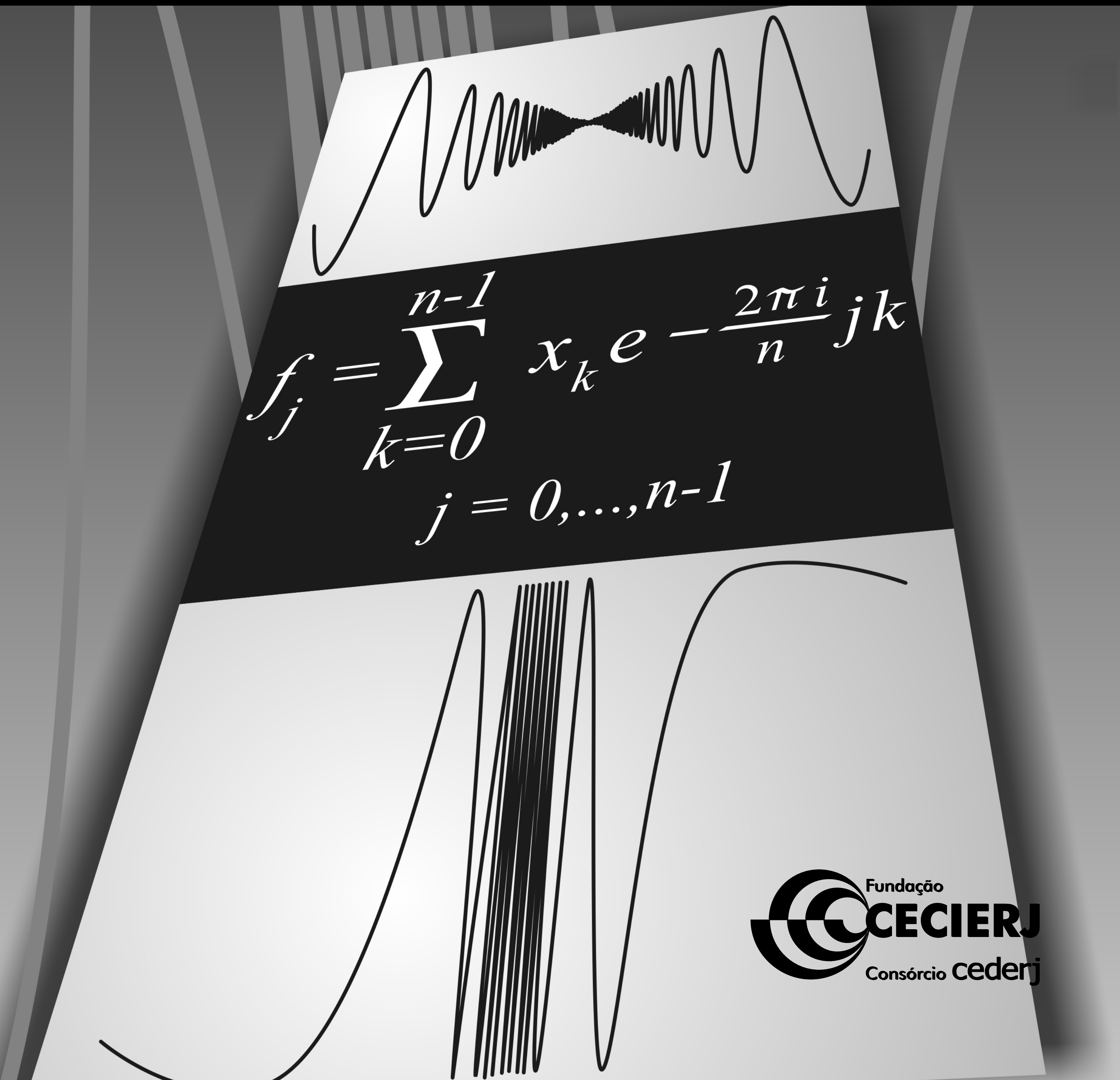
Módulo 2

Volume 2

Hermano Frid

Análise Real



Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação

CECIERJ

Consórcio cederj

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Análise Real

Volume 2 - Módulo 2

Hermano Frid

GOVERNO DO
Rio de Janeiro

SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Hermano Frid

EDITOR
Fábio Rapello Alencar

COORDENAÇÃO GRÁFICA
Ronaldo d'Aguiar Silva

PRODUÇÃO GRÁFICA
Verônica Paranhos

F898a
Frid, Hermano.
Análise real. v. 2. / Hermano Frid. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

182p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 978-85-7648-680-0

1. Análise real. 2. Funções. 3. Limites. 4. Regra de cadeia. 5. Derivada. I. Título.

CDD: 515

2010.2

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT e AACR2.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

Prefácio

O texto que ora introduzimos tem como propósito servir de Notas de Aula para o curso de Análise Real do CEDERJ. O texto é dividido em aulas. São 32 aulas cujos temas serão descritos mais adiante. Cada aula contém uma série de exercícios propostos. Algumas aulas contêm ao final seções entituladas "Prossiga:...". Essas seções são textos complementares e não fazem parte do conteúdo propriamente dito das aulas. Elas servem para saciar a curiosidade de leitores mais empenhados com relação a questões surgidas no texto da aula ou a tópicos relacionados com essas questões.

As referências básicas para a elaboração destas Notas são os livros [1, 2, 3, 4] que compõem a bibliografia. Claramente, por tratar-se de uma matéria tão fundamental, objeto de inúmeras obras, dentre as quais grandes clássicos da literatura matemática, diversas outras referências além dessas quatro explicitamente citadas terão influído, talvez de modo menos direto. Como o propósito do texto é somente o de servir de guia para um curso com programa bem definido, não houve de nossa parte nenhuma tentativa de originalidade. Assim, em grande parte, nosso trabalho se resumiu a fazer seleção, concatenação e edição de material extraído das referências citadas, à luz do programa a ser desenvolvido no curso.

A seguir damos a lista dos temas das aulas que compõem o curso.

- **Módulo 1:**

Aula 1: Preliminares: Conjuntos e Funções.

Aula 2: Os Números Naturais e o Princípio da Indução.

Aula 3: Conjuntos Finitos, Enumeráveis e Não-Enumeráveis.

Aula 4: Os Números Reais I.

Aula 5: Os Números Reais II.

Aula 6: Sequências e Limites.

Aula 7: Operações e Desigualdades com Limites de Sequências.

Aula 8: Sequências Monótonas e Subseqüências.

Aula 9: Critério de Cauchy e Limites Infinitos.

Aula 10: Séries Numéricas.

Aula 11: Convergência Absoluta e Não-Absoluta de Séries.

Aula 12: Limites de Funções.

Aula 13: Teoremas de Limites de Funções.

Aula 14: Funções Contínuas.

Aula 15: Combinações de Funções Contínuas.

Aula 16: Funções Contínuas em Intervalos.

- **Módulo 2:**

Aula 17: Continuidade Uniforme.

Aula 18: Limites Laterais, Limites Infinitos e no Infinito.

Aula 19: Funções Monótonas e Função Inversa.

Aula 20: A Derivada.

Aula 21: A Regra da Cadeia.

Aula 22: O Teorema do Valor Médio.

Aula 23: O Teorema de Taylor. Máximos e Mínimos Locais. Funções Convexas.

Aula 24: Integral de Riemann.

Aula 25: Funções Integráveis a Riemann.

Aula 26: O Teorema Fundamental do Cálculo.

Aula 27: Sequências de Funções.

Aula 28: Câmbio de Limites.

Aula 29: Funções Exponenciais e Logaritmos.

Aula 30: Funções Trigonométricas.

Aula 31: Topologia na Reta.

Aula 32: Conjuntos Compactos.

Bibliografia

[1] Ávila, G.- Análise Matemática para Licenciatura; 2^a edição. Ed. Edgar Blücher, São Paulo, 2005.

[2] Bartle, R.G., Sherbert, D.R.- Introduction to Real Analysis; Third Edition. John Wiley & Sons, New York, 2000.

[3] Lima, E.L.- Análise na Reta; 8^a edição. Coleção Matemática Universitária, Instituto de Matemática Pura e Aplicada-IMPA, 2006.

[4] Rudin, W.- Principles of Analysis; Third Edition. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1976.

Aula 17 – Continuidade Uniforme

Metas da aula: Discutir o conceito de função uniformemente contínua, estabelecer o Teorema da Continuidade Uniforme e o Teorema da Extensão Contínua.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber a definição de função uniformemente contínua bem como seu uso para demonstrar se uma função é ou não uniformemente contínua.
- Saber os enunciados do Teorema da Continuidade Uniforme e do Teorema da Extensão Contínua bem como a aplicação desses resultados em casos específicos.

Introdução

Nesta aula vamos apresentar o conceito de função uniformemente contínua sobre um conjunto dado. Como veremos, trata-se de uma propriedade que determinadas funções apresentam que é mais forte que a propriedade de ser contínua sobre o mesmo conjunto. Estabeleceremos também dois resultados muito importantes relacionados com esse conceito: o Teorema da Continuidade Uniforme e o Teorema da Extensão Contínua.

Funções Uniformemente Contínuas

Iniciaremos apresentando a definição de função uniformemente contínua que será discutida subsequentemente.

Definição 17.1
Diz-se que uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *uniformemente contínua em* X se para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se x e $\bar{x} \in X$ satisfazem $|x - \bar{x}| < \delta$, então $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$.

Como podemos ver, a definição anterior se assemelha muito com a Definição 14.1 de função contínua em $\bar{x}$, com $\bar{x}$ podendo variar em todo conjunto X. O ponto crucial que distingue a Definição 17.1 da Definição 14.1 é que o número $\delta > 0$ na Definição 14.1 depende em geral não apenas de $\varepsilon > 0$ mas também de $\bar{x} \in X$. Já na Definição 17.1 o número $\delta > 0$ *deve depender somente de* $\varepsilon > 0$! Ou seja, para que a função seja uniformemente contínua em X, dado qualquer $\varepsilon > 0$, devemos ser capazes de encontrar um $\delta > 0$ tal que para todo $\bar{x} \in X$ se $x \in V_\delta(\bar{x})$, então $f(x) \in V_\varepsilon(f(\bar{x}))$.

Exemplos 17.1

(a) Se $f(x) = 3x + 1$, então $|f(x) - f(\bar{x})| = 3|x - \bar{x}|$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, se tomarmos $\delta = \varepsilon/3$, então para todos $x, \bar{x} \in \mathbb{R}$, $|x - \bar{x}| < \delta$ implica $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$. Portanto, $f(x) = 3x + 1$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$. Da mesma forma, verificamos que toda função afim, isto é, da forma $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$. De fato, o caso $a = 0$ é trivial já que a função é constante, e se $a \neq 0$, como $|f(x) - f(\bar{x})| = |a||x - \bar{x}|$, dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\delta = \varepsilon/|a|$ para termos que se $x, \bar{x} \in \mathbb{R}$ e $|x - \bar{x}| < \delta$, então $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$.

(b) Consideremos a função $f(x) = 1/x$ em $X := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ (veja Figura **17.1**). Como

$$|f(x) - f(\bar{x})| = \frac{1}{|x||\bar{x}|}|x - \bar{x}|,$$

dado $\bar{x} > 0$ e $\varepsilon > 0$, vemos que se $\delta := \min\{\frac{1}{2}|\bar{x}|, \frac{1}{2}\bar{x}^2\varepsilon\}$, então $|x - \bar{x}| < \delta$ implica $\frac{1}{2}\bar{x} < x < \frac{3}{2}\bar{x}$. Logo, se $|x - \bar{x}| < \delta$ temos, em particular, $1/|x||\bar{x}| < 2/\bar{x}^2$ e, portanto,

$$|f(x) - f(\bar{x})| < \frac{2}{\bar{x}^2}|x - \bar{x}| < \frac{2}{\bar{x}^2}\delta < \varepsilon,$$

o que prova que f é contínua em $\bar{x}$, como já era sabido. Observe que o δ que definimos depende não só ε mas também de $\bar{x}$. Poderíamos ter definido δ de vários outros modos capazes de nos fornecer a desigualdade desejada $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$, mas em qualquer uma dessas outras definições δ sempre dependeria inevitavelmente de $\bar{x}$, além de ε, e de tal modo que $\delta \to 0$ quando $\bar{x} \to 0$, como ficará mais claro quando analisarmos a seguir o critério de negação da continuidade uniforme.

Será útil escrevermos com precisão a condição equivalente a dizer que uma função f *não* é uniformemente contínua, isto é, a proposição equivalente à negação da condição dada pela Definição 17.1. Para enfatizar, colocaremos essa sentença como enunciado do seguinte teorema ao qual chamaremos de critério de negação da continuidade uniforme. A prova será deixada para você como simples exercício.

Teorema 17.1 (Critério de Negação da Continuidade Uniforme)
Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Então as seguintes condições são equivalentes:

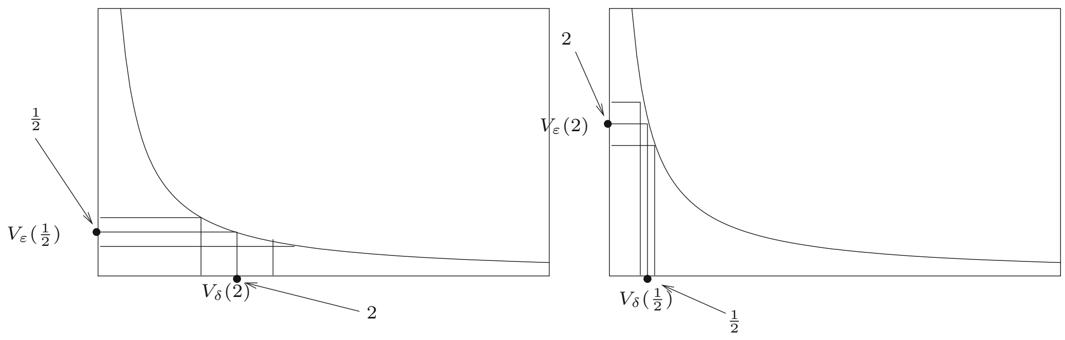


Figura **17.1**: Dois gráficos de $f(x) := 1/x$ para $x > 0$. Observe que o δ máximo é cada vez menor à medida que $\bar{x}$ se aproxima de 0.

(i) f não é uniformemente contínua em X.

(ii) Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existem pontos $x_\delta, \bar{x}_\delta$ em X tais que $|x_\delta - \bar{x}_\delta| < \delta$ e $|f(x_\delta) - f(\bar{x}_\delta)| \geq \varepsilon_0$.

(iii) Existe $\varepsilon_0 > 0$ e duas sequências (x_n) e $(\bar{x}_n)$ em X tais que $\lim(x_n - \bar{x}_n) = 0$ e $|f(x_n) - f(\bar{x}_n)| \geq \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos 17.2

(a) Podemos aplicar o critério de negação da continuidade uniforme 17.1 para verificar que $f(x) = 1/x$ não é uniformemente contínua em $X = (0, \infty)$. De fato, se $x_n := 1/n$ e $\bar{x}_n := 1/(n+1)$, então $\lim(x_n - \bar{x}_n) = 0$, mas $|f(x_n) - f(\bar{x}_n)| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) De modo semelhante, podemos usar o critério 17.1 para verificar que a função $f(x) = \text{sen}(1/x)$ não é uniformemente contínua em $X = (0, \infty)$. Com efeito, definimos $x_n := 1/(n\pi)$ e $\bar{x}_n := 2/((2n-1)\pi)$. Então $\lim(x_n - \bar{x}_n) = 0$, mas $|f(x_n) - f(\bar{x}_n)| = |0 - (\pm 1)| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Apresentamos a seguir um importante resultado que assegura que uma função contínua num intervalo limitado fechado é uniformente contínua nesse intervalo.

Teorema 17.2 (da Continuidade Uniforme)
Seja $I := [a, b]$ um intervalo limitado fechado e seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua em I. Então f é uniformemente contínua em I.

Prova: Se f não é uniformemente contínua em I, então, pelo Teorema 17.1, existem $\varepsilon_0 > 0$ e duas sequências (x_n) e $(\bar{x}_n)$ em I tais que $|x_n - \bar{x}_n| < 1/n$

e $|f(x_n) - f(\bar{x}_n)| \geq \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como I é limitado, a sequência (x_n) é limitada e, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass 8.5, existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) que converge a um certo $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Como $a \leq x_n \leq b$, segue do Teorema 7.5 que $a \leq \bar{x} \leq b$, isto é, $\bar{x} \in I$. Também é claro que a subsequência correspondente $(\bar{x}_{n_k})$ satisfaz $\lim \bar{x}_{n_k} = \bar{x}$, já que

$$|\bar{x}_{n_k} - \bar{x}| \leq |\bar{x}_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \bar{x}|.$$

Agora, como f é contínua em I, f é contínua em $\bar{x}$ e, portanto, ambas as sequências $(f(x_{n_k}))$ e $(f(\bar{x}_{n_k}))$ têm que convergir a $f(\bar{x})$. Mas isso é absurdo já que $|f(x_n) - f(\bar{x}_n)| \geq \varepsilon_0$. Temos então uma contradição originada pela hipótese de que f não é uniformemente contínua em I. Concluímos daí que f é uniformemente contínua em I. $\square$

Funções Lipschitz

A seguir vamos definir uma classe especial de funções cuja propriedade característica implica imediatamente, como veremos, a continuidade uniforme de seus membros em seus respectivos domínios.

Definição 17.2
Seja $X \subset \mathbb{R}$ e seja $f : X \to \mathbb{R}$. Diz-se que f é uma *função Lipschitz* ou que f satisfaz uma *condição Lipschitz* em X se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leq C|x - \bar{x}| \qquad \text{para todos } x, \bar{x} \in X. \tag{17.1}$$

Quando X é um intervalo em $\mathbb{R}$, a condição (17.1) admite a seguinte interpretação geométrica. Podemos escrever (17.1) como

$$\left| \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \right| \leq C, \qquad x, \bar{x} \in I,\ x \neq \bar{x}.$$

A expressão dentro do valor absoluto na desigualdade anterior é o valor da inclinação (ou coeficiente angular) de um segmento de reta ligando os pontos $(x, f(x))$ e $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ do gráfico de f. Assim, a função f satisfaz uma condição Lipschitz se, e somente se, as inclinações de todos os segmentos de reta ligando dois pontos quaisquer do gráfico de f sobre I são limitados pelo número C.

Uma consequência imediata da definição de função Lipschitz é a seguinte proposição.

Teorema 17.3
Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz, então f é uniformemente contínua em X.

Prova: Se a condição (17.1) é satisfeita, então, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $\delta := \varepsilon/C$. Se $x, \bar{x} \in X$ satisfazem $|x - \bar{x}| < \delta$, então

$$|f(x) - f(\bar{x})| < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Portanto, f é uniformemente contínua em X. □

Exemplos 17.3

(a) Se $f(x) := x^2$ em $X := (0, b)$, onde $b > 0$, então

$$|f(x) - f(\bar{x})| = |x + \bar{x}||x - \bar{x}| \leq 2b|x - \bar{x}|$$

para todos $x, \bar{x} \in (0, b)$. Assim, f satisfaz (17.1) com $C := 2b$ em X e, portanto, f é uniformemente contínua em X.

Naturalmente, como f está definida e é contínua no intervalo limitado fechado $[0, b]$, então deduzimos do Teorema da Continuidade Uniforme 17.2 que f é uniformemente contínua em $[0, b]$ e, portanto, também em $X = (0, b)$. Aqui usamos o fato de que se $X \subset Y \subset \mathbb{R}$ e f é uniformemente contínua em Y, então f é uniformemente contínua em X (por quê?).

(b) Nem toda função uniformemente contínua num conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é Lipschitz em X!

Como exemplo disso, consideremos a função $f(x) := \sqrt{x}$, $x \in I := [0, 1]$. Como f é contínua em I, segue do Teorema da Continuidade Uniforme 17.3 que f é uniformemente contínua em I. Contudo, não existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C|x|$ para todo $x \in I$. Com efeito, se tal desigualdade valesse para todo $x \in (0, 1]$, então, multiplicando a desigualdade por $1/\sqrt{x}$, teríamos $1 \leq C\sqrt{x}$. Como o membro à direita da última desigualdade tende a 0 quando x decresce para zero, partindo dela chegaríamos a $1 \leq 0$, que é absurdo. Portanto, f não é uma função Lipschitz em I.

(c) Em certos casos, é possível combinar o Teorema da Continuidade Uniforme 17.2 com o Teorema 17.3 para demonstrar a continuidade uniforme de uma dada função num conjunto.

Por exemplo, consideremos a função $f(x) := \sqrt{x}$ no conjunto $X = [0, \infty)$. A continuidade uniforme de f no intervalo $[0, 1]$ segue do Teorema da Continuidade Uniforme como vimos em (b). Se $J := [1, \infty)$, então para $x, \bar{x} \in J$ temos

$$|f(x) - f(\bar{x})| = |\sqrt{x} - \sqrt{\bar{x}}| = \frac{|x - \bar{x}|}{\sqrt{x} + \sqrt{\bar{x}}} \leq \frac{1}{2}|x - \bar{x}|.$$

Logo, f é uma função Lipschitz em J com $C = \frac{1}{2}$ e, portanto, segue do Teorema 17.3 que f é uniformemente contínua em J.

Agora, $X = I \cup J$, f é contínua em X e $I \cap J = \{1\}$. Além disso, se $x \in I$ e $\bar{x} \in J$, então $x \leq \bar{x}$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, como f é uniformemente contínua em I, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $x, \bar{x} \in I$ e $|x - \bar{x}| < \delta_1$, então $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$. Da mesma forma, como f é uniformemente contínua em J, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $x, \bar{x} \in J$ e $|x - \bar{x}| < \delta_2$, então $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$. Mais ainda, como f é contínua em 1, existe $\delta_3 > 0$ tal que se $x, \bar{x} \in V_{\delta_3}(1) = \{y \in \mathbb{R} : |y - 1| < \delta_3\}$, então $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$ (por quê?). Então, tomando

$$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\},$$

deduzimos que se $x, \bar{x} \in X$ e $|x - \bar{x}| < \delta$, então $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$ (por quê?). Logo, f é uniformemente contínua em X.

O Teorema da Extensão Contínua

Vimos que se f é uma função contínua num intervalo limitado fechado $[a, b]$, então f é uniformemente contínua em $[a, b]$. Em particular, se f é uma função contínua em $[a, b]$, então f é uniformemente contínua no intervalo limitado aberto (a, b) (por quê?). No que segue, vamos provar uma espécie de recíproca desse fato, isto é, que se f é uniformemente contínua no intervalo limitado aberto (a, b), então f pode ser extendida a uma função contínua sobre o intervalo limitado fechado $[a, b]$. Antes porém vamos estabelecer um resultado que é interessante por si só.

Teorema 17.4
Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua num subconjunto X de $\mathbb{R}$ e se (x_n) é uma sequência de Cauchy em X, então $(f(x_n))$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Prova: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em X, e seja dado $\varepsilon > 0$. Primeiro escolhemos $\delta > 0$ tal que se $x, \bar{x} \in X$ satisfazem $|x - \bar{x}| < \delta$, então $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$. Como (x_n) é uma sequência de Cauchy, existe $N_0(\delta)$ tal que $|x_n - x_m| < \delta$ para todos $n, m > N_0(\delta)$. Pela escolha de δ, isso implica que para $n, m > N_0(\delta)$, temos $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Portanto, a sequência $(f(x_n))$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. □

Agora sim estamos prontos para estabelecer o resultado sobre a extensão de funções uniformemente contínuas.

Teorema 17.5 (da Extensão Contínua)
Se f é uma função uniformemente contínua num intervalo aberto limitado (a, b), ou ilimitado (a, ∞) ou $(-\infty, b)$, então f pode ser estendida como função contínua aos intervalos fechados correspondentes $[a, b]$, $[a, \infty)$ e $(-\infty, b]$.

Prova: Vamos considerar o caso de um intervalo aberto limitado (a, b); o caso de um intervalo ilimitado (a, ∞) ou $(-\infty, b)$ decorre imediatamente da análise do caso limitado, sendo ainda mais simples, e será deixado para você como exercício. Suponhamos então que f seja uniformemente contínua em (a, b). Mostraremos como estender f a a; o argumento para estender ao ponto b é semelhante.

Essa extensão é feita mostrando-se que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ existe. Isso por sua vez pode ser alcançado utilizando-se o critério sequencial para limites. Se (x_n) é uma sequência em (a, b) com $\lim x_n = a$, então ela é uma sequência de Cauchy e, pelo Teorema 17.4, a sequência $(f(x_n))$ também é de Cauchy. Pelo Teorema 9.1 (Critério de Cauchy), $(f(x_n))$ é convergente, isto é, existe $\lim f(x_n) = L$. Se $(\bar{x}_n)$ é uma outra sequência qualquer em (a, b) com $\lim \bar{x}_n = a$, então $\lim(x_n - \bar{x}_n) = a - a = 0$. Assim, pela continuidade uniforme de f, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$, $|x_n - \bar{x}_n| < \delta(\varepsilon)$ e, portanto, $|f(x_n) - f(\bar{x}_n)| < \varepsilon$, o que prova que $\lim(f(x_n) - f(\bar{x}_n)) = 0$. Logo, $\lim f(\bar{x}_n) = \lim f(x_n) = L$.

Como obtemos o mesmo limite L para $(f(x_n))$ para toda sequência (x_n) em (a, b) convergindo a a, concluímos pelo critério sequencial para limites que f tem limite L em a. O mesmo argumento se aplica para b. Assim, concluímos que f tem extensão contínua ao intervalo $[a, b]$. □

Exemplos 17.4

(a) A função $f(x) := \text{sen}(1/x)$ em $(0, \infty)$ não possui limite em $\bar{x} = 0$; concluímos pelo Teorema da Extensão Contínua 17.5 que f não é uniformemente contínua em $(0, b)$, qualquer que seja $b > 0$.

(b) A função $f(x) := x \operatorname{sen}(1/x)$ em $(0, \infty)$ satisfaz $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Fazendo, $f(0) := 0$, vemos que f assim estendida é contínua em $[0, \infty)$. Portanto, f é uniformemente contínua em $(0, b)$, qualquer que seja $b > 0$, já que é a restrição ao intervalo aberto $(0, b)$ de uma função contínua em $[0, b]$ e esta, por sua vez, é uniformemente contínua, pelo Teorema da Continuidade Uniforme 17.2.

Exercícios 17.1

1. Mostre que a função $f(x) := 1/x$ é uniformemente contínua em $X := [a, \infty)$, para qualquer $a > 0$.

2. Mostre que a função $f(x) := \operatorname{sen}(1/x)$ é uniformemente contínua em $X := [a, \infty)$ para todo $a > 0$, mas não é uniformemente contínua em $Y := (0, \infty)$.

3. Use o critério da negação da continuidade uniforme 17.2 para mostrar que as seguintes funções não são uniformemente contínuas.

   (a) $f(x) := x^2$, em $X := [0, \infty)$.

   (b) $f(x) := \cos(1/x^2)$, em $X := (0, \infty)$.

4. Mostre que a função $f(x) := 1/(1 + x^2)$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

5. Mostre que se f e g são uniformemente contínuas em $X \subset \mathbb{R}$, então $f + g$ é uniformemente contínua em X.

6. Mostre que se f e g são *limitadas* e uniformemente contínuas em $X \subset \mathbb{R}$, então fg é uniformemente contínua em X.

7. Se $f(x) := x$ e $g(x) := \operatorname{sen} x$, mostre que f e g são ambas uniformemente contínuas em $\mathbb{R}$, mas seu produto fg não é função uniformemente contínua em $\mathbb{R}$. Por que o ítem anterior não é aplicável a esse exemplo? [Dica: Investigue os valores da função fg para as sequências $x_n = 2\pi n$ e $y_n = 2\pi n + 1/n$.]

