROJEÇÕES ORTOGONAIS – 2ª PARTE

Pré-requisitos
Aulas 10 a 14, 17 a 20.

Nesta aula daremos continuidade ao estudo das projeções ortogonais, estudando as projeções ortogonais em $\mathbb{R}^3$. Apresentamos, inicialmente, os casos mais simples das projeções ortogonais nos planos coordenados. Em seguida, trataremos do caso geral de uma projeção ortogonal sobre um plano passando pela origem.

Exemplo 21.1.

Determine a matriz que representa a projeção ortogonal sobre o plano-xy, isto é, sobre o plano de equação cartesiana $z = 0$.

Solução:

Geometricamente, essa transformação é representada pela **Figura 21.1**.

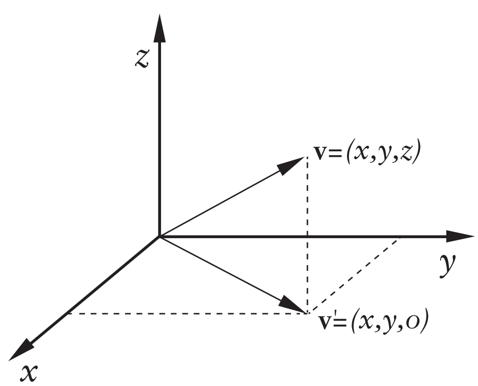


Figura 21.1: A projeção ortogonal no plano-xy.

Assim, temos a transformação linear

$$\begin{aligned} &T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ &T(x,y,z) = (x,y,0). \end{aligned}$$

Denotando por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$, temos que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= T(1,0,0) = (1,0,0) = 1\cdot\mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 + 0\cdot\mathbf{e}_3 \\ T(\mathbf{e}_2) &= T(0,1,0) = (0,1,0) = 0\cdot\mathbf{e}_1 + 1\cdot\mathbf{e}_2 + 0\cdot\mathbf{e}_3 \\ T(\mathbf{e}_3) &= T(0,0,1) = (0,0,0) = 0\cdot\mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 + 0\cdot\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Portanto, a matriz que representa a transformação T na base canônica é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como nos exemplos da Aula 20, vemos imediatamente algumas propriedades dessa projeção ortogonal.

1. A matriz A e, portanto, o operador T, não são inversíveis, pois $\det(A) = 0$.
2. Como $T(\mathbf{e}_3) = 0 \cdot \mathbf{e}_3$, então $\lambda_3 = 0$ é um autovalor de T com autovetor associado $\mathbf{e}_3$. Não é difícil ver que o autoespaço associado a $\lambda_3 = 0$ é exatamente o eixo-z, que é o espaço gerado por $\mathbf{e}_3$.
3. Como $T(\mathbf{e}_1) = 1 \cdot \mathbf{e}_1$ e $T(\mathbf{e}_2) = 1 \cdot \mathbf{e}_2$, então $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ é um autovalor de T de multiplicidade 2 com autovetores associados $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$. Não é difícil ver que o autoespaço associado a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ é exatamente o plano-xy, que é o espaço gerado pelos vetores canônicos $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$.
4. O operador T é diagonalizável com polinômio característico $p(x) = x(x-1)^2$.

Mais uma vez, chamamos a atenção do aluno para que compreenda bem a geometria desse exemplo, pois ela será recorrente nos exemplos seguintes. Vejamos outro exemplo de projeção ortogonal em um plano coordenado.

Exemplo 21.2.

Determine a matriz que representa a projeção ortogonal sobre o plano-yz, isto é, sobre o plano de equação cartesiana $x = 0$.

Solução:

Geometricamente, essa transformação é representada pela **Figura 21.2**.

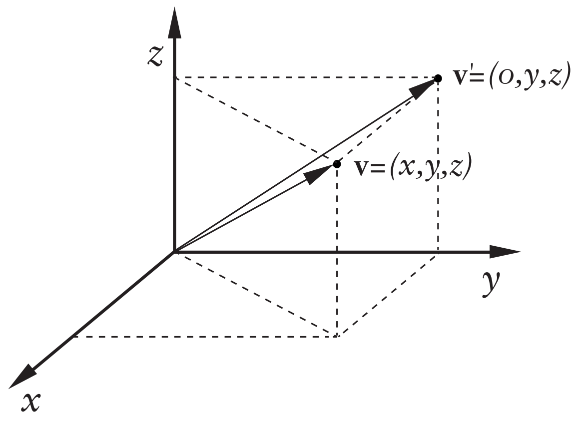


Figura 21.2: A projeção ortogonal no plano-*yz*.

Assim, temos a transformação linear

$$\begin{array}{l} T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) = (0,y,z). \end{array}$$

Se você entendeu bem a geometria do Exemplo **21.1**, então verá que, neste caso, temos

$$\begin{array}{l} T(\mathbf{e}_1) = T(1,0,0) = (0,0,0) = 0\cdot\mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 + 0\cdot\mathbf{e}_3 \\ T(\mathbf{e}_2) = T(0,1,0) = (0,1,0) = 0\cdot\mathbf{e}_1 + 1\cdot\mathbf{e}_2 + 0\cdot\mathbf{e}_3 \\ T(\mathbf{e}_3) = T(0,0,1) = (0,0,1) = 0\cdot\mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 + 1\cdot\mathbf{e}_3. \end{array}$$

Portanto, a matriz que representa a transformação T na base canônica é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seguem também as propriedades:

1. A matriz A e, portanto, o operador T, não são inversíveis, pois $\det(A) = 0$.

2. Como $T(\mathbf{e}_1) = 0\cdot\mathbf{e}_1$, então $\lambda_1 = 0$ é um autovalor de T com autovetor associado e_1. Não é difícil ver que o autoespaço associado a $\lambda_1 = 0$ é exatamente o eixo-x, que é o espaço gerado por $\mathbf{e}_1$.

3. Como $T(\mathbf{e}_2) = 1\cdot\mathbf{e}_2$ e $T(\mathbf{e}_3) = 1\cdot\mathbf{e}_3$, então $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ é um autovalor de T de multiplicidade 2 com autovetores associados $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$. Não é difícil ver que o autoespaço associado a $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ é exatamente o plano-yz, que é o espaço gerado pelos vetores canônicos $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$.

4. O operador T é diagonalizável com polinômio característico $p(x) = x(x-1)^2$.

O outro caso trivial, a projeção ortogonal sobre o plano-*xz*, é totalmente análogo aos exemplos anteriores e deixamos como exercício para você. Assim, estando bem compreendidos os dois exemplos anteriores, podemos tratar da projeção ortogonal sobre um plano qualquer de $\mathbb{R}^3$ passando pela origem.

Exemplo 21.3.

Descreva a projeção ortogonal sobre um plano π de $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem.

Solução:

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a projeção ortogonal sobre o plano π. Geometricamente, essa transformação é representada pela **Figura 21.3**.

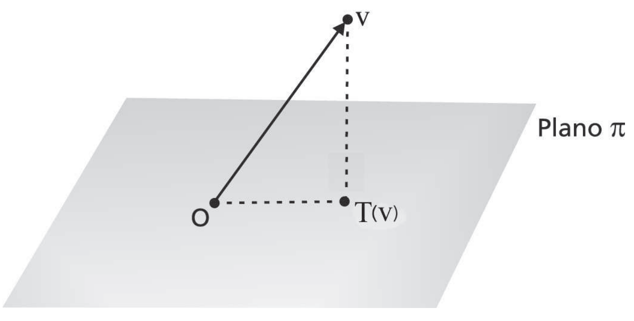


Figura 21.3: A projeção ortogonal no plano-π.

Vamos agora obter uma base ortonormal β de $\mathbb{R}^3$ de modo que a matriz que representa a transformação T nessa base seja da mesma forma que a matriz do Exemplo **21.1**. Como conhecemos a equação cartesiana de plano π, sabemos como obter um vetor normal a esse plano. Lembre: se π tem equação $ax+by+cz+d=0$, então o vetor $\mathbf{u} = (a,b,c)$ é um vetor normal ao plano π. Seja, então, $\mathbf{u}_3$ um vetor unitário normal ao plano π. Usando a equação cartesiana de π, como foi feito nas Aulas 17 e 18, facilmente determinamos vetores unitários $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ de modo que $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ seja uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Observe que os vetores unitários $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são ortogonais e pertencem ao plano π.

Veja a **Figura 21.4**.

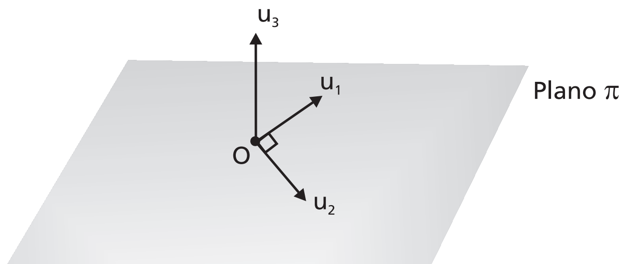


Figura 21.4: A base ortonormal $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

A projeção ortogonal de um vetor $\mathbf{v}$ sobre o plano π é dada por

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{v} & \mapsto & T\mathbf{v} = \dfrac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\, \mathbf{u}_1 + \dfrac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}\, \mathbf{u}_2, \end{array}$$

de onde vemos que T é uma transformação linear. Para obter a fórmula acima, observamos que desejamos um vetor $T\mathbf{v}$ da forma $T\mathbf{v} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2$ de modo que $\mathbf{v} - k_1\mathbf{u}_1 - k_2\mathbf{u}_2$ seja ortogonal a $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, como indica a **Figura 21.5**.

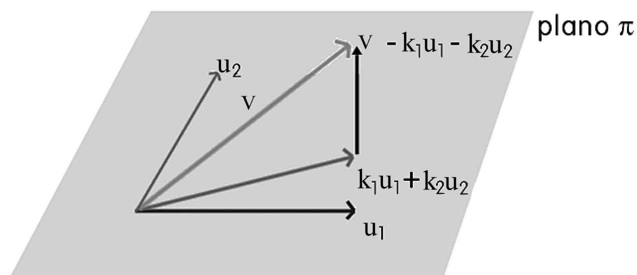


Figura 21.5: A projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ no plano π.

Assim, da ortogonalidade entre $\mathbf{v} - k_1\mathbf{u}_1 - k_2\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_1$, temos

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \langle \mathbf{v} - k_1\mathbf{u}_1 - k_2\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \\ & = & \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle - \langle k_1\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle - \langle k_2\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \\ & = & \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle - k_1 \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle - k_2 \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \\ & = & \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle - k_1 \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle , \end{array}$$

já que $\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$, o que nos dá

$$k_1 \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle$$

$$k_1 = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle} .$$

Analogamente, da ortogonalidade entre $\mathbf{v} - k_1\mathbf{u}_1 - k_2\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_2$ obtemos que

$$k_2 = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle},$$

e, portanto,

$$T\mathbf{v} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\, \mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}\, \mathbf{u}_2.$$

Usando o fato de $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ serem vetores unitários, isto é, $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = 1$, obtemos

$$T\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle\ \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle\ \mathbf{u}_2.$$

Portanto, vemos que

$$\begin{array}{l} T\mathbf{u}_1 = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle\ \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 = 1 \cdot \mathbf{u}_1 + 0 \cdot \mathbf{u}_2 + 0 \cdot \mathbf{u}_3 \\ T\mathbf{u}_2 = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle\ \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 = 0 \cdot \mathbf{u}_1 + 1 \cdot \mathbf{u}_2 + 0 \cdot \mathbf{u}_3 \\ T\mathbf{u}_3 = \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \rangle\ \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 \rangle\ \mathbf{u}_2 = 0 \cdot \mathbf{u}_1 + 0 \cdot \mathbf{u}_2 + 0 \cdot \mathbf{u}_3. \end{array}$$

Portanto, a matriz que representa a transformação T na base β é dada por

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que é exatamente da mesma forma que a matriz do Exemplo **21.1**. Se quisermos obter a matriz que representa T na base canônica, é só fazermos uma mudança de base. Se $\alpha = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$, então

$$[T]_\alpha = P[T]_\beta P^{-1},$$

onde P é a matriz mudança de base, da base β para a base α. Como $P = [\mathbf{u}_1\ \ \mathbf{u}_2\ \ \mathbf{u}_3]$, isto é, suas colunas são vetores ortonormais, então P é uma matriz ortogonal e, portanto, $P^{-1} = P^t$. Como nos exemplos **21.1** e **21.2**, temos as seguintes propriedades:

1. As matrizes $[T]_\alpha$ e $[T]_\beta$ e, portanto, o operador T, não são inversíveis, pois $\det[T]_\beta = 0$.

2. Como $T(\mathbf{u}_3) = 0 \cdot \mathbf{u}_3$, então $\lambda_3 = 0$ é um autovalor de T com autovetor associado $\mathbf{u}_3$. Não é difícil ver que o autoespaço associado a $\lambda_3 = 0$ é exatamente a reta pela origem ortogonal a π.

3. Como $T(\mathbf{u}_1) = 1 \cdot \mathbf{u}_1$ e $T(\mathbf{u}_2) = 1 \cdot \mathbf{u}_2$, então $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ é um autovalor de T com autovetores associados $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$. Não é difícil ver que o autoespaço associado a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ é exatamente o plano π.

4. O operador T é diagonalizável com polinômio característico $p(x) = x(x-1)^2$.

Cabe aqui, mais uma vez, ressaltar a analogia entre este terceiro exemplo e os dois primeiros. Isso se deve à escolha adequada de uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 21.1.

1. Determine a matriz da projeção ortogonal sobre o plano-*xz* com respeito à base canônica.
2. Determine a matriz da projeção ortogonal sobre o plano $x - z = 0$ com respeito à base canônica.
3. Determine a matriz da projeção ortogonal sobre o plano gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (1,1,0)$ e $\mathbf{v}_2 = (-1,1,1)$, com respeito à base canônica.

Aula 22

MATRIZES SIMÉTRICAS

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender o conceito de matriz simétrica;
2. aplicar os conceitos apresentados em exemplos importantes.

MATRIZES SIMÉTRICAS

Pré-requisitos
Aulas 6, 7, 8, 9, 10, 20 e 21

Em muitas aplicações da Álgebra Linear, as matrizes simétricas aparecem com maior frequência que qualquer outra classe de matrizes importantes. A teoria correspondente a essas matrizes é muito rica e elegante, e depende, de maneira especial, das teorias de diagonalização e ortogonalidade, vistas em aulas anteriores. Veremos, nesta aula, que a diagonalização de uma matriz simétrica é um fundamento essencial e necessário à discussão das formas quadráticas que estudaremos no próximo módulo.

Lembramos que todas as matrizes e vetores considerados têm somente elementos e componentes reais. Antes de começarmos a estudar a teoria de diagonalização de matrizes simétricas, convém lembrarmos de algumas definições que serão essenciais a este conteúdo.

Definição 22.1.

Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é *simétrica* se $A^t = A$, onde A^t representa a matriz transposta de A. Equivalentemente, a matriz $A = (a_{ij})$ é simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i,\ j$.

Observe, primeiramente, que o conceito de matriz simétrica se aplica apenas a matrizes quadradas. Observe também que os elementos da diagonal principal de uma matriz simétrica A podem assumir valores arbitrários; no entanto, elementos simétricos com respeito à diagonal principal têm o mesmo valor.

Exemplo 22.1.

As duas matrizes a seguir são simétricas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

No entanto, as matrizes abaixo não são simétricas:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

A matriz C não é simétrica porque ela não é matriz quadrada, e a matriz D não é simétrica porque $d_{31} = 1 \neq -1 = d_{13}$.

Vamos rever algumas propriedades das matrizes simétricas.

Teorema 22.1.

Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes simétricas. Então $A+B$ e cA, onde $c \in \mathbb{R}$, também são matrizes simétricas.

Vale observar que o produto de duas matrizes simétricas não é necessariamente uma matriz simétrica. Por exemplo, dadas as matrizes simétricas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

temos que a matriz produto

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 23 & 28 \end{pmatrix}$$

não é uma matriz simétrica, pois $(AB)_{21} = 23 \neq 17 = (AB)_{12}$.

Vamos rever o processo de diagonalização de matrizes, descrito nas Aulas 6 e 7, agora aplicado a um caso particular de uma matriz simétrica.

Exemplo 22.2.

Diagonalize, caso seja possível, a matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Solução:

O polinômio característico da matriz A é dado por:

$$\begin{aligned}
p(x) &= \det(xI_3 - A) \\
&= \begin{vmatrix} x-6 & 2 & 1 \\ 2 & x-6 & 1 \\ 1 & 1 & x-5 \end{vmatrix} \\
&= (x-6)\cdot\begin{vmatrix} x-6 & 1 \\ 1 & x-5 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & x-5 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ x-6 & 1 \end{vmatrix} \\
&= x^3 - 17x^2 + 90x - 144\,.
\end{aligned}$$

As possíveis raízes racionais de $p(x)$ são, obrigatoriamente, divisores de 144. Por inspeção, vemos que 3 é uma raiz e, depois, completando a fatoração de $p(x)$, descobrimos que 6 e 8 também são raízes. Assim,

$$p(x) = (x-3)(x-6)(x-8).$$

Assim, os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ e $\lambda_3 = 8$. Como a matriz A possui 3 autovalores distintos, já podemos concluir que ela é uma matriz diagonalizável.

Para o autovalor $\lambda_1 = 3$, temos que os seus autovetores associados, $\mathbf{v} = (x,y,z)$, satisfazem o sistema linear

$$(3I_3 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Um cálculo rotineiro, como foi visto na Aula 7, mostra que o autoespaço $E(3)$ é um subespaço de dimensão 1 e é gerado pelo vetor $\mathbf{v}_1 = (1,\ 1,\ 1)$. Analogamente, o autoespaço $E(6)$, associado ao autovalor $\lambda_2 = 6$, é o subespaço de dimensão 1 gerado pelo vetor $\mathbf{v}_2 = (-1,-1,2)$, e o autoespaço $E(8)$, associado ao autovalor $\lambda_3 = 8$, é o subespaço de dimensão 1 gerado pelo vetor $\mathbf{v}_3 = (-1,1,0)$. Esses três vetores, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$, formam uma base de $\mathbb{R}^3$ e poderiam ser usados para construir uma matriz P que diagonaliza a matriz A. É fácil ver que $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ é um conjunto ortogonal de $\mathbb{R}^3$ e que obteremos uma matriz ortogonal P se usarmos uma base ortonormal $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$, obtida de $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$, normalizando cada um dos vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Como um múltiplo não-nulo de um autovetor também é um autovetor, a nova base $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ também seria uma base de autovetores de $\mathbb{R}^3$. Os vetores assim obtidos são:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}); \\
&\mathbf{u}_2 = (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}) \quad \text{e} \\
&\mathbf{u}_3 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0).
\end{aligned}$$

Assim, as matrizes P e D são dadas por:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Sabemos, das Aulas 6 e 7, que $A = PDP^{-1}$. Agora, como as colunas de P formam vetores ortonormais, então, pelo Teorema **9.2** da Aula 9, P é uma matriz ortogonal, isto é, $P^{-1} = P^t$. Assim, temos também que $A = PDP^t$.

Vimos, no Exemplo **22.2**, que os autovetores da matriz simétrica A, associados a autovalores distintos, são ortogonais. Isso é uma propriedade geral, como mostra o próximo teorema.

Teorema 22.2.

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica; então qualquer conjunto de autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.

Demonstração

Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ autovetores da matriz A associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Assim, dados $\lambda_i \neq \lambda_j$, e observando que $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ e $A\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$, queremos mostrar que $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$. Para isto, observamos que

$$\begin{aligned} \lambda_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle &= \langle \lambda_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle \\ &= \langle A\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle \\ &= (A\mathbf{v}_i)^t \mathbf{v}_j \\ &= (\mathbf{v}_i^t A^t) \mathbf{v}_j \\ &= (\mathbf{v}_i^t A) \mathbf{v}_j, \quad \text{pois } A \text{ é simétrica} \\ &= \mathbf{v}_i^t (A\mathbf{v}_j) \\ &= \langle \mathbf{v}_i, A\mathbf{v}_j \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}_i, \lambda_j \mathbf{v}_j \rangle \\ &= \lambda_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $(\lambda_i - \lambda_j) \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$. Como $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$, segue que $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$, isto é, os vetores $\mathbf{v}_i$ e $\mathbf{v}_j$ são ortogonais. $\square$

O tipo de diagonalização que aparece no Exemplo **22.2** é muito importante na teoria das matrizes simétricas. Por isso, temos a seguinte definição.

Definição 22.2.

Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é dita *diagonalizável por matriz ortogonal* se existe uma matriz ortogonal P (lembre, $P^{-1} = P^t$) e uma matriz diagonal D tais que $A = PDP^t$.

Da discussão do Exemplo **22.2**, vimos que, para diagonalizar uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ utilizando uma matriz ortogonal P, foi preciso encontrar n autovetores linearmente independentes e ortogonais. A questão é: quando é que isso é possível de ser realizado? O próximo teorema caracteriza o tipo de matriz que pode ser diagonalizada por matriz ortogonal.

Teorema 22.3.

Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonalizável por matriz ortogonal se e somente se A é uma matriz simétrica.

Demonstração

Uma das direções é muito simples de ser feita. Suponha que A seja diagonalizável por matriz ortogonal, como na Definição **22.2**, então

$$A^t = (PDP^t)^t = (P^t)^t D^t P^t = PDP^t = A,$$

onde $(P^t)^t = P$ e $D^t = D$, já que D é uma matriz diagonal. Assim, concluímos que A é uma matriz simétrica.

A recíproca é muito mais complicada e será omitida nestas notas. A ideia básica desta parte da demonstração será apresentada na próxima aula e envolve um dos teoremas mais importantes da Álgebra Linear. □

Exemplo 22.3.

Determine se a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável por matriz ortogonal e, caso seja, determine uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tal que $A = PDP^t$.

Solução:

Como A é uma matriz simétrica, então, pelo Teorema 22.3, ela é diagonalizável por matriz ortogonal. Vamos, agora, realizar o cálculo de diagonalização de A.

Os autovalores da matriz A são as raízes do polinômio característico

$$\begin{aligned} p(x) &= \det(xI_3 - A) \\ &= \begin{vmatrix} x-3 & 2 & -4 \\ 2 & x-6 & -2 \\ -4 & -2 & x-3 \end{vmatrix} \\ &= x^3 - 12x^2 + 21x + 98\,. \end{aligned}$$

Observando, por inspeção, que $\lambda_1 = -2$ é uma raiz de $p(x)$, temos que

$$p(x) = (x+2)\,(x^2 - 14x + 49) = (x+2)\,(x-7)^2.$$

Assim, os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = -2$, com multiplicidade algébrica 1, e $\lambda_2 = 7$, com multiplicidade algébrica 2.

Para o autovalor $\lambda_1 = -2$, temos que os autovetores associados, $\mathbf{v} = (x, y, z)$, satisfazem o sistema linear

$$(-2I_3 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Completando os cálculos, temos que o autoespaço $E(-2)$ é um subespaço de dimensão 1 e é gerado pelo vetor $\mathbf{v}_1 = (-2, -1, 2)$.

Para o autovalor $\lambda_2 = 7$, como já sabemos que a matriz A é diagonalizável, o autoespaço $E(7)$ tem dimensão igual a 2. O fato interessante é que podemos construir uma base ortogonal de autovetores para esse subespaço $E(7)$. Os autovetores $\mathbf{v} = (x,\ y,\ z)$ associados ao autovalor $\lambda_2 = 7$ satisfazem o sistema linear

$$(7I_3 - A)v = 0.$$

Usando as técnicas usuais para a resolução de sistemas lineares, obtemos que:

$$\begin{aligned} E(7) &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid A\mathbf{v} = 7v\} \\ &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid (7I_3 - A)\mathbf{v} = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 2z = 0\}. \end{aligned}$$

Para obter uma base ortogonal de $E(7)$, observamos facilmente que $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1) \in E(7)$. O outro vetor $\mathbf{v}_3 = (a, b, c) \in E(7)$ deve satisfazer $2a + b - 2c = 0$ e ainda ser ortogonal a $\mathbf{v}_2$, isto é, $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = 0$, ou seja, $a + c = 0$.

Portanto, $\mathbf{v}_3 = (a,b,c)$ deve satisfazer o sistema linear

$$\begin{cases} 2a+b-2c=0 \\ a+c=0\,. \end{cases}$$

Completando os cálculos, obtemos, por exemplo, $\mathbf{v}_3 = (-1,4,1)$. Observe que, pelo Teorema 22.2, o autovetor $\mathbf{v}_1$ é ortogonal aos autovetores $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$, já que eles correspondem a autovalores distintos da matriz simétrica A. Assim, $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ é um conjunto ortogonal de autovetores da matriz A. Normalizando esses vetores, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = (-2/3,-1/3,2/3); \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = (1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}); \\ \mathbf{u}_3 &= \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = (-1/\sqrt{18},4/\sqrt{18},1/\sqrt{18}). \end{aligned}$$

Portanto, $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ é uma base ortonormal de autovetores de A. Com esses autovetores, obtemos a matriz P e com os autovalores, obtemos a matriz D:

$$P = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \\ -1/3 & 0 & 4/\sqrt{18} \\ 2/3 & 2/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \end{pmatrix}; \; D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

de modo que $A = PDP^t$.

Exercício 22.1.

1. Mostre que se A é uma matriz simétrica, então A^2 também é uma matriz simétrica.

2. Mostre que se A é uma matriz diagonalizável por matriz ortogonal então A^2 também é.

3. Determine uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tal que $A = PDP^t$, onde a matriz A é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aula 23

O Teorema Espectral

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender o significado do Teorema Espectral;
2. compreender a decomposição espectral de matrizes simétricas;
3. aplicar os conceitos apresentados em exemplos importantes.

O TEOREMA ESPECTRAL

Pré-requisitos
Aulas 5 e 22.

Nesta aula, continuaremos estudando as matrizes simétricas e faremos uma breve discussão do chamado Teorema Espectral para Matrizes Simétricas, mencionado na demonstração do Teorema 22.3 da aula passada. Os detalhes da demonstração desse importante teorema serão omitidos nestas notas. Uma versão simples do Teorema Espectral é apresentada a seguir.

Teorema 23.1 (Teorema Espectral para Matrizes Simétricas)**.**

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica (isto é, $A^t = A$). Então vale:

1. A matriz A possui n autovalores reais, contando suas multiplicidades.
2. A dimensão do autoespaço associado a cada autovalor λ é igual à multiplicidade de λ como raiz do polinômio característico de A, isto é, a multiplicidade geométrica de λ é igual à sua multiplicidade algébrica.
3. Os autoespaços são ortogonais entre si, isto é, os autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.
4. A matriz A é diagonalizável por matriz ortogonal, isto é, existem uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tal que $A = PDP^t$.

✍ Como já foi observado anteriormente, o polinômio característico de uma matriz A não possui necessariamente apenas raízes reais. Por exemplo, dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

seu polinômio característico, dado por $p(x) = x^2 + 1$, não possui raízes reais. Mas isso não acontece se A for uma matriz simétrica. O item 1 do Teorema Espectral afirma que o polinômio característico de uma matriz simétrica possui apenas raízes reais. A demonstração desse fato, embora simples, é bem trabalhosa e utiliza o Teorema Fundamental da Álgebra, que diz que todo polinômio de grau n com coeficientes reais possui n raízes reais ou complexas, contando suas multiplicidades. Na demonstração do Teorema Espectral mostra-se que as n raízes do polinômio característico são, de fato, raízes reais.

✍ Se A é uma matriz simétrica e tem n autovalores distintos, então pelo Teorema 5.2 da Aula 5 e pelo Teorema 22.2 da Aula 22, vemos que A é diagonalizável por matriz ortogonal.

✍ Se A é uma matriz simétrica e tem algum autovalor com multiplicidade algébrica maior que 1, ainda é verdade que podemos diagonalizá-la. Na verdade, podemos mostrar que se A é simétrica e tem um autovalor λ de multiplicidade k, então o autoespaço associado tem dimensão k. Isto significa que o sistema linear

$$(\lambda I_n - A)\mathbf{v} = 0$$

admite k soluções linearmente independentes, isto é, a matriz A tem k autovetores linearmente independentes associados ao autovalor λ. Usando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, podemos obter uma base ortonormal para este autoespaço. Obtemos assim um conjunto de k autovetores ortonormais associados ao autovalor λ. Como autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais, então, considerando o conjunto de todos os autovalores de A, obtemos uma base ortonormal de autovetores para $\mathbb{R}^n$. Consequentemente, A é uma matriz diagonalizável, e a matriz diagonalizadora P, formada pela base de autovetores de A, é uma matriz ortogonal.

Decomposição Espectral de uma Matriz Simétrica

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ uma base ortonormal de autovetores associados aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ da matriz A. Seja P a matriz ortogonal tendo esses autovetores como colunas e D a matriz diagonal tal que $A = PDP^t$. Então

$$\begin{aligned}
A &= PDP^t \\
&= [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \cdots\ \mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \cdots\ \mathbf{u}_n]^t \\
&= [\lambda_1\mathbf{u}_1\ \lambda_2\mathbf{u}_2\ \cdots\ \lambda_n\mathbf{u}_n]\,[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \cdots\ \mathbf{u}_n]^t \\
&= \lambda_1\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^t + \lambda_2\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^t + \cdots \lambda_n\mathbf{u}_n\mathbf{u}_n^t\,.
\end{aligned}$$

Esta representação é chamada uma *decomposição espectral de A.*

Exemplo 23.1.

Obtenha uma decomposição espectral da matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Solução:

Sendo A uma matriz simétrica, essa decomposição existe. O polinômio característico de A é dado por

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & \det(xI_2 - A) \\ & = & x^2 - 11x + 24 \\ & = & (x-8)(x-3)\,. \end{array}$$

Então os autovalores são $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 3$, e ainda podemos obter os respectivos autovetores $\mathbf{u}_1 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ e $\mathbf{u}_2 = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$. Assim, temos que

$$\begin{array}{rcl} A & = & PDP^t \\ \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \end{array}$$

Denotando a matriz $P = [\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2]$, temos, pela decomposição espectral, que:

$$A = 8\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^t + 3\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^t.$$

Para verificar essa decomposição da matriz A, observe que:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^t & = & \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^t & = & \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \end{array}$$

e, finalmente,

$$8\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^t + 3\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^t = \begin{pmatrix} \frac{32}{5} & \frac{16}{5} \\ \frac{16}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-6}{5} \\ \frac{-6}{5} & \frac{12}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = A.$$

PROCESSO DE DIAGONALIZAÇÃO DE UMA MATRIZ SIMÉTRICA $A \in M_n(\mathbb{R})$

1º Passo: Obtenha o polinômio característico da matriz A,

$$p(x) = \det(xI_n - A).$$

2º Passo: Encontre as raízes do polinômio característico de A. Elas são todas reais e existem exatamente n delas, contando suas multiplicidades.

3º Passo: Para cada autovalor λ da matriz A, de multiplicidade algébrica k, determine seu autoespaço associado

$$E(\lambda) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid (\lambda I_n - A)\mathbf{v} = 0\},$$

que é um subespaço vetorial de dimensão k. Para cada $E(\lambda)$ assim obtido, determine uma base ortonormal que consistirá de k autovetores. Se desejar, pode utilizar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. A reunião dessas bases determina uma base ortonormal de autovetores para $\mathbb{R}^n$.

4º Passo: Seja P a matriz cujas colunas são os n autovetores da base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ obtida no terceiro passo. Portanto, P é uma matriz ortogonal. Seja D a matriz diagonal cuja diagonal principal é formada pelos n autovalores da matriz A, tomados na mesma ordem de seus autovetores correspondentes na matriz P. Temos, então,

$$A = PDP^t.$$

Exemplo 23.2.

Aplique o processo de diagonalização acima à matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e obtenha sua decomposição espectral.

Solução:

Observe, inicialmente, que A é uma matriz simétrica e, portanto, se aplica o processo de diagonalização acima. Não é difícil determinar que o polinômio característico da matriz A é dado por

$$p(x) = \det(xI_3 - A) = (x+2)^2(x-4),$$

de modo que os autovalores de A são:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = -2 \quad \text{com multiplicidade algébrica} \quad 2, \quad \text{e} \\ \lambda_2 = 4 \quad \text{com multiplicidade algébrica} \quad 1. \end{array}$$

O autoespaço associado a $\lambda_1 = -2$ é dado por

$$\begin{array}{rcl} E(-2) & = & \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid (A+2I_3)\mathbf{v} = 0\} \\ & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}. \end{array}$$

Para escolhermos uma base ortogonal de $E(-2)$, podemos usar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt a partir de uma base qualquer de $E(-2)$ ou podemos tentar obter diretamente dois vetores ortonormais de $E(-2)$, como já foi feito anteriormente. Faremos o cálculo diretamente. Da equação $x+y+z=0$ podemos ver facilmente que $\mathbf{v}_1 = (1,0,-1) \in E(-2)$. O outro vetor, $\mathbf{v}_2 = (a,b,c) \in E(-2)$, deve satisfazer $a+b+c=0$ e ainda ser ortogonal a $\mathbf{v}_1$, isto é, $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = 0$, ou seja, $a-c=0$. Portanto, $\mathbf{v}_2 = (a,b,c)$ deve satisfazer o sistema linear

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ a-c = 0. \end{cases}$$

Completando os cálculos, obtemos, por exemplo, $\mathbf{v}_2 = (1,-2,1)$. Normalizando esses dois vetores, obtemos:

$$\begin{array}{l} \mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = (1/\sqrt{2},\, 0,\, -1/\sqrt{2}) \quad \text{e} \\ \mathbf{u}_2 = \dfrac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6},\, 1/\sqrt{6}). \end{array}$$

Assim, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ forma uma base ortonormal do autoespaço $E(-2)$.

Por outro lado, o autoespaço associado a $\lambda_2 = 4$ é dado por

$$\begin{aligned} E(4) &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid (4I_3 - A)\mathbf{v} = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ e } y = z\}. \end{aligned}$$

É fácil ver que $\mathbf{v}_3 = (1,1,1) \in E(4)$. Normalizando esse vetor, obtemos que

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = (1/\sqrt{3},\, 1/\sqrt{3},\, 1/\sqrt{3})$$

representa uma base ortonormal do autoespaço $E(4)$. Como A é matriz simétrica, os autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais e, assim, $\mathbf{u}_3$ é ortogonal a $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$. Portanto, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de A. Com esses autovetores, obtemos a matriz P e, com os autovalores obtemos a matriz D:

$$P = [\mathbf{u}_1\ \ \mathbf{u}_2\ \ \mathbf{u}_3] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

de modo que $A = PDP^t$. A decomposição espectral da matriz A é dada por:

$$A = -2\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^t - 2\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^t + 4\mathbf{u}_3\mathbf{u}_3^t,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} A &= -2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Resumo

É muito importante que você entenda bem o significado deste Teorema Espectral. Lembre do que aconteceu em exemplos vistos anteriormente, em que a matriz considerada não era simétrica. Estudamos exemplos de matrizes não-simétricas com autovalores repetidos que eram diagonalizáveis e outros exemplos de matrizes não-simétricas que não eram diagonalizáveis. Há algumas diferenças marcantes entre os casos simétrico e não-simétrico que tentaremos resumir agora.

Se A for uma matriz não-simétrica, então nem todas as raízes de seu polinômio característico precisam ser números reais, o que é necessário no caso de a matriz A ser simétrica. Se A for uma matriz não-simétrica e todas as raízes de seu polinômio característico forem números reais, então ainda é possível que A não seja diagonalizável. É o caso em que um autovalor λ de multiplicidade algébrica k não possui k autovetores linearmente independentes, isto é, quando o autoespaço correspondente tem dimensão menor que k, ou ainda, quando a multiplicidade geométrica do autovalor é menor que sua multiplicidade algébrica. Agora, quando A é uma matriz simétrica, além de todos os autovalores serem reais, são iguais a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica de cada autovalor.

E, por fim, diferente do que ocorre no caso de matriz simétrica, se a matriz A é não-simétrica, então autovetores associados a autovalores distintos não precisam ser ortogonais. Estude e analise, com a ajuda de seu tutor, exemplos já vistos em aulas anteriores em que ocorrem as diferenças descritas aqui.

Exercício 23.1.

1. Em cada caso, aplique o processo de diagonalização à matriz A, determinando matrizes ortogonal P e diagonal D, tais que $A = PDP^t$.

   a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

   b. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   c. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

2. Sejam $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Verifique que $\lambda = 5$ é um autovalor de A e que $\mathbf{v}$ é um autovetor de A. Em seguida obtenha matrizes ortogonal P e diagonal D, tais que $A = PDP^t$.

Aula 24

Operadores Autoadjuntos

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender o conceito de operador autoadjunto;
2. aplicar os conceitos apresentados em exemplos importantes.

OPERADORES AUTOADJUNTOS

Pré-requisitos
Aulas 8 e 20 a 23.

Nesta aula vamos definir os operadores lineares $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ associados às matrizes simétricas e estudar suas propriedades. Como estaremos trabalhando sempre com bases ortonormais, é de suma importância que o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ esteja munido de um produto interno, o qual estaremos sempre supondo que seja o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$.

Definição 24.1.

Um operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é denominado *autoadjunto* se satisfaz

$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, T(\mathbf{v})\rangle \text{ para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

O resultado que segue relaciona os operadores autoadjuntos com as matrizes simétricas.

Teorema 24.1.

Um operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é autoadjunto se e somente se a matriz A, que representa T com respeito a qualquer base ortonormal α de $\mathbb{R}^n$, é uma matriz simétrica.

Demonstração

Com respeito à base ortonormal α de $\mathbb{R}^n$, temos que $T(\mathbf{u}) = Au$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Assim, para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\langle T\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = (A\mathbf{u})^t\mathbf{v} = \mathbf{u}^t A^t \mathbf{v}$$

e

$$\langle \mathbf{u}, T\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}^t A\mathbf{v},$$

onde A^t é a transposta da matriz A. Assim,

$$\begin{aligned} T \text{ é autoadjunto} &\Leftrightarrow \langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, T(\mathbf{v})\rangle \text{ para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle \text{ para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow \mathbf{u}^t A^t \mathbf{v} = \mathbf{u}^t A \mathbf{v} \text{ para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow A^t = A \\ &\Leftrightarrow A \text{ é uma matriz simétrica .} \end{aligned}$$

□

É importante salientar que não existe uma relação tão simples entre o operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e sua representação matricial $A = [T]_\alpha$ quando a base α não for ortonormal (veja a observação ao final do Exemplo **24.1**).

O Teorema 24.1 também fornece um critério prático para determinar se um dado operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é autoadjunto. Basta considerar *qualquer* base ortonormal α de $\mathbb{R}^n$ e verificar se a matriz $A = [T]_\alpha$ é uma matriz simétrica.

Exemplo 24.1.

Determine se o operador linear

$$\begin{aligned} &T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &T(x,y) = (x,0) \end{aligned}$$

é autoadjunto.

Solução:

Vimos, no Exemplo 20.1 da Aula 20, que T é a projeção ortogonal sobre o eixo-x. Considerando a base canônica $\alpha = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, vimos que a matriz que representa T nesta base é dada por

$$A = [T]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como a base canônica é ortonormal e a matriz A é simétrica, então, pelo Teorema 24.1, o operador T é autoadjunto.

Vejamos o que acontece quando escolhemos um base β de $\mathbb{R}^2$ que não é ortonormal. Considere a base $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ dada por

$$\mathbf{u}_1 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \text{ e } \mathbf{u}_2 = (0,1).$$

Está claro que esta base não é ortonormal, e ainda temos que

$$\begin{aligned} &T\mathbf{u}_1 = T(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = (\sqrt{2}/2, 0) = 1 \cdot \mathbf{u}_1 + (-\sqrt{2}/2) \cdot \mathbf{u}_2 \\ &T\mathbf{u}_2 = T(0,1) = (0,0) = 0 \cdot \mathbf{u}_1 + 0 \cdot \mathbf{u}_2. \end{aligned}$$

Daí, segue que a matriz que representa T na base β é dada por

$$B = [T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que esta matriz não é simétrica, mas também a base β não é ortonormal, o que não contradiz o Teorema 24.1.

Exemplo 24.2.

Considere os operadores lineares

$$T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T_1(x,y) = (x,2y)$$

e

$$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T_2(x,y) = (y,x).$$

Verifique que T_1 e T_2 são operadores autoadjuntos e verifique se a composição $T_1 \circ T_2$ também é operador autoadjunto.

Solução:

Considerando a base canônica de $\mathbb{R}^2$, verificamos que as matrizes A_1 e A_2 que representam respectivamente, os operadores T_1 e T_2 nesta base, são dadas por

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como essas duas matrizes são matrizes simétricas, concluímos, pelo Teorema 24.1, que T_1 e T_2 são operadores autoadjuntos. No entanto, o operador obtido pela composição

$$T_1 \circ T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (T_1 \circ T_2)(x,y) = (y,2x)$$

é representado, na base canônica, pela matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

que não é uma matriz simétrica. Assim, outra vez pelo Teorema 24.1, a composição $T_1 \circ T_2$ não é um operador autoadjunto. Daí, concluímos que a composição de operadores autoadjuntos não é, necessariamente, autoadjunto.

O próximo teorema segue imediatamente dos resultados sobre matrizes simétricas estudados nas Aulas 22 e 23.

Teorema 24.2.

Seja $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador autoadjunto. Então

1. Autovetores correspondentes a autovalores distintos de T são ortogonais, isto é, se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ são k autovetores associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, então $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ são ortogonais.
2. O operador T possui n autovalores reais, contando suas multiplicidades.
3. A dimensão do autoespaço associado a cada autovalor λ é igual à multiplicidade de λ como raiz do polinômio característico de T, isto é, a multiplicidade geométrica de cada autovalor λ é igual à sua multiplicidade algébrica.
4. Os autoespaços de T são ortogonais entre si.
5. Existe uma base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de T.

A última afirmação do Teorema 24.2 também é conhecida como Teorema Espectral para Operadores AutoAdjuntos Reais e diz, simplesmente, que estes operadores são diagonalizáveis.

Exemplo 24.3.

Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x,y,z) = (3x, 2y+z, y+2z).$$

a. Verifique que T é um operador autoadjunto.

b. Determine os autovalores e os autovetores de T e verifique que T é diagonalizável.

Solução:

a. Considerando a base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, temos que

$$\begin{aligned} T\mathbf{e}_1 &= T(1,0,0) = (3,0,0), \\ T\mathbf{e}_2 &= T(0,1,0) = (0,2,1), \\ T\mathbf{e}_3 &= T(0,0,1) = (0,1,2). \end{aligned}$$

Assim, a matriz que representa o operador linear T na base canônica é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observando que A é uma matriz simétrica, temos, pelo Teorema 24.1, que T é um operador autoadjunto.

b. O polinômio característico do operador T é dado por

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & \det(xI_3 - A) \\ & = & \begin{vmatrix} x-3 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & -1 \\ 0 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \\ & = & (x-3)^2(x-1)\,. \end{array}$$

Assim, os autovalores de T são $\lambda_1 = 3$, com multiplicidade algébrica 2, e $\lambda_2 = 1$ com multiplicidade algébrica 1. Não é difícil obter que o autoespaço $E(3)$, associado a $\lambda_1 = 3$, é dado por

$$\begin{array}{rcl} E(3) & = & \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid T\mathbf{v} = 3\mathbf{v}\} \\ & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z \text{ e } x \text{ arbitrário}\}\,. \end{array}$$

Portanto, uma base ortonormal de $E(3)$ é dada por

$$\mathbf{u}_1 = (1,0,0) \text{ e } \mathbf{u}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Analogamente, o autoespaço $E(1)$, associado a $\lambda_2 = 1$, é dado por

$$\begin{array}{rcl} E(1) & = & \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \ T\mathbf{v} = \mathbf{v}\} \\ & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x = 0 \text{ e } y = -z\}\,, \end{array}$$

e uma base ortonormal de $E(1)$ é dada pelo vetor $\mathbf{u}_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$. Consequentemente, $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T e, nesta base, T é representado pela matriz diagonal

$$B = [T]_\beta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, T é um operador diagonalizável.