8. Prove que se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são uniformemente contínuas em $\mathbb{R}$, então sua composta $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

9. Prove que se f é uniformemente contínua em $X \subset \mathbb{R}$ e $|f(x)| \geq k > 0$ para todo $x \in X$, então a função $1/f$ é uniformemente contínua em X.

10. Prove que se f é uniformemente contínua num conjunto *limitado* $X \subset \mathbb{R}$, então f é limitada em X.

11. Mostre que se f é contínua em $[0, \infty)$ e uniformemente contínua em $[a, \infty)$ para algum $a > 0$, então f é uniformemente contínua em $[0, \infty)$.

12. Diz-se que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *periódica* em $\mathbb{R}$ se existe um número $\ell > 0$ tal que $f(x + \ell) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que uma função contínua periódica em $\mathbb{R}$ é limitada e uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Aula 18 – Limites Laterais, Limites Infinitos e no Infinito

Metas da aula: Apresentar algumas extensões ao conceito de limite de funções. Especificamente, serão definidos os conceitos de limite lateral à esquerda, limite lateral à direita, convergência de uma função a $\pm\infty$ quando x converge (à direita, ou à esquerda) para um ponto de acumulação do domínio, e de limite de funções quando x tende a $\pm\infty$.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber as definições de limite lateral à esquerda e limite lateral à direita de uma função num ponto de acumulação do seu domínio.
- Saber o que significa uma função tender a $\pm\infty$ quando $x \to \bar{x}$, $x \to \bar{x}+$ e $x \to \bar{x}-$.
- Saber o conceito de limite de uma função quando x tende a $\pm\infty$.

Introdução

Nesta aula apresentaremos algumas extensões úteis do conceito de limite de uma função. A primeira dessas extensões é o conceito de limite lateral de uma função f à direita e à esquerda de um ponto de acumulação $\bar{x}$ de seu domínio $X \subset \mathbb{R}$. Essa noção se reduz à noção usual de limite quando, em lugar de considerarmos a função f definida em X, a consideramos como definida em $X \cap (\bar{x}, \infty)$, no caso do limite à direita, e $X \cap (-\infty, \bar{x})$, no caso do limite à esquerda.

A segunda extensão será a introdução de limites $+\infty$ e $-\infty$ de uma função num ponto de acumulação do seu domínio, que, por sua vez, também se estende naturalmente a limites laterais. Apesar de $+\infty$ e $-\infty$ não serem números reais e, portanto, essa noção de limite não corresponder a uma idéia de convergência aproximativa dos valores da função para um determinado valor, no sentido da distância na reta, trata-se de um conceito que exprime uma visão bastante intuitiva. Mais especificamente, essa definição exprime a idéia natural de tendência de crescimento (decrescimento) indefinitivo dos valores de uma função $f(x)$ de modo regular, embora não necessariamente monótono, quando x se aproxima de um ponto de acumulação $\bar{x}$ do domínio de f.

A terceira extensão será a noção de limite de uma função $f(x)$ quando x tende a $+\infty$ ou $-\infty$, no caso em que o domínio de f contém um intervalo ilimitado do tipo (a,∞) ou $(-\infty,b)$, respectivamente. Essa noção exprime a idéia intuitiva de que os valores $f(x)$ se aproximam mais e mais de um determinado valor L à medida que x cresce sem parar ou decresce sem parar. Finalmente, essa última extensão do conceito de limite também admite, por seu turno, uma extensão aos "valores" $L=\pm\infty$, assim como a noção original de limite e aquela de limites laterais.

Todas essas noções são úteis porque exprimem um comportamente especial de uma função quando x se aproxima unilateralmente ou bilateralmente de um determinado ponto de acumulação de seu domínio, ou quando x cresce ou decresce indefinitivamente. Em particular, elas são úteis quando queremos fazer um esboço do gráfico de uma dada função. Do ponto de vista matemático elas não acrescentam nenhuma dificuldade particular à analise de questões, em relação à noção de limite de função já estudada. Por isso mesmo, a discussão que faremos aqui pode parecer um pouco tediosa por ser em muitos aspectos repetitiva. Por outro lado, temos certeza de que você não terá qualquer dificuldade em assimilar rapidamente todas essas novas noções.

Limites Laterais

A seguir damos a definição de limite de uma função à direita e à esquerda de um ponto de acumulação de seu domínio.

Definição 18.1
Seja $X\subset\mathbb{R}$ e seja $f:X\to\mathbb{R}$.

(i) Se $\bar{x}\in\mathbb{R}$ é um ponto de acumulação do conjunto $X\cap(\bar{x},\infty)=\{x\in X : x>\bar{x}\}$, então dizemos que $L\in\mathbb{R}$ é *limite à direita de f em $\bar{x}$* e escrevemos

$$\lim_{x\to\bar{x}+} f = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to\bar{x}+} f(x) = L$$

se dado $\varepsilon>0$ existe um $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que para todo $x\in X$ com $0<x-\bar{x}<\delta$, então $|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$.

(ii) Se $\bar{x}\in\mathbb{R}$ é um ponto de acumulação do conjunto $X\cap(-\infty,\bar{x})=\{x\in X : x<\bar{x}\}$, então dizemos que $L\in\mathbb{R}$ é *limite à esquerda de f em $\bar{x}$* e escrevemos

$$\lim_{x\to\bar{x}-} f = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to\bar{x}-} f(x) = L$$

se dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $x \in X$ com $0 < \bar{x} - x < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Os limites $\lim_{x\to\bar{x}+} f$ e $\lim_{x\to\bar{x}-} f$ são denominados conjuntamente *limites unilaterais* ou simplesmente *limites laterais de f em $\bar{x}$*.

Como o limite lateral à direita de uma função f num ponto de acumulação $\bar{x}$ de seu domínio X nada mais é que o limite da função $f|X \cap (\bar{x}, \infty)$ em $\bar{x}$, do mesmo modo que o limite lateral à esquerda em $\bar{x}$ é a mesma coisa que o limite da função $f|X \cap (\bar{x}, \infty)$ em $\bar{x}$, segue que *todas as propriedades e proposições válidas para o limite usual de uma função valem também para os limites laterais* com as devidas adaptações. Em particular, os limites laterais são únicos e valem os resultados sobre operações com limites, desigualdades, o critério sequencial, etc.

Por exemplo, o critério sequencial no caso de limites laterais tem o enunciado seguinte, cuja demonstração, inteiramente análoga àquela para o limite usual, deixamos para você como exercício.

Teorema 18.1
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de $X \cap (\bar{x}, \infty)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\lim_{x\to\bar{x}+} f = L$.

(ii) Para toda sequência (x_n) que converge a $\bar{x}$ tal que $x_n \in X$ e $x_n > \bar{x}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência $(f(x_n))$ converge a L.

Deixamos para você como exercício a formulação e prova do resultado análogo ao anterior para limites à esquerda.

O seguinte resultado relaciona a noção de limite de uma função aos limites laterais. Sua prova é imediata levando em conta a redução do conceito de limites laterais ao de limite das funções $f|X \cap (\bar{x}, \infty)$ e $f|X \cap (-\infty, \bar{x})$. Deixamos os detalhes da prova para você como exercício.

Teorema 18.2
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de ambos os conjuntos $X \cap (\bar{x}, \infty)$ e $X \cap (-\infty, \bar{x})$. Então $\lim_{x\to\bar{x}} f = L$ se, e somente se, $\lim_{x\to\bar{x}+} f = L = \lim_{x\to\bar{x}-} f$.

Exemplos 18.1

(a) A função $f(x) := \operatorname{sgn}(x)$ (veja Exemplo 12.3(b)) no ponto $\bar{x} := 0$ constitui um dos mais simples exemplos de função que possui ambos os limites laterais em $\bar{x}$, cujos valores, porém, são distintos. Em particular, como já visto no Exemplo 12.3 (b), não existe o limite de f em $\bar{x}$.

Como $f|(0,\infty) \equiv 1$ e $f|(-\infty,0) \equiv -1$ temos, claramente, $\lim\limits_{x\to 0+} f = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0-} f = -1$.

(b) Considere a função $f(x) := e^{1/x}$ para $x \neq 0$ (veja Figura **18.1**).

Provemos, inicialmente, que f não tem um limite finito à direita em $\bar{x} = 0$, já que não é limitada em nenhum intervalo do tipo $(0,\delta)$ com $\delta > 0$. Faremos uso da desigualdade

$$0 < t < e^t \qquad \text{para } t > 0, \tag{18.1}$$

que será provada quando fizermos o estudo analítico da função exponencial em aula futura. Apenas para saciar a curiosidade, mencionamos que (18.1) é consequência da identidade

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots,$$

que pode ser usada para definir e^t, como veremos na referida ocasião. Segue de (18.1) que se $x > 0$, então $0 < 1/x < e^{1/x}$. Logo, se tomarmos $x_n = 1/n$, então $f(x_n) > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\lim\limits_{x\to 0+} e^{1/x}$ não existe em $\mathbb{R}$.

No entanto, mostraremos que $\lim\limits_{x\to 0-} e^{1/x} = 0$. De fato, se $x < 0$ e tomarmos $t = -1/x$ em (18.1) obtemos $0 < -1/x < e^{-1/x}$. Como $x < 0$, segue que $0 < e^{1/x} < -x$ para todo $x < 0$. Daí concluímos que $\lim\limits_{x\to 0-} e^{1/x} = 0$.

(c) Seja $f(x) := 1/(e^{1/x} + 1)$ para $x \neq 0$ (veja Figura **18.2**).

Vimos em (b) que $0 < 1/x < e^{1/x}$ para $x > 0$, donde

$$0 < \frac{1}{e^{1/x} + 1} < \frac{1}{e^{1/x}} < x,$$

o que implica que $\lim\limits_{x\to 0+} f = 0$.

Por outro lado, vimos em (b) que $\lim\limits_{x\to 0-} e^{1/x} = 0$. Segue então do análogo do Teorema 13.2 para limites laterais que

$$\lim_{x\to 0-} \left(\frac{1}{e^{1/x} + 1} \right) = \frac{1}{\lim_{x\to 0-} e^{1/x} + 1} = \frac{1}{0+1} = 1.$$

Isso nos dá outro exemplo em que existem ambos os limites laterais mas esses são distintos.

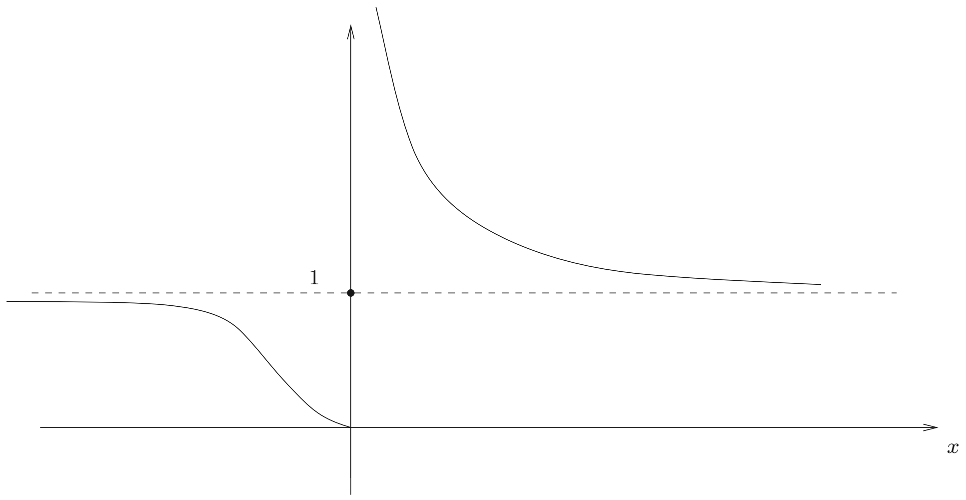


Figura **18.1**: Gráfico de $f(x) = e^{1/x}$, $x \neq 0$.

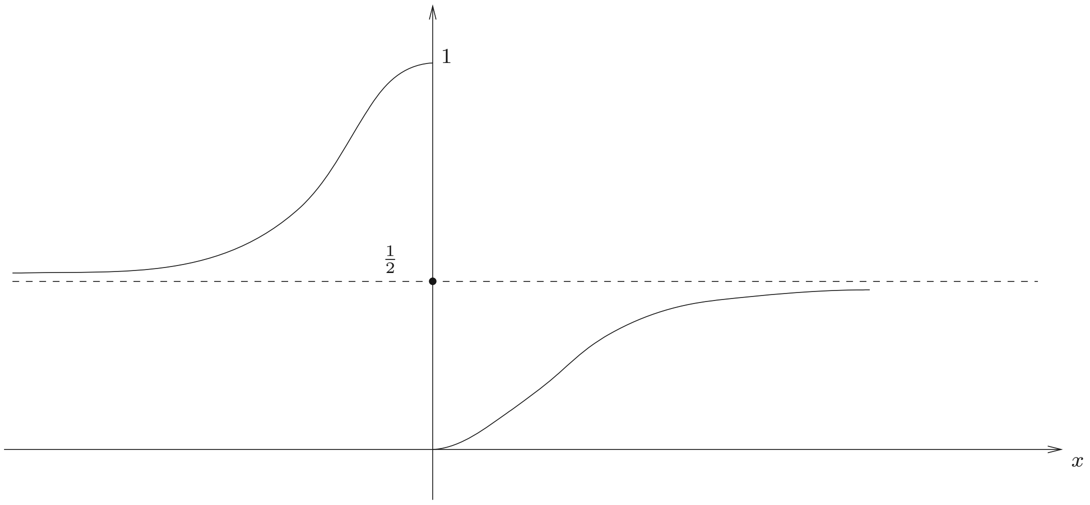


Figura **18.2**: Gráfico de $f(x) = 1/(e^{1/x} + 1)$, $x \neq 0$.

Limites Infinitos

A seguir, como mencionamos no início da aula, vamos definir limites infinitos.

Definição 18.2
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X.

(i) Dizemos que f *tende a* ∞ *quando* $x \to \bar{x}$ e denotamos

$$\lim_{x \to \bar{x}} f = \infty,$$

se para todo $M > 0$ existe $\delta = \delta(M) > 0$ tal que para todo $x \in X$ se $0 < |x - \bar{x}| < \delta$, então $f(x) > M$.

(ii) Dizemos que f *tende para* $-\infty$ *quando* $x \to \bar{x}$, e escrevemos

$$\lim_{x \to \bar{x}} f = -\infty,$$

se para todo $M > 0$ existe $\delta = \delta(M)$ tal que para todo $x \in X$ se $0 < |x - \bar{x}| < \delta$, então $f(x) < -M$.

Exemplos 18.2

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ (veja Figura **18.3**).

Com efeito, dado $M > 0$, seja $\delta := 1/\sqrt{M}$. Segue que se $0 < |x| < \delta$, então $x^2 < 1/M$ e assim $1/x^2 > M$, o que prova a afirmação.

(b) Seja $f(x) := 1/x$ para $x \neq 0$ (veja Figura **18.3**). Então se $f_1 := f|(0, \infty)$ e $f_2 := f|(-\infty, 0)$, temos $\lim_{x \to 0} f_1 = \infty$ e $\lim_{x \to 0} f_2 = -\infty$. Em particular, f não tende nem a ∞, nem a $-\infty$, e nem possui limite, quando $x \to 0$.

O fato de que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f_1 = \infty$ e $\displaystyle\lim_{x \to 0} f_2 = -\infty$ decorre do seguinte. Dado $M > 0$, se $\delta := 1/M$, então $0 < x < \delta$ implica $f_1(x) > M$ e $-\delta < x < 0$ implica $f_2(x) < -M$, o que prova que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f_1 = \infty$ e $\displaystyle\lim_{x \to 0} f_2 = -\infty$, respectivamente.

O fato de ∞ e $-\infty$ não serem números reais faz com que a noção de limites infinitos não possa ser tratada da mesma forma como a noção usual de limite de uma função. Em particular, os resultados sobre operações com limites e desigualdades, não se estendem em geral aos limites infinitos. De modo informal é possível saber em que situações aqueles resultados podem

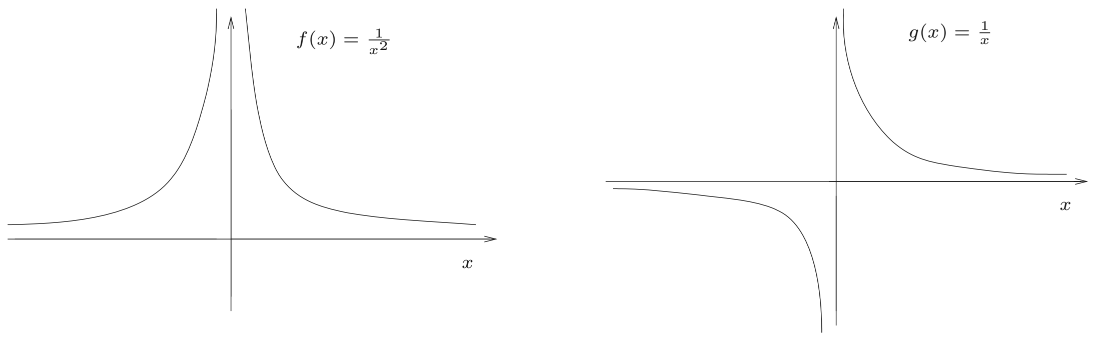


Figura **18.3**: Gráficos de $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$, e $g(x) = 1/x$, $x \neq 0$.

deixar de ser válidos para limites infinitos. Nomeadamente, sempre que ocorrerem expressões indefinidas envolvendo os símbolos $\pm\infty$, como $\infty - \infty$ ou ∞/∞, os resultados válidos para limites usuais podem não mais valer para limites infinitos.

A seguir estabelecemos um resultado análogo ao Teorema do Sanduíche para limites infinitos.

Teorema 18.3
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$, e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Suponhamos que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, $x \neq \bar{x}$.

(i) Se $\lim_{x\to\bar{x}} f = \infty$, então $\lim_{x\to\bar{x}} g = \infty$.

(ii) Se $\lim_{x\to\bar{x}} g = -\infty$, então $\lim_{x\to\bar{x}} f = -\infty$.

Prova: (i) Se $\lim_{x\to\bar{x}} f = \infty$ e $M > 0$ é dado, então existe $\delta = \delta(M) > 0$ tal que se $0 < |x - \bar{x}| < \delta$ e $x \in X$, segue que $f(x) > M$. Mas como $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, $x \neq \bar{x}$, temos que se $0 < |x - \bar{x}| < \delta$ e $x \in X$, então $g(x) > M$. Logo, $\lim_{x\to\bar{x}} g = \infty$.

(ii) Segue de modo inteiramente similar a (i). □

Vimos no Exemplo 18.2 (b) que a função $f(x) := 1/x$ não tende nem a ∞ nem a $-\infty$ quando $x \to 0$, porém as restrições de f a $(0, \infty)$ e $(-\infty, 0)$ tendem a ∞ e $-\infty$, respectivamente, quando $x \to 0$. Isso é exatamente o análogo da existência dos limites laterais finitos para o caso de limites infinitos. Formalizamos essa noção a seguir.

Definição 18.3
Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Se $\bar{x} \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de $X \cap (\bar{x}, \infty)$, então dizemos que f *tende a* ∞ (respectivamente, $-\infty$) *quando*

$x \to \bar{x}+$, e denotamos

$$\lim_{x\to\bar{x}+} f = \infty \quad \text{(respectivamente, } \lim_{x\to\bar{x}+} f = -\infty\text{)},$$

se para todo $M > 0$ existe $\delta = \delta(M) > 0$ tal que para todo $x \in X$ com $0 < x - \bar{x} < \delta$, então $f(x) > M$ (respectivamente, $f(x) < -M$).

Analogamente, se $\bar{x} \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de $X \cap (-\infty, \bar{x})$, dizemos que f *tende a* ∞ (respectivamente, $-\infty$) *quando* $x \to \bar{x}-$, e denotamos

$$\lim_{x\to\bar{x}-} f = \infty \quad \text{(respectivamente, } \lim_{x\to\bar{x}-} f = -\infty\text{)},$$

se para todo $M > 0$ existe $\delta = \delta(M) > 0$ tal que para todo $x \in X$ com $0 < \bar{x} - x < \delta$, então $f(x) > M$ (respectivamente, $f(x) < -M$).

Exemplos 18.3

(a) Seja $f(x) := 1/x$, para $x \neq 0$. Como já visto no Exemplo 18.2 (b), $f|(0,\infty)$ tende a ∞ quando $x \to 0$ e $f|(-\infty, 0)$ tende a $-\infty$ quando $x \to 0$. Isso, claramente, é equivalente a

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

(b) Vimos no Exemplo 18.1 (b) que a função $f(x) := e^{1/x}$ para $x \neq 0$ não é limitada em nenhum intervalo da forma $(0, \delta)$, $\delta > 0$. Em particular o limite à direita de $e^{1/x}$ quando $x \to 0+$, no sentido da Definição 18.1, não existe. Contudo, como

$$\frac{1}{x} < e^{1/x} \qquad \text{for } x > 0,$$

vemos facilmente que $\lim_{x\to 0+} e^{1/x} = \infty$ no sentido da Definição 18.3.

Limites no Infinito

A seguir definimos a noção de limite de uma função quando $x \to \pm\infty$.

Definição 18.4

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Suponhamos que $(a, \infty) \subset X$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é *limite de* f *quando* $x \to \infty$, e denotamos

$$\lim_{x\to\infty} f = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = L,$$

se dado $\varepsilon > 0$ existe $K = K(\varepsilon) > a$ tal que se $x > K$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Analogamente, se $(-\infty, b) \subset \mathbb{R}$ para algum $b \in \mathbb{R}$, dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é *limite de f quando $x \to -\infty$*, e denotamos

$$\lim_{x\to-\infty} f = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L,$$

se dado $\varepsilon > 0$ existe $K = K(\varepsilon) < b$ tal que se $x < K$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

O limite de uma função quando $x \to \infty$ ($x \to -\infty$) possui todas as propriedades do limite de uma função quando x tende a um ponto de acumulação do seu domínio. Assim, valem a unicidade dos limites $\lim_{x\to\infty} f$, $\lim_{x\to-\infty} f$, os resultados sobre as operações com limites, desigualdades, etc.

Em particular, o critério sequencial possui uma versão para limites no infinito que enunciamos a seguir.

Teorema 18.4
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, e suponhamos que $(a, \infty) \subset X$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $L = \lim_{x\to\infty} f$.

(ii) Para toda sequência (x_n) em (a, ∞) tal que $\lim x_n = \infty$, a sequência $(f(x_n))$ converge a L.

Deixamos para você como exercício a prova desse teorema (inteiramente semelhante àquela para o limite de uma função num ponto de acumulação do domínio) bem como o enunciado e a prova do resultado análogo para o limite quando $x \to -\infty$.

Exemplos 18.4

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}$.

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, se $x > 1/\varepsilon$, então $|1/x| = 1/x < \varepsilon$, o que prova que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Por outro lado, se $x < -1/\varepsilon$, então $|1/x| = -1/x < \varepsilon$, o que prova que $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

(b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}$.

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, se $x > 1/\sqrt{\varepsilon}$ ou $x < -1/\sqrt{\varepsilon}$, então $|1/x^2| = 1/x^2 < \varepsilon$, o que estabelece ambos os limites.

Também para o caso de limites em $\pm\infty$ temos a seguinte definição de limites infinitos, análoga à Definição 18.2.

Definição 18.5
Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Suponhamos que $(a, \infty) \subset X$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que f *tende a* ∞ (respectivamente, $-\infty$) *quando* $x \to \infty$, e escrevemos

$$\lim_{x\to\infty} f = \infty \qquad \text{(respectivamente, } \lim_{x\to\infty} f = -\infty)$$

se dado $M > 0$ existe $K = K(M) > a$ tal que se $x > K$, então $f(x) > M$ (respectivamente, $f(x) < -M$).

Analogamente, se $(-\infty, b) \subset X$ para algum $b \in \mathbb{R}$, dizemos que f *tende a* ∞ (respectivamente, $-\infty$) *quando* $x \to -\infty$, e escrevemos

$$\lim_{x\to-\infty} f = \infty \qquad \text{(respectivamente, } \lim_{x\to-\infty} f = -\infty)$$

se dado $M > 0$ existe $K = K(M) < b$ tal que se $x < K$, então $f(x) > M$ (respectivamente, $f(x) < -M$).

Propomos a você como exercício estabelecer o análogo do Teorema 18.4 para o caso em que f tende a ∞ ou $-\infty$ quando $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$.

O resultado a seguir é um análogo do Teorema 9.5.

Teorema 18.5
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$, e suponhamos que $(a, \infty) \subset X$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Suponhamos ainda que $g(x) > 0$ para todo $x > a$ e que para algum $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

(i) Se $L > 0$, então $\lim_{x\to\infty} f = \infty$ se, e somente se, $\lim_{x\to\infty} g = \infty$.

(ii) Se $L < 0$, então $\lim_{x\to\infty} f = -\infty$ se, e somente se, $\lim_{x\to\infty} g = \infty$.

Prova: (i) Como $L > 0$, a hipótese implica que existe $a' > a$ tal que

$$0 < \frac{1}{2}L \leq \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}L \qquad \text{para } x > a'.$$

Portanto, temos $(\frac{1}{2}L)g(x) < f(x) < (\frac{3}{2}L)g(x)$ para todo $x > a'$, do qual segue imediatamente a conclusão.

A prova de (ii) é semelhante. $\square$

Deixamos para você como exercício o estabelecimento de resultados análogos quando $x \to -\infty$ ou quando $x \to \bar{x}$ e $\bar{x}$ é um ponto de acumulação de X, bem como dos resultados correspondentes para limites laterais.

Exemplos 18.5

(a) $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, dado qualquer $M > 0$, se $x > K := \max\{1, M\}$, então $x^n > x > M$, o que prova a afirmação.

(b) $\lim_{x\to-\infty} x^n = \infty$ se $n \in \mathbb{N}$ e n é par, e $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$, se $n \in \mathbb{N}$ e n é ímpar.

Consideraremos o caso em que n é ímpar, no qual podemos escrever $n = 2k+1$ para algum $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Dado $M > 0$, seja $K := \min\{-M, -1\}$. Se $x < K$, então como $(x^2)^k > 1$, temos que $x^n = (x^2)^k x < x < -M$. Como $M > 0$ é arbitrário, segue que $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$, quando $n \in \mathbb{N}$ é ímpar.

O caso em que n é par é mais simples e fica para você como exercício.

(c) Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função polinomial

$$p(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Então $\lim_{x\to\infty} p = \infty$ se $a_n > 0$ e $\lim_{x\to\infty} p = -\infty$ se $a_n < 0$.

De fato, seja $g(x) = x^n$ e apliquemos o Teorema 18.5. Como, para $x > 0$,

$$\frac{p(x)}{g(x)} = a_n + a_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots + a_1\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right) + a_0\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

segue que $\lim_{x\to\infty}(p(x)/g(x)) = a_n$. A afirmação segue então do fato de que $\lim_{x\to\infty} g = \infty$ combinado com o Teorema 18.5.

Deixamos a você como exercício mostrar que $\lim_{x\to-\infty} p = \infty$ se n é par e $a_n > 0$ e $\lim_{x\to-\infty} p = -\infty$ se n é ímpar e $a_n > 0$.

Exercícios 18.1

1. Prove que se $f, g : X \to \mathbb{R}$, f é contínua em $\bar{x}$ e $\bar{x}$ é ponto de acumulação de $X \cap (\bar{x}, \infty)$ e $X \cap (-\infty, \bar{x})$, então $\lim_{x\to\bar{x}+} fg$ e $\lim_{x\to\bar{x}-} fg$ existem se, e somente se, $\lim_{x\to\bar{x}+} g$ e $\lim_{x\to\bar{x}-} g$ existem e, nesse caso,

$$\lim_{x\to\bar{x}\pm} fg = f(\bar{x}) \lim_{x\to\bar{x}\pm} g.$$

2. Prove que se n é par, $\lim_{x\to0+} \frac{1}{x^n} = \infty$, $\lim_{x\to0-} \frac{1}{x^n} = \infty$, e se n é ímpar, $\lim_{x\to0+} \frac{1}{x^n} = \infty$ e $\lim_{x\to0-} \frac{1}{x^n} = -\infty$.

3. Prove que $\lim_{x\to 0} |x|^{-1/n} = \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Diga se existem ou não os limites abaixo e, em caso positivo, determine seu valor:

   (a) $\lim_{x\to 1+} \dfrac{x}{x-1} \qquad (x \neq 0)$.

   (b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1} \qquad (x \neq 0)$.

   (c) $\lim_{x\to 0} (\sqrt{x+1})/x \qquad (x > -1)$.

   (d) $\lim_{x\to 0+} (\sqrt{x+1})/x \qquad (x > -1)$.

   (e) $\lim_{x\to \infty} \sqrt{x}/\sqrt{x+2} \qquad (x > -2)$.

   (f) $\lim_{x\to \infty} (\sqrt{x}-x)/(\sqrt{x}+x) \qquad (x > 0)$.

   (g) $\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{|x|}-x)/(\sqrt{|x|}+x) \qquad (x < 0)$.

5. Mostre que $\lim_{x\to 1-} \dfrac{x^2}{x^2-1} = -\infty$ e $\lim_{x\to 1+} \dfrac{x^2}{x^2-1} = +\infty$.

6. Suponhamos que f e g têm limites em $\mathbb{R}$ quando $t \to \infty$ e que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in (a, \infty)$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Prove que $\lim_{x\to\infty} f \leq \lim_{x\to\infty} g$.

7. Mostre que se $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ é tal que $\lim_{x\to\infty} xf(x) = L$, com $L \in \mathbb{R}$, então $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

8. Sejam f e g definidas em (a, ∞) e suponhamos que $\lim_{x\to\infty} f = L$ e $\lim_{x\to\infty} g = \infty$. Prove que $\lim_{x\to\infty} f \circ g = L$.

Aula 19 – Fuções Monótonas e Inversas

Metas da aula: Estudar as funções monótonas e suas propriedades. Estabelecer a existência, em todos os pontos do domínio, de limites laterais de funções monótonas definidas em intervalos. Estabelecer o Teorema da Inversa Contínua.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Conhecer o conceito de função monótona não decrescente, crescente, não crescente e decrescente, e suas propriedades. Saber o significado da existência de limites laterais de funções monótonas definidas em intervalos.

- Conhecer o conceito de função inversa. Saber o significado do Teorema da Inversa Contínua e como aplicá-lo em exemplos específicos.

Introdução

Nesta aula estudaremos as funções monótonas em geral, definidas em intervalos de $\mathbb{R}$, e, em particular, as funções estritamente monótonas: crescentes e decrescentes. Estas últimas são injetivas e portanto possuem funções inversas. Vamos mostrar que as funções monótonas definidas em intervalos possuem limites laterais em todos os pontos do intervalo de definição, embora possam ser descontínuas em alguns pontos desse intervalo. Veremos também que o conjunto dos pontos de descontinuidade das funções monótonas definidas em intervalos é um conjunto enumerável (finito ou infinito). Recordaremos o conceito de função inversa e estabeleceremos o Teorema da Inversa Contínua, que afirma que toda função estritamente monótona contínua num intervalo possui uma inversa (estritamente monótona) contínua. Finalmente, analisaremos o exemplo concreto das raízes n-ésimas e das potências racionais.

Funções Monótonas

Comecemos recordando a definição de função monótona.

Definição 19.1
Se $X \subset \mathbb{R}$, então diz-se que $f : X \to \mathbb{R}$ é *não decrescente em* X se vale a propriedade de que $x_1 \leq x_2$ implica $f(x_1) \leq f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in X$. A função

f é dita *crescente em* X se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in X$. Similarmente, $f : X \to \mathbb{R}$ é *não crescente em* X se vale a propriedade de que $x_1 \leq x_2$ implica $f(x_1) \geq f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in X$. A função f é dita *decrescente em* X se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in X$.

Se $f : X \to \mathbb{R}$ é não decrescente ou não crescente dizemos que ela é *monótona*. Se f é crescente ou decrescente dizemos que ela é *estritamente monótona*.

Notemos que se $f : X \to \mathbb{R}$ é não decrescente, então $g := -f$ é não crescente. Da mesma forma, se $f : X \to \mathbb{R}$ é não crescente, então $g := -f$ é não decrescente. Portanto, em nossa discussão a seguir, para evitar repetições em excesso, enunciaremos os resultados apenas para funções não decrescentes. Ficará subentendido que todos esses resultados possuem um análogo para funções não crescentes, cuja prova pode também ser obtida diretamente da observação que acabamos de fazer, ou usando argumentos semelhantes aos da prova do resultado correspondente para funções não decrescentes.

Claramente, nem toda função monótona é contínua, como mostra o exemplo da função $f(x) := \operatorname{sgn}(x)$ em $\mathbb{R}$, que é descontínua em $\bar{x} = 0$. Porém, o seguinte resultado mostra que essas funções, quando definidas em intervalos, sempre possuem ambos os limites laterais (finitos) em todos os pontos do intervalo de definição, que não sejam os extremos do intervalo. Nestes últimos sempre existem os limites unilaterais correspondentes.

Teorema 19.1
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e seja $f : I \to \mathbb{R}$ não decrescente em I. Suponhamos que $\bar{x} \in I$ não é um extremo de I. Então

(i) $\lim\limits_{x \to \bar{x}-} f = \sup\{f(x) : x \in I,\ x < \bar{x}\}$,

(ii) $\lim\limits_{x \to \bar{x}+} f = \inf\{f(x) : x \in I,\ x > \bar{x}\}$.

No caso em que $\bar{x} \in I$ é um extremo de I então existe o limite unilateral correspondente: à direita, se $\bar{x}$ é um extremo à esquerda, e à esquerda, se $\bar{x}$ é um extremo à direita.

Prova: (i) Inicialmente lembremos que se $x \in I$ e $x < \bar{x}$, então $f(x) \leq f(\bar{x})$. Portanto, o conjunto $A := \{f(x) : x \in I,\ x < \bar{x}\}$ é limitado superiormente por $f(\bar{x})$, e não vazio já que $\bar{x}$ não é um extremo (à esquerda) de I. Logo, existe $L := \sup\{f(x) : x \in I,\ x > \bar{x}\}$. Se $\varepsilon > 0$ é dado, então $L - \varepsilon$ não é quota superior de A. Então, existe $x_\varepsilon \in I$, com $x_\varepsilon < \bar{x}$, tal que $L - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq L$. Como f é não decrescente, deduzimos que se $\delta := \bar{x} - x_\varepsilon$

e se $0 < \bar{x} - x < \delta$, então $x_\varepsilon < x < \bar{x}$, de modo que

$$L - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq L.$$

Portanto, $|f(x) - L| < \varepsilon$ quando $0 < \bar{x} - x < \delta$ e, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que (i) vale.

A demonstração de (ii) bem como a do caso em que $\bar{x}$ é um extremo de I são inteiramente semelhantes. □

O próximo resultado é um corolário do anterior e fornece um critério de continuidade para uma função não decrescente f num ponto $\bar{x}$ de seu intervalo de definição.

Teorema 19.2
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e seja $f : I \to \mathbb{R}$ não decrescente em I. Suponhamos que $\bar{x} \in I$ não é um extremo de I. Então as seguintes afirmações são equivalentes.

(i) f é contínua em $\bar{x}$.

(ii) $\lim\limits_{x \to \bar{x}-} f = f(\bar{x}) = \lim\limits_{x \to \bar{x}+} f$.

(iii) $\sup\{f(x) \,:\, x \in I,\ x < \bar{x}\} = f(\bar{x}) = \inf\{f(x) \,:\, x \in I,\ x > \bar{x}\}$.

Prova: Segue facilmente do Teorema 19.1 combinado com o Teorema 18.2. Deixamos os detalhes para você como exercício. □

Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função não decrescente. Se a é o extremo à esquerda de I, é um exercício fácil mostrar que f é contínua em a se, e somente se,

$$f(a) = \inf\{f(x) \,:\, x \in I,\ a < x\}$$

ou se, e somente se, $f(a) = \lim\limits_{x \to a+} f$. Um fato análogo vale para $b \in I$ se b é um extremo à direita de I. Você deve ser capaz também, em todos os casos, de estabelecer os resultados análogos para funções não crescentes.

Definição 19.2
Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função não decrescente e $\bar{x} \in I$ não é um extremo de I, definimos o *salto de f em $\bar{x}$* como (veja Figura **19.1**)

$$s_f(\bar{x}) := \lim_{x \to \bar{x}+} f - \lim_{x \to \bar{x}-} f.$$

Se $a \in I$ é um extremo à esquerda de I, então definimos o *salto de f em a* por

$$s_f(a) := \lim_{x \to a+} f - f(a),$$

ao passo que se $b \in I$ é um extremo à direita de I, definimos o *salto de f em b* por

$$s_f(b) := f(b) - \lim_{x \to b-} f.$$

Segue do Teorema 19.1 que se $\bar{x} \in I$ não é um extremo de I,

$$s_f(\bar{x}) = \inf\{f(x) \,:\, x \in I,\ x > \bar{x}\} - \sup\{f(x) \,:\, x \in I,\ x < \bar{x}\}, \qquad (19.1)$$

quando f é uma função não decrescente. Como um fácil exercício, você deve estabelecer as definições de salto, num ponto não extremo e nos pontos extremos de I, no caso de uma função não crescente em I, bem como os análogos da fórmula (19.1) nos diversos casos.

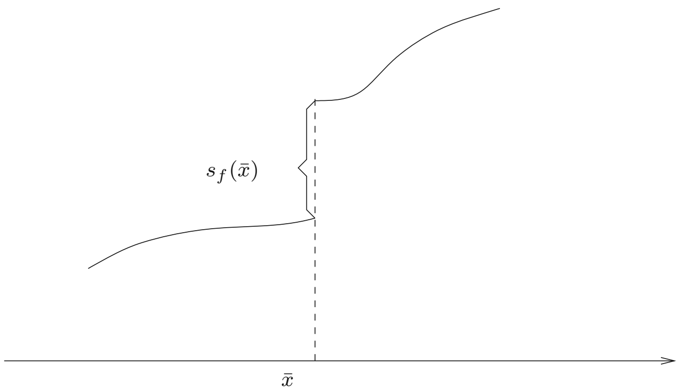


Figura **19.1**: O salto de f em $\bar{x}$.

Teorema 19.3
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função não decrescente em I. Se $\bar{x} \in I$, então f é contínua em $\bar{x}$ se, e somente se, $s_f(\bar{x}) = 0$.

Prova: Se $\bar{x}$ não é um extremo de I, o resultado segue do Teorema 19.2. Se $\bar{x} \in I$ é um extremo à esquerda de I, então f é contínua em $\bar{x}$ se, e somente se, $f(c) = \lim_{x \to \bar{x}+} f$, o que é equivalente a $s_f(\bar{x}) = 0$. Argumento semelhante se aplica ao caso em que $\bar{x}$ é um extremo à direita de I. $\square$

Mostraremos a seguir que o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função monótona é sempre enumerável.

Teorema 19.4
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função monótona em I. Então o conjunto de pontos $D \subset I$ nos quais f é descontínua é um conjunto enumerável.

Prova: Vamos supor que f é não decrescente. Segue do Teorema 19.3 que $D = \{x \in I : s_f(x) > 0\}$. Consideraremos o caso em que $I = [a, b]$ é um intervalo fechado e limitado, deixando como exrecício para você o caso de um intervalo arbitrário.

Primeiro, notemos que sendo f não decrescente, então $s_f(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Além disso, se $a \leq x_1 < \cdots < x_n \leq b$, então temos (por quê?)

$$f(a) \leq f(a) + s_f(x_1) + \cdots + s_f(x_n) \leq f(b), \tag{19.2}$$

donde segue que (veja Figura **19.2**)

$$s_f(x_1) + \cdots + s_f(x_n) \leq f(b) - f(a).$$

Consequentemente, dado qualquer $k \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$D_k := \{x \in I = [a, b] : s_f(x) \geq (f(b) - f(a))/k\}$$

pode possuir no máximo k pontos. Como

$$D = \cup_{k \in \mathbb{N}} D_k,$$

(por quê?) concluímos que D é enumerável (por quê?). □

Exemplos 19.1

(a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a identidade

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}, \tag{19.3}$$

e f é contínua num único ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}$, então f é contínua em todo ponto de $\mathbb{R}$. A demonstração deste fato não requer as noções aprendidas nesta aula, mas vamos usá-los no ítem seguinte.

Com efeito, dados $x, y \in \mathbb{R}$, qualquer sequência (z_n) convergindo a $x + y$ pode ser escrita na forma $z_n = x_n + y$, onde $x_n := z_n - y$ é uma sequência convergindo a x. Logo, se f satisfaz (19.3) e f é contínua em $\bar{x} \in \mathbb{R}$, temos

$$\lim_{z \to \bar{x} + y} f = \lim_{x \to \bar{x}} f + f(y) = f(\bar{x}) + f(y) \qquad \text{para todo } y \in \mathbb{R}.$$

Como todo ponto $z \in \mathbb{R}$ pode ser escrito na forma $z = \bar{x} + y$, tomando-se $y = z - \bar{x}$, segue que f é contínua em $\mathbb{R}$.

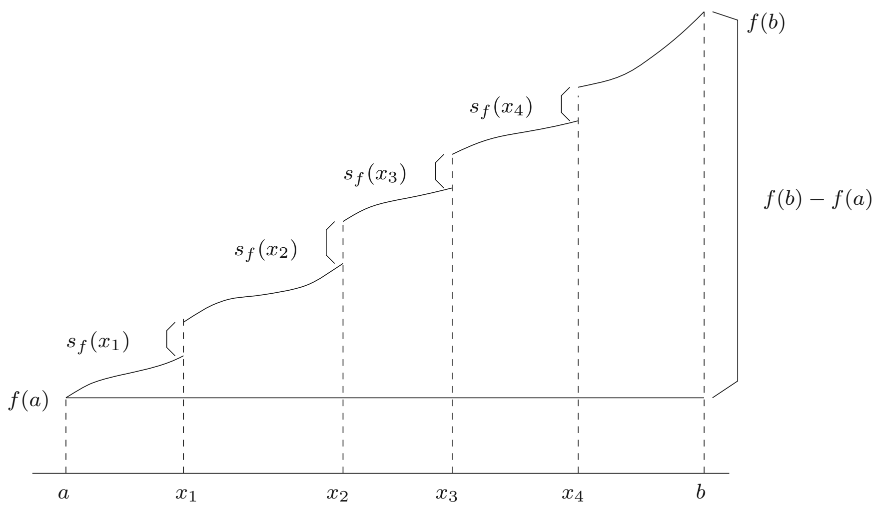


Figura **19.2**: $s_f(x_1) + \cdots + s_f(x_n) \leq f(b) - f(a)$.

(b) Portanto, se f é monótona e satisfaz (19.3), então f é contínua e, nesse caso, $f(x) = cx$ com $c = f(1)$.

De fato, pelo Teorema 19.3, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável. Como $\mathbb{R}$ é não enumerável, o conjunto dos pontos onde f é contínua é não vazio (na verdade, é infinito, não enumerável). Pelo ítem anterior, f é contínua em $\mathbb{R}$. Agora, segue de (19.3) que

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0,$$
$$0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x),$$

e (por quê?)

$$f(m) = f(1)m \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{Z}.$$

Dado $r = m/n \in \mathbb{Q}$, com $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, temos

$$mf(1) = f(m) = f(nr) = nf(r) \Rightarrow f(r) = f(1)r.$$

Logo, vale $f(x) = cx$, com $c = f(1)$, para todo $x \in \mathbb{Q}$. Dado qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos $x = \lim x_n$, com $x_n \in \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, se f é contínua, temos

$$f(x) = \lim f(x_n) = \lim cx_n = c \lim x_n = cx.$$

Funções Inversas

Notemos que se $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é estritamente monótona, então, em particular, $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$ para todo $x, y \in X$. Logo, f é injetiva.

Portanto, se $f : X \to \mathbb{R}$ é estritamente monótona e $Y = f(X)$, então existe uma função inversa $g : Y \to \mathbb{R}$, isto é, g satisfaz

$$g(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \in X, \text{ e } \quad f(g(y)) = y \quad \text{para todo } y \in Y.$$

No teorema a seguir mostraremos que se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função *contínua* estritamente monótona, então a função inversa $g : J = f(I) \to \mathbb{R}$ é contínua em J e também é estritamente monótona. Se f é crescente, então g é crescente; se f é decrescente, então g é decrescente.

Teorema 19.5 (da Inversa Contínua)
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona e contínua em I. Então a função g inversa de f é estritamente monótona e contínua em $J = f(I)$.

Prova: Consideraremos o caso em que f é crescente. O caso em que f é decrescente fica para você como exercício.

Seja $J = f(I)$. Como f é contínua, o Teorema 16.5 garante que J é um intervalo. Como f é injetiva em I, existe a função inversa $g := f^{-1} : J \to \mathbb{R}$. Mais ainda, como $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$ para todos $x_1, x_2 \in I$, então $y_1 < y_2$ implica $g(y_1) < g(y_2)$ para todos $y_1, y_2 \in J$. De fato, caso valesse $y_1 < y_2$ e $g(y_1) \geq g(y_2)$ para algum par de pontos $y_1, y_2 \in J$, então, fazendo $x_1 = g(y_1)$ e $x_2 = g(y_2)$, teríamos $x_1 \geq x_2$ e $f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$, contrariando o fato de que f é crescente. Logo, g é crescente em J.

Resta mostrar que g é contínua. No entanto, isso é uma consequência do fato que J é um intervalo. De fato, suponhamos que g seja descontínua num ponto $\bar{y} \in J$. Para simplificar, suponhamos inicialmente que $\bar{y}$ não é um extremo de J. Então $s_g(\bar{y}) > 0$, de modo que $\lim\limits_{y \to \bar{y}-} g < \lim\limits_{y \to \bar{y}+} g$. Assim, podemos achar um ponto $x_* \in \mathbb{R}$ satisfazendo $x \neq g(\bar{y})$ e $\lim\limits_{y \to \bar{y}-} g < x_* < \lim\limits_{y \to \bar{y}+} g$. Agora, como I é um intervalo, $g(J) = I$ e $\bar{y}$ não é um extremo de J, então temos que $\lim\limits_{y \to \bar{y}-} g \in I$ e $\lim\limits_{y \to \bar{y}+} g \in I$ (por quê?). Por outro lado, tal ponto x_* teria a propriedade de que $x_* \neq g(y)$ para todo $y \in J$ (veja Figura **19.3**). Logo, $x_* \notin I$, o que contradiz o fato de que I é um intervalo. Portanto, concluímos que g é contínua em J. O caso em que $\bar{y}$ é um extremo de J é tratado de maneira inteiramente similar, bastando observar que neste caso $g(\bar{y})$ é necessariamente um extremo de I (por quê?), e deixamos os detalhes para você como exercício. $\square$

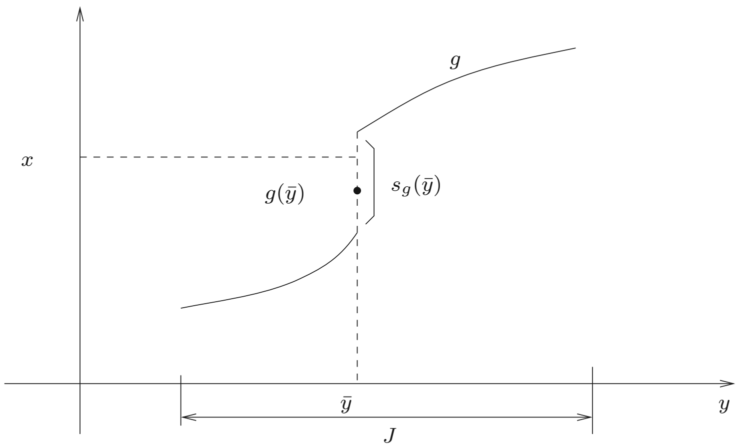


Figura **19.3**: $g(y) \neq x$ para $y \in J$.

A Função Raiz n-ésima

Aplicaremos o Teorema da Inversa Contínua 19.5 à função potência n-ésima $x \mapsto x^n$ para $n \in \mathbb{N}$. Precisaremos distinguir dois casos: (i) n par; (ii) n ímpar.

(i) n *par*. Neste caso, para obter uma função estritamente monótona, temos que restringir a função $x \mapsto x^n$ ao intervalo $I := [0, \infty)$. Assim, seja $f(x) = x^n$ para $x \in I$ (veja Figura **19.4** à esquerda).

Sabemos que se $0 \leq x_1 < x_2$, então $f(x_1) = x_1^n < x_2^n = f(x_2)$. Portanto, f é crescente em I. Mais ainda, segue do Exemplo 15.1 (a) que f é contínua em I. Logo, pelo Teorema 16.5 temos que $J := f(I)$ é um intervalo. Mostraremos que $J = [0, \infty)$. Seja $y \geq 0$ arbitrário. Pela Propriedade Arquimediana, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq y < k$. Como

$$f(0) = 0 \leq y < k < k^n = f(k),$$

segue do Teorema do Valor Intermediário 16.3 que $y \in J$. Como $y \geq 0$ é arbitrário, inferimos que $J = [0, \infty)$.

Concluímos do Teorema da Inversa Contínua 19.5 que a função g que é inversa de $f(x) = x^n$ em $I = [0, \infty)$ é crescente e contínua em $J = [0, \infty)$. É comum denotar-se

$$g(x) = x^{1/n} \quad \text{ou} \quad g(x) = \sqrt[n]{x}$$

para $x \geq 0$, n par, e chamar $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ a *raiz n-ésima de* $x \geq 0$, n par (veja Figura **19.4** à direita). Portanto, temos

$$(x^n)^{1/n} = x \quad \text{e} \quad (x^{1/n})^n = x$$

para todo $x \in [0, \infty)$ e n par.

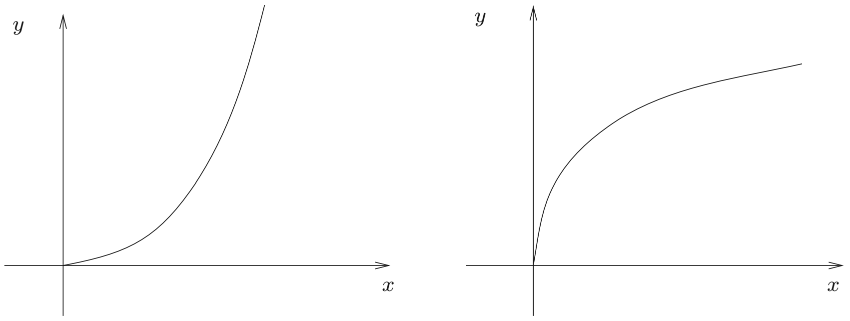


Figura **19.4**: À esquerda o gráfico de $f(x) = x^n$, $x \geq 0$, n par.
À direita o gráfico de $g(x) = x^{1/n}$, $x \geq 0$, n par.

(ii) n *ímpar*. Nesse caso fazemos $f(x) := x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De novo, pelo Exemplo 15.1 (a) f é contínua em $\mathbb{R}$. Da mesma forma que para n par, verificamos facilmente que f é crescente e $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, o que deixamos para você como exercício (veja Figura **19.5** à esquerda).

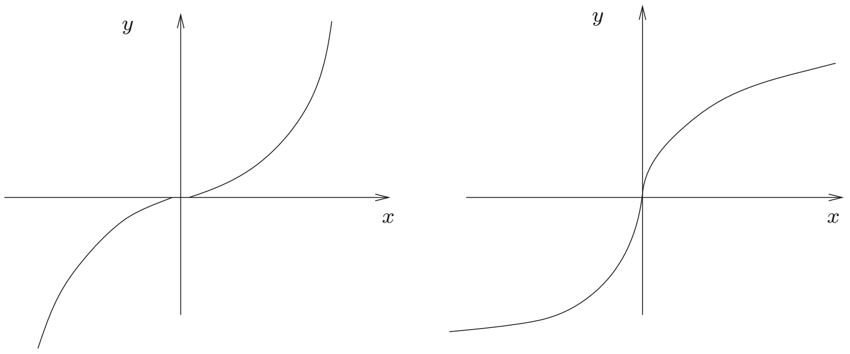


Figura **19.5**: À esquerda o gráfico de $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, n ímpar.
À direita o gráfico de $g(x) = x^{1/n}$, $x \in \mathbb{R}$, n ímpar.

Segue do Teorema da Inversa Contínua 19.5 que a função g, que é inversa de $f(x) = x^n$ para $x \in \mathbb{R}$, é crescente e contínua em $\mathbb{R}$. É comum denotar-se

$$g(x) = x^{1/n} \quad \text{ou} \quad g(x) = \sqrt[n]{x} \quad \text{para } x \in \mathbb{R},\ n \text{ ímpar},$$

e chamar $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ a *raiz n-ésima de* $x \in \mathbb{R}$. Também nesse caso temos

$$(x^n)^{1/n} = x \quad \text{ou} \quad (x^{1/n})^n = x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \text{ e } n \text{ ímpar}.$$

Potências Racionais

Uma vez definida a raiz n-ésima para $n \in \mathbb{N}$, é fácil definir potências racionais.

Definição 19.3
(i) Se $m, n \in \mathbb{N}$ e $x \geq 0$, definimos $x^{m/n} := (x^{1/n})^m$.
(ii) Se $m, n \in \mathbb{N}$ e $x > 0$, definimos $x^{-m/n} := (x^{1/n})^{-m}$.

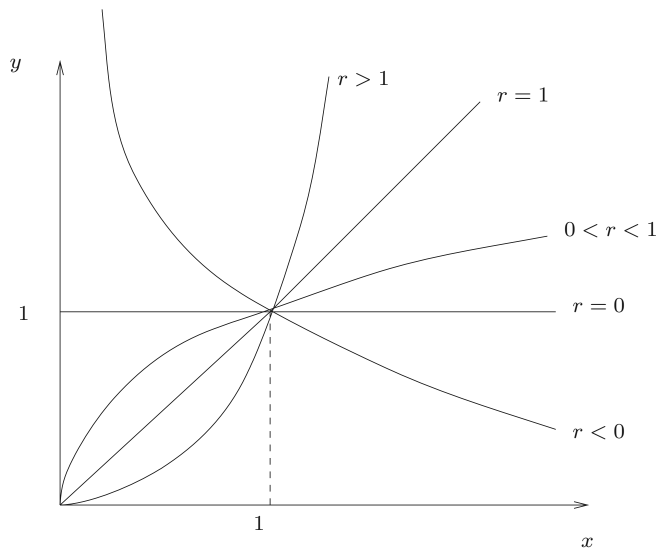


Figura **19.6**: Gráficos de $x \mapsto x^r$, $x \geq 0$, $r \in \mathbb{Q}$.

Portanto, fica assim definido x^r quando r é um racional qualquer e $x > 0$. Os gráficos de $x \mapsto x^r$ assumem formas diferentes se $r > 1$, $r = 1$, $0 < r < 1$, $r = 0$, ou $r < 0$ (veja Figura **19.6**). Como um número racional $r \in \mathbb{Q}$ pode ser escrito na forma $r = m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, de várias maneiras, é preciso mostrar que a Definição 19.3 não é ambígua. Isto é, se $r = m/n = p/q$ com $m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{N}$ e se $x > 0$, então $(x^{1/n})^m = (x^{1/q})^p$. Deixamos para você como exercício a verificação simples deste fato.