Exemplo 24.4.

Determine valores de $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por

$$T(x,y,z) = (x + 2ay + 2z, 4x - 5y - bz, 2x - 4y + z),$$

seja autoadjunto. Determine, também, uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T e a matriz que representa T nesta base.

Solução:

Considerando a base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, temos que

$$\begin{aligned}
T\mathbf{e}_1 &= T(1,0,0) = (1,4,2) = 1\cdot\mathbf{e}_1 + 4\cdot\mathbf{e}_2 + 2\cdot\mathbf{e}_3,\\
T\mathbf{e}_2 &= T(0,1,0) = (2a,-5,-4) = 2a\cdot\mathbf{e}_1 + (-5)\cdot\mathbf{e}_2 + (-4)\cdot\mathbf{e}_3,\\
T\mathbf{e}_3 &= T(0,0,1) = (2,-b,1) = 2\cdot\mathbf{e}_1 + (-b)\cdot\mathbf{e}_2 + 1\cdot\mathbf{e}_3.
\end{aligned}$$

Assim, a matriz que representa o operador linear T na base canônica é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 2 \\ 4 & -5 & -b \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para que T seja um operador autoadjunto, é necessário que a matriz A seja simétrica, isto é, que $A^t = A$. Para isso, é preciso que $2a = 4$ e $-b = -4$, ou seja, que

$$a = 2 \text{ e } b = 4.$$

Assim, obtemos a matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

garantindo que o operador T é autoadjunto. Não é difícil verificar que o polinômio característico de T é dado por

$$\begin{aligned}
p(x) &= \det(xI_3 - A)\\
&= (x+9)(x-3)^2.
\end{aligned}$$

Os autoespaços correspondentes são dados por

$$\begin{aligned}
E(-9) &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid T\mathbf{v} = -9\mathbf{v}\}\\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \text{ e } y = 2z\},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} E(3) &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid T\mathbf{v} = 3\mathbf{v}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+2y+z=0\}. \end{aligned}$$

Uma base ortonormal de $E(-9)$ é dada pelo vetor $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}})$, enquanto uma base ortonormal de $E(3)$ é dada pelos vetores $\mathbf{u}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $\mathbf{u}_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}})$. Consequentemente, $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T e, nessa base ordenada, T é representado pela matriz diagonal

$$B = [T]_\beta = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Observe que T é um operador diagonalizável.

Exemplo 24.5.

Dados os vetores $\mathbf{u} = (4,\ 4,\ -2), \mathbf{v} = (4,\ -2,\ 4)$ e $\mathbf{w} = (1,\ -2,\ -2)$, seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$T\mathbf{u} = (10\,,-2\,,-2),\ \ T\mathbf{v} = (-2,10,-2)\ \text{ e }\ T\mathbf{w} = (1,1,-5).$$

Verifique que T é um operador autoadjunto.

Solução:

É fácil ver que $\{\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}\}$ é uma base ortogonal, pois

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle &= 4\cdot 4 + 4\cdot(-2) + (-2)\cdot 4 = 0; \\ \langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle &= 4\cdot 1 + 4\cdot(-2) + (-2)\cdot(-2) = 0; \\ \langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle &= 4\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) + 4\cdot(-2) = 0\,. \end{aligned}$$

Assim, os vetores normalizados

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{u}}{||\mathbf{u}||} = (2/3\,,\ 2/3\,,-1/3), \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} = (2/3\,,-1/3\,,\ 2/3) \quad \text{e} \\ \mathbf{u}_3 &= \frac{\mathbf{w}}{||\mathbf{w}||} = (1/3\,,-2/3\,,-2/3) \end{aligned}$$

formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Como $||\mathbf{u}|| = ||\mathbf{v}|| = 6$ e $||\mathbf{w}|| = 3$, temos

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{u}_1) &= T\left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\right) = T\left(\frac{1}{6}\mathbf{u}\right) = \frac{1}{6}T(\mathbf{u}) = \frac{1}{6}(10,-2,-2) = \\
&= \left(\frac{5}{3},\frac{-1}{3},\frac{-1}{3}\right); \\
T(\mathbf{u}_2) &= T\left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right) = T\left(\frac{1}{6}\mathbf{v}\right) = \frac{1}{6}T(\mathbf{v}) = \frac{1}{6}(-2,10,-2) = \\
&= \left(\frac{-1}{3},\frac{5}{3},\frac{-1}{3}\right); \\
T(\mathbf{u}_3) &= T\left(\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}\right) = T\left(\frac{1}{3}\mathbf{w}\right) = \frac{1}{3}T(\mathbf{w}) = \frac{1}{3}(1,1,-5) = \\
&= \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{-5}{3}\right).
\end{aligned}
$$

Agora, não é difícil ver que os vetores $T(\mathbf{u}_1), T(\mathbf{u}_2)$ e $T(\mathbf{u}_3)$ se expressam em função da base $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ como:

$$
\begin{aligned}
&T(\mathbf{u}_1) = (5/3,-1/3,-1/3) = 1\cdot\mathbf{u}_1 + 1\cdot\mathbf{u}_2 + 1\cdot\mathbf{u}_3; \\
&T(\mathbf{u}_2) = (-1/3,5/3,-1/3) = 1\cdot\mathbf{u}_1 + (-1)\cdot\mathbf{u}_2 + (-1)\cdot\mathbf{u}_3; \\
&T(\mathbf{u}_3) = (1/3,1/3,-5/3) = 1\cdot\mathbf{u}_1 + (-1)\cdot\mathbf{u}_2 + 1\cdot\mathbf{u}_3.
\end{aligned}
$$

Portanto, a matriz que representa o operador T com respeito à base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é dada por

$$
B = [T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Como B é uma matriz simétrica, concluímos, pelo Teorema 24.1, que o operador T é autoadjunto. Observe que, neste exemplo, usamos uma base ortonormal que não é a base canônica nem é uma base de autovetores.

Autoavaliação

É de suma importância que você reveja e entenda muito bem a relação que existe entre as matrizes simétricas, estudadas nas aulas anteriores, e os operadores autoadjuntos vistos nesta aula. Compare os conceitos e estude os exemplos. Em caso de dúvidas, não hesite em consultar o seu tutor.

Exercício 24.1.

1. Verifique que o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dado por

$$T(x,y,z) = (2x+y+z,\ x+2y-z,\ x-y+2z),$$

é autoadjunto.

2. Determine uma base ortonormal de autovetores do operador T dado no exercício anterior.

Aula 25

FORMAS BILINEARES

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender o conceito de forma bilinear;
2. aplicar os conceitos apresentados em casos particulares.

FORMAS BILINEARES

Pré-requisito
Aula 22.

Nesta aula vamos introduzir um conceito que generaliza a noção de aplicação linear num espaço vetorial. Mais especificamente, vamos desenvolver o conceito de forma bilinear, que dá origem às formas quadráticas que serão estudadas na próxima aula. Veremos a definição de formas bilineares e estudaremos algumas de suas propriedades, principalmente sua relação com as matrizes, o que constitui o aspecto mais importante para fins práticos.

Definição 25.1.

Seja V um espaço vetorial real. Uma *forma bilinear* em V é uma aplicação

$$\begin{array}{rcl} B : V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (\mathrm{u}, \mathrm{v}) & \mapsto & B(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \end{array}$$

que é linear em cada uma das duas variáveis **u** e **v**, isto é, que satisfaz:

i. para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{l} B(\mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ B(a\mathbf{u}, \mathbf{v}) = aB(\mathbf{u}, \mathbf{v}); \end{array}$$

ii. para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{l} B(\mathbf{u}, \mathbf{w}+\mathbf{v}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ B(\mathbf{u}, a\mathbf{v}) = aB(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{array}$$

Exemplo 25.1.

Seja F o *produto escalar* em $V = \mathbb{R}^n$, isto é, dados $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, considere a aplicação

$$\begin{array}{rcl} F : V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \mapsto & F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n . \end{array}$$

Verifique que F é uma forma bilinear em $\mathbb{R}^n$.

Solução:

De fato, considerando outro vetor $\mathbf{w} = (w_1\,,\ w_2\,,\ldots,\ w_n) \in \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}+a\mathbf{w},\,\mathbf{v}) &= B((u_1+aw_1,\ u_2+aw_2\,,\ldots,\ u_n+aw_n)\,,\ (v_1\,,\ v_2\,,\ldots,\ v_n)) \\ &= (u_1+aw_1)v_1+(u_2+aw_2)v_2+\cdots+(u_n+aw_n)v_n \\ &= (u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n)+a\,(w_1v_1+w_2v_2+\cdots+w_nv_n) \\ &= F(\mathbf{u}\,,\ \mathbf{v})+aF(\mathbf{w},\ \mathbf{v})\,, \end{aligned}$$

o que mostra que $F(\mathbf{u}\,,\ \mathbf{v})$ é uma transformação linear na primeira variável $\mathbf{u}$. Um argumento análogo, deixado a cargo do aluno, mostra que $F(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$ também é uma transformação linear na segunda variável $\mathbf{v}$. Assim, podemos concluir que $F(\mathbf{u}\,,\ \mathbf{v})$ é uma aplicação bilinear de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 25.2.

Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mostre que podemos associar à matriz A uma forma bilinear $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} B((x_1,\ x_2, x_3),\ (y_1,\ y_2, y_3)) &= (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1y_1+4x_2y_1+2x_2y_2+3x_3y_3 \end{aligned}$$

Solução:

Observe que para todo par de vetores $\mathbf{u}\,,\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

podemos reescrever

$$B(\mathbf{u}\,,\ \mathbf{v}) = \mathbf{u}^t A\mathbf{v},$$

onde $\mathbf{u}^t$ é a matriz transposta de $\mathbf{u}$. Assim, a bilinearidade da aplicação $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ decorre facilmente das propriedades do produto e da soma de matrizes.

Este exemplo é facilmente generalizado.

Teorema 25.1.

Seja $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, isto é, uma matriz de ordem n. Podemos associar à matriz A uma forma bilinear $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(\mathbf{u}\,,\ \mathbf{v}) = \mathbf{u}^t A\mathbf{v},$$

onde $\mathbf{u}\,,\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Observe que, reescrevendo os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ na forma

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ \text{ e } \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

então

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}\,,\ \mathbf{v}) &= \mathbf{u}^t A\mathbf{v} \\ &= (x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{nn}x_ny_n \\ &= \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j\,. \end{aligned}$$

Sejam V um espaço vetorial real, $F : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear em V, e $\alpha = \{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2, \ldots,\ \mathbf{e}_n\}$ uma base de V. Sejam $\mathbf{u}\,,\ \mathbf{v} \in V$ com

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \cdots + u_n\mathbf{e}_n$$

e

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n.$$

Então,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= F(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \cdots + u_n\mathbf{e}_n,\ v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n) \\ &= u_1v_1F(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) + u_1v_2F(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) + \cdots + u_nv_nF(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_n) \\ &= \sum_{i,\, j=1}^{n} u_iv_jF(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)\,. \end{aligned}$$

Assim, a forma bilinear F fica completamente determinada pelos n^2 valores $F(e_i,\, e_j)$.

Definição 25.2.

A matriz $A = (a_{ij})$, com $a_{ij} = F(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, é chamada de *representação matricial* da forma bilinear F com relação à base α, ou, simplesmente, de *matriz* de F com relação a α.
Esta matriz representa F no sentido que

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} u_i v_j F(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = [\mathbf{u}]_\alpha^t A [\mathbf{v}]_\alpha$$

para todo par de vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Como de costume, $[\mathbf{u}]_\alpha$ denota o vetor das coordenadas de $\mathbf{u}$ com respeito à base α.

Exemplo 25.3.

Seja a forma bilinear $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 - 5x_2y_2,$$

para todo $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Considere $\alpha = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1, 0), (1, 1)\}$ outra base de $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz de F com respeito a essas bases.

Solução:

Primeiramente, façamos o cálculo da matriz de F com respeito à base canônica:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) &= F((1, 0), (1, 0)) = 1 \\ F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &= F((1, 0), (0, 1)) = -1; \\ F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) &= F((0, 1), (1, 0)) = 3; \\ F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) &= F((0, 1), (0, 1)) = -5. \end{aligned}$$

Portanto, temos que a matriz de F na base canônica é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Para a matriz de F na base β, temos

$$\begin{aligned} F((1, 0), (1, 0)) &= 1; \\ F((1, 0), (1, 1)) &= 0; \\ F((1, 1), (1, 0)) &= 4; \\ F((1, 1), (1, 1)) &= -2. \end{aligned}$$

Portanto, temos que a matriz de F na base $\beta = \{(1, 0), (1, 1)\}$ é

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Um problema interessante é saber qual a relação entre as matrizes A e B que representam uma mesma forma bilinear F em duas bases α e β, respectivamente.

No caso do exemplo anterior, se P representa a matriz mudança de base, da base β para a base α, temos

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= P^t A P. \end{aligned}$$

De um modo geral, temos o seguinte teorema:

Teorema 25.2.

Seja F uma forma bilinear de um espaço vetorial V. Se A é a matriz de F numa base α e B é matriz de F numa base β de V, então

$$B = P^t A P,$$

onde P é a matriz mudança de base, da base β para a base α.

Definição 25.3.

Uma forma bilinear F no espaço vetorial V é denominada *simétrica* se

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

para todo par de vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Teorema 25.3.

Seja F uma forma bilinear no espaço vetorial V e A a matriz que representa F numa base α de V. Então F é uma forma bilinear simétrica se e somente se A é uma matriz simétrica.

Demonstração

Por F ser uma forma bilinear em V, temos que

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}) &= \mathbf{u}^t A\mathbf{v} \\ &= (\mathbf{u}^t A\mathbf{v})^t, \;\; \text{pois } \; \mathbf{u}^t A\mathbf{v} \; \text{ é um escalar} \\ &= \mathbf{v}^t A^t \mathbf{u}\,. \end{aligned}$$

Se, ainda, F for uma forma bilinear simétrica, então

$$\mathbf{v}^t A^t \mathbf{u} = F(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}\,,\,\mathbf{u}) = \mathbf{v}^t A\mathbf{u}$$

para todo $\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v} \in V$. Portanto, temos

$$A^t = A,$$

isto é, a matriz A é simétrica.

Reciprocamente, se A é uma matriz simétrica (isto é, $A^t = A$), então a forma bilinear F também é simétrica, pois

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}) &= \mathbf{u}^t A\mathbf{v} \\ &= (\mathbf{u}^t A\mathbf{v})^t, \;\; \text{pois } \; \mathbf{u}^t A\mathbf{v} \; \text{ é um escalar} \\ &= \mathbf{v}^t A^t \mathbf{u} \\ &= \mathbf{v}^t A\mathbf{u}\,, \;\; \text{pois } \;\; A^t = A \\ &= F(\mathbf{v}\,,\,\mathbf{u}) \end{aligned}$$

para todo par de vetores $\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v} \in V$.

Autoavaliação

Você deve ter compreendido que o conceito de forma bilinear é uma generalização do conceito de transformação linear já bastante estudado. É de extrema importância rever todos os conceitos e tentar resolver os exercícios propostos. Caso surjam dificuldades, consulte as notas de aula ou peça ajuda ao seu tutor. Os conceitos desta aula ainda serão bastante utilizados. Por isso, não deixe de fazer uma boa revisão de matrizes simétricas.

Exercício 25.1.

1. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Verifique que a aplicação $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^t A \mathbf{v}$ é uma forma bilinear.

2. Seja $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, o produto escalar em $\mathbb{R}^3$.

   a. Determine a matriz A que representa a forma bilinear F com respeito à base canônica $\alpha \subset \mathbb{R}^3$.

   b. Determine a matriz B que representa a forma bilinear F com respeito à base
   $\beta = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, 2, 1)\}$.

3. Seja a forma bilinear $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2,$$

   para todo $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

   a. Determine a matriz A que representa F com respeito à base $\alpha = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

   b. Determine a matriz B que representa F com respeito à base $\beta = \{(2, 1), (1, -1)\}$.

   c. Determine a matriz mudança de base P, da base β para a base α, e verifique que $B = P^t A P$.

Aula 26

FORMAS QUADRÁTICAS

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender o conceito de forma quadrática;
2. aplicar os conceitos apresentados em casos particulares.

FORMAS QUADRÁTICAS

Pré-requisitos
Aulas 22 e 25.

As formas bilineares, vistas na aula anterior, dão origem às formas quadráticas que serão estudadas nesta aula. As formas quadráticas ocorrem com grande destaque em aplicações da Álgebra Linear à Engenharia, como em critérios para projetos, em problemas de otimização e em processamento de sinais. Elas também ocorrem na Física, em descrições de energia potencial e energia cinética; em Economia, nas funções de utilidade; e, também, em Estatística. Em todas essas situações é muito importante o conhecimento do sinal (positivo ou negativo) que a forma quadrática pode assumir, assim como o conhecimento de seus autovalores associados. Uma parte muito importante da base matemática para o estudo das formas quadráticas segue facilmente do nosso estudo prévio sobre matrizes simétricas.

Definição 26.1.

Seja V um espaço vetorial real. Uma aplicação $q: V \to \mathbb{R}$ é chamada de *forma quadrática* se existe uma forma bilinear simétrica $F: V \times V \to \mathbb{R}$ tal que $q(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v},\, \mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in V$.

Seja A a matriz que representa a forma bilinear F na base $\alpha \subset V$. Dizemos que matriz A é a *representação matricial* da forma quadrática q com respeito a essa mesma base $\alpha \subset V$. Como a forma bilinear F é simétrica, então, pelo Teorema 25.3, da Aula 25, a matriz A é uma matriz simétrica. Com respeito à base α, denotamos $A = (a_{ij})$ e $\mathbf{v} = (x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n) \in V$; então

$$\begin{aligned} q(\mathbf{v}) &= F(\mathbf{v},\, \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{v}^t A \mathbf{v} \\ &= (x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \end{aligned}$$

E agora, sendo A simétrica, vale que $a_{ij} = a_{ji}$. Portanto,

$$q(\mathbf{v}) = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{i<j}^{n} a_{ij}x_ix_j\,. \quad (26.1)$$

Observe ainda que, se A for uma matriz diagonal, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, então teremos

$$\sum_{i<j}^{n} a_{ij}x_ix_j = 0,$$

o que nos dá

$$q(\mathbf{v}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2\,,$$

que será denominada *representação diagonal* da forma quadrática q. Veremos, mais à frente, que toda forma quadrática sempre admite uma representação diagonal.

Exemplo 26.1.

Seja a forma quadrática $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$q(x\,,\,y) = x^2 - 10xy + y^2.$$

Determine a matriz A que representa a forma quadrática q com respeito à base canônica.

Solução:

Como A é uma matriz simétrica, podemos denotar

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix};$$

temos, então,

$$\begin{aligned} q(x\,,\,y) &= (x\;\;y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= ax^2 + 2bxy + cy^2\,. \end{aligned}$$

Então, vale que

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = x^2 - 10xy + y^2,$$

de onde concluímos que

$$a = 1, \quad b = -5 \;\text{ e }\; c = 1,$$

obtendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que q é a forma quadrática associada à forma bilinear

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}) &= (x_1\;\;x_2)\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1y_1 - 5x_2y_1 - 5x_1y_2 + x_2y_2\,, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{u} = (x_1,\, x_2)\,,\ \mathbf{v} = (y_1,\, y_2) \in \mathbb{R}^2$, com respeito à base canônica.

Exemplo 26.2.

Seja $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a forma quadrática dada por

$$q(\mathbf{v}) = q(x_1,\, x_2,\, x_3) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + 8x_2x_3\,,$$

onde $\mathbf{v} = (x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Determinar a matriz A que representa a forma quadrática q com respeito à base canônica e expresse a forma quadrática na forma matricial $q(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^tA\mathbf{v}$.

Solução:

Os coeficientes de x_1^2, x_2^2 e x_3^2 formam a diagonal principal da matriz A, como indica a equação (26.1). Como A é matriz simétrica, o coeficiente de x_ix_j, para $i \neq j$, é a soma dos coeficientes iguais $a_{ij} = a_{ji}$, como indica outra vez a equação (26.1). Portanto,

$$a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}\ \text{(coeficiente de } x_ix_j).$$

Assim, é fácil ver que

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

E, finalmente,

$$q(x_1,\, x_2,\, x_3) = (x_1\;\;x_2\;\;x_3)\begin{pmatrix} 5 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Queremos agora estudar o efeito de uma mudança de base sobre uma forma quadrática. Assim, sejam $q : V \to \mathbb{R}$ uma forma quadrática e α e β duas bases do espaço vetorial V. Seja P a matriz mudança de base, da base β para a base α. Se A é a matriz que representa a forma quadrática q na base α e B é a matriz de q na base β, então, pelo Teorema 25.2, da Aula 25, sabemos que

$$B = P^t A P.$$

Observe que, se P é uma matriz ortogonal que diagonaliza a matriz A, então $B = P^t A P = P^{-1} A P$ é uma matriz diagonal. Nesse caso, a matriz P também é chamada *mudança de variáveis*. Usaremos esses fatos no próximo exemplo.

Exemplo 26.3.

Determine uma mudança de variável P que transforma a forma quadrática $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2$$

na base canônica, em uma forma diagonal. Obtenha, também, a expressão dessa forma diagonal.

Solução:

Observando os coeficientes de q, vemos que a matriz A que representa q na base canônica é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizar a forma quadrática q é equivalente a diagonalizar a matriz simétrica A. Usando os procedimentos já conhecidos sobre diagonalização de matrizes simétricas, os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -7$. A matriz P será obtida a partir de uma base ortonormal de autovetores. Efetuando os cálculos, que é um exercício para você, obtemos

$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 3$, e

$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = -7$.

Como $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ forma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, então

$$P = [\mathbf{u}_1\ \ \mathbf{u}_2] = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

e a matriz diagonal correspondente será

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix},$$

onde $D = P^t AP$.