Teorema 19.6
Se $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, e $x > 0$, então $x^{m/n} = (x^m)^{1/n}$.

Prova: Se $x > 0$ e $m, n \in \mathbb{Z}$, então $(x^m)^n = x^{mn} = (x^n)^m$. Agora, seja $y := x^{m/n} = (x^{1/n})^m$, de modo que $y^n = ((x^{1/n})^m)^n = ((x^{1/n})^n)^m = x^m$. Portanto, segue que $y = (x^m)^{1/n}$. $\square$

Como um exercício, você deve mostrar também que se $x > 0$ e $r, s \in \mathbb{Q}$, então

$$x^r x^s = x^{r+s} = x^s x^r \quad \text{e} \quad (x^r)^s = x^{rs} = (x^s)^r.$$

Exercícios 19.1

1. Se $I := [a, b]$ e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função não decrescente, então o ponto a (respectivamente, b) é um ponto de mínimo (respectivamente, máximo) absoluto para f em I. Se f é crescente, então a (respectivamente, b) é o único ponto de mínimo (respectivamente, máximo) absoluto.

2. Se f e g são funções não decrescentes num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, mostre que $f + g$ é uma função não decrescente em I. Se f e g são crescentes em I, então $f + g$ é crescente em I.

3. Verifique que ambas as funções $f(x) := x$ e $g(x) := x - 1$ são crescentes em $[0, 1]$, mas seu produto fg não é sequer uma função monótona em $[0, 1]$.

4. Mostre que se f e g são funções positivas e não decrescentes num intervalo I, então seu produto fg é não decrescente em I.

5. Mostre que se $I := [a, b]$ e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função não decrescente em I, então f é contínua em a se, e somente se, $f(a) = \inf\{f(x) : x \in (a, b]\}$.

6. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função não decrescente em I. Suponhamos que $\bar{x} \in I$ não é um ponto extremo de I. Mostre que f é contínua em $\bar{x}$ se, e somente se, existe uma sequência (x_n) em I tal que $x_n < \bar{x}$ se n é ímpar, $x_n > \bar{x}$ se n é par, $\lim x_n = \bar{x}$, e $f(\bar{x}) = \lim f(x_n)$.

7. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função não decrescente em I. Se $\bar{x} \in I$ não é um extremo de I, mostre que o salto $s_f(\bar{x})$ de f em $\bar{x}$ é dado por

$$s_f(\bar{x}) = \inf\{f(x_2) - f(x_1) : x_1 < \bar{x} < x_2,\ x_1, x_2 \in I\}.$$

8. Sejam f, g funções não decrescentes num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e seja $f(x) > g(x)$ para todo $x \in I$. Se $y \in f(I) \cap g(I)$, mostre que $f^{-1}(y) < g^{-1}(y)$. [Dica: Primeiro faça o esboço de uma representação gráfica para essa situação.]

9. Seja $I := [0, 1]$ e seja $f : I \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x$ se x é racional, e $f(x) := 1 - x$ se x é irracional. Mostre que f é injetiva em I e que

$f(f(x)) = x$ para todo $x \in I$. Portanto, f é inversa de si mesma!. Mostre que f é contínua somente em $\bar{x} = \dfrac{1}{2}$.

10. Seja $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Mostre que se $m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{N}$, e $mq = np$, então $(x^{1/n})^m = (x^{1/q})^p$.

11. Se $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, e se $r, s \in \mathbb{Q}$, mostre que $x^r x^s = x^{r+s} = x^s x^r$ e $(x^r)^s = x^{rs} = (x^s)^r$.

Aula 20 – A Derivada

Metas da aula: Definir a derivada de uma função num ponto. Apresentar as propriedades básicas da derivada em relação às operações de soma, multiplicação e quociente de funções, dar exemplos e aplicações.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Conhecer a definição rigorosa de derivada de uma função num ponto e saber utilizá-la na demonstração de resultados elementares envolvendo esse conceito.

Introdução

Nesta aula iniciaremos nosso estudo sobre a derivada de uma função. Ao longo dessa discussão assumiremos que você já está familiarizado com as interpretações geométricas e físicas da derivada como usualmente descritas em cursos introdutórios de Cálculo. Consequentemente, nos concentraremos aqui nos aspectos matemáticos da derivada e não abordaremos suas aplicações em geometria, física, economia, etc. Porém, não será demais enfatizar a enorme importância desse conceito, a qual pode ser medida pela frequência com que o mesmo, talvez mais que qualquer outro na Matemática, aparece, nas mais variadas formas, como elemento básico em aplicações dessa ciência às demais áreas do conhecimento humano.

Retringiremos nossa discussão ao caso de funções definidas em intervalos. No entanto, como veremos a seguir, para que o conceito de derivada de uma função num determinado ponto faça sentido, basta que a mesma esteja definida nesse ponto e em pontos arbitrariamente próximos dele, diferentes do mesmo. Sendo assim, a definição pode ser estabelecida, de modo mais geral, para pontos de acumulação pertencentes ao domínio de uma certa função, mesmo quando este é um subconjunto qualquer de $\mathbb{R}$, não necessariamente um intervalo.

A definição de derivada

Iniciamos nosso estudo sobre a derivada de uma função com a definição a seguir.

Definição 20.1
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$, e $\bar{x} \in I$. Dizemos que f *tem derivada em* $\bar{x}$, se existe o limite

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Neste caso, chamamos tal limite a *derivada de* f *em* $\bar{x}$ e denotamos

$$f'(\bar{x}) := \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Este limite deve ser entendido como limite da função $(f(x) - f(\bar{x}))/(x - \bar{x})$, que está definida em $I \setminus \{\bar{x}\}$, quando $x \to \bar{x}$.

Quando f tem derivada em $\bar{x}$, costuma-se também dizer que f *é diferenciável em* $\bar{x}$ ou que f *é derivável em* $\bar{x}$. Outras notações para a derivada de f no ponto $\bar{x}$ são:

$$Df(\bar{x}) \quad \text{e} \quad \frac{df}{dx}(\bar{x}).$$

Usaremos os verbos *diferenciar* e *derivar* indistintamente com o sentido de tomar a derivada (de uma função num determinado ponto).

Se $\bar{x} \in I$, denotemos $I_{\bar{x}} := I - \bar{x} = \{h \in \mathbb{R} : \bar{x} + h \in I\}$. Frequentemente é conveniente escrever o limite anterior como

$$f'(\bar{x}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h}.$$

Neste caso, o limite deve ser entendido como limite da função $(f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}))/h$, que está definida em $I_{\bar{x}} \setminus \{0\}$, quando $h \to 0$.

Teorema 20.1
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$, e $\bar{x} \in I$. Então f é diferenciável em $\bar{x}$ se, e somente se, existe $L \in \mathbb{R}$ e $r_{\bar{x}} : I_{\bar{x}} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + L \cdot h + r_{\bar{x}}(h) \tag{20.1}$$

com

$$\lim_{h \to 0} \frac{r_{\bar{x}}(h)}{h} = 0. \tag{20.2}$$

Neste caso, temos $L = f'(\bar{x})$.

Prova: Suponhamos que f seja diferenciável em $\bar{x}$. Então, tomamos $L := f'(\bar{x})$ e definimos $r_{\bar{x}} : I_{\bar{x}} \to \mathbb{R}$ por meio da equação (20.1). Da Definição 20.1 segue imediatamente que vale (20.2).

Reciprocamente, suponhamos que existam $L \in \mathbb{R}$ e $r_{\bar{x}} : I_{\bar{x}} \to \mathbb{R}$ satisfazendo (20.1) e (20.2). Neste caso, como $(f(\bar{x}+h)-f(\bar{x}))/h = L+r_{\bar{x}}(h)/h$, existe o limite de $(f(\bar{x}+h)-f(\bar{x}))/h$ quando $h \to 0$ e temos

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{r_{\bar{x}}(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} \right) - L.$$

Segue da Definição 20.1 que f é derivável em $\bar{x}$ e $L = f'(\bar{x})$. □

Claramente, dado qualquer $L \in \mathbb{R}$, a equação (20.1) será válida desde que ela própria seja usada para definir $r_{\bar{x}} : I_{\bar{x}} \to \mathbb{R}$. O significado do Teorema 20.1 está em estabelecer que quando, e somente quando(!), f for diferenciável em $\bar{x}$ e $L = f'(\bar{x})$, valerá também (20.2).

Teorema 20.2
Se $f : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\bar{x} \in I$, então f é contínua em $\bar{x}$.

Prova: Se f é diferenciável em $\bar{x}$, então valem (20.1) e (20.2) com $L = f'(\bar{x})$. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \lim_{h\to 0} f(\bar{x}+h) &= \lim_{h\to 0} (f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + r_{\bar{x}}(h)) \\ &= f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot 0 + \lim_{h\to 0} \frac{r_{\bar{x}}(h)}{h} h = f(\bar{x}),\end{aligned}$$

o que mostra que f é contínua em $\bar{x}$. □

Exemplos 20.1

(a) Uma função constante, $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, com $c \in \mathbb{R}$, é evidentemente diferenciável em todo $x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) \equiv 0$. A função $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, também é claramente diferenciável em todo $x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) \equiv 1$.

(b) Usando o binômio de Newton vemos que

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{nx^{n-1}h + h^2 p(x,h)}{h} = nx^{n-1} + hp(x,h),$$

onde $p(x,h)$ é um polinômio em x e h. Logo, temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1},$$

o que mostra que $f(x) = x^n$ é diferenciável em todo $x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) = nx^{n-1}$.

(c) Seja $f(x) = x\,\mathrm{sen}(1/x)$, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $f(0) = 0$. Mostraremos que f não é diferenciável em $\bar{x} = 0$, mas $g(x) = xf(x)$ é diferenciável em $\bar{x} = 0$ e $g'(0) = 0$.

De fato, $f(h)/h = \mathrm{sen}(1/h)$ e sabemos de aulas anteriores que não existe limite de $\mathrm{sen}(1/h)$ quando $h \to 0$. Concluímos pela Definição 20.1 que f não é diferenciável em $\bar{x} = 0$. Por outro lado, $g(h)/h = h\,\mathrm{sen}(1/h)$ e sabemos de aulas anteriores que $\lim\limits_{h\to 0} h\,\mathrm{sen}(1/h) = 0$. Logo, g é diferenciável em $\bar{x} = 0$ e $g'(0) = 0$.

(d) A recíproca do Teorema 20.2 é claramente falsa. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) := |x|$ é contínua em $\bar{x} = 0$, porém não é diferenciável em 0. De fato, temos

$$\lim_{x\to 0-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1, \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{x}{x} = 1.$$

Assim, embora existam os limites laterais, eles são distintos. Portanto, não existe $\lim_{x\to 0}(|x| - |0|)/(x - 0)$, o que significa que $f(x) = |x|$ não é diferenciável em 0.

(e) Tomando-se combinações lineares de funções da forma $x \mapsto |x - \bar{x}|$, com $\bar{x} \in \mathbb{R}$, podemos facilmente construir funções contínuas em $\mathbb{R}$ que deixam de ser diferenciáveis num conjunto finito qualquer $\{\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_N\}$ de pontos de $\mathbb{R}$.

(f) Em 1872, para espanto geral da comunidade matemática de então, Karl Weierstrass exibiu um exemplo de uma função contínua em $\mathbb{R}$ que não é diferenciável em nenhum ponto de $\mathbb{R}$. Pode-se mostrar que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela série

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x) \tag{20.3}$$

tem essa propriedade. A demonstração da continuidade de f faz uso de um resultado bastante conhecido sobre séries de funções, o Teste-M de Weierstrass. A prova da não-diferenciabilidade de f em qualquer ponto de $\mathbb{R}$ segue um argumento semelhante ao esboçado na seção Prossiga ao final desta aula, para provar o mesmo fato para um exemplo ligeiramente diferente.

Definição 20.2

Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ possui *derivada lateral à direita* em $\bar{x} \in I$ se existe o limite lateral

$$\lim_{x\to \bar{x}+} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Neste caso, denotamos tal limite $f'^{+}(\bar{x})$. Definimos de modo inteiramente análogo a *derivada lateral à esquerda* de f em $\bar{x} \in I$ que denotamos por $f'^{-}(\bar{x})$.

Claramente, f será diferenciável em $\bar{x}$ se, e somente se, existirem ambas as derivadas laterais, à esquerda e à direita, e essas coincidirem, i.e, $f'^{-}(\bar{x}) = f'^{+}(\bar{x})$.

No exemplo que demos há pouco, da função $f(x) = |x|$ em $\bar{x} = 0$, segue do que foi visto que existem as derivadas laterais à esquerda e à direita em $\bar{x} = 0$, com $f'^{-}(0) = -1$ e $f'^{+}(0) = 1$. Portanto, $f'^{-}(0) \neq f'^{+}(0)$ e, como havíamos dito, f não é diferenciável em 0.

O seguinte resultado é uma extensão do Teorema 20.2 cuja demonstração se faz de modo inteiramente similar ao que foi feito para demonstrar aquele resultado, com a diferença que desta feita deve-se usar ambos os limites laterais, em lugar do limite usual, para concluir que $\lim_{x\to\bar{x}-} f(x) = f(\bar{x}) = \lim_{x\to\bar{x}+} f(x)$. Deixamos os detalhes para você como exercício.

Teorema 20.3
Se $f : I \to \mathbb{R}$ possui derivadas laterais, à esquerda e à direita, em $\bar{x} \in I$, então f é contínua em $\bar{x}$.

Derivadas e operações com funções

A seguir vamos justificar algumas propriedades básicas das derivadas que são muito úteis nos cálculos de derivadas de combinações de funções. Você certamente já terá se familiarizado com essas propriedades ao longo de cursos anteriores de Cálculo.

Teorema 20.4
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $\bar{x} \in I$, e sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em $\bar{x}$. Então:

(i) Se $c \in \mathbb{R}$, a função cf é diferenciável em $\bar{x}$, e

$$(cf)'(\bar{x}) = cf'(x). \tag{20.4}$$

(ii) A função $f + g$ é diferenciável em $\bar{x}$, e

$$(f+g)'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) + g'(\bar{x}). \tag{20.5}$$

(iii) (Regra do Produto) A função fg é diferenciável em $\bar{x}$, e

$$(fg)'(\bar{x}) = f'(\bar{x})g(\bar{x}) + f(\bar{x})g'(\bar{x}). \tag{20.6}$$

(iv) (Regra do Quociente) Se $g(\bar{x}) \neq 0$, então a função f/g é diferenciável em $\bar{x}$, e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\bar{x}) = \frac{f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x})}{g(\bar{x})^2}. \tag{20.7}$$

Prova: Vamos demonstrar (iii) e (iv), deixando as demonstrações de (i) e (ii) para você como exercício.

(iii) Seja $h := fg$. Então para $x \in I$, $x \neq \bar{x}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{h(x) - h(\bar{x})}{x - \bar{x}} &= \frac{f(x)g(x) - f(\bar{x})g(\bar{x})}{x - \bar{x}} \\
&= \frac{f(x)g(x) - f(\bar{x})g(x) + f(\bar{x})g(x) - f(\bar{x})g(\bar{x})}{x - \bar{x}} \\
&= \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \cdot g(x) + f(\bar{x})\frac{g(x) - g(\bar{x})}{x - \bar{x}}.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 20.2, g é contínua em $\bar{x}$; então $\lim_{x \to \bar{x}} g(x) = g(\bar{x})$. Como f e g são diferenciáveis em $\bar{x}$, deduzimos do Teorema 13.2 sobre propriedades de limites que

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{h(x) - h(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x}).$$

Portanto, $h := fg$ é diferenciável em $\bar{x}$ e vale (20.6).

(iv) Seja $h := f/g$. Como g é diferenciável em $\bar{x}$, ela é contínua nesse ponto, pelo Teorema 20.2. Assim, como $g(\bar{x}) \neq 0$, sabemos do Teorema 13.5 que existe um intervalo $J := (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \cap I \subset I$ tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in J$. Para $x \in J$, $x \neq \bar{x}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{h(x) - h(\bar{x})}{x - \bar{x}} &= \frac{f(x)/g(x) - f(\bar{x})/g(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \frac{f(x)g(\bar{x}) - f(\bar{x})g(x)}{g(x)g(\bar{x})(x - \bar{x})} \\
&= \frac{f(x)g(\bar{x}) - f(\bar{x})g(\bar{x}) + f(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g(x)}{g(x)g(\bar{x})(x - \bar{x})} \\
&= \frac{1}{g(x)g(\bar{x})}\left[\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \cdot g(\bar{x}) - f(\bar{x}) \cdot \frac{g(x) - g(\bar{x})}{x - \bar{x}}\right].
\end{aligned}$$

Usando a continuidade de g em $\bar{x}$ e a diferenciabilidade de f e g em $\bar{x}$, obtemos

$$h'(\bar{x}) = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{h(x) - h(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \frac{f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x})}{g(\bar{x})^2}.$$

Assim, $h = f/g$ é diferenciável em $\bar{x}$ e vale (20.7). □

Usando Indução Matemática podemos obter facilmente as seguintes extensões das regras de diferenciação.

Corolário 20.1
Se $f_1, f_2, \cdots, f_n$ são funções definidas num intervalo I com valores em $\mathbb{R}$ que são diferenciáveis em $\bar{x} \in I$, então:

(i) A função $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ é diferenciável em $\bar{x}$, e

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)'(\bar{x}) = f_1'(\bar{x}) + f_2'(\bar{x}) + \cdots + f_n'(\bar{x}). \tag{20.8}$$

(ii) A função $f_1 f_2 \cdots f_n$ é diferenciável em $\bar{x}$, e

$$\begin{aligned}(f_1 f_2 \cdots f_n)'(\bar{x}) = f_1'(\bar{x}) f_2(\bar{x}) \cdots f_n(\bar{x}) + f_1(\bar{x}) f_2'(\bar{x}) \cdots f_n(\bar{x}) \\ + \cdots + f_1(\bar{x}) f_2(\bar{x}) \cdots f_n'(\bar{x}).\end{aligned} \tag{20.9}$$

Exemplos 20.2

(a) Um caso especial importante da regra do produto estendida (20.9) ocorre quando $f_1 = f_2 = \cdots = f_n = f$. Neste caso, (20.9) se torna

$$(f^n)'(\bar{x}) = n(f(\bar{x}))^{n-1} f'(\bar{x}). \tag{20.10}$$

Em particular, se tomarmos $f(x) := x$, então obtemos mais uma vez que a derivada de $g(x) := x^n$ é dada por $g'(x) = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. A derivada de $h(x) := x^{-n} = 1/g(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, é obtida usando a regra do quociente, i.e.,

$$(x^{-n})' = \frac{-g'(x)}{g(x)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Portanto, vale $(x^m)' = mx^{m-1}$ para todo $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, com $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se $m < 0$ e $x \in \mathbb{R}$ se $m > 0$.

(b) Se $p(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, então p é diferenciável em todo $x \in \mathbb{R}$ e $p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1$. Se $q(x) := b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, $q(\bar{x}) \neq 0$, e $r(x) := p(x)/q(x)$, então, pela Regra do Quociente, $r(x)$ é diferenciável em $\bar{x}$ e $r'(\bar{x}) = (p'(\bar{x}) q(\bar{x}) - p(\bar{x}) q'(\bar{x}))/q(\bar{x})^2$, e já sabemos como calcular $p'(\bar{x}), q'(\bar{x})$.

(c) (Regra de L'Hôpital) Vamos provar aqui uma versão bastante simples da popular regra de L'Hôpital para o cálculo de derivadas de formas indeterminadas do tipo $0/0$.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $\bar{x} \in I$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ diferenciáveis em $\bar{x}$, com $g'(\bar{x}) \neq 0$. Suponhamos que $f(\bar{x}) = 0 = g(\bar{x})$. Então

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})}.$$

De fato, temos

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{\frac{f(x)}{x-\bar{x}}}{\frac{g(x)}{x-\bar{x}}} = \frac{\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}}}{\lim_{x\to\bar{x}} \frac{g(x)-g(\bar{x})}{x-\bar{x}}} = \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})},$$

onde usamos a Definição 20.1 e a hipótese $f(\bar{x}) = 0 = g(\bar{x})$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 2x + 1}{x^7 - 3x + 2} = \frac{3}{4}$.

De fato, ponhamos $f(x) := x^5 - 2x + 2$ e $g(x) := x^7 - 3x + 2$. Então f e g são diferenciáveis em $x = 1$, $f(1) = 0 = g(1)$ e $g'(1) = 4 \neq 0$. Podemos então aplicar a Regra de L'Hôpital para afirmar que o referido limite é igual a $f'(1)/g'(1) = 3/4$.

Exercícios 20.1

1. Use a definição para encontrar a derivada de cada uma das seguintes funções:

   (a) $f(x) := x^3$ para $x \in \mathbb{R}$,

   (b) $f(x) := 1/x^2$ para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$,

   (c) $f(x) := \sqrt{x}$ para $x > 0$.

   (d) $f(x) := \dfrac{x^5 + 3x^2 + 4}{x^4 + x^2 + 1}$ para $x \in \mathbb{R}$.

2. Mostre que $f(x) := x^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$, não é diferenciável em $x = 0$.

3. Prove o Teorema 20.4 (i) e (ii).

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x^2$ para x racional, e $f(x) := 0$ para x irracional. Mostre que f é diferenciável em $x = 0$, e encontre $f'(0)$.

5. Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x^n$ para $x \geq 0$ e $f(x) := 0$ para $x < 0$. Mostre que f é diferenciável em todo ponto de $\mathbb{R}$, em particular, em $x = 0$.

6. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\bar{x}$ e que $f(\bar{x}) = 0$. Mostre que $g(x) := |f(x)|$ é diferenciável em em $\bar{x}$ se, e somente se, $f'(\bar{x}) = 0$.

7. Calcule os limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - x + 14}{x^5 - 12x + 8}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^5 + 2x^2 - 1}{x^6 - x - 2}$

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Prove que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}-h)}{2h} = f'(\bar{x}).$$

   Mostre que $f(x) = |x|$ em $\bar{x} = 0$ fornece um exemplo em que esse limite existe mas f não é diferenciável em $\bar{x}$.

Prossiga: Função contínua não-diferenciável em todo ponto

Aqui apresentaremos um exemplo, devido a B.L. van der Waerden, de função contínua em $\mathbb{R}$ que não é diferenciável em todo ponto de $\mathbb{R}$. Como no caso de (20.3), esse exemplo também é descrito por meio de uma série de funções

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x), \tag{20.11}$$

onde as funções $\varphi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, são todas obtidas a partir de uma função $\varphi_0(x)$ na forma

$$\varphi_n(x) := k^{-n}\varphi(k^n x),$$

para um certo $k \in \mathbb{N}$ fixo.

Mais especificamente, o exemplo que agora apresentamos é dado por (20.11) com

$$\varphi_0(x) := \text{dist}(x;\mathbb{Z}) = \begin{cases} x - k & \text{para } k \le x < k + \frac{1}{2},\ k \in \mathbb{Z} \\ k + 1 - x & \text{para } k + \frac{1}{2} \le x < k + 1,\ k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

e

$$\varphi_n(x) := 10^{-n}\varphi_0(10^n x).$$

A continuidade de f definida por (20.11) segue do Teste M de Weierstrass que será visto em aula futura e garante a convergência uniforme de uma série de funções se os valores absolutos dos termos da série $|\varphi_n(x)|$ são majorados por números positivos M_n tais que a série numérica $\sum M_n$ é convergente. No caso da série (20.11), $M_n = 10^{-n}$.

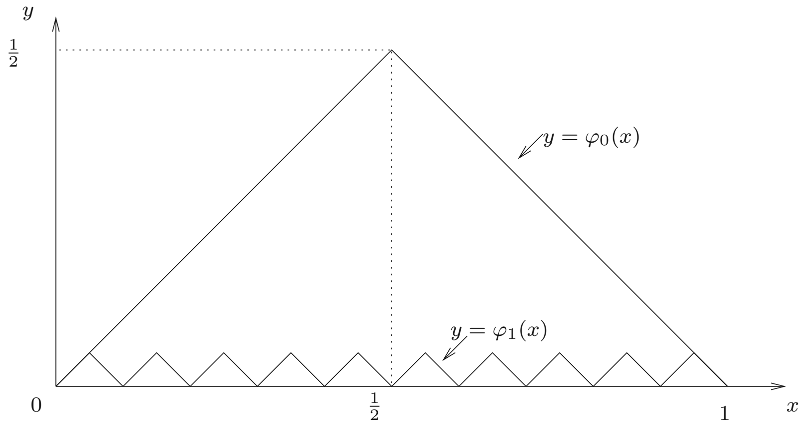


Figura **20.1**: Construção de função contínua não-diferenciável em todo ponto.

Vamos agora provar que f não é diferenciável em nenhum ponto $x \in \mathbb{R}$. Como f é periódica de período 1, bastará considerar o caso em que $0 \leq x < 1$. Nesse caso, podemos escrever x na forma

$$x = 0 \cdot a_1 a_2 \dots a_n \dots .$$

A ideia será mostrar que existe uma sequência (h_m) com $h_m \to 0$ tal que a sequência $((f(x+h_m) - f(x))/h_m)$ não é convergente.

Distinguimos dois casos: (i) $0 \leq 0 \cdot a_{n+1}a_{n+2} \cdots \leq 1/2$; (ii) $1/2 < 0 \cdot a_{n+1}a_{n+2} \cdots < 1$. No primeiro caso, temos

$$\varphi_0(10^n x) = 0 \cdot a_{n+1}a_{n+2} \dots ,$$

enquanto no segundo caso temos

$$\varphi_0(10^n x) = 1 - 0 \cdot a_{n+1}a_{n+2} \dots .$$

Ponhamos $h_m = -10^{-m}$ se a_m é igual a 4 ou 9 e $h_m = 10^{-m}$ se $a_m \in \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$. Observe que desse modo, para cada $n \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, os números $10^n(x + h_m)$ e $10^n x$ estão ambos num mesmo intervalo de comprimento 1/2 da forma $[k, k+1/2)$ ou $[k+1/2, k+1)$.

Considere o quociente

$$\frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m}. \tag{20.12}$$

Pela fórmula (20.11) esse quociente pode ser expresso por uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_0(10^n(x+10^{-m})) - \varphi_0(10^n x)}{10^{n-m}},$$

ou da forma
$$\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{\varphi_0(10^n(x-10^{-m})) - \varphi_0(10^n x)}{10^{n-m}},$$
dependendo se $h_m = 10^{-m}$ ou $h_m = -10^{-m}$.

Em qualquer um dos dois casos, é claro que os numeradores são nulos a partir de $n = m$ em diante. Por outro lado, para $n < m$ eles se reduzem a 10^{n-m} no primeiro caso e -10^{n-m} no segundo; portanto, o termo correspondente da série será igual a 1 no primeiro caso e -1 no segundo. Consequentemente, o valor do quociente (20.12) é um inteiro positivo ou negativo, mas em todo caso par se $m-1$ for par, e ímpar se $m-1$ for ímpar. Logo a sequência dos quocientes (20.12) não pode convergir, já que é formada por inteiros de paridade alternante.

Aula 21 – A Regra da Cadeia

Metas da aula: Justificar rigorosamente a Regra da Cadeia para derivação de funções compostas. Estabelecer a fórmula para derivação da função inversa.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o significado e algumas aplicações da Regra da Cadeia para derivação de funções compostas.
- Saber a fórmula para derivação da função inversa e algumas de suas aplicações.

Introdução

Nesta aula vamos justificar rigorosamente a importantíssima Regra da Cadeia, a qual você já conhece de cursos anteriores de Cálculo. Também estabeleceremos a fórmula para derivação de funções inversas.

O Lema de Carathéodory

Iniciaremos nossa discussão apresentando um singelo resultado devido ao importante matemático grego C. Carathéodory (1873–1950), que será útil na demonstração da Regra da Cadeia, que veremos a seguir, bem como na demonstração da fórmula para derivação de funções inversas. Trata-se, na verdade, de uma reformulação do Teorema 20.1.

Lema 21.1 (Lema de Carathéodory)
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $\bar{x} \in I$, e $f : I \to \mathbb{R}$. Então f é diferenciável em $\bar{x}$ se, e somente se, existe uma função φ em I que é contínua em $\bar{x}$ e satisfaz

$$f(x) - f(\bar{x}) = \varphi(x)(x - \bar{x}) \qquad x \in I. \tag{21.1}$$

Neste caso, temos $\varphi(\bar{x}) = f'(\bar{x})$.

Prova: ($\Rightarrow$) Se $f'(\bar{x})$ existe, podemos definir φ por

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}} & \text{para } x \neq \bar{x},\ x \in I, \\ f'(\bar{x}) & \text{para } x = \bar{x}. \end{cases}$$

A continuidade de φ em $\bar{x}$ segue do fato que $\lim_{x \to \bar{x}} \varphi(x) = f'(\bar{x})$. Se $x = \bar{x}$, então os dois membros de (21.1) são iguais a 0, ao passo que se $x \neq \bar{x}$, então multiplicando $\varphi(x)$ por $x - \bar{x}$ nos dá (21.1) para todo $x \in I \setminus \bar{x}$.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que exista uma função φ contínua em $\bar{x}$ e satisfazendo (21.1). Se dividirmos (21.1) por $x - \bar{x} \neq 0$, então a continuidade de φ em $\bar{x}$ implica que

$$\varphi(\bar{x}) = \lim_{x \to \bar{x}} \varphi(x) = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

existe. Portanto, f é diferenciável em $\bar{x}$ e $f'(\bar{x}) = \varphi(\bar{x})$. $\square$

Exemplos 21.1

1. Para ilustrar o Lema de Carathéodory, consideremos a função f definida por $f(x) = \sqrt{x}$, para $x \geq 0$. Para $\bar{x} > 0$, vale

$$\sqrt{x} - \sqrt{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{\bar{x}}}(x - \bar{x}).$$

   Logo, para todo $\bar{x} > 0$, podemos aplicar o Lema de Carathéodory com $\varphi(x) = 1/(\sqrt{x} + \sqrt{\bar{x}})$ para concluir que f é diferenciável em $\bar{x}$ e $f'(\bar{x}) = 1/(2\sqrt{\bar{x}})$.

2. Por outro lado, f definida no ítem anterior não é diferenciável em $\bar{x} = 0$. De fato, se f fosse diferenciável em 0, então existiria φ contínua em 0 tal que $\sqrt{x} = \varphi(x)x$. Mas então, para $x \neq 0$, teríamos $1/\sqrt{x} = \varphi(x)$, o que daria uma contradição com o fato de φ ser contínua em 0.

A Regra da Cadeia

Em seguida aplicamos o Lema de Carathéodory para provar a famosa Regra da Cadeia para derivação de funções compostas.

Teorema 21.1 (Regra da Cadeia)
Sejam I, J intervalos em $\mathbb{R}$, sejam $g : I \to \mathbb{R}$ e $f : J \to \mathbb{R}$ funções tais que $f(J) \subset I$, e seja $\bar{x} \in J$. Se f é diferenciável em $\bar{x}$ e se g é diferenciável em $f(\bar{x})$, então a função composta $g \circ f$ é diferenciável em $\bar{x}$ e

$$(g \circ f)'(\bar{x}) = g'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x}). \tag{21.2}$$

Prova: Como $f'(\bar{x})$ existe, o Lema de Carathéodory 21.1 implica que existe uma função φ definida em J tal que φ é contínua em $\bar{x}$ e $f(x) - f(\bar{x}) = \varphi(x)(x - \bar{x})$ para $x \in J$, e $\varphi(\bar{x}) = f'(\bar{x})$. Por outro lado, como g é diferenciável em $f(\bar{x})$, existe uma função ψ definida sobre I tal que ψ é contínua em $\bar{y} := f(\bar{x})$ e $g(y) - g(\bar{y}) = \psi(y)(y - \bar{y})$ para $y \in I$, e $\psi(\bar{y}) = g'(\bar{y})$. Substituindo $y = f(x)$ e $\bar{y} = f(\bar{x})$, obtemos

$$g(f(x)) - g(f(\bar{x})) = \psi(f(x))(f(x) - f(\bar{x})) = ((\psi \circ f(x) \cdot \varphi(x))\,(x - \bar{x})$$

para todo $x \in J$. Como a função $(\psi \circ f) \cdot \varphi$, definida em J, é contínua em $\bar{x}$ e seu valor em $\bar{x}$ é $g'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x})$, o Lema de Carathéodory nos dá (21.2).□

Exemplos 21.2

(a) Se $f : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável em I e $g(y) = y^n$ para $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então, como $g'(y) = ny^{n-1}$, segue da Regra da Cadeia 21.1 que

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \qquad \text{para } x \in I.$$

Portanto, temos $(f^n)'(x) = n(f(x))^{n-1} f'(x)$ para todo $x \in I$, como havíamos visto na aula passada.

(b) Suponhamos que $f : I \to \mathbb{R}$ seja diferenciável em I e que $f(x) \neq 0$ para $x \in I$. Se $g(y) := 1/y$ para $y \neq 0$, então, pelo que foi visto na aula passada, $g'(y) = -1/y^2$ para $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Portanto,

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2} \qquad \text{para } x \in I.$$

(c) Consideremos as funções $S(x) := \operatorname{sen} x$, $C(x) := \cos x$, $E(x) := e^x$ e $L(x) := \log x$, $x \in \mathbb{R}$. Nos cursos de Cálculo você aprendeu as fórmulas para as derivadas dessas funções, nomeadamente,

$$S'(x) = \cos x = C(x),\ C'(x) = -\operatorname{sen} x = -S(x),$$
$$E'(x) = e^x = E(x),\ L'(x) = \frac{1}{x},$$

que serão justificadas em aulas futuras deste curso. Assumindo como válidas tais fórmulas, podemos aplicar a Regra da cadeia para calcular derivadas de funções bastante complexas.

Como exemplo, vimos na aula passada que a função $f(x) := x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, $x \neq 0$, e $f(0) := 0$, é diferenciável em $x = 0$ com $f'(0) = 0$. Para $x \neq 0$, a Regra da Cadeia, combinada com a Regra do Produto, nos dá

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x) + x^2(\frac{-1}{x^2}\cos(1/x)) = 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x).$$

Em particular, vê-se claramente que $f'(x)$ é descontínua em $x = 0$.

(d) Calcular $f'(x)$ se $f(x) = \log(1 + (\operatorname{sen} x)^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Usando as fórmulas para as derivadas de $S(x)$ e $L(x)$ no ítem anterior e aplicando duas vezes a Regra da Cadeia, obtemos

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\operatorname{sen} x)^2} 2 \operatorname{sen} x \cos x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + (\operatorname{sen} x)^2},$$

onde também utilizamos a conhecida fórmula $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

Funções Inversas

A seguir vamos estabelecer a fórmula da derivada para a função inversa de uma dada função estritamente monótona. Se f é uma função contínua estritamente monótona definida num intervalo I, então sua função inversa $g = f^{-1}$ está definida no intervalo $J := f(I)$ e satisfaz a relação

$$g(f(x)) = x \qquad \text{para } x \in I. \tag{21.3}$$

Pelo Teorema da Inversa Contínua 19.5, a função g é contínuia em J. Se $\bar{x} \in I$ e $\bar{y} := f(\bar{x})$, e se $f'(\bar{x})$ existe e $f'(\bar{x}) \neq 0$, o teorema que veremos a seguir garante a existência de $g'(\bar{y})$. Neste caso, derivando (21.3) em $x = \bar{x}$ com o auxílio da Regra da Cadeia, segue que $g'(f(\bar{x}))f'(\bar{x}) = 1$, donde concluímos que $g'(\bar{y}) = 1/f'(\bar{x})$. Passemos ao enunciado e prova do resultado.

Teorema 21.2 (Fórmula da Derivada da Função Inversa)
Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$ e seja $f : I \to \mathbb{R}$ estritamente monótona e contínua em I. Seja $J := f(I)$ e $g : J \to \mathbb{R}$ a função estritamente monótona e contínua inversa de f. Se f é diferenciável em $\bar{x} \in I$ e $f'(\bar{x}) \neq 0$, então g é diferenciável em $\bar{y} := f(\bar{x})$ e

$$g'(\bar{y}) = \frac{1}{f'(\bar{x})} = \frac{1}{f'(g(\bar{y}))} \tag{21.4}$$

Prova: Pelo Lema de Carathéodory 21.1 obtemos uma função φ em I contínua em $\bar{x}$ satisfazendo $f(x) - f(\bar{x}) = \varphi(x)(x - \bar{x})$, $x \in I$, com $\varphi(\bar{x}) = f'(\bar{x})$. Como $\varphi(\bar{x}) \neq 0$ por hipótese, existe uma vizinhança $V := (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ tal que $\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in V \cap I$. Se $U := f(V \cap I)$, então a função inversa g satisfaz $f(g(y)) = y$ para todo $y \in U$, de modo que

$$y - \bar{y} = f(g(y)) - f(\bar{x}) = \varphi(g(y))(g(y) - g(\bar{y})).$$

Como $\varphi(g(y)) \neq 0$ para $y \in U$, podemos dividir a equação anterior por $\varphi(g(y))$ e obter

$$g(y) - g(\bar{y}) = \frac{1}{\varphi(g(y))}(y - \bar{y}).$$

Sendo a função $1/(\varphi \circ g)$ contínua em $\bar{y}$, aplicamos o Lema de Carathéodory para concluir que $g'(\bar{y})$ existe e $g'(\bar{y}) = 1/\varphi(g(\bar{y})) = 1/\varphi(\bar{x}) = 1/f'(\bar{x})$. □

Observação 21.1

No Teorema 21.2, a hipótese $f'(\bar{x}) \neq 0$ é essencial. De fato, se $f'(\bar{x}) = 0$, então a função inversa g *nunca* é diferenciável em $\bar{y} = f(\bar{x})$, já que a hipótese da existência de $g'(\bar{y})$ nos levaria a $1 = f'(\bar{x})g'(\bar{y}) = 0$, o que é absurdo. A função $f(x) := x^3$ em $\bar{x} = 0$ é um exemplo dessa situação.

O resultado seguinte é um corolário do Teorema 21.2 combinado com resultados anteriores.

Teorema 21.3

Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ estritamente monótona em I. Seja $J := f(I)$ e seja $g : J \to \mathbb{R}$ a função inversa de f. Se f é diferenciável em I e $f'(x) \neq 0$ para $x \in I$, então g é diferenciável em J e

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}. \tag{21.5}$$

Prova: Se f é diferenciável em I, então o Teorema 20.2 implica que f é contínua em I, e pelo Teorema da Inversa Contínua 19.5, a função inversa g é contínua em J. A equação (21.5) agora segue do Teorema 21.2. □

Se f e g são as funções no enunciado do Teorema 21.3 então a relação (21.5) pode ser escrita na forma

$$g'(y) = \frac{1}{(f' \circ g)(y)}, \ y \in J, \qquad \text{ou} \qquad (g' \circ f)(x) = \frac{1}{f'(x)}, \ x \in I.$$

Exemplos 21.3

(a) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x^3 + x + 1$ é contínua e estritamente monótona crescente, pois é a soma de duas funções crescentes, $f_1(x) = x^3$ e $f_2(x) = x+1$. Além disso, $f'(x) = 3x^2+1$ nunca se anula. Portanto, pelo Teorema 21.2, a função inversa $g = f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em todo ponto. Se tomarmos $\bar{x} = 2$, então como $f(2) = 10$, obtemos $g'(10) = g'(f(2)) = 1/f'(2) = 1/13$.

(b) Seja $n \in \mathbb{N}$ par, $I := [0, \infty)$, e $f(x) := x^n$ para $x \in I$. Vimos na Aula 19 que f é crescente e contínua em I, de modo que sua inversa $g(y) := y^{1/n}$ para $y \in J := [0, \infty)$ também é crescente e contínua em J. Mais ainda, temos $f'(x) = nx^{n-1}$ para $x \in I$. Logo, segue que se $y > 0$, então $g'(y)$ existe e

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{n(g(y))^{n-1}} = \frac{1}{ny^{(n-1)/n}}.$$

Assim deduzimos que

$$g'(y) = \frac{1}{n} y^{(1/n)-1} \quad \text{para } y > 0.$$

No entanto, g não é diferenciável em 0. Veja os gráficos de f e g na Figura **19.4**.

(c) Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, ímpar, seja $f(x) := x^n$ para $x \in \mathbb{R}$, e $g(y) := y^{1/n}$ sua inversa definida para todo $y \in \mathbb{R}$. Como em (b) concluímos que g é diferenciável para $y \neq 0$ e que $g'(y) = (1/n)y^{(1/n)-1}$ para $y \neq 0$. Aqui também g não é diferenciável em $y = 0$. Os gráficos de f e g aparecem na Figura **19.5**.

(d) Seja $r := m/n$ um número racional positivo, $I = [0, \infty)$, e seja $h(x) = x^r$ para $x \in I$ (lembre da Definição 19.3). A função h é a composição das funções $f(x) := x^m$ e $g(x) = x^{1/n}$, $x \in I$: $h(x) = f(g(x))$, $x \in I$. Se aplicarmos a Regra da Cadeia 21.1 e os resultados de (b) e (c), então obtemos

$$\begin{aligned} h'(x) = f'(g(x))g'(x) &= m(x^{1/n})^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{(1/n)-1} \\ &= \frac{m}{n} x^{(m/n)-1} = r x^{r-1} \end{aligned}$$

para todo $x > 0$. Se $r > 1$, é um exercício simples mostrar diretamente da definição que a derivada também existe em $x = 0$ e $h'(0) = 0$.

(e) A função seno é crescente no intervalo $I := [-\pi/2, \pi/2]$ e $\operatorname{sen}(I) = [-1, 1]$. Portanto, sua função inversa, que será denotada por $\operatorname{arc\,sen}$, está definida em $J := [-1, 1]$. Como foi dito no Exemplo 21.2(c), a função seno é diferenciável em $\mathbb{R}$ (em particular em I) e $D \operatorname{sen} x = \cos x$ para $x \in I$. Como $\cos x \neq 0$ para $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ segue do Teorema 21.2 que

$$\begin{aligned} D \operatorname{arc\,sen} y &= \frac{1}{D \operatorname{sen} x} = \frac{1}{\cos x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\operatorname{sen} x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \end{aligned}$$

para todo $y \in (-1, 1)$. A derivada de $\operatorname{arc\,sen}$ não existe nos pontos -1 e 1.

Exercícios 21.1

1. Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) := e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $f(x) := \log \operatorname{sen} x$, $x \in (0, \pi)$.

(c) $\cos \log(1 + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma *função par*, isto é, $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e é diferenciável em todo ponto, então a derivada f' é uma *função ímpar*, ou seja, $f'(-x) = -f'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De modo semelhante, se f é ímpar f' é par.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x^2 \operatorname{sen}(1/x^2)$ para $x \neq 0$ e $f(0) := 0$. Mostre que f é diferenciável em todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre também que a derivada f' não é limitada em nenhum intervalo contendo 0.

4. Se $r > 0$ é um número racional, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := |x|^r$. Mostre que se $r > 1$, então $f'(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$, inclusive $x = 0$.

5. Dado que a função $f(x) := x^5 + x + 2$ para $x \in \mathbb{R}$ possui uma inversa $g := f^{-1}$ definida em $\mathbb{R}$, encontre $g'(y)$ nos pontos correspondentes a $x = 0,\ 1,\ -1$.

6. Dado que a restrição da função cosseno a $I := [0, \pi]$ é estritamente decrescente e $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$, seja $J := [-1, 1]$ e $\operatorname{arccos} : J \to \mathbb{R}$ a função inversa da restrição de cos a I. Mostre que arccos é diferenciável em $(-1, 1)$ e

$$D \operatorname{arccos} y = \frac{-1}{(1 - y^2)^{1/2}}, \qquad \text{para } y \in (-1, 1).$$

Mostre que arccos não é diferenciável em -1 e 1.

7. Dado que a restrição ao intervalo $I := (-\pi/2, \pi/2)$ da função tangente, $\tan x := \operatorname{sen} x / \cos x$, é crescente e que $\tan(I) = \mathbb{R}$, seja $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função inversa de tan em I. Mostre que arctan é diferenciável em $\mathbb{R}$ e que

$$D \arctan(y) = \frac{1}{(1 + y^2)}, \qquad \text{para } y \in \mathbb{R}.$$

8. Seja $r > 0$ um número racional e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := |x|^r \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$ e $f(0) := 0$. Determine os valores de r para os quais f é diferenciável para todo $x \in \mathbb{R}$, inclusive $x = 0$.

Aula 22 – O Teorema do Valor Médio

Metas da aula: Estabelecer o Teorema do Extremo Interior, estudar a relação da derivada com o crescimento local de funções, e apresentar a propriedade do valor intermediário das funções derivadas. Estabelecer o Teorema do Valor Médio e apresentar algumas de suas aplicações, tais como no estudo dos valores extremos locais de funções e na obtenção de desigualdades.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o significado do Teorema do Extremo Interior e algumas de suas aplicações. Conhecer as relações entre a derivada e o crescimento local de funções e a propriedade do valor intermediário das funções derivadas.
- Saber o significado do Teorema do Valor Médio e algumas de suas aplicações, tais como no estudo dos valores extremos locais de funções e na obtenção de desigualdades.

Introdução

O principal resultado que veremos nesta aula é o Teorema do Valor Médio, que relaciona os valores de uma função com os de sua derivada. Esse é sem dúvida um dos resultados mais úteis de toda a Análise Real. Para provar o Teorema do Valor Médio, precisaremos primeiro estabelecer o Teorema do Extremo Interior. Este último justifica a prática de se examinar os zeros da derivada para encontrar os extremos locais de uma função no interior de seu intervalo de definição. O Teorema do Extremo Interior também é usado para demonstrar a propriedade do valor intermediário exibida pelas derivadas de funções diferenciáveis ao longo de intervalos.

O Teorema do Extremo Interior

Iniciaremos nossa aula com o enunciado e a demonstração do Teorema do Extremo Interior, que justifica a prática de se examinar os zeros da derivada para encontrar os extremos locais de uma função.

Recordemos que, se I é um intervalo, diz-se que a função $f : I \to \mathbb{R}$ tem um *máximo local* em $\bar{x} \in I$ se existe uma vizinhança $V := V_\delta(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que $f(x) \leq f(\bar{x})$ para todo $x \in V \cap I$. Neste caso também dizemos que $\bar{x}$ é um *ponto de máximo local de* f. Analogamente, dizemos que f tem um *mínimo local* em $\bar{x} \in I$ se existe uma vizinhança $V := V_\delta(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que $f(x) \geq f(\bar{x})$ para todo $x \in V \cap I$. Recordemos também que por definição $V_\delta(\bar{x}) = (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$. Dizemos que f tem um *extremo local* em $\bar{x} \in I$ se ela tem um máximo local ou um mínimo local em $\bar{x}$.

Diz-se que o ponto $\bar{x}$ é um *ponto interior de* I se $\bar{x}$ não é um extremo de I ou, equivalentemente, se existe uma vizinhança $V_\delta(\bar{x})$ tal que $V_\delta(\bar{x}) \subset I$.

Teorema 22.1 (Teorema do Extremo Interior)
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $\bar{x} \in I$, e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\bar{x}$.

(i) Se $\bar{x}$ não é o extremo à direita de I, então $f'(\bar{x}) > 0$ implica que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(\bar{x})$ para $\bar{x} < x < \bar{x} + \delta$. Por outro lado, $f'(\bar{x}) < 0$ implica que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(\bar{x})$ para $\bar{x} < x < \bar{x} + \delta$

(ii) Se $\bar{x}$ não é o extremo à esquerda de I, então $f'(\bar{x}) < 0$ implica que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(\bar{x})$ para $\bar{x} - \delta < x < \bar{x}$. Por outro lado, $f'(\bar{x}) > 0$ implica que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(\bar{x})$ para $\bar{x} - \delta < x < \bar{x}$.

(iii) Se $\bar{x}$ é um ponto interior de I e f tem um extremo local em $\bar{x}$, então $f'(\bar{x}) = 0$.

Prova: (i) Suponhamos que $\bar{x}$ não é o extremo à direita de I. Inicialmente, consideremos o caso em que $f'(\bar{x}) > 0$. Neste caso, como

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'(\bar{x}) > 0,$$

segue do Teorema 13.5 (na discussão sobre desigualdades e limites de funções) que existe um $\delta > 0$ tal que se $x \in I$ e $0 < |x - \bar{x}| < \delta$, então

$$\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} > 0. \tag{22.1}$$

Como $\bar{x}$ não é o extremo à direita de I, podemos obter $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que vale (22.1) e $(\bar{x}, \bar{x} + \delta) \subset I$. Sendo assim, se $\bar{x} < x < \bar{x} + \delta$, então

$$f(x) - f(\bar{x}) = (x - \bar{x}) \cdot \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} > 0, \tag{22.2}$$

ou seja, $f(x) > f(\bar{x})$ para $\bar{x} < x < \bar{x} + \delta$.

No caso em que $f'(\bar{x}) < 0$, teremos a desigualdade oposta, isto é, '$<$' em lugar de '$>$', tanto em (22.1) como em (22.2). Isso nos dará que $f(x) < f(\bar{x})$ para $\bar{x} < x < \bar{x} + \delta$, como afirmado.

A demontração de (ii) é inteiramente análoga a de (i) e ficará para você como exercício.

(iii) Seja $\bar{x}$ um ponto interior de I tal que f é diferenciável em $\bar{x}$ e tem um extremo local em $\bar{x}$. Para fixar ideias, suponhamos que $\bar{x}$ é um ponto de máximo local de f. Se $f'(\bar{x}) > 0$, então o ítem (i) nos dá uma contradição com o fato de $\bar{x}$ ser um máximo local. Por outro lado, se $f'(\bar{x}) < 0$, então o ítem (ii) nos dá uma contradição com o fato de f ter um máximo local em $\bar{x}$. Logo, devemos ter $f'(\bar{x}) = 0$. O caso em que $\bar{x}$ é mínimo local segue de maneira semelhante (como?). □

O ítem (iii) do Teorema 22.1 é o que se refere diretamente ao ponto de extremo interior. Observe que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ pode ter um extremo local num ponto $\bar{x}$ sem que exista $f'(\bar{x})$. Um exemplo disso é o caso da função $f(x) := |x|$, para $x \in I := [-1, 1]$. Observe também que se o extremo local $\bar{x}$ não for um ponto interior de I, então pode existir $f'(\bar{x})$ com $f'(\bar{x}) \neq 0$. Um exemplo desta última afirmação é dado pela função $f(x) := x$, para $x \in I := [0, 1]$, onde $\bar{x} = 0$ é um ponto de mínimo e $\bar{x} = 1$ é um ponto de máximo.

A seguir, como primeira aplicação do Teorema 22.1, vamos estabelecer a propriedade do valor intermediário exibida pela derivada de função diferenciável em todo ponto de um intervalo $I = [a, b]$. Esse resultado é devido ao matemático francês Gaston Darboux (1842-1917) que a ele empresta seu nome. Já vimos que a propriedade do valor intermediário é exibida pelas funções contínuas. O curioso é que a derivada de uma função diferenciável num intervalo $[a, b]$ pode não ser contínua nesse intervalo!

Teorema 22.2 (Teorema de Darboux)
Se f é diferenciável em $I = [a, b]$ com $f'(a) \neq f'(b)$ e se k é um número qualquer entre $f'(a)$ e $f'(b)$, então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = k$.

Prova: Para fixar ideias, suponhamos que $f'(a) < k < f'(b)$. Definimos g em I por $g(x) := kx - f(x)$ para $x \in I$. Como g é contínua, ela assume um valor máximo em I. Como $g'(a) = k - f'(a) > 0$, segue do Teorema 22.1(i) que o máximo de g não ocorre em $x = a$. Similarmente, como $g'(b) = k - f'(b) < 0$, segue do Teorema 22.1(ii) que o máximo de g não ocorre em $x = b$. Portanto, g assume seu máximo em algum ponto interior $c \in (a, b)$. Então, do Teorema 22.1(iii) temos que $0 = g'(c) = k - f'(c)$. Logo, $f'(c) = k$.
□

Exemplos 22.1

1. A função $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{para } x = 0, \\ -1 & \text{para } -1 \leq x < 0, \end{cases}$$

que é a restrição da função sinal a $I := [-1, 1]$, claramente não satisfaz a propriedade do valor intermediário. Por exemplo, $0 = g(0) < 1/2 < 1 = g(1)$, mas não existe $c \in (0, 1)$ tal que $g(c) = 1/2$. Portanto, pelo Teorema de Darboux, não existe uma função f difenciável em $[-1, 1]$ tal que $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in [-1, 1]$.

2. Por outro lado, já vimos que a função $f : I := [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) := x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ é diferenciável em I. Sua derivada é a função $g : I \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) := 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)$ que, apesar de descontínua em $x = 0$, satisfaz a propriedade do valor intermediário (veja Figura **22.1**).

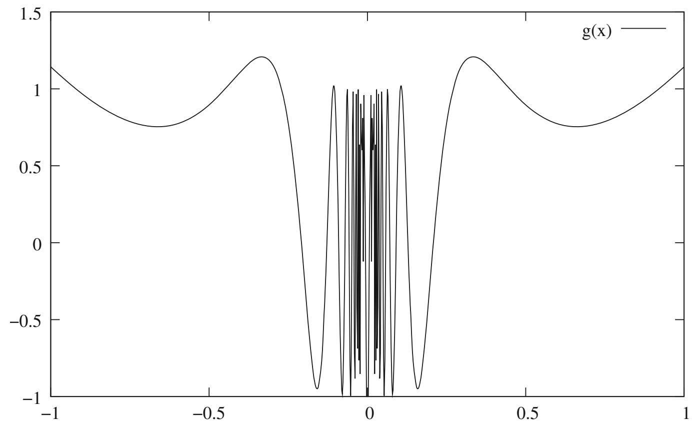


Figura **22.1**: A função $g(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)$.

O Teorema do Valor Médio

A seguir estabeleceremos um resultado famoso conhecido como Teorema de Rolle, cujo nome faz referência ao matemático francês Michel Rolle (1652–1719). Trata-se de um caso particular do Teorema do Valor Médio que lhe é, na verdade, equivalente.

Teorema 22.3 (Teorema de Rolle)
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $I := [a, b]$ que é diferenciável em todo ponto do intervalo aberto (a, b) e satisfaz $f(a) = f(b) = 0$. Então existe ao menos um ponto $\bar{x} \in (a, b)$ tal que $f'(\bar{x}) = 0$.