A forma diagonal de q é dada por

$$\begin{aligned} q(y_1, y_2) &= (y_1 \;\; y_2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= 3y_1^2 - 7y_2^2 , \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

e

$$\mathbf{v} = P\mathbf{w}, \text{ ou } \mathbf{w} = P^t\mathbf{v}$$

é a mudança de variáveis.

Veja que

$$\begin{aligned} q(\mathbf{v}) &= q(x_1 , x_2) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2 \\ &= (x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{v}^t A\mathbf{v} \\ &= (P\mathbf{w})^t A (P\mathbf{w}) \\ &= \mathbf{w}^t (P^t AP)\mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^t D\mathbf{w} \\ &= (y_1 \;\; y_2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= 3y_1^2 - 7y_2^2 \\ &= q(y_1, y_2) = q(\mathbf{w}) . \end{aligned}$$

Observe que a forma diagonal

$$q(y_1, y_2) = 3y_1^2 - 7y_2^2$$

não contém o termo cruzado y_1y_2.

Este exemplo anterior ilustra o teorema a seguir. A parte essencial de sua demonstração foi apresentada nos cálculos do Exemplo 26.3 e consiste na mudança de variáveis efetuada.

Teorema 26.1 (Teorema dos Eixos Principais)**.**

Seja $q : V \to \mathbb{R}$ uma forma quadrática. Então, sempre existe uma mudança de variáveis P que transforma a forma quadrática $q(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^t A\mathbf{v}$

na forma diagonal $q(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^t D\mathbf{w}$, onde $\mathbf{v} = P\mathbf{w}$ e $D = P^t AP$.

O nome Teorema dos Eixos Principais segue do fato de que as colunas de P são chamadas *eixos principais* da forma quadrática q. Uma interpretação geométrica deste teorema será vista nas próximas aulas, mais precisamente no estudo da classificação de curvas cônicas e na classificação de superfícies quádricas.

Exemplo 26.4.

Determine uma mudança de variável P que transforme a forma quadrática $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$$

na base canônica, em uma forma diagonal. Obtenha também a expressão dessa forma diagonal.

Solução:

Observando os coeficientes de q, vemos que a matriz A que representa q na base canônica é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Procedendo à diagonalização da matriz simétrica A, deixamos os detalhes dos cálculos como um exercício para você, obtemos os autovalores $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -1$. A matriz mudança de variável P será obtida a partir de uma base ortonormal de autovetores. Efetuando os cálculos, obtemos:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \text{ autovetor associado ao autovalor } \lambda_1 = 5;$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \text{ autovetor associado ao autovalor } \lambda_2 = 2;$$

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \text{ autovetor associado ao autovalor } \lambda_3 = -1.$$

Como $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ forma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, então

$$P = [\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2 \;\; \mathbf{u}_3] = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

é uma matriz ortogonal e a matriz diagonal correspondente será

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

onde $D = P^t AP$.

A forma diagonal de q é dada por

$$\begin{aligned} q(y_1, y_2, y_3) &= (y_1 \;\; y_2 \;\; y_3) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= 5y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2, \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\text{ e }\; \mathbf{w} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

e

$$\mathbf{v} = P\mathbf{w}, \;\text{ ou }\; \mathbf{w} = P^t\mathbf{v}$$

é a mudança de variáveis requerida.

Observe, mais uma vez, que a forma diagonal

$$q(y_1, y_2, y_3) = 5y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$$

não contém os termos cruzados y_1y_2, y_1y_3 e y_2y_3, isto é, os termos y_iy_j com $i \neq j$.

Aula 27

CÔNICAS

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender o conceito de cônica;
2. aplicar os conceitos apresentados em casos particulares.

CÔNICAS

Pré-requisitos
Aulas 22, 25 e 26.

Nesta aula estudaremos algumas figuras importantes do $\mathbb{R}^2$, ou seja, determinados conjuntos de pontos do plano cujas coordenadas satisfazem certas propriedades. Mais precisamente, consideraremos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas (x, y) satisfazem uma equação do tipo

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

onde a, b, c, d, e e f são constantes reais (com pelo menos um dos números a, b ou c diferente de zero). A ideia toda é simplificar e classificar equações desse tipo e, para isso, usaremos os resultados sobre diagonalização de formas quadráticas apresentados na aula anterior.

Definição 27.1.

Uma *cônica* é um conjunto de pontos do $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas (x, y), em relação à base canônica, satisfazem uma equação do tipo

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{27.1}$$

onde os coeficientes a, b, c, d, e e f são números reais e pelo menos um dos números a, b ou c é não-nulo.

Observe que a equação (27.1) contém uma forma quadrática,

$$q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

uma forma linear,

$$\ell(x, y) = dx + ey,$$

e o termo constante f.

Exemplo 27.1.

Identifique o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação

$$x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

Solução:

Comparando a equação

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

com a equação (27.1), vemos que os valores dos coeficientes são $a = c = 1$, $b = d = e = 0$ e $f = -4$, e, portanto, representa uma cônica. Reescrevendo a equação na forma

$$x^2 + y^2 = 4,$$

identificamos os pontos (x, y) como pertencendo à circunferência de centro (0, 0) e raio 2, como ilustra a **Figura 27.1.**

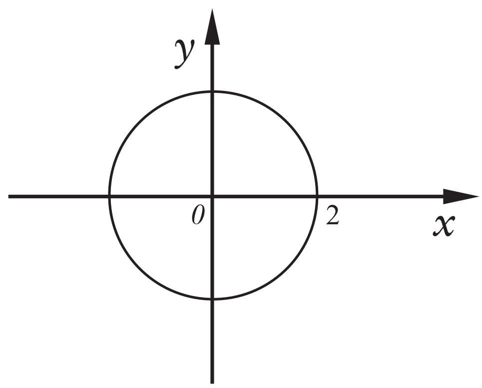


Figura 27.1: A circunferência $x^2 + y^2 = 4$.

Exemplo 27.2.

Identifique o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação

$$y^2 - kx = 0,$$

onde k é um número real não-nulo.

Solução:

Comparando a equação

$$y^2 - kx = 0$$

com a equação (27.1), vemos que os valores dos coeficientes são $c = 1$, $a = b = e = f = 0$ e $d = -k \neq 0$, e, portanto, representa uma cônica. Reescrevendo a equação na forma

$$y^2 = kx,$$

identificamos os pontos (x, y) como pertencendo a uma parábola com eixo coincidindo com o eixo-y, como ilustra a **Figura 27.2**.

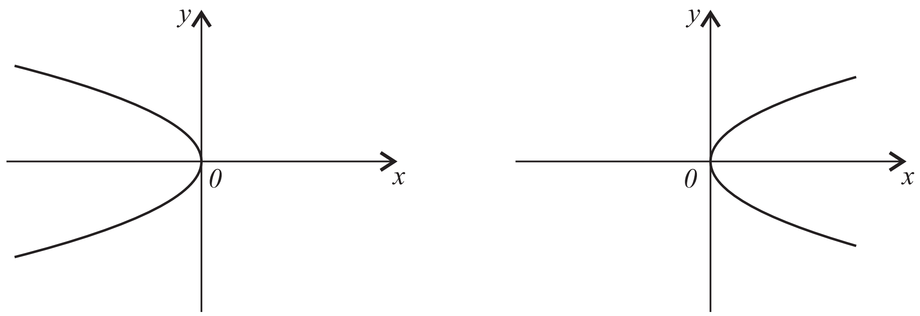


Figura 27.2: A parábola $y^2 = kx$.

Exemplo 27.3.

Identifique o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$.

Solução:

Comparando a equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

com a equação (27.1), vemos que ela também representa uma cônica. Reescrevendo a equação na forma

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2},$$

temos

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

o que representa um par de retas concorrentes que passa pela origem, como ilustra a **Figura 27.3**.

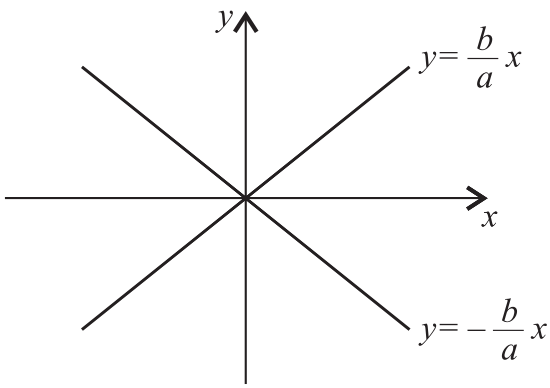


Figura 27.3: As retas $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Os próximos exemplos mostram como procedemos para simplificar uma equação de uma cônica.

Exemplo 27.4.

Identifique a cônica representada pela equação

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0.$$

Solução:

Precisamos, inicialmente, eliminar o termo misto $(-4xy)$; para isto, realizamos diagonalização da forma quadrática correspondente,

$$q(x\,,\,y) = 5x^2 - 4xy + 8y^2.$$

Escrevemos a equação $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ na forma matricial

$$\mathbf{v}^t A\mathbf{v} = 36,$$

com

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ e } A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Lembre-se de que, na Aula 26, a matriz A é a matriz simétrica que representa a forma quadrática $q(x\,,\,y) = 5x^2 - 4xy + 8y^2$ com respeito à base canônica. Não é difícil ver que os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 9$, e os autovetores normalizados são

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \text{ autovetor associado ao autovalor } \lambda_1 = 4$$

e

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \text{ autovetor associado ao autovalor } \lambda_2 = 9.$$

Como $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ forma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, então

$$P = [\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2] = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

é uma matriz ortogonal que diagonaliza a matriz A e a matriz diagonal correspondente será

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Temos que $D = P^t A P$.

A forma diagonal de q é dada por

$$\begin{aligned} q(x_1, y_1) &= (x_1 \;\; y_1) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= 4x_1^2 + 9y_1^2, \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

com

$$\mathbf{v} = P\mathbf{v}_1, \;\; \text{ou} \;\; \mathbf{v}_1 = P^t\mathbf{v}.$$

Portanto, a equação da cônica pode ser reescrita como

$$q(x_1, y_1) = 36,$$

ou ainda,

$$4x_1^2 + 9y_1^2 = 36,$$

o que nos dá a equação

$$\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1,$$

que representa uma elipse de semieixo maior 3 e semieixo menor 2, como ilustra a **Figura 27.4.**

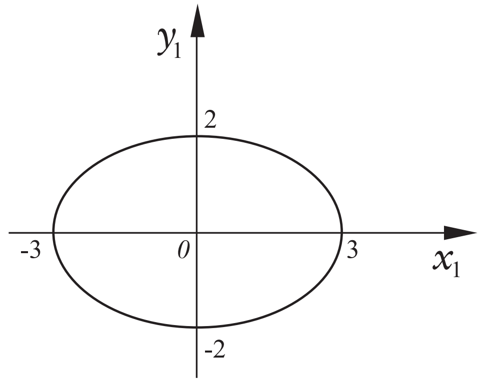


Figura 27.4: A elipse $\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}=1$.

Exemplo 27.5.

Identifique a cônica representada pela equação

$$2x^2+4xy+2y^2+4\sqrt{2}x+12\sqrt{2}y-8=0.$$

Solução:

Observe que neste exemplo a forma linear $\ell(x,\ y)=dx+ey=4\sqrt{2}x+12\sqrt{2}y$ é não-nula. Reescrevendo a cônica na forma matricial, obtemos

$$\mathbf{v}^t A\mathbf{v}+B\mathbf{v}-8=0, \tag{27.2}$$

onde

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2,$$

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

e

$$B=(4\sqrt{2}\ \ 12\sqrt{2}).$$

A matriz A é a matriz simétrica que representa a forma quadrática $q(x,\ y)=2x^2+4xy+2y^2$ com respeito à base canônica. Não é difícil ver (exercício para o aluno) que os autovalores da matriz A são $\lambda_1=4$ e $\lambda_2=0$, e os autovetores normalizados são

$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},\ \text{autovetor associado ao autovalor}\ \lambda_1=4,$$

e

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ autovetor associado ao autovalor } \lambda_2 = 0.$$

Como $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ forma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, então

$$P = [\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

é uma matriz ortogonal que diagonaliza a matriz A, e a matriz diagonal correspondente será

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E, também, $D = P^t A P$.

A forma diagonal de q é dada por

$$\begin{aligned} q(x_1, y_1) &= (x_1 \;\; y_1) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= 4x_1^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\mathbf{v}^t A \mathbf{v} = 4x_1^2,$$

onde

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

com

$$\mathbf{v} = P\mathbf{v}_1, \text{ ou } \mathbf{v}_1 = P^t \mathbf{v}.$$

Como $\det(P) = 1$, observe que $\mathbf{v} = P\mathbf{v}_1$ é uma rotação. A forma linear se transforma em

$$\begin{aligned} B\mathbf{v} &= B(P\mathbf{v}_1) \\ &= BP\mathbf{v}_1 \\ &= (4\sqrt{2} \;\; 12\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= (16 \;\; 8) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= 16x_1 + 8y_1 . \end{aligned}$$

Substituindo

$$\mathbf{v}^t A \mathbf{v} = 4x_1^2 \text{ e } B\mathbf{v} = 16x_1 + 8y_1$$

em (27.2), obtemos

$$4x_1^2 + 16x_1 + 8y_1 - 8 = 0,$$

ou, simplificando,

$$x_1^2 + 4x_1 + 2y_1 - 2 = 0. \tag{27.3}$$

Completando o quadrado na variável x_1,

$$x_1^2 + 4x_1 = (x_1 + 2)^2 - 4.$$

E, substituindo em (27.3), obtemos

$$(x_1 + 2)^2 - 4 + 2y_1 - 2 = 0,$$

ou

$$(x_1 + 2)^2 + 2(y_1 - 3) = 0. \tag{27.4}$$

Essa equação já é uma forma bem mais simples da cônica inicial e já se pode identificar a equação de uma parábola, mas ela ainda pode ser mais simplificada. Realizando a mudança de variáveis em (27.4) dada por

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 2 \\ y_2 = y_1 - 3, \end{cases}$$

que representa uma translação no $\mathbb{R}^2$, obtemos

$$x_2^2 = -2y_2,$$

que representa a cônica inicial aos novos eixos-x_2y_2. Nessa forma, identificamos facilmente a equação de uma parábola, como ilustra a **Figura 27.5**.

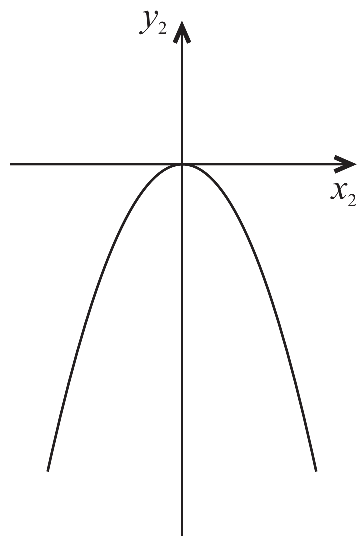


Figura 27.5: A parábola $x_2^2 = -2y_2$.

PROCEDIMENTO PARA SIMPLIFICAR A EQUAÇÃO DE UMA CÔNICA

Seja a cônica Γ dada pela equação

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0.$$

Podemos reescrevê-la na forma matricial,

$$\mathbf{v}^t A\mathbf{v}+B\mathbf{v}+f=0,$$

onde

$$\begin{aligned} q(x\,,\,y) &= ax^2+bxy+cy^2 \\ &= (x\ \ y)\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{v}^t A\mathbf{v}\,, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \ell(x,\,y) &= dx+ey \\ &= (d\ \ e)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= B\mathbf{v}\,, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}, \\ B &= (d\ \ e) \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A ideia principal do procedimento a seguir consiste em realizar uma rotação nos eixos-xy, de modo a eliminar o termo cruzado bxy.

1^o Passo: Encontrar uma matriz ortogonal $P=[\mathbf{u}_1\ \ \mathbf{u}_2]$ que diagonalize A. Lembre que as colunas de P formam uma base $\{\mathbf{u}_1,\,\mathbf{u}_2\}$ ortonormal de autovetores da matriz A para o $\mathbb{R}^2$. Assim,

$$D=P^tAP \ \text{ com } \ D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

onde λ_1 e λ_2 são os autovalores da matriz A associados aos autovetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, respectivamente.

2^o Passo: Permutar as colunas de P, caso seja necessário, de modo que se tenha $\det(P) = 1$. Isso garante que a transformação ortogonal

$$\mathbf{v} = P\mathbf{v}_1, \text{ com } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

seja uma rotação no plano.

3^o Passo: Obter a equação que representa a cônica Γ no novo sistema de eixos-x_2y_2. Para isso, observe que

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= \mathbf{v}^t A\mathbf{v} \\ &= (P\mathbf{v}_1)^t A(P\mathbf{v}_1) \, ; \quad \text{onde } \mathbf{v} = P\mathbf{v}_1 \\ &= \mathbf{v}_1^t (P^t AP)\mathbf{v}_1 \\ &= \mathbf{v}_1^t D\mathbf{v}_1 \\ &= (x_1 \;\; y_1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 , \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} dx + ey &= B\mathbf{v} \\ &= B(P\mathbf{v}_1) \, ; \;\; \text{onde } \mathbf{v} = P\mathbf{v}_1 \\ &= (BP)\mathbf{v}_1 \, ; \;\; \text{onde } \; BP = (d_1 \;\; e_1) \\ &= (d_1 \;\; e_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= d_1x_1 + e_1y_1 \, . \end{aligned}$$

Assim, a equação $\mathbf{v}^t A\mathbf{v} + B\mathbf{v} + f = 0$ se transforma em

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + d_1x_1 + e_1y_1 + f = 0,$$

que é uma equação que representa a cônica Γ e não contém termos cruzados (em xy).

Vamos fazer uma breve análise dessa equação.

1. Considere o caso em que os autovalores são não-nulos: $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$. Neste caso, podemos completar os quadrados

nas variáveis x_1 e y_1, obtendo

$$\begin{aligned}&\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 y_1^2+d_1x_1+e_1y_1+f=\\&=(\lambda_1 x_1^2+d_1x_1)+(\lambda_2 y_1^2+e_1y_1)\\&=\lambda_1 x_2^2+\lambda_2 y_2^2+F\,,\end{aligned}$$

com $F\in\mathbb{R}$. Assim, a equação

$$\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 y_1^2+d_1x_1+e_1y_1+f=0$$

é transformada em

$$\lambda_1 x_2^2+\lambda_2 y_2^2+F=0.$$

Note que

a. Se $\lambda_1>0,\lambda_2>0$, então a cônica Γ será uma elipse, caso $F<0$; ou um ponto ($(x_2\,,\,y_2)=(0\,,\,0)$), caso $F=0$; ou o conjunto vazio, caso $F>0$.

b. Se $\lambda_1<0,\lambda_2<0$, então a cônica Γ será uma elipse, caso $F>0$; ou um ponto ($(x_2\,,\,y_2)=(0\,,\,0)$), caso $F=0$; ou o conjunto vazio, caso $F<0$.

c. Se $\lambda_1<0<\lambda_2$, então a cônica Γ será uma hipérbole, caso $F\neq 0$; ou um par de retas concorrentes, caso $F=0$.

2. Considere o caso de um autovalor nulo, digamos, $\lambda_1=0$ e $\lambda_2\neq 0$ (necessariamente $\lambda_2\neq 0$). Novamente, completando o quadrado na variável y_1, obtemos

$$\begin{aligned}\lambda_2 y_1^2+d_1x_1+e_1y_1+f&=(\lambda_2 y_1^2+e_1y_1)+d_1x_1+f\\&=\lambda_2 y_2^2+d_1x_2+F\,.\end{aligned}$$

Assim, a equação inicial da cônica Γ fica transformada em

$$\lambda_2 y_2^2+d_1x_2+F=0.$$

Note que

a. Se $d_1\neq 0$, então Γ será uma parábola.

b. Se $d_1=0$, então Γ será um par de retas paralelas, caso $\lambda_2\cdot F<0$; ou uma única reta, caso $F=0$; ou o conjunto vazio, caso $\lambda_2\cdot F>0$.

3. O caso $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_1 \neq 0$ é análogo ao anterior.

   É importante observar que nunca poderemos ter $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, pois estamos supondo que a forma quadrática associada é não-nula.

   Veja, também, que

$$\begin{aligned}\lambda_1 \cdot \lambda_2 &= \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} \\ &= \det\ D \\ &= \det\ A \\ &= \begin{vmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{vmatrix} \\ &= ac - \frac{b^2}{4}\ .\end{aligned}$$

   Portanto, $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ tem o mesmo sinal de $ac - \dfrac{b^2}{4}$, que por sua vez tem o mesmo sinal de $4ac - b^2$. Assim, podemos refazer a análise anterior em função do *discriminante* $b^2 - 4ac$ da forma quadrática.

Teorema 27.1.

Dada a cônica de equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, então esta cônica representa:

a. uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio, caso

$$b^2 - 4ac < 0;$$

b. uma parábola, duas retas paralelas ou uma única reta, caso

$$b^2 - 4ac = 0;$$

c. uma hipérbole ou duas retas concorrentes, caso

$$b^2 - 4ac > 0.$$

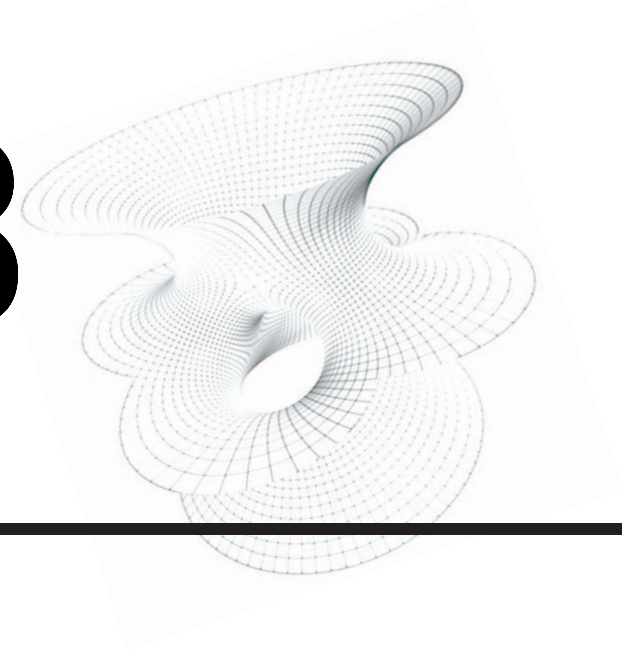
Autoavaliação

Esta aula constitui uma excelente aplicação dos conceitos vistos nas aulas anteriores. No entanto, pressupomos que você tenha alguns conhecimentos acerca das equações de cônicas tradicionais, como elipses, parábolas e hipérboles. Conhecendo essas equações e com o conhecimento adquirido das últimas aulas, você não deve encontrar muita dificuldade para compreender os conceitos apresentados aqui. No entanto, como esta aula reúne muitos conhecimentos matemáticos, você deve ser persistente na leitura dos exemplos e do procedimento apresentado, sempre recorrendo ao tutor no caso de encontrar uma dificuldade maior. Na próxima aula, trataremos de equações semelhantes, agora com três variáveis ao invés de duas, mas o procedimento será exatamente o mesmo, ou seja, diagonalizar uma forma quadrática e completar quadrados até simplificar a equação ao máximo.

Exercício 27.1.

1. Dada a cônica de equação $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 8y + 14 = 0$, aplique o procedimento apresentado nesta aula, simplificando a equação ao máximo e identificando a cônica apresentada.

Aula 28



QUÁDRICAS

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender o conceito generalizado de uma quádrica;
2. aplicar os conceitos apresentados em casos particulares.

QUÁDRICAS

Pré-requisitos
Aulas 22, 25, 26 e 27.

Esta aula é uma continuação da aula anterior sobre cônicas; nela estudaremos as superfícies quádricas no espaço $\mathbb{R}^3$. Mais precisamente, vamos estudar alguns conjuntos de $\mathbb{R}^3$ cujas coordenadas, com respeito à base canônica, satisfazem uma equação do tipo

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + p = 0.$$

Usando novamente os resultados sobre diagonalização de formas quadráticas, iremos simplificar essa equação e descrever as superfícies mais simples que ela pode representar.

Definição 28.1.

Uma *superfície quádrica*, ou, simplesmente, uma *quádrica*, é o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^3$ cujas coordenadas (x, y, z) satisfazem uma equação da forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + p = 0, \quad (28.1)$$

onde os coeficientes $a, b, c, ..., k, p$ são números reais e pelo menos um dos coeficientes a, b, c, d, e, f é não-nulo.

Observe que a equação (28.1) contém uma forma quadrática não-nula em $\mathbb{R}^3$,

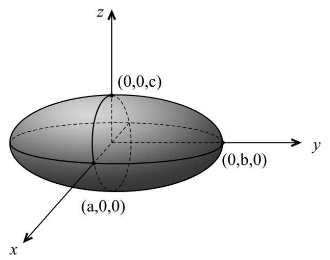
$$q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz,$$

uma forma linear em $\mathbb{R}^3$,

$$\ell(x, y, z) = gx + hy + kz,$$

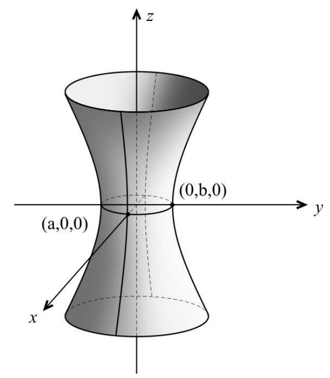
e o termo constante p.

Apresentaremos a seguir os exemplos mais comuns de superfícies quádricas.



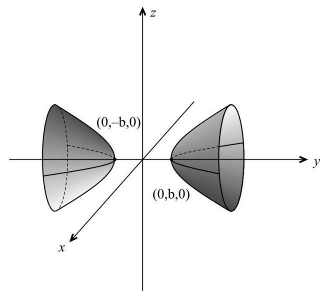
a. Elipsóide

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right).$$



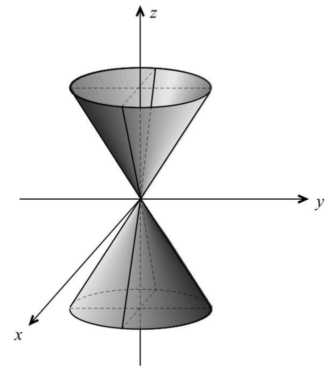
b. Hiperbolóide de uma folha

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\right).$$



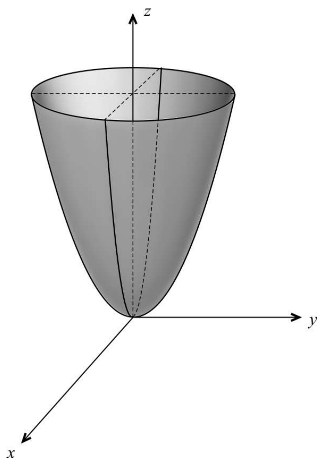
c. Hiperbolóide de duas folhas

$$\left(-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\right).$$



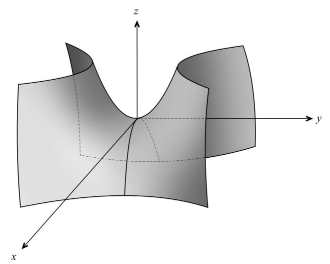
d. Cone elíptico

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\right).$$



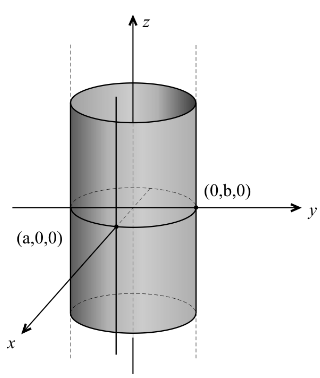
e. Parabolóide elíptico

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z\right).$$



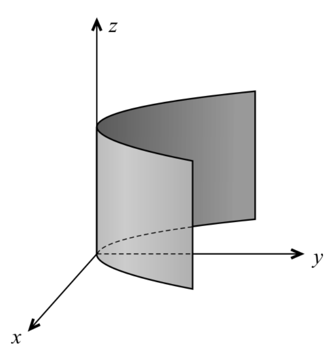
f. Parabolóide hiperbólico

$$\left(-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z\right).$$



g. Cilindro elíptico

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right).$$



h. Cilindro parabólico

$$(y=ax^2).$$

Figura 28.1: Gráficos de Quádricas.

Observe que a equação (28.1) também pode representar um conjunto vazio (por exemplo, $x^2+y^2+1=0$), um único ponto (por exemplo, $x^2+y^2+(z-1)^2=0$), um plano (por exemplo, $z^2=0$), dois planos paralelos (por exemplo, $z^2=4$) ou dois planos secantes (por exemplo, $xz=0$). Nestes casos, as quádricas são ditas *degeneradas*.

Assim como foi feito para as cônicas, mostraremos que através de uma mudança de coordenadas podemos reduzir a equação (28.1) de modo que a quádrica seja identificada como sendo de um dos tipos descritos. Esse problema é o de *classificar a quádrica*.

Sempre que a quádrica for representada por uma equação que não contém termos em xy, xz, yz, x, y e z, dizemos que a equação está na *forma canônica* e que a quádrica está na *posição canônica*. A presença de termos cruzados da forma xy, xz ou yz na equação (28.1) indica que a quádrica sofreu uma rotação com respeito à posição canônica, e a presença de termos da forma x, y ou z indica que a quádrica sofreu uma translação com respeito à posição canônica.

Como foi feito no caso das cônicas, vamos desenvolver um procedimento para representar uma quádrica na forma canônica. A ideia principal do procedimento consiste em obter um novo sistema de coordenadas $x_1y_1z_1$ de modo que não apareçam os termos cruzados x_1y_1, x_1z_1 e y_1z_1.

Vamos, primeiramente, expressar a equação (28.1) na forma matricial. Temos,

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz \\ &= (x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{v}^t A \mathbf{v}, \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ \text{ e } \ A = \begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix}.$$

Observe também que

$$\begin{aligned}\ell(x,\,y,\,z) &= gx+hy+kz\\ &= (g \;\; h \;\; k)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\\ &= B\mathbf{v},\end{aligned}$$

onde

$$B=(g \;\; h \;\; k).$$

Substituindo $q(x,\,y,\,z)=\mathbf{v}^tA\mathbf{v}$ e $\ell(x,\,y,\,z)=B\mathbf{v}$ em (28.1), obtemos a forma vetorial da quádrica,

$$\mathbf{v}^tA\mathbf{v}+B\mathbf{v}+p=0. \tag{28.2}$$

Procedimento para Simplificar a Equação de uma Quadrática

Seja Γ a quádrica representada pela equação (28.1),

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+kz+p=0,$$

cuja forma vetorial é a equação (28.2),

$$\mathbf{v}^tA\mathbf{v}+B\mathbf{v}+p=0.$$

1º Passo: Encontrar uma matriz ortogonal $P=[\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2 \;\; \mathbf{u}_3]$ que diagonaliza A. Como já foi visto várias vezes ao longo do curso, lembre que as colunas de P formam uma base ortonormal $\{\mathbf{u}_1,\,\mathbf{u}_2,\,\mathbf{u}_3\}$ de autovetores da matriz A para o $\mathbb{R}^3$. Assim,

$$D=P^tAP \;\text{ com }\; D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix},$$

onde λ_1, λ_2 e λ_3 são os autovalores da matriz A associados aos autovetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_2$, respectivamente.

2º Passo: Permutar as colunas de P, caso seja necessário, de modo que se tenha $\det(P)=1$. Isso garante que a transformação ortogonal

$$\mathbf{v} = P\mathbf{v}_1, \ \text{ com } \ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},$$

seja uma rotação no plano.

3º Passo: Obter a equação que representa a quádrica Γ no novo sistema de eixos $x_1y_1z_1$. Para isso, observe que

$$\begin{aligned}
& ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz = \mathbf{v}^tA\,\mathbf{v} \\
& = (P\mathbf{v}_1)^tA\,(P\mathbf{v}_1)\ ; \ \text{ onde } \mathbf{v} = P\mathbf{v}_1 \\
& = \mathbf{v}_1^t(P^tAP)\,\mathbf{v}_1 \\
& = \mathbf{v}_1^tD\,\mathbf{v}_1 \\
& = (x_1 \ \ y_1 \ \ z_1)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
& = \lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2+\lambda_3z_1^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& gx+hy+kz = B\mathbf{v} \\
& = B(P\mathbf{v}_1)\ ; \ \text{ onde } \mathbf{v} = P\mathbf{v}_1 \\
& = (BP)\,\mathbf{v}_1\ ; \ \text{ onde } BP = (g_1 \ \ h_1 \ \ k_1) \\
& = (g_1 \ \ h_1 \ \ k_1)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
& = g_1x_1+h_1y_1+k_1z_1\,.
\end{aligned}$$

Assim, a equação

$$\mathbf{v}^tA\,\mathbf{v}+B\mathbf{v}+p = 0$$

se transforma em

$$\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2+\lambda_3z_1^2+g_1x_1+h_1y_1+k_1z_1+p = 0.$$

Essa equação representa a quádrica Γ e não contém os termos cruzados x_1y_1, x_1z_1 e y_1z_1.

4º Passo: Completando os quadrados em x_1, y_1 e z_1, obtemos

$$(\lambda_1x_1^2+g_1x_1)+(\lambda_2y_1^2+h_1y_1)+(\lambda_3z_1^2++k_1z_1)+p = 0$$

$$\lambda_1(x_1^2+\frac{g_1}{\lambda_1}x_1)+\lambda_2(y_1^2+\frac{h_1}{\lambda_2}y_1)+\lambda_3(z_1^2+\frac{k_1}{\lambda_3}z_1)+p = 0$$

$$\lambda_1(x_1+\frac{g_1}{2\lambda_1})^2+\lambda_2(y_1+\frac{h_1}{2\lambda_2})^2+\lambda_3(z_1+\frac{k_1}{2\lambda_3})^2+p_1=0.$$

Passando para as novas variáveis

$$x_2=x_1+\frac{g_1}{2\lambda_1};\ \ y_2=y_1+\frac{h_1}{2\lambda_2};\ \ z_2=z_1+\frac{k_1}{2\lambda_3},$$

obtemos a equação

$$\lambda_1x_2^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3z_2^2+p_1=0.$$

Essa equação representa a quádrica Γ e não contém os termos cruzados x_2y_2, x_2z_2 e y_2z_2 nem os termos em x_2, y_2 e z_2. Portanto, é uma equação na forma canônica.

Exemplo 28.1.

Descreva a superfície quádrica cuja equação é dada por

$$4x^2+4y^2+4z^2+4xy+4xz+4yz-3=0.$$

Solução:

Reescrevendo essa equação na forma matricial, temos

$$\mathbf{v}^tA\mathbf{v}-3=0, \tag{28.3}$$

onde

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\ \text{ e }\ A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Deixamos para você o exercício de calcular os autovalores e os autovetores correspondentes da matriz A. Obtemos:

- $\lambda_1=2$: é um autovalor com multiplicidade algébrica 2 e autovetores associados

$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}\ \text{ e }\ \mathbf{u}_2=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{6}\\ 2/\sqrt{6}\end{pmatrix};$$

- $\lambda_2=8$: é um autovalor com multiplicidade algébrica 1 e autovalor associado

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Como $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ forma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, temos que

$$P = [\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2 \;\; \mathbf{u}_3] = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

é uma matriz ortogonal que diagonaliza a matriz A e a matriz diagonal correspondente será

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Vale também que $D = P^t AP$.

Observe que $\det(P) = 1$, logo P representa uma rotação em $\mathbb{R}^3$. Considerando

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

e substituindo $\mathbf{v} = P\mathbf{v}_1$ em $\mathbf{v}^t A\mathbf{v}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^t A\mathbf{v} &= (P\mathbf{v}_1)^t A\,(P\mathbf{v}_1) \\ &= \mathbf{v}_1^t (P^t AP)\mathbf{v}_1 \\ &= \mathbf{v}_1^t D\mathbf{v}_1 \;\text{ onde }\; P^t AP = D \\ &= (x_1 \;\; y_1 \;\; z_1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1^2 + 2y_1^2 + 8z_1^2. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo

$$\mathbf{v}^t A\mathbf{v} = 2x_1^2 + 2y_1^2 + 8z_1^2$$

na equação (28.3), obtemos

$$2x_1^2 + 2y_1^2 + 8z_1^2 = 3,$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{x_1^2}{3/2} + \frac{y_1^2}{3/2} + \frac{z_1^2}{3/8} = 1.$$

Observe que essa equação não contém os termos cruzados x_1y_1, x_1z_1 e y_1z_1 nem os termos em x_1, y_1 e z_1. Portanto, é uma equação na forma canônica. Identificamos, facilmente, que essa equação representa um elipsóide, como ilustra a **Figura 28.1.a**.

Exemplo 28.2.

Identifique a superfície quádrica cuja equação é dada por

$$-x^2+2yz-\sqrt{2}y+\sqrt{2}z-101=0.$$

Solução:

Inicialmente, observe que a presença do termo cruzado yz nos levará a realizar uma rotação de eixos, e a presença dos termos lineares z e y, a realizar uma translação de eixos.

Reescrevendo essa equação na forma matricial, temos

$$\mathbf{v}^tA\mathbf{v}+B\mathbf{v}-101=0, \tag{28.4}$$

onde

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B=(0 \quad -\sqrt{2} \quad \sqrt{2}).$$

Deixamos para você, novamente, o exercício de calcular os autovalores e os autovetores correspondentes da matriz A. Obtemos:

- $\lambda_1=-1$: autovalor com multiplicidade algébrica 2 e autovetores associados
$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{u}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix};$$
- $\lambda_2=1$: autovalor com multiplicidade algébrica 1 e autovalor associado
$$\mathbf{u}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Como $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ forma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, então

$$P = [\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2 \;\; \mathbf{u}_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

é uma matriz ortogonal que diagonaliza a matriz A e a matriz diagonal correspondente será

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vale também que $D = P^t AP$.

Como no Exemplo 28.1, $\det(P) = 1$, logo P representa uma rotação em $\mathbb{R}^3$. Considerando

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\text{ e }\; \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},$$

e substituindo $\mathbf{v} = P\mathbf{v}_1$ em $\mathbf{v}^t A\mathbf{v}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^t A\mathbf{v} &= (P\mathbf{v}_1)^t A\,(P\mathbf{v}_1) \\ &= \mathbf{v}_1^t (P^t AP)\mathbf{v}_1 \\ &= \mathbf{v}_1^t D\mathbf{v}_1, \;\text{ onde }\; P^t AP = D \\ &= (x_1 \;\; y_1 \;\; z_1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ &= -x_1^2 - y_1^2 + z_1^2, \end{aligned}$$

e, substituindo $\mathbf{v} = P\mathbf{v}_1$ em $B\mathbf{v}$, obtemos

$$\begin{aligned} B\mathbf{v} &= B(P\mathbf{v}_1) \\ &= BP\mathbf{v}_1 \\ &= (0 \;\; -\sqrt{2} \;\; \sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ &= (0 \;\; -2 \;\; 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ &= -2y_1\,. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo

$$\mathbf{v}^t A\mathbf{v} = -x_1^2 - y_1^2 + z_1^2 \;\text{ e }\; B\mathbf{v} = -2y_1$$

em (28.4), obtemos

$$-x_1^2 - y_1^2 + z_1^2 - 2y_1 = 101.$$

Agora, completando o quadrado na variável y_1, temos

$$-x_1^2 + z_1^2 - (y_1^2 + 2y_1) = 101,$$

o que nos dá

$$-x_1^2 - [(y_1+1)^2 - 1] + z_1^2 = 101,$$

e, portanto,

$$-x_1^2 - (y_1+1)^2 + z_1^2 = 100,$$

ou, equivalentemente,

$$-\frac{x_1^2}{10^2} - \frac{(y_1+1)^2}{10^2} + \frac{z_1^2}{10^2} = 1. \qquad (28.5)$$

Essa equação já é uma forma canônica para a quádrica inicial e já se pode identificar a equação de um hiperbolóide de duas folhas, mas ela ainda pode ser mais simplificada. Realizando a mudança de variáveis dada por

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = y_1 + 1 \\ z_2 = z_1\,, \end{cases}$$

que representa uma translação no $\mathbb{R}^3$, a equação (28.5) se transforma em

$$-\frac{x_2^2}{10^2} - \frac{y_2^2}{10^2} + \frac{z_2^2}{10^2} = 1,$$

que representa a quádrica inicial aos novos eixos $x_2y_2z_2$. Nessa forma, identificamos novamente a equação de um hiperbolóide de duas folhas, como ilustra a **Figura 28.1.c.**

Autoavaliação

Terminamos o estudo das cônicas em $\mathbb{R}^2$ e das quádricas em $\mathbb{R}^3$, que constituem uma excelente aplicação da diagonalização das formas quadráticas. É importante que você reveja o procedimento de simplificação dessas equações e compreenda os cálculos realizados nos exemplos. Também é importante que fique clara a interpretação geométrica de cada mudança de variáveis realizada.

Exercício 28.1.

Obtenha uma forma canônica de cada quádrica abaixo e identifique a quádrica.

1. $2xy - 4\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + z - 9 = 0$.
2. $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z - 9 = 0$.
3. $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z + 66 = 0$.

Aula 29

AUTOVALORES COMPLEXOS

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender o conceito de autovalor complexo;
2. aplicar os conceitos apresentados em casos particulares.

AUTOVALORES COMPLEXOS

Pré-requisitos
Aulas 3 e 5.

Vimos logo na Aula 3 que, dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, seu polinômio característico $p(x)$ é um polinômio de grau n com coeficientes reais e, portanto, possui um total de n raízes, contando suas multiplicidades e as raízes complexas. Nesta aula, estudaremos alguns exemplos de matrizes reais com autovalores complexos.

Inicialmente, vamos relembrar alguns conceitos sobre números complexos. Denotamos o conjunto dos números complexos por $\mathbb{C}$ e representamos por

$$\mathbb{C} = \left\{ a + b\,i \mid a,\ b \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ i = \sqrt{-1} \right\}$$

A igualdade de números complexos é definida por

$a + b\,i = c + d\,i$ se e somente se $a = c$ e $b = d$.

A adição e a multiplicação de números complexos são definidas por:

a. $(a + b\,i) + (c + d\,i) = (a + c) + (b + d)\,i$;

b. $(a + b\,i) \cdot (c + d\,i) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$,

para todos os $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$. É fácil verificar que todas as propriedades de corpo dos números reais continuam válidas para os números complexos.

Definimos o *conjugado* de um número complexo $z = a + b\,i$ como sendo o número complexo $\overline{z} = a - b\,i$.

A teoria de espaços vetoriais e de álgebra matricial desenvolvida no caso de componentes reais e escalares reais se aplica também para componentes e escalares complexos. Por exemplo, o espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ é definido por

$$\mathbb{C}^2 = \{(z,\ w) \mid z, w \ \in \mathbb{C}\},$$

com as operações usuais

a. $(z_1,\ w_1) + (z_2,\ w_2) = (z_1 + z_2,\ w_1 + w_2)$;

b. $z \cdot (z_1,\ w_1) = (z \cdot z_1,\ z \cdot z_2)$,

onde $z,\ z_1,\ w_1,\ z_2,\ w_2 \in \mathbb{C}$.

Assim, dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$, um número complexo $\lambda \in \mathbb{C}$ é um *autovalor* (*complexo*) da matriz A se existe um vetor não-nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

Dizemos que $\mathbf{v}$ é um *autovetor* (*complexo*) associado ao autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exemplo 29.1.

Discuta a diagonalização da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solução:

Sabemos, do nosso estudo de rotações no plano, que essa matriz corresponde a uma rotação de $\pi/2$ radianos no sentido anti-horário em torno da origem do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Assim, fica claro que nenhum vetor não-nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ é transformado, pela ação da matriz A, num múltiplo dele mesmo. Assim, a matriz A não possui autovetores em $\mathbb{R}^2$ e, consequentemente, não tem autovalores reais. De fato, o polinômio característico de A é

$$\begin{aligned} p(x) &= \det(xI_2 - A) \\ &= \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} \\ &= x^2 + 1\,. \end{aligned}$$

Esse polinômio só possui as raízes complexas $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$.