Prova: Se f se anula identicamente em I, então qualquer $\bar{x} \in (a, b)$ satisfaz a conclusão. Logo, vamos assumir que f não se anula identicamente. Trocando f por $-f$ se necessário, podemos supor sem perda de generalidade que f é positiva em algum ponto de (a, b). Pelo Teorema do Máximo-Mínimo 16.2, f assume o valor $\sup\{f(x) : x \in I\} > 0$ em algum ponto $\bar{x} \in I$. Como $f(a) = f(b) = 0$, o ponto $\bar{x}$ deve pertencer ao intervalo aberto (a, b). Logo, $f'(\bar{x})$ existe. Como f tem um máximo relativo em $\bar{x}$, concluímos do Teorema do Extremo Interior 22.1(iii) que $f'(\bar{x}) = 0$. (Veja Figura **22.2**). $\square$

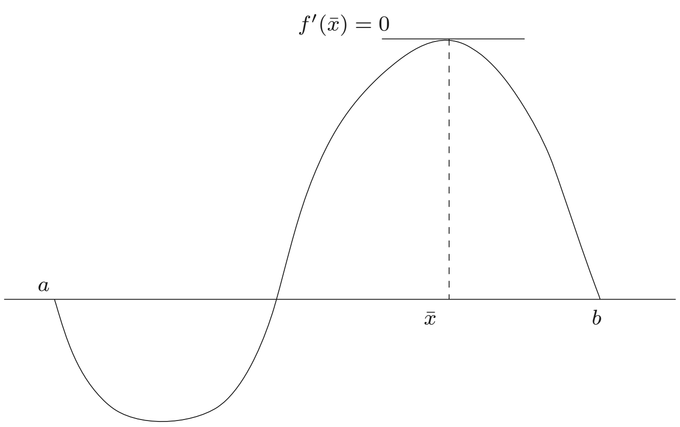


Figura **22.2**: O Teorema de Rolle.

Como uma consequência do Teorema de Rolle, obtemos o fundamental Teorema do Valor Médio.

Teorema 22.4 (Teorema do Valor Médio)
Suponhamos que f é contínua num intervalo fechado $I := [a, b]$, e que f é diferenciável em todo ponto do intervalo aberto (a, b). Então existe ao menos um ponto $\bar{x} \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(\bar{x})(b - a). \qquad (22.3)$$

Prova: Consideremos a função φ definida em I por

$$\varphi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Observe que φ é simplesmente a diferença entre f e a função cujo gráfico é o segmento de reta ligando os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$; veja Figura **22.3**. As hipóteses do Teorema de Rolle são satisfeitas por φ já que esta é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b), e $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Portanto, existe um ponto $\bar{x} \in (a, b)$ tal que

$$0 = \varphi'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Logo, $f(b) - f(a) = f'(\bar{x})(b - a)$. $\square$

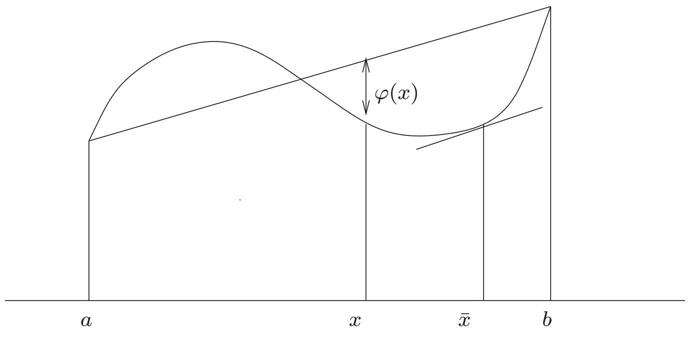


Figura **22.3**: O Teorema do Valor Médio.

A seguir damos algumas aplicações do Teorema do Valor Médio que mostram como esse resultado pode ser utilizado para retirar conclusões sobre a natureza de uma função f a partir de informação sobre sua derivada f'.

Teorema 22.5
Suponhamos que f é contínua no intervalo fechado $I := [a, b]$, diferenciável no intervalo aberto (a, b), e $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então f é constante em I.

Prova: Mostraremos que $f(x) = f(a)$ para todo $x \in I$. De fato, dado $x \in I$, com $x > a$, aplicamos o Teorema do Valor Médio a f sobre o intervalo fechado $[a, x]$. Obtemos que existe um ponto $\bar{x} \in (a, x)$, dependendo de x, tal que $f(x) - f(a) = f'(\bar{x})(x - a)$. Como $f'(\bar{x}) = 0$ por hipótese, concluímos que $f(x) - f(a) = 0$, ou seja, $f(x) = f(a)$, como afirmado. $\square$

Corolário 22.1
Suponhamos que f e g são contínuas em $I := [a, b]$, diferenciáveis em (a, b), e que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + C$ para todo $x \in I$.

Prova: Basta considerar a função $h := f - g$ e aplicar o Teorema 22.5. $\square$

Teorema 22.6
Seja $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável no intervalo I. Então:

(i) f é não-decrescente em I se, e somente se, $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

(ii) f é não-crescente em I se, e somente se, $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

Prova: (i) Suponhamos que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Se $x_1, x_2 \in I$ satisfazem $x_1 < x_2$, então aplicamos o Teorema do Valor Médio a f no intervalo fechado $J := [x_1, x_2]$ para obter um ponto $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\bar{x})(x_2 - x_1).$$

Como $f'(\bar{x}) \geq 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, segue que $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, ou seja, $f(x_1) \leq f(x_2)$, o que prova que f é não-decrescente.

Para provar a recíproca, suponhamos que f é diferenciável e não-decrescente em I. Logo, dado qualquer ponto $\bar{x} \in I$, para todo $x \in I$ com $x \neq \bar{x}$ temos $(f(x) - f(\bar{x}))/(x - \bar{x}) \geq 0$ (por quê?). Logo, pelo Teorema 13.3 concluímos que

$$f'(\bar{x}) = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \geq 0.$$

(ii) A prova da parte (ii) é semelhante e será deixada para você como exercício. □

Observação 22.1
Note que um argumento idêntico ao da prova do Teorema 22.6 mostra que se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é crescente em I, isto é, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in I$. No entanto, a recíproca dessa afirmação não é verdadeira, ou seja, é possível ter f crescente num intervalo I com f' se anulando em alguns pontos de I. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x^3$ é crescente em $\mathbb{R}$, mas $f'(0) = 0$. Claramente, uma observação análoga vale para funções decrescentes.

Teorema 22.7 (Teste da Primeira Derivada)
Seja f contínua no intervalo $I := [a, b]$ e seja c um ponto interior de I. Suponhamos que f é diferenciável nos intervalos abertos (a, c) e (c, b).

(i) Se existe uma vizinhança $(c - \delta, c + \delta) \subset I$ tal que $f'(x) \geq 0$ para $c - \delta < x < c$ e $f'(x) \leq 0$ para $c < x < c + \delta$, então f tem um máximo local em c.

(ii) Se existe uma vizinhança $(c - \delta, c + \delta) \subset I$ tal que $f'(x) \leq 0$ para $c - \delta < x < c$ e $f'(x) \geq 0$ para $c < x < c + \delta$, então f tem um mínimo local em c.

Prova: (i) Se $x \in (c-\delta, c)$, então segue do Teorema do Valor Médio que existe $\bar{x} \in (x, c)$, dependendo de x, tal que $f(c) - f(x) = f'(\bar{x})(c-x)$. Como $f'(\bar{x}) \geq 0$ concluímos que $f(x) \leq f(c)$ para $x \in (c-\delta, c)$. Similarmente, segue do Teorema do Valor Médio e da hipótese $f'(x) \leq 0$ para $x \in (c, c+\delta)$ que $f(x) \leq f(c)$ para $x \in (c, c+\delta)$. Portanto, $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in (c-\delta, c+\delta)$, de modo que f tem um máximo local em c.

(ii) A prova de (ii) é inteiramente análoga e ficará para você como exercício. □

Observação 22.2

A recíproca do Teste da Primeira Derivada 22.7 *não* é válida. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x^2(\operatorname{sen}(1/x) + 2)$ se $x \neq 0$ e $f(0) := 0$ é diferenciável em todo $\mathbb{R}$ e satisfaz $f(x) > 0$ se $x \neq 0$, já que $|\operatorname{sen}(1/x)| \leq 1$. Em particular, 0 é um ponto de mínimo local. A derivada de f é dada por $f'(x) := 2x(\operatorname{sen}(1/x) + 2) - \cos(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f'(0) = 0$. Assim, se $x_k := 1/(2k\pi)$ para $k \in \mathbb{N}$, temos $x_k \to 0$, quando $k \to \infty$, e $f'(x_k) < 0$ para todo k suficientemente grande, já que $\cos(1/x_k) = 1$ e $\lim\,(2x_k(\operatorname{sen}(1/x_k) + 2)) = 0$. Por outro lado, se $z_k := 2/((2k+1)\pi)$ para $k \in \mathbb{N}$, temos $z_k \to 0$ quando $k \to \infty$, e $f'(z_k) > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, já que $z_k > 0$, $\cos(1/z_k) = 0$ e $\operatorname{sen}(1/z_k) = 1$. Portanto, existem pontos arbitrariamente próximos de 0 para os quais f' é negativa e pontos arbitrariamente próximos de 0 para os quais f' é positiva.

Aplicações do Teorema do Valor Médio em desigualdades

A seguir estabeleceremos uma aplicação do Teorema do Valor Médio relacionada com funções Lipschitz. Concluiremos depois dando outros exemplos de aplicações desse resultado para a obtenção de desigualdades.

Teorema 22.8

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em todo ponto do intervalo I. Se existe $C > 0$ tal que $|f'(x)| \leq C$ para todo $x \in I$, então $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$, para todos $x, y \in I$.

Prova: Dados $x, y \in I$, pelo Teorema do Valor Médio existe $\bar{x} \in (x, y)$ tal que $f(x) - f(y) = f'(\bar{x})(x-y)$. Logo,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f'(\bar{x})||x-y| \leq C|x-y|,$$

já que, por hipótese, $|f'(\bar{x})| \leq C$. □

Exemplos 22.2

1. Como já foi dito anteriormente, as funções trigonométricas $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ satisfazem $D \operatorname{sen} x = \cos x$ e $D \cos x = -\operatorname{sen} x$. Além disso vale a relação fundamental $(\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, donde segue que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ e $|\cos x| \leq 1$. Esses fatos serão provados rigorosamente em aulas futuras. Do Teorema 22.8 segue que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Em particular, tomando $x \geq 0$ e $y = 0$ obtemos

$$-x \leq \operatorname{sen} x \leq x \qquad \text{para todo } x \geq 0.$$

2. A função exponencial $f(x) := e^x$ tem derivada $f'(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $f'(x) > 1$ para $x > 0$ e $0 < f'(x) < 1$ para $x < 0$. A partir dessas relações, provaremos a desigualdade

$$e^x \geq 1 + x \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}, \tag{22.4}$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $x = 0$.

Se $x = 0$, como $e^0 = 1$, claramente vale a igualdade. Se $x > 0$, aplicamos o Teorema do Valor Médio à função f no intervalo $[0, x]$, o que nos dá

$$e^x - 1 = e^{\bar{x}} x \qquad \text{para algum } \bar{x} \in (0, x).$$

Segue daí que $e^x - 1 > x$, ou seja, $e^x > 1 + x$ se $x > 0$. Se $x < 0$, aplicando o Teorema do Valor Médio à função f no intervalo $[x, 0]$, de novo obtemos $e^x > 1 + x$. Portanto, temos $e^x > 1 + x$ para todo $x \neq 0$.

3. (Desigualdade de Bernoulli) Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, define-se a função $f(x) := x^\alpha$ para $x > 0$ por

$$x^\alpha := e^{\alpha \log x}.$$

Usando o fato já mencionado, a ser provado em aula futura, de que $D \log x = 1/x$ para $x > 0$, juntamente com a Regra da Cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}(x^\alpha)' &= (e^{\alpha \log x})' = e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x} \\ &= \alpha e^{\alpha \log x} e^{-\log x} = \alpha e^{(\alpha - 1) \log x} \\ &= \alpha x^{\alpha - 1},\end{aligned}$$

o que estende a fórmula que havíamos estabelecido anteriormente para α racional. Usando isso provaremos a desigualdade de Bernoulli que estabelece que para todo $\alpha > 1$ vale

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \qquad \text{para todo } x > -1, \tag{22.5}$$

com igualdade valendo se, e somente se, $x = 0$. Observe que para $\alpha = 1$ vale trivialmente a igualdade para todo $x \in \mathbb{R}$; por isso esse caso é descartado.

Essa desigualdade foi estabelecida anteriormente para $\alpha \in \mathbb{N}$, usando Indução Matemática. Vamos estendê-la a todo $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha > 1$ usando o Teorema do Valor Médio.

Se $g(x) := (1+x)^\alpha$, então $g'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$. Se $x > 0$, aplicamos o Teorema do Valor Médio a g no intervalo $[0, x]$, obtendo $g(x) - g(0) = g'(\bar{x})x$ para algum $\bar{x} \in (0, x)$, ou seja,

$$(1+x)^\alpha - 1 = \alpha(1+\bar{x})^{\alpha-1}x.$$

Como $\bar{x} > 0$ e $\alpha - 1 > 0$, segue que $(1+\bar{x})^{\alpha-1} > 1$ e portanto $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$.

Se $-1 < x < 0$, uma aplicação semelhante do Teorema do Valor Médio à função g no intervalo $[x, 0]$ nos dá novamente $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$ (por quê?).

Como o caso $x = 0$ resulta em igualdade, concluímos que vale (22.5) com igualdade ocorrendo se, e somente se, $x = 0$.

4. Se $0 < \alpha < 1$, $a > 0$ e $b > 0$, então vale a desigualdade

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b, \tag{22.6}$$

onde a igualdade vale se, e somente se, $a = b$. Vamos provar essa afirmação usando o Teorema 22.6. Essa desigualdade pode ser provada também usando-se a concavidade da função logaritmo, que veremos mais tarde.

A desigualdade (22.6) e a afirmação sobre a ocorrência da igualdade serão obtidas como consequência da afirmação de que vale a desigualdade

$$x^\alpha \leq \alpha x + (1-\alpha) \qquad \text{para todo } x \geq 0 \text{ e } 0 < \alpha < 1, \tag{22.7}$$

valendo a igualdade se, e somente se $x = 1$, tomando-se $x = a/b$, $a > 0, b > 0$ (como?).

Provaremos então a desigualdade (22.7) e a afirmação correspondente a validade da igualdade. Consideremos a função $g(x) = \alpha x - x^{\alpha}$, com $x \geq 0$, $0 < \alpha < 1$. Temos $g'(x) = \alpha(1 - x^{\alpha-1})$, de modo que $g'(x) < 0$ para $0 < x < 1$ e $g'(x) > 0$ para $x > 1$. Segue do Teorema 22.6 (veja também a Observação 22.1) que se $x \geq 0$, então $g(x) \geq g(1)$ e $g(x) = g(1)$ se, e somente se, $x = 1$, o que é equivalente a desigualdade (22.7) e a afirmação sobre a ocorrência da igualdade (por quê?).

Exercícios 22.1

1. Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em I. Mostre que se f' nunca se anula em I, então ou $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ ou $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$. [Dica: Use o Teorema de Darboux.]

2. Seja I um intervalo, $g : I \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in I$ um ponto interior de I. Mostre que se existem os limites laterais $L_- := \lim_{x \to \bar{x}-} g(x)$ e $L_+ := \lim_{x \to \bar{x}+} g(x)$ e $L_- \neq L_+$, então g não é a derivada de nenhuma função $f : I \to \mathbb{R}$. [Dica: Use o Teorema de Darboux.]

3. Para cada uma das seguintes funções, encontre os pontos de extremo local, os intervalos nos quais a função é crescente e aqueles nos quais a função é decrescente.

   (a) $f(x) := x^2 - 3x + 5$ para $x \in \mathbb{R}$.
   (b) $f(x) := x^3 - 3x - 4$ para $x \in \mathbb{R}$.
   (c) $f(x) := x^4 + 2x^2 - 4$ para $x \in \mathbb{R}$.
   (d) $f(x) := x + 1/x$ para $x \neq 0$.
   (e) $f(x) := \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$ para $x > 0$.
   (f) $f(x) := 2x + 1/x^2$ para $x \neq 0$.

4. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reais e seja f definida em $\mathbb{R}$ por
$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2.$$
   Encontre o único ponto de mínimo local para f.

5. Sejam $a > b > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq 2$. Prove que $a^{1/n} - b^{1/n} < (a - b)^{1/n}$. [Dica: Mostre que $f(x) := x^{1/n} - (1 - x)^{1/n}$ é decrescente para $x \geq 1$, e tome os valores de f em 1 e a/b.]

6. Use o Teorema do Valor Médio e os fatos já mencionados sobre a função exponencial para provar a desigualdade

$$e^a - e^b \leq e^a(a-b) \qquad \text{para todos } a, b \in \mathbb{R}.$$

7. Use o Teorema do Valor Médio para provar que $(x-1)/x < \log x < x-1$ para $x > 1$. [Dica: Use o fato de que $D \log x = 1/x$ para $x > 0$.]

8. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Mostre que se $\lim_{x \to a} f'(x) = A$, então $f'(a)$ existe e é igual a A. [Dica: Use a definição de $f'(a)$ e o Teorema do Valor Médio.]

9. Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em I. Mostre que se f' é positiva em I, então f é crescente em I.

Aula 23 – O Teorema de Taylor

Metas da aula: Estabelecer o Teorema de Taylor e apresentar suas aplicações em aproximações de funções, na investigação de extremos locais e no estudo de funções convexas.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Conhecer o significado do Teorema de Taylor e suas aplicações em aproximações de funções, na investigação de extremos locais e no estudo de funções convexas.

Introdução

Se I é um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em todos os pontos de I, então temos definida em I a função $f' : I \to \mathbb{R}$, derivada (primeira) de f. Se a função f' for diferenciável em um ponto $\bar{x} \in I$, então teremos definida a derivada de f' em $\bar{x}$, $(f')'(\bar{x})$, que denotamos simplesmente por $f''(\bar{x})$ e chamamos a *derivada segunda de f em $\bar{x}$*. Se f' também for diferenciável em todos os pontos de I, então teremos definida a função $f'' : I \to \mathbb{R}$, *derivada segunda de f*. Se f'' é diferenciável num ponto $\bar{x} \in I$, então existe $(f'')'(\bar{x})$ que denotamos por $f'''(\bar{x})$ ou $f^{(3)}(\bar{x})$, chamada *derivada terceira de f em $\bar{x}$*, e se f'' é diferenciável em todo ponto de I então teremos definida a função $f''' : I \to \mathbb{R}$, também denotada por $f^{(3)}$ e chamada *derivada terceira de f*. Desse modo podemos definir *a derivada n-ésima da função f em $\bar{x} \in I$*, $f^{(n)}(\bar{x})$, desde que tenhamos definida em todo ponto de I a derivada $(n-1)$-ésima de f, $f^{(n-1)}$, e que esta seja diferenciável em $\bar{x}$. Observe que admitimos que $\bar{x}$ seja um ponto extremo do intervalo I. Observe também que para que possamos definir $f^{(n)}(\bar{x})$ basta que tenhamos $f^{(n-1)}$ definida em $(\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta) \cap I$ para algum $\delta > 0$. A derivada n-ésima em $\bar{x}$, $f^{(n)}(\bar{x})$, também é chamada *derivada de ordem n de f em $\bar{x}$*.

Se a função f tem uma derivada n-ésima num ponto x_0, não é difícil obter um polinômio P_n de grau n tal que $P_n(x_0) = f(x_0)$ e $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ para $k = 1, 2, \dots, n$. De fato, o polinômio

$$P_n(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \tag{23.1}$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{23.2}$$

tem a propriedade de que ele e suas derivadas até a ordem n no ponto x_0 coincidem com a função f e suas derivadas até a ordem n quando avaliadas nesse mesmo ponto.

Esse polinômio P_n é chamado o *polinômio de Taylor de grau n para f em x_0* e seu estudo remonta ao matemático inglês Brook Taylor (1683–1731), embora a fórmula para o resto $R_n := f - P_n$ só tenha sido obtida muito mais tarde por Joseph-Louis Lagrange (1736–1813). A fórmula ou Teorema de Taylor (com resto de Lagrange) e suas aplicações constituem o tema desta aula que passamos a estudar em detalhes a seguir.

A fórmula de Taylor

Seja $I := [a, b]$, $x_0 \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Fixemos um ponto $x_0 \in I$. Dado um ponto qualquer $x \in I$, o Teorema do Valor Médio afirma que existe um ponto $\bar{x} = \bar{x}(x)$ no intervalo entre x_0 e x, i.e. $\bar{x} \in (\min\{x_0, x\}, \max\{x_0, x\})$, para o qual vale a equação

$$f(x) = f(x_0) + f'(\bar{x})(x - x_0). \tag{23.3}$$

Essa equação nos diz que o valor $f(x)$ pode ser aproximado pelo valor $f(x_0)$ e que ao fazermos essa aproximação estaremos cometendo um erro dado por $R_0(x) := f(x) - f(x_0) = f'(\bar{x})(x - x_0)$.

Para podermos estimar o erro $R_0(x)$ é preciso ter alguma informação sobre o comportamento da derivada $f'(\bar{x})$ para x num intervalo $I_\delta := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$, para algum $\delta > 0$. Por exemplo, se para algum $C > 0$ tivermos $|f'(\bar{x})| \le C$ para $x \in I_\delta$, então teremos $|R_0(x)| \le C|x - x_0|$ para $x \in I_\delta$.

Em particular, se existe $f'(x_0)$, então temos que $|f'(\bar{x})|$ é limitado para $x \in I_\delta$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, já que de (23.3) obtemos

$$\lim_{x \to x_0} f'(\bar{x}(x)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0). \tag{23.4}$$

Mais ainda, nesse caso é possível escrever (23.3) na forma

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x) \qquad \text{para } x \in I, \tag{23.5}$$

onde $r_1(x)$ satisfaz

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_1(x)}{x - x_0} = 0, \tag{23.6}$$

bastando para isso tomar

$$r_1(x) := (f'(\bar{x}(x)) - f'(x_0))(x - x_0).$$

Observe também que a equação (23.5) nos dá

$$r_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Segue daí que $r_1(x)$ é diferenciável em x_0 e

$$r_1(x_0) = r_1'(x_0) = 0. \tag{23.7}$$

O seguinte resultado mostra, em particular, que (23.6) e (23.7) são na verdade equivalentes, uma vez que $r_1(x)$ é diferenciável em x_0, e estende esse fato a derivadas de ordens mais altas.

Lema 23.1

Seja $r : I := [a, b] \to \mathbb{R}$ n vezes diferenciável em $x_0 \in I$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i)
$$r(x_0) = r'(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = 0. \tag{23.8}$$

(ii)
$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \tag{23.9}$$

Prova: (i)$\Rightarrow$(ii) Vamos usar Indução Matemática. Mostremos primeiro que a implicação vale para $n = 1$. Suponhamos então que $r(x_0) = r'(x_0) = 0$. Usando essas hipóteses e a definição de derivada obtemos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{r(x) - r(x_0)}{x - x_0} = r'(x_0) = 0,$$

o que prova que a implicação vale para $n = 1$. Suponhamos que a implicação valha para $n = k$. Temos que mostrar que nesse caso ela vale também para $n = k + 1$ e, para isso, assumimos agora que $r(x_0) = \cdots = r^{(k)}(x_0) = r^{(k+1)}(x_0) = 0$. A função $\phi := r'$ satisfaz $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = \cdots = \phi^{(k)}(x_0) = 0$. Pela hipótese de indução temos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r'(x)}{(x - x_0)^k} = \lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x)}{(x - x_0)^k} = 0.$$

Agora, pelo Teorema do Valor Médio, dado $x \in I$, existe $\bar{x} = \bar{x}(x)$ no intervalo aberto I_x entre x_0 e x tal que $r(x) = r'(\bar{x})(x - x_0)$. Observe que $\lim_{x \to x_0} \bar{x}(x) = x_0$ já que $|\bar{x} - x_0| \leq |x - x_0|$. Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^{k+1}} &= \lim_{x \to x_0} \frac{r'(\bar{x})(x - x_0)}{(x - x_0)^{k+1}} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{r'(\bar{x})}{(\bar{x} - x_0)^k} \frac{(\bar{x} - x_0)^k}{(x - x_0)^k} = 0,
\end{aligned}$$

já que $\left|(\bar{x}-x_0)^k/(x-x_0)^k\right| \leq 1$ e

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r'(\bar{x})}{(\bar{x}-x_0)^k} = 0 \qquad \text{(por quê?)},$$

o que conclui a prova por indução.

(ii)$\Rightarrow$(i) Provaremos também essa implicação usando Indução Matemática. Vejamos incialmente o caso $n=1$, para o qual supomos que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{x-x_0} = 0.$$

Como $r(x)$ é contínua em x_0, já que é diferenciável nesse ponto, então

$$r(x_0) = \lim_{x\to x_0} r(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{x-x_0}(x-x_0) = 0.$$

Por outro lado,

$$r'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{r(x)-r(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{x-x_0} = 0,$$

o que prova que a implicação vale para $n=1$. Suponhamos agora que a implicação seja válida para $n=k$; vamos provar que então ela também vale para $n=k+1$. Para isso assumimos que $r(x)$ é $(k+1)$ vezes diferenciável em x_0 e

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^{k+1}} = 0.$$

Como $r(x)$ satisfaz

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^k} = \lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^{k+1}}(x-x_0) = 0,$$

segue da hipótese de indução que $r(x_0) = r'(x_0) = \cdots = r^{(k)}(x_0) = 0$.

Consideremos a função $\varphi(x) := r(x) - \dfrac{1}{(k+1)!} r^{(k+1)}(x_0)(x-x_0)^{k+1}$ para $x \in I$. Verificamos facilmente que

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \cdots = \varphi^{(k+1)}(x_0) = 0.$$

Como já provamos que (i) implica (ii), deduzimos que

$$0 = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{(x-x_0)^{k+1}} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{r(x)}{(x-x_0)^{k+1}}\right) - r^{(k+1)}(x_0),$$

ou seja,

$$r^{(k+1)}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^{k+1}} = 0,$$

o que conclui a prova da implicação (ii)⇒(i). □

O Teorema de Taylor que veremos a seguir é um refinamento do Teorema do Valor Médio para o caso em que existam derivadas de ordens maiores do que 1; daí se pode perceber sua fundamental importância. Recordemos a definição de $P_n(x)$ em (23.1). Adotamos a convenção de que $f^{(0)} := f$.

Teorema 23.1 (Teorema de Taylor)
Seja $n \in \mathbb{N}$, $I := [a, b]$, e $f : I \to \mathbb{R}$ tal que f, f',..., $f^{(n-1)}$ são contínuas em I e $f^{(n)}$ existe em (a, b). Fixemos $x_0 \in I$. Então:

(A) Para todo $x \in I$ existe $\bar{x}$ entre x_0 e x tal que

$$f(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!}(x - x_0)^n. \tag{23.10}$$

(B) Se existe $f^{(n)}(x_0)$, podemos escrever

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x), \tag{23.11}$$

onde $r_n(x)$ satisfaz

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \tag{23.12}$$

Em particular,

$$\lim_{x \to x_0} f^{(n)}(\bar{x}) = f^{(n)}(x_0). \tag{23.13}$$

Além disso, o polinômio $P_n(x)$ é o único polinômio $p(x)$ de grau $\leq n$ tal que $f(x) = p(x) + r(x)$, onde $r(x)$ satisfaz $\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.

Prova: (A) Fixemos x e definamos o número M por

$$f(x) = P_{n-1}(x) + M(x - x_0)^n. \tag{23.14}$$

Temos que mostrar que $n!M = f^{(n)}(\bar{x})$ para algum $\bar{x}$ entre x_0 e x. Consideremos a função

$$g(t) := f(t) - P_{n-1}(t) - M(t - x_0)^n \qquad a \leq t \leq b. \tag{23.15}$$

Por (23.1) e (23.5) temos

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!M \qquad a < t < b. \tag{23.16}$$

Portanto, a prova estará completa se pudermos mostrar que $g^{(n)}(\bar{x}) = 0$ para algum $\bar{x}$ entre x_0 e x.