No entanto, considerando A com matriz complexa, isto é, $A \in M_2(\mathbb{C})$, $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$ são autovalores complexos da matriz A, pois os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, -i)$, $\mathbf{v}_2 = (1,\ i) \in \mathbb{C}^2$, e satisfazem

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = i\,\mathbf{v}_1;$$

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = -i\,\mathbf{v}_2.$$

Assim, $\mathbf{v}_1 = (1, -i)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = i$, e $\mathbf{v}_2 = (1,\ i)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = -i$.

Como a matriz não possui autovalores reais, ela não é diagonalizável enquanto matriz real. No entanto, como ela possui dois autovalores complexos distintos, a matriz A é diagonalizável quando considerada como matriz complexa. Mais ainda, considerando as matrizes P, $D \in M_2(\mathbb{C})$ dadas por

$$P = [\mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

temos

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & i/2 \\ 1/2 & -i/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & i/2 \\ 1/2 & -i/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= A, \end{aligned}$$

isto é, $A = PDP^{-1}$. Portanto, no caso complexo, a matriz A é semelhante à matriz diagonal D.

Exemplo 29.2.

Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,6 \\ 0,75 & 1,1 \end{pmatrix},$$

determine os autovalores de A e uma base para cada autoespaço.

Solução:

Obtendo o polinômio característico da matriz A,

$$\begin{aligned} p(x) &= \det(xI_2 - A) \\ &= \begin{vmatrix} x-0,5 & 0,6 \\ -0,75 & x-1,1 \end{vmatrix} \\ &= (x-0,5)(x-1,1) - (0,6)(-0,75) \\ &= x^2 - 1,6x + 1\,. \end{aligned}$$

Calculando as raízes desse polinômio quadrático, obtemos

$\lambda_1 = 0,8 - 0,6i$ e $\lambda_2 = 0,8 + 0,6i$.

Considerando o autovalor $\lambda_1 = 0,8 - 0,6\,i$, queremos obter $\mathbf{v} = (z\,,\ w) \in \mathbb{C}^2$ não-nulo tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v},$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} 0,5 & -0,6 \\ 0,75 & 1,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = (0,8 - 0,6\,i) \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix},$$

o que nos dá o sistema linear

$$\begin{cases} (-0,3 + 0,6\,i)\,z - 0,6\,w = 0 \\ 0,75\,z + (0,3 + 0,6\,i)\,w = 0\,. \end{cases}$$

Como os autovalores são distintos, cada autoespaço tem dimensão 1; portanto, as equações do sistema anterior são dependentes. Assim, basta considerar uma das equações; por exemplo, da segunda equação, temos

$$z = (-\,0,4 - 0,8\,i)\,w.$$

Escolhendo $w = 5$ (para eliminar a parte decimal), obtemos $z = -2 - 4\,i$. Assim, uma base para o autoespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = 0,8 - 0,6\,i$ é dada pelo vetor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 - 4\,i \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, para o autovalor $\lambda_2 = 0,8 + 0,6\,i$, obtemos o autovetor

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 + 4\,i \\ 5 \end{pmatrix},$$

pois

$$\begin{aligned} A\mathbf{v}_2 &= \begin{pmatrix} 0,5 & -0,6 \\ 0,75 & 1,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 + 4\,i \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 + 2\,i \\ 4 + 3\,i \end{pmatrix} \\ &= (0,8 + 0,6\,i) \begin{pmatrix} -2 + 4\,i \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \lambda_2 \mathbf{v}_2\,. \end{aligned}$$

Observe que a matriz A é semelhante à matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 - 0,6\,i & 0 \\ 0 & 0,8 + 0,6\,i \end{pmatrix}.$$

Autoavaliação

Não é nosso objetivo generalizar toda a teoria de diagonalização de matrizes reais para o caso complexo; apesar disso, desejamos proporcionar novas e importantes aplicações da Álgebra Linear. Muitos problemas envolvendo matrizes com autovalores complexos aparecem naturalmente em Engenharia Elétrica, em Física e na área de Sistemas Dinâmicos de um modo geral. Essa discussão costuma ser feita num curso avançado de Álgebra Linear. Portanto, nosso objetivo foi apenas o de apresentar a você alguns exemplos elementares.

Exercício 29.1.

1. Determine os autovalores e uma base para cada auto-espaço da matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Calcule os autovalores e autovetores da matriz
$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$
onde $a\,,\ b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

3. Dada a matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ com autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$, mostre que $\overline{\lambda}$ também é autovalor da matriz A.

Aula 30

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS – 3ª PARTE

Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1 aplicar os conceitos e as propriedades vistas nas Aulas 17 a 29.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS – 3^a PARTE

Pré-requisitos
Aulas 17 a 29.

Nas próximas aulas apresentaremos uma série de exercícios resolvidos sobre a segunda parte do curso. Esses exercícios o ajudarão a consolidar os conceitos apresentados nas aulas anteriores.

A nossa orientação é que você primeiro tente resolver cada um dos exercícios, usando, se necessário, as anotações das aulas anteriores, e, só depois de obtida a sua própria solução, compará-la com a solução apresentada aqui. Caso você não consiga resolver algum exercício, não se aflija, leia atentamente a solução correspondente. Se você ainda tiver dificuldade, não hesite em procurar ajuda de seu tutor.

Exercício 30.1.

1. Determine a matriz, com respeito à base canônica, da projeção ortogonal sobre a reta $y = x$.

2. Determine as projeções ortogonais dos pontos $P_1 = (1\,,\ 0\,,\ 1)$ e $P_2 = (1\,,\ 1\,,\ 1)$ sobre o plano $x + y - z = 0$.

3. Determine o valor das constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ para que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+b & b \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \ \text{ e } \ B = \begin{pmatrix} 5 & b-c & 2d+3 \\ 3 & 5 & 1 \\ d & b+c & 0 \end{pmatrix}$$

   sejam matrizes simétricas.

4. Dadas as matrizes simétricas $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, mostre que $AB + BA$ também é uma matriz simétrica.

5. Dadas as matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que A é uma matriz simétrica, verifique que $B^t AB$ é uma matriz simétrica.

6. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$, encontre uma matriz ortogonal P que diagonaliza a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, isto é, tal que $D = P^t AP$.

7. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador autoadjunto com autovalores associados $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 4$; suponha que $\mathbf{v}_1 = (1\,,\ 1\,,\ 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (2\,,\ 0\,,\ 1)$ são dois autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$. Determine um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 4$ e uma base ortonormal de autovetores de T.

8. Para cada matriz abaixo, determine uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tais que $A = PDP^t$.

a. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

SOLUÇÕES

1. Denotamos por $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projeção ortogonal sobre a reta $y = x$, como ilustra a **Figura 30.1**.

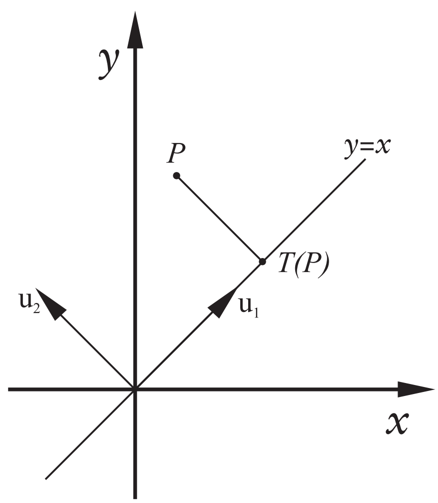


Figura 30.1: A projeção ortogonal sobre a reta $y = x$ e a base ortonormal β.

Vamos primeiro determinar uma matriz que representa T com respeito a uma base ortonormal $\beta = \{\mathbf{u}_1\,,\,\mathbf{u}_2\}$. Sejam:

$\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$ vetor unitário paralelo à reta $y = x$; e $\mathbf{u}_2 = (-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$ um vetor unitário normal à reta $y = x$.

Como

$$T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1 = 1 \cdot \mathbf{u}_1 + 0 \cdot \mathbf{u}_2$$

e

$$T(\mathbf{u}_2) = 0 = 0 \cdot \mathbf{u}_1 + 0 \cdot \mathbf{u}_2,$$

temos que

$$B = [T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz A que representa T com respeito à base canônica é dada por

$$A = PBP^{-1},$$

onde

$$P = [\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Como P é uma matriz ortogonal, temos que

$$P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

portanto,

$$\begin{aligned} A &= PBP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a projeção ortogonal sobre o plano $\pi : x + y - z = 0$; precisamos determinar a matriz A que representa essa projeção com respeito à base canônica. Novamente, vamos primeiro obter a matriz que representa T com respeito a uma base ortonormal $\beta = \{\mathbf{u}_1\,,\,\mathbf{u}_2\,,\,\mathbf{u}_3\}$. Veja a **Figura 30.2**

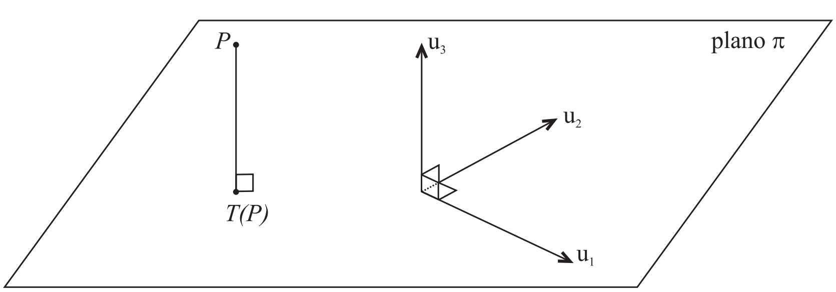


Figura 30.2: Uma base ortonormal β.

Considere os seguintes vetores:
$\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{2}\,,\,0\,,\,1/\sqrt{2})$ um vetor unitário paralelo ao plano π,
$\mathbf{u}_2 = (-1/\sqrt{6}\,,\,2/\sqrt{6}\,,\,1/\sqrt{6})$ um vetor unitário ortogonal a $\mathbf{u}_1$ e

paralelo ao plano π e
$\mathbf{u}_3 = (1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ um vetor unitário normal ao plano π.

Como

$$T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1 = 1\cdot\mathbf{u}_1 + 0\cdot\mathbf{u}_2 + 0\cdot\mathbf{u}_3;$$
$$T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 = 0\cdot\mathbf{u}_1 + 1\cdot\mathbf{u}_2 + 0\cdot\mathbf{u}_3;$$

e

$$T(\mathbf{u}_3) = 0 = 0\cdot\mathbf{u}_1 + 0\cdot\mathbf{u}_2 + 0\cdot\mathbf{u}_3,$$

temos que

$$B = [T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz A que representa T com respeito à base canônica é dada por

$$A = PBP^{-1},$$

onde

$$P = [\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2 \;\; \mathbf{u}_3] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Como P é uma matriz ortogonal, temos que

$$P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix};$$

portanto

$$\begin{aligned} A &= PBP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \\ &\quad . \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, as imagens dos pontos P_1 e P_2, sob a ação da projeção ortogonal sobre o plano π, são obtidas por multiplicação de matrizes:

$$AP_1 = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$AP_2 = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

Portanto, temos que a projeção de P_1 é P_1 e a projeção de P_2 é $(2/3,\ 2/3,\ 4/3)$.

3. Lembre que uma matriz A é simétrica se e somente se $A = A^t$. Assim, para a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+b & b \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

temos $A = A^t$ se e somente se

$$\begin{pmatrix} 1 & a+b & b \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a+b & 0 & 4 \\ b & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

ou seja, se e somente se $a+b = 2$ e $b = 3$, ou, ainda, $a = -1$ e $b = 3$.

Para a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 5 & b-c & 2d+3 \\ 3 & 5 & 1 \\ d & b+c & 0 \end{pmatrix},$$

temos $B = B^t$ se e somente se

$$\begin{pmatrix} 5 & b-c & 2d+3 \\ 3 & 5 & 1 \\ d & b+c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & d \\ b-c & 5 & b+c \\ 2d+3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, se e somente se $b-c = 3$, $b+c = 1$ e $2d+3 = d$, ou, ainda, $b = 2$, $c = -1$ e $d = -3$.

4. Sendo A e B matrizes simétricas, temos $A = A^t$ e $B = B^t$. Portanto,

$$\begin{aligned}(AB+BA)^t &= (AB)^t + (BA)^t \\ &= B^tA^t + A^tB^t \\ &= BA + AB \\ &= AB + BA\,.\end{aligned}$$

   Portanto, a $AB+BA$ também é uma matriz simétrica.

5. De fato, temos que

$$\begin{aligned}(B^tAB)^t &= B^tA^t(B^t)^t \\ &= B^tAB;\end{aligned}$$

   logo, B^tAB também é uma matriz simétrica.

6. Como A é matriz simétrica, existe uma matriz ortogonal P que diagonaliza a matriz A. Lembre que as colunas de P são autovetores unitários da matriz A. Portanto, precisamos calcular os autovalores e os respectivos autovetores da matriz A. Seu polinômio característico é dado por

$$\begin{aligned}p(x) &= \det(xI_2 - A) \\ &= \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -b & x-a \end{vmatrix} \\ &= (x-a)^2 - (-b)^2 \\ &= x^2 - 2ax + (a^2 - b^2)\,.\end{aligned}$$

   Portanto, os autovalores são $\lambda_1 = a+b$ e $\lambda_2 = a-b$. Como $b \neq 0$, segue que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Vamos, agora, ao cálculo dos autovetores. O autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = a+b$ é um vetor $\mathbf{u}_1 = (x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfaz

$$(\lambda_1 I_2 - A)\,\mathbf{u}_1 = 0,$$

   ou seja,

$$\begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Como $b \neq 0$, obtemos $x = y$. Assim, uma escolha de $\mathbf{u}_1 = (x\,,\,y)$ que seja vetor unitário é dada por $\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{2}\,,\,1/\sqrt{2})$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e a matriz A é simétrica, então todo autovetor $\mathbf{u}_2 = (x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2$ associado ao autovalor $\lambda_2 = a-b$ é ortogonal ao vetor $\mathbf{u}_1$. Portanto, podemos escolher $\mathbf{u}_2 = (-1/\sqrt{2}\,,\ 1/\sqrt{2})$. Assim, a matriz

$$P = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

diagonaliza a matriz A, isto é,
$D = P^t AP$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$$

é uma matriz diagonal semelhante à matriz A.

7. Seja $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 4$. Como T é um operador autoadjunto e os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente independentes, devemos ter $\mathbf{v}_3$ ortogonal a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Como estamos em $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}_3$ é paralelo ao vetor $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$; portanto, podemos considerar

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (1\,,\ 1\,, -2).$$

Observe que para os autovetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$ temos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \quad &= \langle (2\,,\ 0\,,\ 1), (1\,,\ 1\,,\ 1) \rangle \\ &= 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 3 \neq 0; \end{aligned}$$

logo, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ não são ortogonais entre si. Para construir uma base ortogonal de autovetores, consideramos os vetores $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e um novo vetor $\mathbf{w}$, com $\mathbf{w}$ ortogonal a $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$, por exemplo,

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = (-1\,,\ 5\,,\ 2).$$

Normalizando esses vetores, obtemos uma base ortonormal de autovetores $\beta = \{\mathbf{u}_1,\, \mathbf{u}_2,\, \mathbf{u}_3\}$, dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} &= \left(\frac{-1}{\sqrt{30}},\, \frac{5}{\sqrt{30}},\, \frac{2}{\sqrt{30}}\right); \\
\mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} &= \left(\frac{2}{\sqrt{5}},\, 0,\, \frac{1}{\sqrt{5}}\right); \\
\mathbf{u}_3 &= \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\, \frac{1}{\sqrt{6}},\, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right).
\end{aligned}$$

8. a. Sendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

seu polinômio característico é dado por

$$\begin{aligned}
p(x) &= \det(xI_4 - A) \\
&= \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & x-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \\
&= x^2(x^2 - 6x + 8) \\
&= x^2(x-2)(x-4)\,.
\end{aligned}$$

Logo, seus autovalores são:

- $\lambda_1 = 0$, com multiplicidade algébrica 2;
- $\lambda_2 = 2$, com multiplicidade algébrica 1; e
- $\lambda_3 = 4$, com multiplicidade algébrica 1.

Vamos, agora, calcular uma base ortonormal de autovetores de A. Para o autovalor $\lambda_1 = 0$, sabemos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$ satisfazem

$$(0 \cdot I_4 - A)\mathbf{v} = 0$$

$$-A\mathbf{v} = 0$$

isto é, satisfazem o sistema linear homogêneo

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escalonando a matriz associada desse sistema linear, no caso, a matriz $-A$, obtemos as soluções

$$x = 0, \quad y = 0 \ \text{ e } \ z, t \ \text{ arbitrários} .$$

Portanto, escolhendo ora $z = 1$, $t = 0$, e ora $z = 0$, $t = 1$, obtemos que

$$\mathbf{u}_1 = (0\,,\ 0\,,\ 1\,,\ 0) \quad \mathbf{u}_2 = (0\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 1)$$

formam uma base ortonormal do autoespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$.

Para o autovalor $\lambda_2 = 2$, sabemos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x\,,\ y\,,\ z\,,\ t) \in \mathbb{R}^4$ satisfazem

$$(2 \cdot I_4 - A)\mathbf{v} = 0,$$

isto é, satisfazem o sistema linear homogêneo

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escalonando a matriz associada desse sistema linear, obtemos as soluções

$$y = -x \ \text{ e } \ z = t = s = 0, \ \text{ com } \ x \ \text{ arbitrário.}$$

Portanto, escolhendo $x = 1/\sqrt{2}$ e, consequentemente, $y = -1/\sqrt{2}$, obtemos que

$$\mathbf{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\,,\ 0\,,\ 0 \right)$$

forma uma base ortonormal do autoespaço associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$. Finalmente, para o autovalor $\lambda_3 = 4$, os autovetores associados $\mathbf{v} = (x\,,\, y,\, z\,,\, t) \in \mathbb{R}^4$ satisfazem

$$(4 \cdot I_4 - A)\mathbf{v} = 0,$$

ou seja, satisfazem o sistema linear homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escalonando a matriz associada desse sistema linear, obtemos as soluções

$$y = x \quad \text{e} \quad z = t = 0, \quad \text{com } x \quad \text{arbitrário.}$$

Portanto, escolhendo $x = 1/\sqrt{2}$ e, consequentemente, $y = 1/\sqrt{2}$, obtemos que

$$\mathbf{u}_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \frac{1}{\sqrt{2}}\,, 0\,, 0 \right)$$

forma uma base ortonormal do autoespaço associado ao autovalor $\lambda_3 = 4$. Como a matriz A é simétrica, observe que os autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais. Assim, $\beta = \{\mathbf{u}_1\,,\, \mathbf{u}_2,\, \mathbf{u}_3,\, \mathbf{u}_4\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ formada por autovetores da matriz A. Portanto, a matriz ortogonal P,

$$P = [\mathbf{u}_1 \ \ \mathbf{u}_2 \ \ \mathbf{u}_3 \ \ \mathbf{u}_4] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e a matriz diagonal D,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

satisfazem $A = PDP^t$.

b. No caso

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

seu polinômio característico é dado por

$$\begin{aligned} p(x) &= \det(xI_5 - A) \\ &= \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & x-2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= (x^2-6x+8)(x^3-6x^2+9x-4) \\ &= (x-1)^2(x-2)(x-4)^2 . \end{aligned}$$

Logo, os autovalores da matriz A são:

- $\lambda_1 = 1$, com multiplicidade algébrica 2;
- $\lambda_2 = 2$, com multiplicidade algébrica 1; e
- $\lambda_3 = 4$, com multiplicidade algébrica 2.

Vamos, agora, calcular uma base ortonormal de autovetores de A. Para o autovalor $\lambda_1 = 1$, sabemos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x\,,\, y\,,\, z\,,\, t\,,\, s) \in \mathbb{R}^5$ satisfazem

$$(1 \cdot I_5 - A)\mathbf{v} = 0,$$

isto é, satisfazem o sistema linear homogêneo

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escalonando a matriz associada desse sistema linear, obtemos as soluções

$$x=0, \quad y=0, \quad z=-t-s \text{ com } t \text{ e } s \text{ arbitrários.}$$

Portanto, escolhendo $t=0$ e $s=-1$, obtemos o autovetor

$$\mathbf{v}_1=(0,\,0,\,1,\,0,-1).$$

Para obter um segundo autovetor $\mathbf{v}_2=(a,\,b,\,c,\,d,\,e)$ associado ao autovalor $\lambda_1=1$ e que seja ortogonal a $\mathbf{v}_1$, devemos ter

$$\begin{cases} a=b=0 \\ c+d+e=0 \\ c-e=0\,, \end{cases}$$

sendo que a última equação segue da condição $\langle \mathbf{v}_1,\,\mathbf{v}_2\rangle=0$. Uma solução desse sistema linear é dada por $\mathbf{v}_2=(0,\,0,\,1,-2,\,1)$. Assim, $\{\mathbf{v}_1,\,\mathbf{v}_2\}$ é uma base ortogonal do autoespaço associado a $\lambda_1=1$.

Para o autovalor $\lambda_2=2$, sabemos que os autovetores associados $\mathbf{v}=(x,\,y,\,z,\,t\,,s)\in\mathbb{R}^5$ satisfazem

$$(2\cdot I_5-A)\mathbf{v}=0,$$

isto é, satisfazem o sistema linear homogêneo

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escalonando a matriz associada desse sistema linear, obtemos as soluções

$$y=-x \text{ e } z=t=s=0, \quad \text{com } x \text{ arbitrário.}$$

Portanto, escolhendo $x=1$, obtemos o autovetor

$$\mathbf{v}_3=(1,-1,\,0,\,0,\,0),$$

que forma uma base do autoespaço associado ao autovalor $\lambda_2=2$.