Como $P_{n-1}^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ para $k = 0, \dots, n-1$, temos

$$g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n-1)}(x_0) = 0. \tag{23.17}$$

A definição de M mostra que $g(x) = 0$, de modo que pelo Teorema de Rolle $g'(\bar{x}_1) = 0$ para algum $\bar{x}_1$ entre x_0 e x. Como $g'(x_0) = 0$, concluímos da mesma forma que $g''(\bar{x}_2) = 0$ para algum $\bar{x}_2$ entre x_0 e $\bar{x}_1$. Após iterarmos esse procedimento n vezes, chegamos à conclusão que $g^{(n)}(\bar{x}_n) = 0$ para algum $\bar{x}_n$ entre x_0 e $\bar{x}_{n-1}$. Tomando $\bar{x} = \bar{x}_n$ temos o desejado ponto entre x_0 e x.

(B) Definamos $r_n(x)$ pela equação (23.11). Então $r_n(x)$ é n vezes diferenciável em x_0 e

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \cdots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Logo, pelo Lema 23.1 temos (23.12). De (A) podemos escrever

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(\bar{x}) - f^{(n)}(x_0))(x - x_0)^n.$$

Dividindo essa equação por $(x - x_0)^n$, passando ao limite quando $x \to x_0$ e aplicando (23.12), obtemos (23.13).

Suponhamos agora que $p(x)$ é um polinômio de grau $\leq n$ e $f(x) = p(x) + r(x)$, onde $r(x)$ satisfaz $\lim_{x \to x_0} \dfrac{r(x)}{(x - x_0)^n} = 0$. Observe que sempre é possível escrever um tal polinômio na forma $p(x) = a_n(x - x_0)^n + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \cdots + a_0$. O Lema 23.1 implica que $r(x_0) = r'(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = 0$. Logo, $f^{(k)}(x_0) = p^{(k)}(x_0)$ o que implica que $a_k = \dfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$. Portanto, $p(x) = P_n(x)$. $\square$

Exemplos 23.1

(a) (Regra de L'Hôpital para derivadas de ordem n) Sejam $I := [a, b]$ e $f, g : I \to \mathbb{R}$ n vezes diferenciáveis no ponto $x_0 \in I$ com derivadas até ordem $n - 1$ nulas em x_0. Se $g^{(n)}(x_0) \neq 0$ então

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}. \tag{23.18}$$

De fato, pelo Teorema de Taylor 23.1(B), temos

$$f(x) = (x - x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{r_n^f(x)}{(x - x_0)^n} \right)$$

e

$$g(x) = (x - x_0)^n \left(\frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{r_n^g(x)}{(x - x_0)^n} \right)$$

com
$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n^f(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n^g(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$
Portanto,
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\dfrac{r_n^f(x)}{(x-x_0)^n}}{\dfrac{g^{(n)}(x_0)}{n!}+\dfrac{r_n^g(x)}{(x-x_0)^n}}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

(b) A função definida por $f(x) := e^{-1/x^2}$ para $x \neq 0$ e $f(0) := 0$ satisfaz $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Em particular, o n-ésimo polinômio de Taylor para f em 0 é $P_n(x) \equiv 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, pelo Teorema do Valor Médio aplicado repetidamente a f e às suas derivadas, basta mostrar que existem os limites $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x)$ e que esses são iguais a 0. Com efeito, pelo Teorema do Valor Médio temos $f^{(k-1)}(x)-f^{(k-1)}(0) = f^{(k)}(\bar{x})x$, para algum $\bar{x}$ entre 0 e x. Como $\bar{x} \to 0$ quando $x \to 0$, vemos que
$$\lim_{x\to 0} f^{(k)}(x)=\lim_{x\to 0} f^{(k)}(\bar{x})=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k-1)}(x)-f^{(k-1)}(0)}{x}=f^{(k)}(0),$$
onde também usamos a definição de derivada. Agora, usando seus conhecimentos de Cálculo, você poderá verificar que para $x \neq 0$ temos
$$f^{(k)}(x)=p_k(\frac{1}{x})e^{-1/x^2},$$
onde $p_k(y)$ é um polinômio de grau $3k$. Portanto, a afirmação estará provada se mostrarmos que para todo $m \in \mathbb{N}$ vale
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x^m}=0. \tag{23.19}$$
Claramente, nesse caso particular basta mostrar (por quê?)
$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-1/x^2}}{x^m}=0 \qquad \text{para todo } m\in\mathbb{N}.$$
Como $1/x \to \infty$ quando $x \to 0+$ e $1/y \to 0$ quando $y \to \infty$, isso é equivalente a mostrar que
$$\lim_{y\to\infty} y^m e^{-y^2}=0 \qquad \text{para todo } m\in\mathbb{N}. \tag{23.20}$$
Agora, das desigualdades $y < 1 + y \leq e^y$, obtemos $y^m < e^{my}$. Assim, para $y > 0$ temos
$$y^m e^{-y^2} < e^{-y^2+my} = e^{-(y-m/2)^2-m^2} = e^{-m^2}e^{-(y-m/2)^2} \to 0 \quad \text{quando } y\to\infty,$$
o que prova (23.20) e por conseguinte (23.19).

(c) Vamos aproximar o número e com erro menor que 10^{-5}.

Consideremos a função $f(x) := e^x$ e tomemos $x_0 = 0$ e $x = 1$ na fórmula de Taylor (23.10). Precisamos determinar n tal que $|R_n(1)| < 10^{-5}$ onde

$$R_n(x) := f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^n,$$

por (23.10). Para isso usaremos o fato de que $f'(x) = e^x$ e a limitação inicial $e^x \leq 3$ para $0 \leq x \leq 1$.

Claramente, de $f'(x) = f(x) = e^x$ segue que $f^{(k)}(x) = e^x$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Em particular, $f^{(k)}(0) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Consequentemente o n-ésimo polinômio de Taylor é dado por

$$P_n(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

e o resto para $x = 1$ é $R_n(1) = e^{\bar{x}}/(n+1)!$ para algum $\bar{x}$ satisfazendo $0 < \bar{x} < 1$. Como $e^{\bar{x}} < 3$, devemos buscar um valor de n tal que $3/(n+1)! < 10^{-5}$. Um cálculo revela que $9! = 362880 > 3 \times 10^5$ de modo que o valor $n = 8$ nos dará a desejada acurácia. Mais ainda, como $8! = 40320$ nenhum valor menor de n será satisfatório. Assim, obtemos

$$e \approx P_8(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{8!} = 2 \cdot 71828$$

com erro menor do que 10^{-5}.

O Teorema de Taylor pode ser usado para se obter desigualdades como mostram os dois exemplos a seguir.

Exemplos 23.2

(a) $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}|x|^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \tag{23.21}$$

Apliquemos o Teorema de Taylor 23.1(A) à função $f(x) := \cos x$ em $x_0 = 0$ e $n = 3$ para obter

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + R_2(x),$$

com

$$R_2(x) = \frac{f'''(\bar{x})}{3!}x^3 = \frac{\operatorname{sen} \bar{x}}{6}x^3,$$

para algum $\bar{x}$ entre 0 e x. A desigualdade $\cos x \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}|x|^3$ segue imediatamente da fórmula para $R_2(x)$ e do fato de que $|\operatorname{sen} y| \leq 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

Quanto à desigualdade $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x$ argumentamos do seguinte modo. Se $0 \leq x \leq \pi$, então $0 \leq \bar{x} \leq \pi$. Como $\bar{x}$ e x^3 são positivos, temos $R_2(x) \geq 0$. Também, se $-\pi \leq x \leq 0$, então $-\pi \leq \bar{x} \leq 0$. Como $\operatorname{sen} \bar{x}$ e x^3 são ambos negativos, de novo temos $R_2(x) \geq 0$. Portanto, temos $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x$ para $|x| \leq \pi$. Se $|x| \geq \pi$, então $1 - \frac{1}{2}x^2 < -3 \leq \cos x$ e a desigualdade vale trivialmente.

Da desigualdade demonstrada segue que

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1 - \cos x}{x^2} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{6}|x|.$$

Como o limite do último membro da desigualdade é igual ao primeiro membro, isto é, $\frac{1}{2}$, (23.21) segue do Teorema 13.4. O limite em (23.21) também pode ser obtido diretamente da Regra de L'Hôpital no Exemplo 23.1(a).

(b) Para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $x > 0$ temos

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots - \frac{1}{2k}x^{2k} < \log(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{2k+1}x^{2k+1}. \quad (23.22)$$

Usando o fato de que a derivada de $\log(1 + x)$ é $1/(1 + x)$ para $x > 0$, vemos que o n-ésimo polinômio de Taylor para $\log(1 + x)$ com $x_0 = 0$ é

$$P_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

e o resto é dado por

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n/(n+1)}{(1+\bar{x})^{n+1}}x^{n+1}$$

para algum $\bar{x}$ satisfazendo $0 < \bar{x} < x$. Assim, para $x > 0$, se n é par, isto é $n = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então temos $R_{2k}(x) > 0$; se n é ímpar, $n = 2k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então $R_{2k+1}(x) < 0$. A desigualdade (23.22) segue imediatamente dessas considerações.

Extremos Locais

Como foi visto, o Teste da Primeira Derivada 22.7 ajuda a determinar se um ponto onde a derivada de f se anula é um máximo local ou um mínimo local, ou simplesmente não é um extremo local. Se existem derivadas de ordens mais altas, essas também podem ser usadas para essa determinação.

Teorema 23.2
Seja I um intervalo, x_0 um ponto interior de I e seja $n \geq 2$. Suponhamos que as derivadas $f', f'', \dots, f^{(n)}$ existam e sejam contínuas numa vizinhança de x_0 e $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, mas $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

(i) Se n é par e $f^{(n)}(x_0) > 0$, então f tem um mínimo local em x_0.

(ii) Se n é par e $f^{(n)}(x_0) < 0$, então f tem um máximo local em x_0.

(iii) Se n é ímpar, então f não tem um extremo local em x_0.

Prova: Pelo Teorema de Taylor 23.1(A) temos para $x \in I$

$$f(x) = P_{n-1}(x) + R_{n-1}(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!}(x - x_0)^n,$$

onde $\bar{x}$ é um ponto entre x_0 e x. Como $f^{(n)}$ é contínua, se $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, então existe um intervalo aberto U contendo x_0 tal que $f^{(n)}(x)$ tem o mesmo sinal que $f^{(n)}(x_0)$ para $x \in U$. Se $x \in U$, então o ponto $\bar{x}$ também pertence a U e consequentemente $f^{(n)}(\bar{x})$ e $f^{(n)}(x_0)$ têm o mesmo sinal.

(i) Se n é par e $f^{(n)}(x_0) > 0$, então para $x \in U$ temos $f^{(n)}(\bar{x}) > 0$ e $(x - x_0)^n \geq 0$ de modo que $R_{n-1}(x) \geq 0$. Logo, $f(x) \geq f(x_0)$ para $x \in U$, e portanto f tem um mínimo local em x_0.

(ii) Se n é par e $f^{(n)}(x_0) < 0$, então segue que $R_{n-1}(x) \leq 0$ para $x \in U$, de modo que $f(x) \leq f(x_0)$ para $x \in U$. Portanto, f tem um máximo local em x_0.

(iii) Se n é ímpar, então $(x - x_0)^n$ é positivo se $x > x_0$ e negativo se $x < x_0$. Consequentemente, se $x \in U$, então $R_{n-1}(x)$ terá sinais opostos à esquerda e à direita de x_0. Logo, f não pode ter extremo local em x_0. $\square$

Funções Convexas

A noção de convexidade desempenha um papel fundamental na Matemática assim como em outras ciências. Em particular, em problemas de otimização que surgem em áreas diversas como nas várias modalidades de engenharia, economia, etc.

Definição 23.1

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Diz-se que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é *convexa* em I se para quaisquer pontos $z, w \in I$ e todo θ satisfazendo $0 \leq \theta \leq 1$, temos

$$f((1-\theta)z + \theta w) \leq (1-\theta)f(z) + \theta f(w). \tag{23.23}$$

Observe que se $z < w$, então quando θ varia de 0 a 1, o ponto $(1-\theta)z + \theta w$ percorre o intervalo de z a w. Assim, se f é convexa em I e se $z, w \in I$, então o segmento de reta unindo os pontos $(z, f(z))$ e $(w, f(w))$, pertencentes ao gráfico de f, se situa acima do gráfico de f (veja Figura **23.1**).

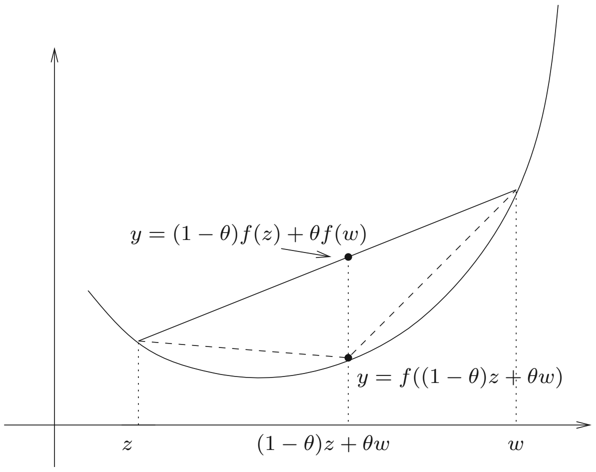


Figura **23.1**: Uma função convexa.

Sejam $A := (z, f(z))$, $B := (w, f(w))$, $C = \big((1-\theta)z + \theta w, f((1-\theta)z + \theta w)\big)$, AB o segmento de reta ligando A a B, AC e CB os segmentos de reta ligando A a C e C a B, respectivamente, e m_{AB}, m_{AC} e m_{CB} as inclinações das retas contendo AB, AC e CB, respectivamente. Observe que

$$m_{AB} = \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, \quad m_{AC} = \frac{f((1-\theta)z + \theta w) - f(z)}{\theta(w - z)},$$
$$m_{CB} = \frac{f((1-\theta)z + \theta w) - f(w)}{(1-\theta)(z - w)}.$$

Assim, somando $-f(z)$ a cada membro de (23.23) e em seguida dividindo ambos os membros por $\theta(w - z)$ obtemos

$$m_{AC} \leq m_{AB}.$$

De modo semelhante, obtemos $m_{AB} \leq m_{CB}$, donde resultam as desigualdades

$$m_{AC} \leq m_{AB} \leq m_{CB}. \tag{23.24}$$

Teorema 23.3
Se $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa no intervalo I, então existem as derivadas laterais $f'^{+}(x_0)$ e $f'^{-}(x_0)$ para todo $x_0 \in I$. Em particular, f é contínua em todo ponto interior de I.

Prova: Sejam $x_1, x_2 \in I$ satisfazendo: (i) $x_1 < x_2 < x_0$ ou (ii) $x_0 < x_2 < x_1$. Observemos que a reta contendo o segmento ligando os pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_0, f(x_0))$ pode ser descrita pela equação

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0). \tag{23.25}$$

Em ambos os casos (i) $x_1 < x_2 < x_0$ e (ii) $x_0 < x_2 < x_1$, o ponto x_2 satisfaz $x_2 = (1-\theta)x_0 + \theta x_1$ para algum θ com $0 \le \theta \le 1$. Logo, o ponto $(x_2, f(x_2))$, pertencente ao gráfico de f, fica acima do ponto (x_2, y_2) pertencente à reta ligando $(x_0, f(x_0))$ a $(x_1, f(x_1))$. Usando (23.25), isso nos dá

$$f(x_2) \le f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0). \tag{23.26}$$

Portanto, no caso (i), por (23.26) temos

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \ge \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \tag{23.27}$$

ao passo que no caso (ii) temos

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \le \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Então a função $g(x) = (f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ para $x \in I$ com $x \neq x_0$ é crescente em ambos os intervalos $I_- := (-\infty, x_0) \cap I$ e $I_+ := (x_0, \infty) \cap I$. Além disso, usando (23.24) deduzimos que g é limitada superiormente em I_- e inferiormente em I_+ (por quê?). Concluímos então que existem os limites laterais $\lim_{x \to x_0-} g(x)$ e $\lim_{x \to x_0+} g(x)$ que, por definição, são as derivadas laterais $f'^{-}(x_0)$ e $f'^{+}(x_0)$.

O fato de que f é contínua em todo ponto interior de I decorre do Teorema 20.3. □

Quando f é duas vezes diferenciável a convexidade pode ser caracterizada de modo bastante simples como mostra o resultado seguinte.

Teorema 23.4
Seja I um intervalo aberto e suponhamos que $f : I \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável em todo ponto de I. Então f é convexa em I se, e somente se, $f''(x) \ge 0$ para todo $x \in I$.

Prova: ($\Rightarrow$) Pelo Teorema de Taylor 23.1(B), dado $a \in I$ e $h \in \mathbb{R}$ tal que $a \pm h \in I$, temos

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + r(h),$$
$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + r(-h),$$

onde $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0$. Somando essas equações e dividindo por h^2, obtemos

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a) + \frac{r(h)}{h^2} + \frac{r(-h)}{h^2},$$

donde segue que

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}. \tag{23.28}$$

Se f é convexa, como $a = \frac{1}{2}(a+h) + \frac{1}{2}(a-h)$, temos

$$f(a) = f(\frac{1}{2}(a+h) + \frac{1}{2}(a-h)) \leq \frac{1}{2}f(a+h) + \frac{1}{2}f(a-h).$$

Portanto, $f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) \geq 0$. Como $h^2 > 0$ para todo $h \neq 0$, vemos que o limite em (23.28) deve ser não-negativo. Logo, $f''(a) \geq 0$ para todo $a \in I$.

($\Leftarrow$) Sejam $z, w \in I$, $0 < \theta < 1$ e ponhamos $x_0 := (1-\theta)z + \theta w$. Pelo Teorema de Taylor 23.1(A), temos

$$f(z) = f(x_0) + f'(x_0)(z - x_0) + \frac{1}{2}f''(\bar{x}_1)(z - x_0)^2, \tag{23.29}$$
$$f(w) = f(x_0) + f'(x_0)(w - x_0) + \frac{1}{2}f''(\bar{x}_2)(w - x_0)^2, \tag{23.30}$$

para algum $\bar{x}_1$ entre x_0 e z, e algum $\bar{x}_2$ entre x_0 e w. Multiplicando (23.29) por $(1-\theta)$ e (23.30) por θ, e em seguida somando as duas equações, obtemos

$$\begin{aligned}(1-\theta)f(z) + \theta f(w) &= f(x_0) + \frac{(1-\theta)}{2}f''(\bar{x}_1)(z - x_0)^2 + \frac{\theta}{2}f''(\bar{x}_2)(w - x_0)^2 \\ &\geq f(x_0) = f((1-\theta)z + \theta w),\end{aligned}$$

já que

$$\frac{(1-\theta)}{2}f''(\bar{x}_1)(z - x_0)^2 + \frac{\theta}{2}f''(\bar{x}_2)(w - x_0)^2 \geq 0$$

pelo fato de que f'' é não-negativa. Logo, f é convexa em I. $\square$

Exercícios 23.1

1. Seja $f(x) := \operatorname{sen} ax$ para $x \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$. Encontre $f^{(n)}(x)$ para $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Seja $g(x) := x^2|x|$ para $x \in \mathbb{R}$. Encontre $g'(x)$ e $g''(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, e $g'''(x)$ para $x \neq 0$. Mostre que não existe $g'''(0)$.

3. Use Indução para provar a regra de Leibniz para a n-ésima derivada do produto
$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

4. Mostre que se $x > 0$, então $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$.

5. Se $x > 0$ mostre que $|(1+x)^{1/3} - (1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2)| \leq (5/81)x^3$. Use essa desigualdade para aproximar $\sqrt{1.2}$ e $\sqrt{2}$.

6. Se $f(x) := e^x$ mostre que o termo que dá o resto no Teorema de Taylor 23.1(A) converge a 0 quando $n \to \infty$ para cada x e x_0 fixados.

7. Calcule e com sete casas decimais corretas.

8. Determine se $x = 0$ é ou não um extremo local das seguintes funções:

   (a) $f(x) := x^3 + 2$;

   (b) $f(x) := x^4 + 1$;

   (c) $f(x) := \operatorname{sen} x - x$;

   (d) $f(x) := \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$.

9. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e f duas vezes diferenciável e convexa em I. Se $x_0 \in I$, mostre que nenhum ponto do gráfico de f está abaixo da reta tangente ao gráfico em $(x_0, f(x_0))$.

Aula 24 – A Integral de Riemann

Metas da aula: Definir a integral de Riemann e dar vários exemplos onde o cálculo da integral de funções particulares é feito a partir da definição.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber a definição de integral de Riemann de uma função;
- Saber utilizar a definição de integral para o cálculo de integrais das funções mais simples;
- Saber utilizar a definição de integral para provar suas propriedades mais elementares;

Introdução

Nesta aula vamos definir a integral de Riemann como limite das somas de Riemann quando a norma das partições tende a zero, como é usualmente feito nos cursos de cálculo. Nestes é comum se enfatizar a interpretação geométrica da integral como a área sob o gráfico de uma função não-negativa, bem como suas diversas aplicações em física, engenharia, economia, etc. Aqui vamos focalizar os aspectos puramente matemáticos da integral.

Uma vez definida a integral de uma função f num intervalo $[a, b]$, apresentaremos exemplos onde calculamos a integral de certas funções usando apenas a definição dada. Em seguida provaremos o Teorema da Limitação que afirma que uma função integrável à Riemann num intervalo $[a, b]$ é necessariamente limitada.

Estabeleceremos também uma propriedade da integral bastante conhecida desde os cursos de Cálculo, que é o fato de que combinações lineares de funções integráveis são também funções integráveis cujas integrais são as combinações lineares correspondentes das respectivas funções.

Ao final definiremos somas superiores e inferiores de uma função e daremos uma caracterização para funções integráveis num intervalo $[a, b]$ através dessas somas.

Partições e Partições Aferidas

Se $I := [a, b]$ é um intervalo limitado em $\mathbb{R}$, então uma *partição* de I é um conjunto finito ordenado $\mathcal{P} := (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ de pontos em I tais que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Os pontos de $\mathcal{P}$ servem para dividir $I = [a, b]$ em subintervalos sucessivos

$$I_1 := [x_0, x_1], \quad I_2 := [x_1, x_2], \ldots, \quad I_{n-1} := [x_{n-2}, x_{n-1}], \quad I_n := [x_{n-1}, x_n].$$

Com o objetivo de chamar a atenção para os subintervalos da partição $\mathcal{P}$ frequentemente escreveremos $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$.

Definimos a *norma* da partição $\mathcal{P}$ como o número

$$\|\mathcal{P}\| := \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}. \tag{24.1}$$

Portanto, a norma de uma partição é meramente o comprimento do maior dentre os subintervalos no qual a partição subdivide $[a, b]$. Claramente, várias partições podem ter a mesma norma, de modo que a partição *não* é uma função da norma.

Dada uma partição $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ e uma escolha de n pontos $t_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$, chamamos uma *partição aferida* ao conjunto de pares (I_i, t_i), $i = 1, \ldots, n$, e denotamos

$$\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n;$$

os pontos selecionados $t_i \in I_i$ são chamados *aferições*.

Num contexto em que tivermos de nos referir a mais de uma partição aferida associada a uma mesma partição $\mathcal{P}$, além de $\dot{\mathcal{P}}$, utilizaremos também as notações $\overset{\bullet}{\mathcal{P}}$ ou $\ddot{\mathcal{P}}$ para denotar partições aferidas.

As aferições podem ser escolhidas de maneira totalmente abitrária. Por exemplo, podemos escolher como aferições os extremos à esquerda, ou os extremos à direita, ou os pontos médios, ou, enfim, quaisquer outros pontos nos subintervalos da partição. Observe então que um mesmo ponto pode servir de aferição para dois intervalos consecutivos: $x_i \in I_i \cap I_{i+1}$ e podemos tomar $t_i = t_{i+1} = x_i$, para algum $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Se $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ é uma partição aferida, definimos a *soma de Riemann* de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ correspondente a $\dot{\mathcal{P}}$ como sendo o número

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) := \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{24.2}$$

Vê-se facilmente que se f é positiva em $[a,b]$, então a soma de Riemann (24.2) é a soma das áreas dos n retângulos cujas bases são os subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ e cujas alturas são os valores $f(t_i)$ correspondentes. (Veja Figura **24.1**.)

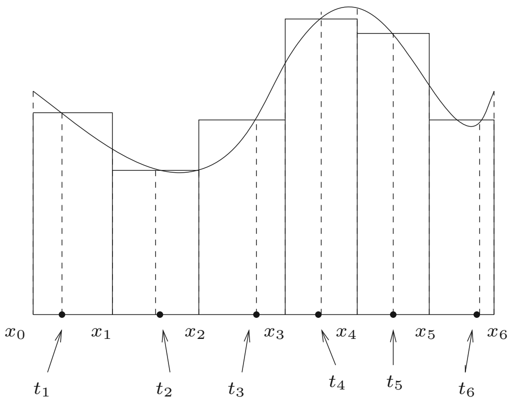


Figura **24.1**: Uma soma de Riemann.

Definição de Integral de Riemann

A seguir definimos a integral de Riemann de uma função f sobre um intervalo $[a,b]$.

Definição 24.1
Diz-se que uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é *integrável à Riemann* em $[a,b]$ se existe um número $L \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição aferida qualquer de $[a,b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon. \qquad (24.3)$$

Quando f é integrável à Riemann em $[a,b]$ usamos as notações para representar o número L correspondente:

$$L = \int_a^b f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\,dx.$$

O conjunto de todas as funções integráveis no intervalo $[a,b]$ será denotado $\mathcal{R}[a,b]$.

Observação 24.1
É comum resumir a definição anterior dizendo que a integral $\int_a^b f$ é o "limite" das somas de Riemann $S(f;\dot{\mathcal{P}})$ quando a norma $\|\dot{\mathcal{P}}\| \to 0$. No entanto, como

$S(f, \dot{\mathcal{P}})$ não é uma função de $\|\dot{\mathcal{P}}\|$, a palavra "limite" assim empregada tem um significado distinto daquele que foi estudado anteriormente para funções, embora a afinidade entre as situações seja bastante visível.

Para que a definição de integral que acabamos de dar faça sentido, precisamos mostrar antes de tudo que o número L está unicamente definido.

Teorema 24.1
Se $f \in \mathcal{R}[a, b]$, então o valor da integral está unicamente determinado.

Prova: Provaremos este fato por contradição. Suponhamos então que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e que existam dois números distintos L' e L'' satisfazendo a Definição 24.1. Seja $\ell = |L' - L''| > 0$. Tomemos $\varepsilon := \ell/3$ na Definição 24.1. Então existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição aferida qualquer de $[a, b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então devemos ter

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L'| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L''| < \varepsilon.$$

Assim, fixada uma tal partição aferida $\dot{\mathcal{P}}$, teremos

$$\ell = |L' - L''| \leq |L' - S(f; \dot{\mathcal{P}})| + |L'' - S(f; \dot{\mathcal{P}})| < 2\varepsilon = \frac{2\ell}{3},$$

o que é absurdo e, portanto, conclui a prova por contradição. □

Em seguida veremos alguns exemplos elementares em que usamos a Definição 24.1 para provar que um determinado número, que "chutamos" de início corretamente, corresponde de fato ao valor da integral da função dada em cada caso. Como na situação análoga do limite de funções, nossa tarefa será essencialmente determinar, para cada $\varepsilon > 0$ dado, o número $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que vale (24.3) para toda partição aferida $\dot{\mathcal{P}}$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$.

Exemplos 24.1

(a) Toda função constante em $[a, b]$ pertence a $\mathcal{R}[a, b]$.