Finalmente, para o autovalor $\lambda_3=4$, os autovetores associados $\mathbf{v}=(x,\,y,\,z,\,t,\,s)\in\mathbb{R}^5$ satisfazem

$$(4\cdot I_5-A)\mathbf{v}=0,$$

ou seja, satisfazem o sistema linear homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escalonando a matriz associada desse sistema linear, obtemos as soluções

$$y = x, \quad s = z \quad \text{e} \quad t = z, \quad \text{com} \quad x \quad \text{e} \quad z \quad \text{arbitrários.}$$

Agindo como no caso do autovalor $\lambda_1 = 1$, obtemos os seguintes autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = 4$:

$\mathbf{v}_4 = (1\,,1\,,\,0,\,0,\,0)$ e $\mathbf{v}_5 = (0\,,0\,,\,1,\,1,\,1)$, e eles formam uma base ortogonal para o autoespaço associado ao autovalor $\lambda_3 = 4$.

Assim, $\{\mathbf{v}_1,\,\mathbf{v}_2,\,\mathbf{v}_3,\,\mathbf{v}_4,\,\mathbf{v}_5\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^5$ formada por autovetores da matriz A. Normalizando os vetores dessa base, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \left(0\,,\,0\,,\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,,\,0\,,\,\tfrac{-1}{\sqrt{2}}\right); \\ \mathbf{u}_2 &= \left(0\,,\,0\,,\,\tfrac{1}{\sqrt{6}}\,,\,\tfrac{-2}{\sqrt{6}}\,,\,\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right); \\ \mathbf{u}_3 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,,\,\tfrac{-1}{\sqrt{2}}\,,\,0\,,\,0\,,0\right); \\ \mathbf{u}_4 &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,,\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,,\,0\,,\,0\,,0\right); \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{u}_5 = \left(0\,,\,0\,,\,\tfrac{1}{\sqrt{3}}\,,\,\tfrac{1}{\sqrt{3}}\,,\,\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Observe, agora, que $\beta = \{\mathbf{u}_1\,,\,\mathbf{u}_2,\,\mathbf{u}_3,\,\mathbf{u}_4,\,\mathbf{u}_5\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^5$ formada por autovetores da matriz A. Portanto, a matriz ortogonal P,

$$P = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3 \quad \mathbf{u}_4 \quad \mathbf{u}_5] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

e a matriz diagonal D,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

satisfazem $A = PDP^t$. Lembre que a ordem dos elementos da diagonal principal da matriz D depende da ordem das colunas da matriz ortogonal P e vice-versa.

Aula 31

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS – 4^a PARTE

Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1 aplicar os conceitos e as propriedades vistas nas Aulas 17 a 29.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS – 4^a PARTE

Pré-requisitos
Aulas 17 a 30.

Nesta aula, vamos dar continuidade à apresentação de exercícios resolvidos sobre a segunda parte do curso. Estes exercícios o ajudarão a consolidar os conceitos apresentados nas aulas anteriores.

Mais uma vez, ressaltamos que você deve primeiro tentar resolver cada um dos exercícios, usando, se necessário, as anotações das aulas anteriores, e, só depois de obtida a sua própria solução, compará-la com a solução apresentada aqui. Caso você não consiga resolver algum exercício, não se aflija, leia atentamente a solução correspondente e, se ainda tiver dificuldade, não hesite em procurar ajuda de seu tutor. Uma discussão entre alunos e tutor sobre as soluções encontradas é sempre muito proveitosa.

Exercício 31.1.

1. Para cada caso abaixo, determine a matriz que representa a forma bilinear com respeito à base ordenada especificada.

   a. $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ com respeito à base $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, $\mathbf{u}_1 = (-2, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 1)$ e $\mathbf{u}_3 = (0, 1, -2)$.

   b. $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{b} \rangle$, com $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, com respeito à base canônica.

2. Expresse as formas quadráticas abaixo na forma $\mathbf{v}^t A \mathbf{v}$, onde a matriz A é uma matriz simétrica.

   a. $q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 7x_2^2$

   b. $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + 7x_1x_4 - 2x_2x_4$

   c. $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3 + x_2x_3$

   d. $q(x_1, x_2) = -7x_1x_2$

   e. $q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n)^2$, com $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

3. Diagonalize as seguintes formas quadráticas:

   a. $q(x, y) = 2xy$

   b. $q(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$

Em cada caso, determine uma matriz ortogonal que diagonaliza a forma quadrática.

4. Identifique as cônicas representadas pelas equações abaixo. Em cada caso, determine uma matriz ortogonal que diagonaliza a forma quadrática.

   a. $2x^2+5y^2=20$
   b. $x^2-16y^2+8x+128y=256$
   c. $4x^2-20xy+25y^2-15x-6y=0$

5. Identifique as quádricas representadas pelas equações abaixo. Em cada caso, determine uma matriz ortogonal que diagonaliza a forma quadrática.

   a. $2xy+2xz+2yz-6x-6y-4z=-9$
   b. $2xy-6\sqrt{2}x+10\sqrt{2}y+z-31=0$

6. Seja F a forma bilinear de $\mathbb{R}^2$ definida por

$$F\left((x_1,\,x_2),\,(y_1,\,y_2)\right)=2x_1y_1-3x_1y_2+x_2y_2.$$

   a. Determine a matriz A que representa F com respeito à base $\alpha=\{(1\,,\,0)\,,\,(1\,,\,1)\}$.
   b. Determine a matriz B que representa F com respeito à base $\beta=\{(2\,,\,1)\,,\,(1\,,-1)\}$.
   c. Determine a matriz mudança de base P, da base β para a base α, e verifique que $B=P^tAP$.

Soluções

1. a. Lembre-se da Aula 25, na qual a matriz que representa a forma bilinear com respeito à base $\beta = \{\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3\}$ é dada pela matriz $A = (a_{ij})$, onde $a_{ij} = F(\mathbf{u}_i,\ \mathbf{u}_j)$. Neste caso, temos:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= F(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_1) = \langle \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_1 \rangle = \\
&= \langle (-2\,,\ 0\,,\ 1)\,,\ (-2\,,\ 0\,,\ 1) \rangle = 5; \\
a_{12} &= F(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2) = \langle \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2 \rangle = \\
&= \langle (-2\,,\ 0\,,\ 1)\,,\ (1\,,\ 2\,,\ 1) \rangle = -1; \\
a_{13} &= F(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_3) = \langle \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_3 \rangle = \\
&= \langle (-2\,,\ 0\,,\ 1)\,,\ (0\,,\ 1\,,-2) \rangle = -2; \\
a_{21} &= F(\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_1) = \langle \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_1 \rangle = \\
&= \langle (1\,,\ 2\,,\ 1)\,,\ (-2\,,\ 0\,,\ 1) \rangle = -1; \\
a_{22} &= F(\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_2) = \langle \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_2 \rangle = \\
&= \langle (1\,,\ 2\,,\ 1)\,,\ (1\,,\ 2\,,\ 1) \rangle = 6; \\
a_{23} &= F(\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3) = \langle \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3 \rangle = \\
&= \langle (1\,,\ 2\,,\ 1)\,,\ (0\,,\ 1\,,-2) \rangle = 0; \\
a_{31} &= F(\mathbf{u}_3,\ \mathbf{u}_1) = \langle \mathbf{u}_3,\ \mathbf{u}_1 \rangle = \\
&= \langle (0\,,\ 1\,,-2)\,,\ (-2\,,\ 0\,,\ 1) \rangle = -2; \\
a_{32} &= F(\mathbf{u}_3,\ \mathbf{u}_2) = \langle \mathbf{u}_3,\ \mathbf{u}_2 \rangle = \\
&= \langle (0\,,\ 1\,,-2)\,,\ (1\,,\ 2\,,\ 1) \rangle = 0; \\
a_{33} &= F(\mathbf{u}_3,\ \mathbf{u}_3) = \langle \mathbf{u}_3,\ \mathbf{u}_3 \rangle = \\
&= \langle (0\,,\ 1\,,-2)\,,\ (0\,,\ 1\,,-2) \rangle = 5.
\end{aligned}$$

Assim, a matriz A é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Observe que A é uma matriz simétrica.

b. Sejam $\mathbf{a} = (a_1,\ a_2)$ e $\mathbf{b} = (b_1,\ b_2)$ vetores com respeito à base canônica. Seja $A = (a_{ij})$ a matriz que representa a forma bilinear $F(\mathbf{u}\,,\ \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}\,,\ \mathbf{a} \rangle \cdot \langle \mathbf{v}\,,\ \mathbf{b} \rangle$ com respeito à base canônica. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= F(\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_1) = \langle \mathbf{e}_1,\, \mathbf{a}\rangle \cdot \langle \mathbf{e}_1,\, \mathbf{b}\rangle = \\
&= \langle (1\,,\, 0)\,,\, (a_1,\, a_2)\rangle \cdot \langle (1\,,\, 0)\,,\, (b_1,\, b_2)\rangle = a_1 b_1; \\
a_{12} &= F(\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2) = \langle \mathbf{e}_1,\, \mathbf{a}\rangle \cdot \langle \mathbf{e}_2,\, \mathbf{b}\rangle = \\
&= \langle (1\,,\, 0)\,,\, (a_1,\, a_2)\rangle \cdot \langle (0\,,\, 1)\,,\, (b_1,\, b_2)\rangle = a_1 b_2; \\
a_{21} &= F(\mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_1) = \langle \mathbf{e}_2,\, \mathbf{a}\rangle \cdot \langle \mathbf{e}_1,\, \mathbf{b}\rangle = \\
&= \langle (0\,,\, 1)\,,\, (a_1,\, a_2)\rangle \cdot \langle (1\,,\, 0)\,,\, (b_1,\, b_2)\rangle = a_2 b_1; \\
a_{22} &= F(\mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_2) = \langle \mathbf{e}_2,\, \mathbf{a}\rangle \cdot \langle \mathbf{e}_2,\, \mathbf{b}\rangle = \\
&= \langle (0\,,\, 1)\,,\, (a_1,\, a_2)\rangle \cdot \langle (0\,,\, 1)\,,\, (b_1,\, b_2)\rangle = a_2 b_2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix}.$$

Observe que, em geral, a matriz A não é uma matriz simétrica.

2. Como foi visto na Aula 26, temos:

a.

$$q(x_1,\, x_2) = (x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1^2 + 7x_2^2$$

b.

$$\begin{aligned}
&q(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) = \\
&= (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7/2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 7/2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
&= x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + 7x_1x_4 - 2x_2x_4
\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}
&q(x_1,\, x_2,\, x_3) = \\
&= (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ -3/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3 + x_2x_3
\end{aligned}$$

d.

$$q(x_1,\, x_2) = (x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} 0 & -7/2 \\ -7/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -7x_1x_2$$

e.
$$q(x_1,\, x_2,\ldots,x_n) = (c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n)^2 =$$
$$= c_1^2x_1^2+c_2^2x_2^2+\cdots+c_n^2x_n^2+2\,c_1c_2x_1x_2+2\,c_1c_3x_1x_3+\cdots\cdots+$$
$$+2\,c_{n-1}c_nx_{n-1}x_n$$

$$= (x_1\; x_2\; \cdots\; x_n)\begin{pmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & c_1c_3 & \cdots & c_1c_n \\ c_1c_2 & c_2^2 & c_2c_3 & \cdots & c_2c_n \\ c_1c_3 & c_2c_3 & c_3^2 & \cdots & c_3c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1c_n & c_2c_n & c_3c_n & \cdots & c_n^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

3. a. Observando os coeficientes de q, vemos que a matriz A que representa q na base canônica é dada por

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizar a forma quadrática q é equivalente a diagonalizar a matriz simétrica A. Usando os procedimentos já conhecidos sobre diagonalização de matrizes simétricas, os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. A matriz P será obtida a partir de uma base ortonormal de autovetores de A. Efetuando os cálculos, o que é um exercício para você, obtemos

$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$, e

$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$.

Como $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ forma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, então

$$P=[\mathbf{u}_1\;\; \mathbf{u}_2]=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

que representa uma rotação de $\pi/4$ radianos, e a matriz diagonal correspondente será

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

onde $D=P^tAP$. Observe que a forma diagonal de q é dada por

$$q(x_1,\, y_1) = (x_1\;\; y_1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
$$= x_1^2 - y_1^2\,.$$

b. Observando os coeficientes de q, vemos que a matriz A que representa q na base canônica é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Procedendo à diagonalização da matriz simétrica A, deixamos os detalhes dos cálculos como um exercício para você, obtemos os autovalores $\lambda_1 = -1$, com multiplicidade algébrica 2, e $\lambda_2 = 2$. A matriz mudança de variável P será obtida a partir de uma base ortonormal de autovetores de A. Efetuando os cálculos, obtemos

$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$;

$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$;

$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$.

Como $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ forma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, então

$$P = [\mathbf{u}_1 \ \ \mathbf{u}_2 \ \ \mathbf{u}_3] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

é uma matriz ortogonal e a matriz diagonal correspondente será

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

onde $D = P^t A P$.

A forma diagonal de q é dada por

$$\begin{aligned} q(x_1, y_1, z_1) &= (x_1 \ \ y_1 \ \ z_1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ &= -x_1^2 - y_1^2 + 2z_1^2. \end{aligned}$$

Como P é uma matriz ortogonal e $\det(P) = 1$, então P é uma rotação em $\mathbb{R}^3$.

4. a. Como a forma quadrática $q(x,\, y) = 2x^2 + 5y^2$ não contém termos em xy, a equação da cônica já está diagonalizada. Podemos escrevê-la na forma

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

e, daí, identificar a cônica como uma elipse de semieixos $\sqrt{10}$ e 2. Veja a **Figura 31.1**.

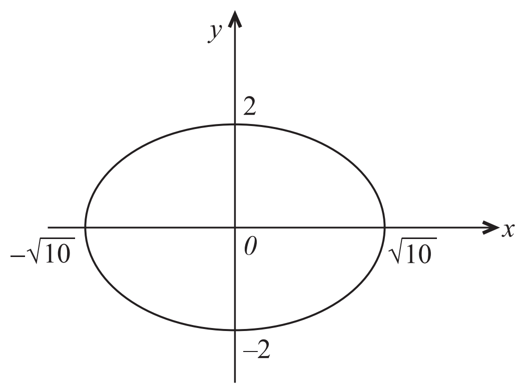


Figura 31.1: A elipse $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{4} = 1$.

b. Como a equação $x^2 - 16y^2 + 8x + 128y = 256$ não contém termos em xy, ela já se encontra diagonalizada, restando apenas completar os quadrados em x e y:

$$\begin{aligned}
(x^2 + 8x) - 16(y^2 - 8y) &= 256 \\
(x+4)^2 - 16 - 16\left[(y-4)^2 - 16\right] &= 256 \\
(x+4)^2 - 16(y-4)^2 &= 16 \\
\frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(y-4)^2}{1} &= 1\,.
\end{aligned}$$

Efetuando a translação

$$\begin{cases} x_1 = x + 4 \\ y_1 = y - 4\,, \end{cases}$$

a equação que representa a cônica se transforma, no sistema de coordenadas x_1y_1, em

$$\frac{x_1^2}{16} - \frac{y_1^2}{1} = 1.$$

Podemos identificar a hipérbole na **Figura 31.2**.

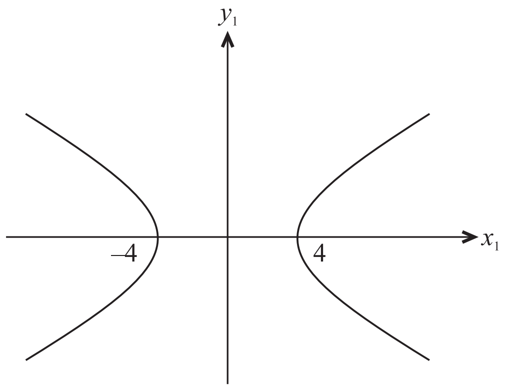


Figura 31.2: A hipérbole $\frac{x_1^2}{16} - \frac{y_1^2}{1} = 1$.

c. Reescrevendo a cônica $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$ na forma matricial, obtemos

$$\mathbf{v}^t A\,\mathbf{v} + B\mathbf{v} = 0,$$

onde

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$A = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 25 \end{pmatrix}$ e

$$B = (-15 \quad -6).$$

A matriz A é a matriz simétrica que representa a forma quadrática $q(x\,,\,y) = 4x^2 - 20xy + 25y^2$ com respeito à base canônica. Não é difícil ver – os cálculos ficam para você – que os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 29$, e os autovetores normalizados são

$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{29} \\ 2/\sqrt{29} \end{pmatrix}$ autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$, e

$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{29} \\ 5/\sqrt{29} \end{pmatrix}$ autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 29$.

Como $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ forma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, então

$$P = [\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2] = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{29} & -2/\sqrt{29} \\ 2/\sqrt{29} & 5/\sqrt{29} \end{pmatrix}$$

é uma matriz ortogonal que diagonaliza a matriz A, e a matriz diagonal correspondente será

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 29 \end{pmatrix},$$

com $D = P^t AP$. Como $\det(P) = 1$, a matriz ortogonal P representa uma rotação em $\mathbb{R}^2$.

Considerando

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

e substituindo $\mathbf{v} = P\mathbf{v}_1$ em $\mathbf{v}^t A\mathbf{v}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^t A\mathbf{v} &= (P\mathbf{v}_1)^t A(P\mathbf{v}_1) \\
&= \mathbf{v}_1^t (P^t AP)\mathbf{v}_1 \\
&= \mathbf{v}_1^t D\mathbf{v}_1\,; \quad \text{onde } P^t AP = D \\
&= (x_1 \ \ y_1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\
&= 29y_1^2\,.
\end{aligned}$$

A forma linear se transforma em

$$\begin{aligned}
B\mathbf{v} &= B(P\mathbf{v}_1) \\
&= BP\mathbf{v}_1 \\
&= (-15 \quad -6) \begin{pmatrix} 5/\sqrt{29} & -2/\sqrt{29} \\ 2/\sqrt{29} & 5/\sqrt{29} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\
&= (-3\sqrt{29} \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\
&= -3\sqrt{29}x_1\,.
\end{aligned}$$

Substituindo

$$\mathbf{v}^t A\mathbf{v} = 29y_1^2 \text{ e } B\mathbf{v} = -3\sqrt{29}x_1$$

em $\mathbf{v}^t A\mathbf{v} + B\mathbf{v} = 0$, obtemos

$$29y_1^2 - 3\sqrt{29}x_1 = 0.$$

ou, ainda,

$$x_1 = \frac{\sqrt{29}}{3}y_1^2,$$

onde identificamos facilmente a equação de uma parábola. Veja a **Figura 31.3**.

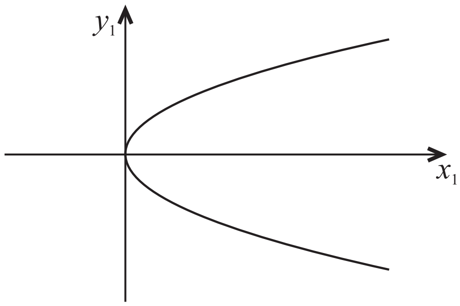


Figura 31.3: A parábola $x_1 = \frac{\sqrt{29}}{3} y_1^2$.

5. a. Reescrevendo a equação $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z = -9$ na forma matricial, temos

$$\mathbf{v}^t A\mathbf{v} + B\mathbf{v} = -9,$$

onde

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = (-6 \quad -6 \quad -4).$$

A matriz A já foi diagonalizada no Exercício 3.b. Encontramos:

$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$;

$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$;

$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$.

Como $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ forma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, temos que

$$P = [\mathbf{u}_1 \ \ \mathbf{u}_2 \ \ \mathbf{u}_3] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

é uma matriz ortogonal que diagonaliza a matriz A, e a matriz diagonal correspondente será

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vale também que $D = P^t AP$.

Observe que $\det(P) = 1$, logo P representa uma rotação em $\mathbb{R}^3$. Considerando

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},$$

e substituindo $\mathbf{v} = P\mathbf{v}_1$ em $\mathbf{v}^t A\mathbf{v}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^t A\mathbf{v} &= (P\mathbf{v}_1)^t A (P\mathbf{v}_1) \\ &= \mathbf{v}_1^t (P^t AP)\mathbf{v}_1 \\ &= \mathbf{v}_1^t D\mathbf{v}_1 \,; \quad \text{onde } \; P^t AP = D \\ &= (x_1 \;\; y_1 \;\; z_1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ &= -x_1^2 - y_1^2 + 2z_1^2 \,. \end{aligned}$$

Agora, substituindo $\mathbf{v} = P\mathbf{v}_1$ em $B\mathbf{v}$, obtemos

$$\begin{aligned} & B\mathbf{v} = B(P\mathbf{v}_1) \\ & = BP\mathbf{v}_1 \\ & = (-6 \; -6 \; -4) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ & = \frac{2}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{16}{\sqrt{3}}z_1 \,. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo

$$\mathbf{v}^t A\mathbf{v} = -x_1^2 - y_1^2 + 2z_1^2 \;\text{ e }\; B\mathbf{v} = \frac{2}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{16}{\sqrt{3}}z_1$$

na equação $\mathbf{v}^t A\mathbf{v} + B\mathbf{v} = -9$, obtemos

$$-x_1^2 - y_1^2 + 2z_1^2 + \frac{2}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{16}{\sqrt{3}}z_1 = -9.$$

Completando os quadrados nas variáveis x_1, y_1 e z_1, obtemos a quádrica

$$-\left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 - \left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(z_1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1.$$

Agora, aplicando a translação

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} \\ y_2 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ z_2 = z_1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\ , \end{cases}$$

obtemos

$$-x_2^2 - y_2^2 + 2z_2^2 = 1,$$

que representa um *hiperbolóide de duas folhas*.

b. Reescrevendo a equação $2xy - 6\sqrt{2}x + 10\sqrt{2}y + z - 31 = 0$ na forma matricial, temos

$$\mathbf{v}^t A\mathbf{v} + B\mathbf{v} = 31,$$

onde

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = (-6\sqrt{2}\ \ 10\sqrt{2}\ \ 1).$$

Deixamos para você, novamente, o exercício de calcular os autovalores e os autovetores correspondentes da matriz A. Obtemos:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ autovetor associado ao autovalor } \lambda_1 = 0;$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ autovetor associado ao autovalor } \lambda_2 = 1;$$

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ autovetor associado ao autovalor } \lambda_3 = -1.$$

Como $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ forma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, temos que

$$P = [\mathbf{u}_1\ \ \mathbf{u}_2\ \ \mathbf{u}_3] = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma matriz ortogonal que diagonaliza a matriz A, e a matriz diagonal correspondente será

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

onde $D = P^tAP$.

Observe que $\det(P) = 1$, logo P representa uma rotação em $\mathbb{R}^3$, a saber, uma rotação de $\pi/4$ radianos em torno do eixo-z. Considerando

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ \text{ e } \ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},$$

e substituindo $\mathbf{v} = P\mathbf{v}_1$ em $\mathbf{v}^tA\mathbf{v}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^tA\mathbf{v} &= (P\mathbf{v}_1)^tA(P\mathbf{v}_1) \\ &= \mathbf{v}_1^t(P^tAP)\mathbf{v}_1 \\ &= \mathbf{v}_1^tD\mathbf{v}_1\,; \quad \text{pois } \ P^tAP = D \\ &= (x_1\ \ y_1\ \ z_1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ &= y_1^2 - z_1^2\,. \end{aligned}$$

Agora, substituindo $\mathbf{v} = P\mathbf{v}_1$ em $B\mathbf{v}$, obtemos

$$\begin{aligned} B\mathbf{v} &= B(P\mathbf{v}_1) \\ &= BP\mathbf{v}_1 \\ &= (-6\sqrt{2}\ \ 10\sqrt{2}\ \ 1)\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ &= (1\ \ \ 4\ \ \ 16)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ &= x_1 + 4y_1 + 16z_1\,. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo

$$\mathbf{v}^t A, \mathbf{v} = y_1^2 - z_1^2 \ \text{ e } \ B\mathbf{v} = x_1 + 4y_1 + 16z_1$$

na equação $\mathbf{v}^t A\mathbf{v} + B\mathrm{v} = -9$, obtemos

$$y_1^2 - z_1^2 + x_1 + 4y_1 + 16z_1 = 31.$$

Completando os quadrados nas variáveis y_1 e z_1, obtemos

$$(y_1^2 + 4y_1) - (z_1^2 - 16z_1) + x_1 = 31$$

$$(y_1 + 2)^2 - 4 - (z_1 - 8)^2 + 64 + x_1 = 31$$

e, por fim,

$$x_1 + 29 = -(y_1 + 2)^2 + (z_1 - 8)^2.$$

Agora, aplicando a translação

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 29 \\ y_2 = y_1 + 2 \\ z_2 = z_1 - 8 \ , \end{cases}$$

obtemos

$$x_2 = -y_2^2 + z_2^2,$$

que representa um *parabolóide hiperbólico*.

6. a. Queremos montar a matriz $A = (a_{ij})$, onde $a_{ij} = F(\mathbf{u}_i, \ \mathbf{u}_j)$, $\mathbf{u}_1 = (1\,,\ 0)$ e $\mathbf{u}_2 = (1\,,\ 1)$. Temos:

$$a_{11} = F(\mathbf{u}_1, \ \mathbf{u}_1) = F((1\,,\ 0), \ (1\,,\ 0)) = 2;$$

$$a_{12} = F(\mathbf{u}_1, \ \mathbf{u}_2) = F((1\,,\ 0), \ (1\,,\ 1)) = -1;$$

$$a_{21} = F(\mathbf{u}_2, \ \mathbf{u}_1) = F((1\,,\ 1), \ (1\,,\ 0)) = 2;$$

$$a_{22} = F(\mathbf{u}_2, \ \mathbf{u}_2) = F((1\,,\ 1), \ (1\,,\ 1)) = 0.$$

Logo,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Queremos montar a matriz $B = (b_{ij})$, onde $b_{ij} = F(\mathbf{v}_i, \ \mathbf{v}_j)$,

$\mathbf{v}_1 = (2\,,\,1)$ e $\mathbf{v}_1 = (1\,,-1)$. Temos:

$$b_{11} = F(\mathbf{v}_1,\,\mathbf{v}_1) = F((2\,,\,1),\,(2\,,\,1)) = 3;$$

$$b_{12} = F(\mathbf{v}_1,\,\mathbf{v}_2) = F((2\,,\,1),\,(1\,,-1)) = 9;$$
$$b_{21} = F(\mathbf{v}_2,\,\mathbf{v}_1) = F((1\,,-1),\,(2\,,\,1)) = 0;$$
$$b_{22} = F(\mathbf{v}_2,\,\mathbf{v}_2) = F((1\,,-1),\,(1\,,-1)) = 6.$$

Logo,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

c. Expressando $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ em função de $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ (os detalhes ficam para você), obtemos:

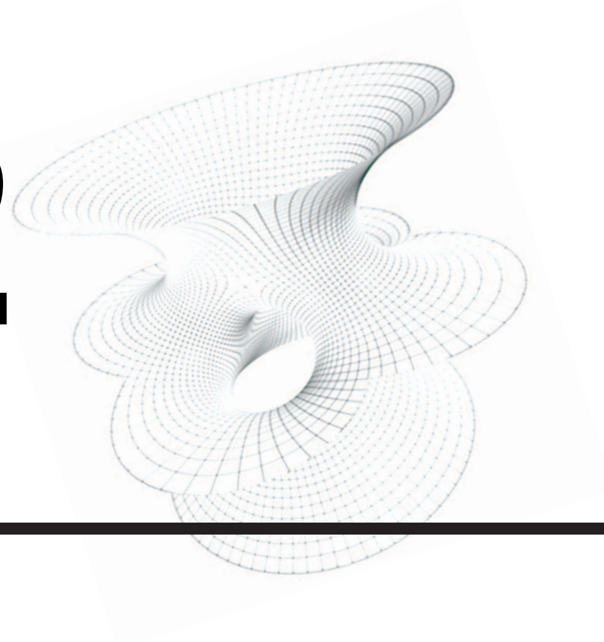
$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= 1\cdot\mathbf{u}_1 + 1\cdot\mathbf{u}_2; \\ \mathbf{v}_2 &= 2\cdot\mathbf{u}_1 + (-1)\cdot\mathbf{u}_2, \end{aligned}$$

e, portanto, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $P^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

onde

$$P^tAP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = B.$$

Aula 32



UM CASO PRÁTICO

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender os conceitos de autovalor e autovetor;
2. reconhecer um escalar como autovalor de uma matriz;
3. reconhecer um vetor como autovetor de uma matriz.

UM MODELO DE CRESCIMENTO POPULACIONAL

Nesta última aula, vamos ilustrar como a teoria de autovalores e autovetores de matrizes com coeficientes reais pode ser usada para analisar um modelo de crescimento populacional.

Iniciaremos nossa discussão com a apresentação de um modelo simples de crescimento populacional. Para isso, vamos supor que certas espécies têm uma taxa de crescimento constante. Isso significa que a população cresce a percentuais iguais em intervalos de tempos iguais.

Vamos considerar uma espécie em que cada indivíduo de uma geração produz r novos descendentes e, logo em seguida, morre. Assim, se p_n denota o número de indivíduos da população da n-ésima geração, supondo que as gerações se sucedem a intervalos de tempos iguais, temos que

$$p_n = r\,p_{n-1}.$$

Por exemplo, se $r = 2$, temos: p_0 é a população inicial da espécie;

$$p_1 = 2\,p_0;$$

$$p_2 = 2\,p_1 = 2\,(2\,p_0) = 2^2 p_0;$$
$$p_3 = 2\,p_2 = 2\,(2^2 p_0) = 2^3 p_0.$$

De modo geral, temos $p_n = 2^n p_0$. E para r arbitrário, temos $p_n = r^n p_0$. Esse modelo pode ser usado, por exemplo, para descrever a população de certa bactéria, na qual, a cada período de tempo, cada bactéria se divide em duas outras. Para esse modelo, a população cresce para o infinito se $r > 1$, decresce para zero se $0 < r < 1$ e permanece constante se $r = 1$.

Como você pode notar, esse modelo populacional é muito simples. Por exemplo, para a maioria das espécies o número de descendentes depende da idade dos pais. No caso da espécie humana, uma mulher com 50 anos de idade tem mais dificuldade de ter filhos que uma de 20 anos. Estudaremos um modelo que leva em consideração esse tipo de complexidade.

Vamos considerar uma certa espécie de pássaros em que o número de machos é igual ao número de fêmeas. Assim, basta controlar o número de fêmeas. Vamos supor, ainda, que o período de reprodução é de um ano e que, após o nascimento de uma nova fêmea, ela só poderá se reproduzir após um ano de vida. Antes de um ano ela será considerada uma fêmea jovem e após um ano será considerada uma fêmea adulta. Podemos, então, denotar por:

$p_{j,n}$ a população de fêmeas jovens após n anos (n períodos de reprodução);

$p_{a,n}$ a população de fêmeas adultas após n anos.

Vamos também assumir que, a cada ano, uma fração α de fêmeas jovens sobrevive e se torna fêmeas adultas, que cada fêmea adulta produz k novas fêmeas jovens e que uma fração β de fêmeas adultas sobrevive.

A suposição de taxa de sobrevivência constante significa que a sobrevivência dos adultos independe da sua idade, o que nem sempre se aplica.

Com as suposições anteriores, podemos relacionar a população de fêmeas jovens e adultas da seguinte forma:

$$\begin{cases} p_{j,n} = k\, p_{j,n-1} \\ p_{a,n} = \alpha\, p_{j,n-1} + \beta\, p_{a,n-1}\,, \end{cases}$$

o que nos dá um sistema linear de ordem 2. Em notação matricial, podemos reescrevê-lo como

$$P_n = AP_{n-1},$$

onde

$$P_n = \begin{pmatrix} p_{j,n} \\ p_{a,n} \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 0 & k \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$P_1 = AP_0;$$
$$P_2 = AP_1 = A(AP_0) = A^2P_0;$$
$$P_3 = AP_2 = A(A^2P_0) = A^3P_0;$$
$$P_4 = AP_3 = A(A^3P_0) = A^4P_0,$$

e, assim, de um modo geral,

$$P_n = A^nP_0,$$

onde

$$P_0 = \begin{pmatrix} p_{j,0} \\ p_{a,0} \end{pmatrix}$$

é a matriz que representa a população inicial de fêmeas (jovens e adultas).

Exemplo 32.1.

Vamos considerar o modelo descrito anteriormente durante um período de 20 anos com matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Essa matriz informa que cada fêmea adulta gera $k = 2$ fêmeas jovens a cada ano e que as taxas de sobrevivência são $\alpha = 0,3$ para fêmeas jovens e $\beta = 0,5$ para fêmeas adultas. Observe que $\alpha < \beta$ significa que as fêmeas jovens têm menos chances de sobreviver que as adultas. Vamos supor, inicialmente, que temos 10 fêmeas adultas e nenhuma jovem; portanto,

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Assim, após um ano, temos

$$P_1 = AP_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Como $p_{j,1} = 20$ e $p_{a,1} = 5$, a população total de fêmeas é de 25 indivíduos após um ano e a razão entre fêmeas jovens e adultas é

$$\frac{p_{j,1}}{p_{a,1}} = \frac{20}{5} = 4.$$

Após o segundo ano, temos

$$P_2 = AP_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8,5 \end{pmatrix}.$$

O valor de 8,5 para fêmeas adultas pode ser interpretado como um total de 8 indivíduos. No entanto, como $p_{j,2} = 10$ e $p_{a,2} = 8,5$, a população total de fêmeas é de 18 indivíduos após dois anos, e a razão entre fêmeas jovens e adultas é

$$\frac{p_{j,2}}{p_{a,2}} = \frac{10}{8,5} = 1,18.$$

Procedendo dessa forma, obtemos a seguinte tabela de valores:

Tabela 32.1

Ano n	Fêmeas jovens $p_{j,n}$	Fêmeas adultas $p_{a,n}$	Total de fêmeas $P_{j,n}$ + $p_{a,n}$	$p_{j,n}/p_{a,n}$
0	0	10	10	0
1	20	5	25	4,00
2	10	8	18	1,18
3	17	7	24	2,34
4	14	8	22	1,66
5	17	8	25	2,00
10	22	12	34	1,87
11	24	12	36	1,88
12	25	13	38	1,88
20	42	22	64	1,88

Retornando ao modelo geral, suponhamos que a matriz A tenha dois autovalores reais distintos, λ_1 e λ_2, com autovetores correspondentes $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, respectivamente. Como $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente independentes, eles formam uma base de $\mathbb{R}^2$ e, portanto, podemos escrever

$$P_0 = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2, \text{ com } a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Como $P_n = A^n P_0$, temos que

$$\begin{aligned} P_n &= A^n P_0 \\ &= A^n(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2), \end{aligned}$$

e, portanto,

$$P_n = a_1 A^n \mathbf{v}_1 + a_2 A^n \mathbf{v}_2.$$

Agora, como $\mathbf{v}_1$ é autovetor associado ao autovalor λ_1, temos

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{v}_1 &= \lambda_1\mathbf{v}_1; \\
\\
A^2\mathbf{v}_1 &= A(A\mathbf{v}_1) \\
&= A(\lambda_1\mathbf{v}_1) \\
&= \lambda_1(A\mathbf{v}_1) \\
&= \lambda_1(\lambda_1\mathbf{v}_1) \\
&= \lambda_1^2\mathbf{v}_1\,; \\
\\
A^3\mathbf{v}_1 &= \lambda_1^3\mathbf{v}_1\,;
\end{aligned}
$$

e, de um modo geral, $A^n\mathbf{v}_1 = \lambda_1^n\mathbf{v}_1$. Analogamente, $A^n\mathbf{v}_2 = \lambda_2^n\mathbf{v}_2$. Portanto, podemos reescrever a equação

$$P_n = a_1A^n\mathbf{v}_1 + a_2A^n\mathbf{v}_2$$

na forma

$$P_n = a_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_2^n\mathbf{v}_2.$$

O polinômio característico da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & k \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ é dado por

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \det(xI_2 - A) \\
&= x^2 - \beta x - k\alpha\,,
\end{aligned}
$$

cujas raízes são

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha k}\right).$$

Como $k > 0$, $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$, temos que $\beta^2 + 4\alpha k > 0$ e, portanto, a matriz A de fato possui dois autovalores reais distintos, λ_1 e λ_2, como supusemos inicialmente. Vemos também que

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha k}\right) > 0$$

e

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha k}\right) < 0,$$

ainda, que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Assim, neste caso, o vetor P_n pode ser reescrito como

$$P_n = \lambda_1^n \left[a_1\mathbf{v}_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n a_2\mathbf{v}_2 \right].$$

Agora, já que $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$, temos que $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \to 0$ quando $n \to +\infty$, ou seja, $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \approx 0$ quando n é muito grande. Nesse caso, teremos

$$P_n \approx a_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1.$$

Isso significa que, após um tempo grande, a população fica proporcional a $\mathbf{v}_1$.

Exemplo 32.2.

Dando continuidade ao **Exemplo 32.1**, como $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$, temos que o polinômio característico é

$$p(x) = x^2 - 0,5x - 0,6.$$

Assim, os autovalores são

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(0,5 + \sqrt{2,65}\right) \approx 1,06$$

e

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(0,5 - \sqrt{2,65}\right) \approx -0,56.$$

Efetuando contas rotineiras que você pode conferir, obtemos os respectivos autovetores:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,53 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,28 \end{pmatrix}.$$

Observe, do autovetor $\mathbf{v}_1$, que

$$\frac{1}{0,53} \approx 1,88,$$

o que explica a razão $p_{j,n}/p_{a,n}$ na quinta coluna da tabela do **Exemplo 32.1**.

No exemplo anterior, trabalhamos com precisão de duas casas decimais nas aproximações numéricas. É claro que obteremos informações mais precisas se usarmos um número maior de casas decimais.

Devemos, também, esclarecer algumas limitações desse modelo. As taxas de nascimento e morte de uma população de pássaros variam de ano para ano e, em particular, dependem do clima da região. Em nossa discussão, assumimos um meio ambiente constante.

Muitos ecologistas também têm observado que as taxas de nascimento e morte variam com o tamanho da população. Em particular, a população não pode crescer mais depois de atingir um certo tamanho limite, pois incorre no problema da falta de alimento. E, ainda, se a população crescesse indefinidamente a uma taxa constante, ela iria superpovoar qualquer ecossistema.

Exercício 32.1.

1. Usando o modelo populacional desenvolvido neste capítulo, determine o número de fêmeas jovens e adultas após períodos de 1, 2, 5, 10, 19 e 20 anos. Em cada caso, calcule também a razão $p_{j,n}/p_{a,n}$. Considere

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad k = 3, \quad \alpha = 0,4 \text{ e } \beta = 0,6.$$

✍ Esperamos que você tenha apreciado os conhecimentos matemáticos desenvolvidos neste curso. Eles são, realmente, de ampla aplicação prática. Na medida em que você desenvolver outras ferramentas matemáticas, você verá esses conceitos ressurgindo em muitos contextos diferentes. No mais, nós, autores, desejamos a você toda a sorte e sucesso na sua caminhada pelo maravilhoso mundo da Matemática.

Soluções de Exercícios Selecionados

Aula 19

Exercício 19.1

1. $[T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. autovalor $\lambda_1 = 1$ com multiplicidade 2: autovetores $\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ e $\mathbf{u}_2 = (0,1,0)$;

   autovalor $\lambda_2 = -1$ com multiplicidade 1: autovetor $\mathbf{u}_3 = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$.

Aula 20

Exercício 20.1

1. Matriz da projeção ortogonal com respeito à base canônica:
   $A = \begin{pmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix}$.

   A diagonalização da matriz A é dada por

   $A = PDP^t =$

   $$= \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Aula 21

Exercício 21.1

1. $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $[T] = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

3. É dada pelo produto de matrizes

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

AULA 22

Exercício 22.1

1. Como $A^t = A$, temos

$$(A^2)^t = (AA)^t = A^tA^t = (A^t)^2 = A^2,$$

garantindo que A^2 é uma matriz simétrica.

2. Sejam P matriz ortogonal $(P^{-1} = P^t)$ e D matriz diagonal tais que $A = PDP^t$. Então

$$A^2 = AA = (PDP^t)(PDP^t) = PD(P^tP)DP^t = PDIDP^t = PD^2P^t,$$

mostrando que A^2 também é diagonalizável por matriz ortogonal.

3. Como A é uma matriz simétrica, temos, pelo Teorema 22.3, que A é diagonalizável por matriz ortogonal. Os autovalores de A são:

$\lambda_1 = 3$ com multiplicidade algébrica 2;
$\lambda_2 = -1$ com multiplicidade algébrica 2.

Uma base ortonormal para o autoespaço $E(3)$ é dada por:

$$\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0);$$
$$\mathbf{u}_2 = (0, 0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}),$$

enquanto uma base para o autoespaço $E(-1)$ é dada por:

$$\mathbf{u}_3 = (1/\sqrt{2}, 0, 0);$$
$$\mathbf{u}_4 = (0, 0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}).$$

Assim, as matrizes

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{e} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

satisfazem $A = PDP^t$.

AULA 23

Exercício 23.1

1. a. $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

   b. $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$;

   $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   c. $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$;

   $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2. Observe que $\lambda = 5$ é um autovalor de A, mas $\mathbf{v} = (-1,1,0)$ não é um autovetor correspondente ao autovalor $\lambda = 5$. Temos:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

AULA 24

Exercício 24.1

1. A matriz que representa o operador T com respeito à base canônica é
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Como A é uma matriz simétrica, segue que o operador T é autoadjunto.

2. A base pode ser $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, dada por
$\mathbf{u}_1 = (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3})$; $\mathbf{u}_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2},\ 0)$ e
$\mathbf{u}_3 = (-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$.

AULA 25

Exercício 25.1

1. Para todo $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} F(\mathbf{u} + a\mathbf{w},\ \mathbf{v}) &= (\mathbf{u} + a\mathbf{w})^t A\mathbf{v} \\ &= (\mathbf{u}^t + a\mathbf{w}^t) A\mathbf{v} \\ &= \mathbf{u}^t A\mathbf{v} + a(\mathbf{w}^t A\mathbf{v}) \\ &= F(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) + aF(\mathbf{w},\ \mathbf{v}). \end{aligned}$$
Assim, F é linear na primeira variável. De forma análoga, mostra-se que F também é linear na segunda variável.

2. a. $A = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b. $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

3. a. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b. $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

   c. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

AULA 27

Exercício 27.1

1. A hipérbole de equação $\dfrac{x_2^2}{12} - \dfrac{y_2^2}{8} = 1$.

AULA 28

Exercício 28.1

1. $z_2 = x_2^2 - y_2^2$; parabolóide hiperbólico.

2. $x_2^2 + y_2^2 - 2z_2^2 = -19$; hiperbolóide de duas folhas.

3. $\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{4} + \frac{z_2^2}{2} = 1$; elipsóide.

AULA 29

Exercício 29.1

1. $\lambda_1 = 2 + i; \quad \mathbf{v}_1 = (-1 + i\,,\,1)$
   $\lambda_2 = 2 - i; \quad \mathbf{v}_2 = (-1 - i\,,\,1)$

2. O polinômio característico é $p(x) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$, cujas raízes são $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$, com autovetores associados $\mathbf{v}_1 = (1\,,-i)$ e $\mathbf{v}_2 = (1\,,\,i)$, respectivamente.

3. Basta observar que, se A é matriz real, então seu polinômio característico $p(x)$ tem coeficientes reais. Logo, se λ é uma raiz complexa de $p(x)$, então $\overline{\lambda}$ também é raiz de $p(x)$.

AULA 32

Exercício 32.1

1. Os autovalores são $\lambda_1 \approx 1,44$ e $\lambda_2 \approx -0,836$, com autovalores correspondentes

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2,09 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3,57 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Valores:

Tabela 32.2

Ano n	Fêmeas jovens $p_{j,n}$	Fêmeas adultas $p_{a,n}$	Total de fêmeas $P_{j,n} + p_{a,n}$	$p_{j,n}/p_{a,n}$
0	0	12	12	0
1	36	7	43	5,14
2	21	19	40	1,11
5	104	45	149	2,31
10	600	291	981	2,06
19	16,090	7,737	23,827	2,08
20	23,170	11,140	34,310	2,08