De fato, seja $f(x) := C$ para todo $x \in [a, b]$, onde C é um número real qualquer. Se $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}$ é uma partição aferida qualquer de $[a, b]$, então é claro que

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} C(x_i - x_{i-1}) = C(b - a).$$

Portanto, para qualquer $\varepsilon > 0$, podemos escolher um $\delta > 0$ qualquer, por exemplo $\delta = b - a$, de modo que se $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - C(b - a)| = 0 < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f = C(b-a)$.

(b) Seja $a < c < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := C_1$ para $a \le x \le c$ e $f(x) := C_2$ para $c < x \le b$, onde C_1 e C_2 são dois números reais quaisquer. Então $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f = C_1(c-a) + C_2(b-c)$.

De fato, seja $\dot{\mathcal{P}}$ uma partição aferida qualquer de $[a,b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$. Temos que $c \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ para algum subintervalo $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ da partição $\mathcal{P}$ correspondente a $\dot{\mathcal{P}}$. Claramente temos $x_{i_0} - x_{i_0-1} < \delta$, $c - x_{i_0-1} < \delta$ e $x_{i_0} - c < \delta$. Além disso,

$$\begin{aligned} S(f;\dot{\mathcal{P}}) &= \sum_{i=1}^{i_0-1} C_1(x_i - x_{i-1}) + f(t_i)(x_{i_0} - x_{i_0-1}) + \sum_{i=i_0+1}^{n} C_2(x_i - x_{i-1}) \\ &= C_1(x_{i_0-1} - a) + f(t_i)(x_{i_0} - x_{i_0-1}) + C_2(b - x_{i_0}) \\ &= C_1(c-a) + C_2(b-c) + f(t_i)(x_{i_0} - x_{i_0-1}) \\ &\qquad - C_1(c - x_{i_0-1}) - C_2(x_{i_0} - c). \end{aligned}$$

Como t_i é um ponto arbitrário em $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$, não conhecemos o valor preciso de $f(t_i)$ mas sabemos que $f(t_i) \in \{C_1, C_2\}$. Em particular, temos que $|f(t_1)| \le |C_1| + |C_2|$. Por conseguinte, temos

$$\begin{aligned} |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - (C_1(c-a) + C_2(b-c))| &\le |f(t_i)|(x_{i_0} - x_{i_0-1}) \\ &\quad + |C_1|(c - x_{i_0-1}) + |C_2|(x_{i_0} - c) \\ &\le 3(|C_1| + |C_2|)\delta. \end{aligned}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, para que tenhamos $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - (C_1(c-a) + C_2(b-c))| < \varepsilon$ basta tomarmos $\delta > 0$ tal que $3(|C_1| + |C_2|)\delta < \varepsilon$, ou seja, $\delta < \varepsilon/(3(|C_1| + |C_2|))$. Podemos então refazer os passos anteriores e obter que $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - (C_1(c-a) + C_2(b-c))| < \varepsilon$. Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, concluímos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f = C_1(c-a) + C_2(b-c)$ como afirmado.

(c) Seja $f(x) := x$ para $x \in [a,b]$. Mostraremos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

De fato, dada uma partição qualquer $\mathcal{P} := \{I_i\}_{i=1}^n$ de $[a,b]$, com $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, escolhemos inicialmente uma aferição especial para $\mathcal{P}$ tomando os pontos $q_i \in I_i$ definidos por $q_i := \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$. Denotemos $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, q_i)\}_{i=1}^n$. Temos

$$f(q_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2}(x_1 + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2}(x_i^2 - x_{i-1}^2),$$

e, portanto,

$$S(f;\overset{\bullet}{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Agora, consideremos uma aferição arbitrária para $\mathcal{P}$ definindo assim uma partição aferida $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ e suponhamos que $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$. Como ambos t_i e q_i pertencem ao subintervalo I_i de comprimento $< \delta$, segue que $|t_i - q_i| < \delta$. Assim, temos

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\overset{\bullet}{\mathcal{P}})| = \left| \sum_{i=1}^{n} t_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} q_i(x_i - x_{i-1}) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |t_1 - q_i|(x_i - x_{i-1}) < \delta \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \delta(x_n - x_0) = \delta(b - a).$$

Logo, usando o valor calculado para $S(f;\overset{\bullet}{\mathcal{P}})$ obtemos

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \frac{1}{2}(b^2 - a^2)| < \delta(b - a).$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, para que tenhamos $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \frac{1}{2}(b^2 - a^2)| < \varepsilon$ bastará tomarmos $\delta > 0$ tal que $\delta(b - a) < \varepsilon$, ou seja, $\delta < \varepsilon/(b - a)$, e refazermos os passos anteriores. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que a f dada pertence a $\mathcal{R}[a, b]$ e $\int_a^b f = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

(d) Suponhamos que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x)$ para $x \in [a, b] \setminus F$, onde $F = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\}$ é um subconjunto finito de pontos em $[a, b]$. Então $g \in \mathcal{R}[a, b]$ e

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

De fato, como $f \in \mathcal{R}[a, b]$, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$ tal que para toda partição aferida de $[a, b]$, $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$, se $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta'(\varepsilon)$, então

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $M := \max\{|f(\xi_1) - g(\xi_1)|, \ldots, |f(\xi_N) - g(\xi_N)|\}$. Dada uma partição aferida de $[a, b]$ qualquer, $\dot{\mathcal{P}}\{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$, o subconjunto $F' := \{t_i \,:\, i = 1, \ldots, n\} \cap F$ tem no máximo N elementos (por quê?). Assim, temos

$$\begin{aligned}
|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{P}})| &= \left|\sum_{i=1}^{n}(g(t_i) - f(t_i))(x_i - x_{i-1})\right| \\
&\le \sum_{\{i\,:\,t_i\in F'\}} |g(t_i) - f(t_i)|(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{(por quê?)} \\
&\le MN\|\dot{\mathcal{P}}\|.
\end{aligned}$$

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Tomemos

$$\delta = \delta(\varepsilon) := \min\{\delta'(\varepsilon),\ \frac{\varepsilon}{2NM}\}.$$

Se $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então pela desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned}
|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| &\le |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| + |S(g;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{P}})| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + NM\delta \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

Segue daí que $g \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b g = \int_a^b f$, como afirmado.

Por exemplo, se $g(x) := 1$ para $x = \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}$, e $f(x) := 0$ para $x \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\}$, então $g \in \mathcal{R}[0,1]$ e $\int_0^1 g = 0$.

(e) Suponhamos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e seja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x)$ para $x \in [a,b] \setminus E$, onde $E = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots\}$ é um subconjunto enumerável de pontos em $[a,b]$. Suponhamos ainda que

$$\lim_{k\to\infty} |f(\xi_k) - g(\xi_k)| = 0. \tag{24.4}$$

Então $g \in \mathcal{R}[a,b]$ e

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, por (24.4) sabemos que é possível obter $N = N(\varepsilon)$ tal que se $k > N$, então

$$|f(\xi_k) - g(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Por outro lado, como $f \in \mathcal{R}[a,b]$, podemos obter $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição aferida qualquer de $[a,b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta'(\varepsilon)$, então

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Defina, como no ítem anterior, $F := \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$, $M := \max\{|f(\xi_1) - g(\xi_1)|, \dots, |f(\xi_N) - g(\xi_N)|\}$ e, dada $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$, ponhamos $F' := \{t_i \,:\, i = 1, \dots, n\} \cap F$. Temos

$$\begin{aligned}
|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{P}})| &= |\sum_{i=1}^n (g(t_i) - f(t_i))(x_i - x_{i-1})| \\
&\le \sum_{\{i\,:\,t_i \in F'\}} |g(t_i) - f(t_i)|(x_i - x_{i-1}) \\
&\quad + \sum_{\{i\,:\,t_i \in E\setminus F'\}} |g(t_i) - f(t_i)|(x_i - x_{i-1}) \quad \text{(por quê?)} \\
&\le MN\|\dot{\mathcal{P}}\| + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) \qquad \text{(por quê?)} \\
&= MN\|\dot{\mathcal{P}}\| + \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Tomemos

$$\delta = \delta(\varepsilon) := \min\{\delta'(\varepsilon),\ \frac{\varepsilon}{3NM}\}.$$

Se $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, novamente pela desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned}
|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| &\le |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| + |S(g;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{P}})| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + NM\delta + \frac{\varepsilon}{3} \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

Concluímos então que $g \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b g = \int_a^b f$, como afirmado.

Por exemplo, se $g(1/n) := 1/n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $g(x) := 0$ para $x \in [0,1] \setminus \{1/n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$, então $g \in \mathcal{R}[0,1]$ e $\int_0^1 g = 0$.

(f) Suponhamos agora que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e seja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x)$ para $x \in [a,b] \setminus E$, onde

$$E = \cup_{m=1}^\infty E_m, \qquad E_m = \{\xi_1^m, \xi_2^m, \xi_3^m, \dots\}.$$

Suponhamos também que:

(i) para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k\to\infty} |f(\xi_k^m) - g(\xi_k^m)| = 0; \tag{24.5}$$

(ii) dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m > m_0$ então

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |f(\xi_k^m) - g(\xi_k^m)| < \varepsilon. \tag{24.6}$$

Então $g \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b g = \int_a^b f$.

A demonstração desta afirmação é bastante semelhante àquela do ítem anterior. Com efeito, dado $m_0 \in \mathbb{N}$ denotemos

$$\mathcal{A}_1 := \cup_{m=1}^{m_0} E_m, \qquad \mathcal{A}_2 := \cup_{m=m_0+1}^{\infty} E_m.$$

Em particular, temos $E = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.

Seja $\tilde{g} : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $\tilde{g}(x) := g(x)$ para $x \in [a,b] \setminus \mathcal{A}_2$ e $\tilde{g}(x) := f(x)$ para $x \in \mathcal{A}_2$. Usando indução em $m_0 \in \mathbb{N}$ e o ítem anterior provamos facilmente que $\tilde{g} \in \mathcal{R}[a,b]$ e que $\int_a^b \tilde{g} = \int_a^b f$. (Você seria capaz de fornecer os detalhes da prova por indução dessa afirmação sobre $\tilde{g}$?)

Por outro lado, dado qualquer $\varepsilon > 0$, por (24.6) podemos escolher $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{m > m_0,\, k \in \mathbb{N}} |f(\xi_k^m) - g(\xi_k^m)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Fixado um tal $m_0 \in \mathbb{N}$, como $\tilde{g} \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b \tilde{g} = \int_a^b f$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição aferida qualquer de $[a,b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então

$$|S(\tilde{g};\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Agora, dada qualquer partição aferida $\dot{\mathcal{P}}$ temos

$$\begin{aligned} |S(g;\dot{\mathcal{P}}) - S(\tilde{g};\dot{\mathcal{P}})| &\le \sum_{\{i\,:\,t_i \in \mathcal{A}_2\}} |g(t_i) - f(t_i)|(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{(por quê?)} \\ &\le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{(por quê?).} \end{aligned}$$

Assim, se $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então pela desiguadade triangular obtemos

$$|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| \le |S(g;\dot{\mathcal{P}}) - S(\tilde{g};\dot{\mathcal{P}})| + |S(\tilde{g};\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que completa a prova da afirmação.

Como exemplo, consideremos a função de Thomae $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida, como no Exemplo 14.1(h), por $g(x) := 0$ se $x \in [0,1]$ é irracional, $g(0) := 0$ e por $g(x) := 1/n$ se $x \in [0,1]$ é um número racional e $x = m/n$ onde $m, n \in \mathbb{N}$ não possuem divisores comuns a não ser 1.

Tomando, $E_m = \{m/p_{m,k} \,:\, k \in \mathbb{N}\}$ onde $(p_{m,k})_{k=1}^{\infty}$ é a sucessão preservando a ordem dos números naturais maiores que m que não possuem divisores comuns com m exceto 1. Neste caso, tomando $f(x) := 0$ para $x \in [0,1]$, temos $g(x) = f(x)$ para $x \in [0,1] \setminus E$, com $E = \cup_{m=1}^{\infty} E_m$, e é fácil verificar que são satisfeitas as condições (i) e (ii) da afirmação (por quê?). Logo, $g \in \mathcal{R}[0,1]$ e $\int_a^b g = 0$.

O Teorema da Limitação

A seguir vamos mostrar que toda função integrável à Riemann é necessariamente limitada.

Teorema 24.2
Se $f \in \mathcal{R}[a,b]$, então f é limitada em $[a,b]$.

Prova: Suponhamos por contradição que f é uma função ilimitada em $\mathcal{R}[a,b]$ com integral igual a L. Então existe $\delta > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição aferida qualquer de $[a,b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| < 1$, o que implica que

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}})| < |L| + 1. \tag{24.7}$$

Agora, seja $\mathcal{Q} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^{n}$ uma partição de $[a,b]$ com $\|\mathcal{Q}\| < \delta$. Como $|f|$ não é limitada em $[a,b]$, então existe ao menos um subitervalo em $\mathcal{Q}$, digamos $[x_{k-1}, x_k]$, no qual $|f|$ não é limitada (por quê?).

Escolheremos aferições para $\mathcal{Q}$ que nos conduzirão a uma contradição com (24.7). Aferimos $\mathcal{Q}$ pondo $t_i := x_i$ para $i \neq k$ e escolhemos $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tal que

$$|f(t_k)(x_k - x_{k-1})| > |L| + 1 + \left|\sum_{i\neq k} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right|.$$

Então segue da desigualdade triangular (na forma $|A + B| \geq |A| - |B|$) que

$$|S(f;\dot{\mathcal{Q}})| \geq |f(t_k)|(x_k - x_{k-1}) - \left|\sum_{i\neq k} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right| > |L| + 1,$$

o que contradiz (24.7), concluindo a prova. □

Algumas propriedades elementares da integral

A seguir usamos a Definição 24.1 para estabelecer as propriedades mais básicas da integral.

Teorema 24.3

(i) Se $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ e $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então $\int_a^b f \le \int_a^b g$.

(ii) Se $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $c \in \mathbb{R}$, então $cf \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b cf = c\int_a^b f$.

(iii) Se $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, então $f+g \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

(iv) Se $f_1, \dots, f_n$ estão em $\mathcal{R}[a,b]$ e se $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, então a combinação linear $f := \sum_{i=1}^n c_i f_i$ pertence a $\mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f = \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b f_i$.

Prova: Vamos provar o ítem (iii). As provas dos ítens (i), (ii) e (iv) serão deixadas para você como exercício (veja os exercícios 7, 8 e 9 ao final desta aula).

(iii) Suponhamos $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição aferida de $[a,b]$ qualquer, com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L_1| < \varepsilon/2$ e $|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - L_2| < \varepsilon/2$, onde $L_1 := \int_a^b f$ e $L_2 := \int_a^b g$ (por quê?). Agora, $S(f+g;\dot{\mathcal{P}}) = S(f;\dot{\mathcal{P}}) + S(f;\dot{\mathcal{P}})$ (por quê?). Segue que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição aferida qualquer de $[a,b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então

$$
\begin{aligned}
|S(f+g;\dot{\mathcal{P}}) - (L_1+L_2)| &= |(S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L_1) + (S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L_2)| \\
&\le |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L_1| + |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}
$$

o que conclui a prova de (iii). □

Somas Superiores e Somas Inferiores

Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ uma partição qualquer de $[a,b]$. Denotemos

$$
M_i := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{e} \quad m_i := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.
$$

A *soma superior de f associada a partição $\mathcal{P}$* é denotada por $S^*(f;\mathcal{P})$ e definida por

$$
S^*(f;\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).
$$

A *soma inferior de f associada a partição $\mathcal{P}$* é denotada por $S_*(f;\mathcal{P})$ e definida por

$$
S_*(f;\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).
$$

Temos o seguinte resultado que pode servir também para dar uma outra definição equivalente de integral de f em $[a,b]$.

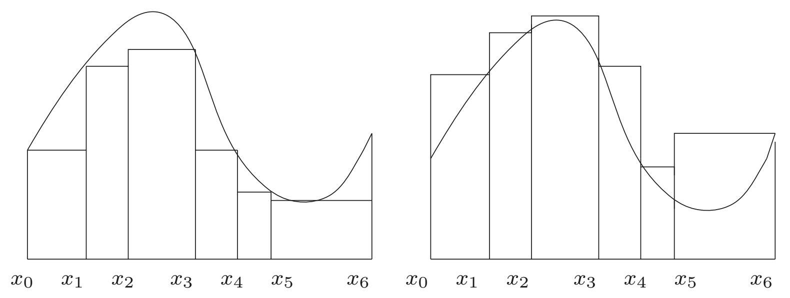


Figura **24.2**: À esquerda uma soma inferior. À direita a soma superior correspondente.

Teorema 24.4
As duas afirmações seguintes são equivalentes:

(i) $f \in \mathcal{R}[a,b]$;

(ii) Existe um número $L \in \mathbb{R}$ satisfazendo o seguinte. Qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\mathcal{P}$ é uma partição qualquer de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$, então

$$|S^*(f;\mathcal{P}) - L| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |S_*(f;\mathcal{P}) - L| < \varepsilon.$$

Nesse caso, temos $L = \int_a^b f$.

Prova: ((i)⇒(ii)) Suponhamos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição aferida qualquer de $[a,b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon/2$, onde $L = \int_a^b f$. Escolhendo $\dot{\mathcal{P}}$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, tal que

$$M_i - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(t_i) \le M_i,$$

o que é sempre possível pelas propriedades do supremo, obtemos

$$\begin{aligned}
|S^*(f;\mathcal{P}) - L| &\le |S^*(f;\mathcal{P}) - S(f;\dot{\mathcal{P}})| + |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} |M_i - f(t_i)|(x_i - x_{i-1}) + |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| \\
&< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, escolhendo as aferições t_i de modo que

$$m_i \le f(t_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

o que é sempre possível pelas propriedades do ínfimo, obtemos

$$\begin{aligned}|S_*(f;\mathcal{P})-L| &\le |S_*(f;\mathcal{P})-S(f;\dot{\mathcal{P}})|+|S(f;\dot{\mathcal{P}})-L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

((ii)⇒(i)) Suponhamos agora que f satisfaz a propriedade de que para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que se $\mathcal{P}$ é uma partição qualquer de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\|<\varepsilon$, então

$$|S^*(f;\mathcal{P})-L|<\varepsilon \quad \text{e} \quad |S_*(f;\mathcal{P})-L|<\varepsilon.$$

Dado $\varepsilon>0$, tomemos $\delta'=\delta'(\varepsilon/4)$ tal que se $\|\mathcal{P}\|<\delta'$, então

$$|S^*(f;\mathcal{P})-L|<\frac{\varepsilon}{4} \quad \text{e} \quad |S_*(f;\mathcal{P})-L|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Dada qualquer partição aferida $\dot{\mathcal{P}}:=\{([x_{i-1},x_i],t_i)\}_{i=1}^n$, claramente temos $S_*(f;\mathcal{P})\le S(f;\dot{\mathcal{P}})\le S^*(f;\mathcal{P})$, onde $\mathcal{P}:=\{[x_{i-1},x_i]\}_{i=1}^n$ é a partição de $[a,b]$ correspondente a $\dot{\mathcal{P}}$ (por quê?). Por outro lado, temos

$$S^*(f;\mathcal{P})-S_*(f;\mathcal{P})\le|S^*(f;\mathcal{P})-L|+|S_*(f;\mathcal{P})-L|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Segue então que $S(f;\dot{\mathcal{P}})-S_*(f;\mathcal{P})<\dfrac{\varepsilon}{2}$ (por quê?). Logo, se $\|\dot{\mathcal{P}}\|<\delta=\delta(\varepsilon):=\delta'(\varepsilon/4)$, temos

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}})-L|\le|S(f;\dot{\mathcal{P}})-S_*(f;\mathcal{P})|+|S_*(f;\mathcal{P})-L|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{3\varepsilon}{4}<\varepsilon.$$

Portanto, $f\in\mathcal{R}[a,b]$ e $L=\int_a^b f$. □

Exercícios 24.1

1. Se $I:=[0,4]$, calcule as normas das seguintes partições:

   (a) $\mathcal{P}_1:=(0,1,2,4)$;

   (b) $\mathcal{P}_2:=(0,2,3,4)$;

   (c) $\mathcal{P}_3:=(0,\ 0.5\,,\ 1.5\,,\ 2\,,\ 3.4\,,\ 4)$;

   (d) $\mathcal{P}_4:=(0,\ 0.5\,,\ 2.5\,,\ 3.5\,,\ 4)$.

2. Se $f(x):=x^2$ para $x\in[0,4]$, calcule as seguintes somas de Riemann, onde $\dot{\mathcal{P}}_i$ corresponde à partição $\mathcal{P}_i$ do exercício anterior aferida como indicado:

   (a) $\mathcal{P}_1$ com aferições correspondentes aos extremos à esquerda dos subintervalos;

(b) $\mathcal{P}_1$ com aferições correspondentes aos extremos à direita dos subintervalos;

(c) $\mathcal{P}_2$ com aferições correspondentes aos extremos à esquerda dos subintervalos;

(d) $\mathcal{P}_2$ com aferições correspondentes aos extremos à direita dos subintervalos;

Calcule as somas superiores $S^*(f;\mathcal{P}_3)$, $S^*(f;\mathcal{P}_4)$ e inferiores $S_*(f;\mathcal{P}_3)$, $S_*(f;\mathcal{P}_4)$.

3. Mostre que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é integrável à Riemann em $[a,b]$ se, e somente se, existe um $L\in\mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon>0$ existe um $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição aferida qualquer com $\|\dot{\mathcal{P}}\|\le\delta$, então $|S(f;\dot{\mathcal{P}})-L|\le\varepsilon$.

4. Seja $\dot{\mathcal{P}}$ uma partição aferida de $[0,3]$.

   (a) Mostre que a união U_1 de todos os subintervalos em $\dot{\mathcal{P}}$ com aferições em $[0,1]$ satisfaz $[0,1-\|\dot{\mathcal{P}}\|]\subset U_1\subset[0,1+\|\dot{\mathcal{P}}\|]$.

   (b) Mostre que a união U_2 de todos os subintervalos em $\dot{\mathcal{P}}$ com aferições em $[1,2]$ satisfaz $[1+\|\dot{\mathcal{P}}\|,2-\dot{\mathcal{P}}\|]\subset U_2\subset[1-\|\dot{\mathcal{P}}\|,2+\|\dot{\mathcal{P}}\|]$.

5. Seja $\dot{\mathcal{P}}:=\{I_i,t_i)\}_{i=1}^n$ uma partição aferida de $[a,b]$ e seja $c_1<c_2$.

   (a) Se u pertence a um subintervalo I_i cuja aferição satisfaz $c_1\le t_i\le c_2$, mostre que $c_1-\|\dot{\mathcal{P}}\|\le u\le c_2+\|\dot{\mathcal{P}}\|$.

   (b) Se $v\in[a,b]$ e satisfaz $c_1+\|\dot{\mathcal{P}}\|\le v\le c_2-\|\dot{\mathcal{P}}\|$, então a aferição t_i de qualquer subintervalo I_i que contenha v satisfaz $t_i\in[c_1,c_2]$.

6. (a) Seja $f(x):=2$ se $0\le x<1$ e $f(x):=1$ se $1\le x<2$. Mostre, usando a definição, que $f\in\mathcal{R}[0,2]$ e calcule sua integral.

   (b) Seja $h(x):=2$ se $0\le x<1$, $h(1):=3$ e $h(x):=1$ se $1<x\le 2$. Mostre que $h\in\mathcal{R}[0,2]$ e calcule sua integral.

7. Se $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$ e $f(x)\le g(x)$ para todo $x\in[a,b]$, use a definição de integral para mostrar que $\int_a^b f\le\int_a^b g$. [Dica: Observe que para qualquer partição aferida $\dot{\mathcal{P}}$ de $[a,b]$ vale $S(f;\dot{\mathcal{P}})\le S(g;\dot{\mathcal{P}})$.]

8. Se $f\in\mathcal{R}[a,b]$ e $c\in\mathbb{R}$, use a definição de função integrável em $[a,b]$ para mostrar que $cf\in\mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b cf=c\int_a^b f$. [Dica: Observe que para qualquer partição aferida $\dot{\mathcal{P}}$ de $[a,b]$ vale $S(cf;\dot{\mathcal{P}})=cS(f;\dot{\mathcal{P}})$.]

9. Use Indução Matemática e os resultados dos dois ítens anteriores para mostrar que se $f_1, \ldots, f_n$ estão em $\mathcal{R}[a,b]$ e se $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, então a combinação linear $f := \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$ pertence a $\mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b f_i$.

10. Se $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, mostre que $\left|\int_a^b f\right| \leq M(b-a)$.

11. Se $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e se $(\dot{\mathcal{P}}_k)$ é qualquer sequência de partições aferidas de $[a,b]$ tais que $\|\dot{\mathcal{P}}_k\| \to 0$, quando $k \to \infty$, prove que $\int_a^b f = \lim_{k\to\infty} S(f; \dot{\mathcal{P}}_k)$.

12. Seja J um subintervalo qualquer de $[a,b]$ com extremos $c < d$ e $\varphi_J(x) := 1$ para $x \in J$ e $\varphi_J(x) := 0$ para $x \in [a,b] \setminus J$. Mostre que $\varphi_J \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b \varphi_J = d - c$. Chamamos a uma tal φ_J de *função degrau elementar.*

13. Uma *função degrau* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função em $[a,b]$ da forma

$$\varphi := \sum_{l=1}^{N} k_l \varphi_{J_l},$$

onde os J_l são subintervalos de $[a,b]$ com extremos $c_l < d_l$, cada φ_{J_l} é uma função degrau elementar, e $k_l \in \mathbb{R}$, para $l = 1, \ldots, N$. Use os exercícios 7, 8 e 9 anteriores para mostrar que se φ é uma função degrau em $[a,b]$, então $\varphi \in \mathcal{R}[a,b]$ e

$$\int_a^b \varphi = \sum_{l=1}^{N} k_l (d_l - c_l).$$

14. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(0) := 0$ e $f(x) = 1/2^n$ se $1/2^{n+1} < x \leq 1/2^n$, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Prove que $f \in \mathcal{R}[0,1]$ e calcule $\int_0^1 f$.

Aula 25 – Funções Integráveis à Riemann

Metas da aula: Provar o Critério de Cauchy para Integrabilidade e dar algumas de suas aplicações na determinação da integrabilidade de funções. Demonstrar a integrabilidade do resultado de certas operações não-lineares com funções integráveis. Demonstrar a propriedade da aditividade da integral de uma função em relação à união de intervalos concatenados.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o significado do Critério de Cauchy para Integrabilidade e como aplicá-lo na investigação sobre a integrabilidade de funções e na demonstração de certas propriedades das funções integráveis;

- Saber a propriedade da aditividade da integral de uma função em relação à união de intervalos concatenados e seu uso no cálculo de integrais.

Introdução

Nesta aula vamos apresentar o Critério de Cauchy para Integrabilidade que será utilizado na determinação da integrabilidade de certas funções e na demonstração de diversas propriedades. A primeira aplicação do Critério de Cauchy que daremos será a demonstração do fato de que toda função contínua é integrável à Riemann.

Entre outras aplicações veremos o Teorema do Sanduíche para Integrais e a integrabilidade do resultado de certas operações não-lineares com funções integráveis como produto, quociente, valor absoluto e composição com funções Lipschitz.

Também vamos estabelecer a propriedade da aditividade da integral em relação à união de intervalos concatenados, isto é, dois intervalos cuja interseção se reduz a um ponto, o qual é um extremo de ambos.

Critério de Cauchy para Integrabilidade

Se $\mathcal{P} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ é uma partição de $[a, b]$, denotemos por $\{\mathcal{P}\}$ o conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$.

Dadas duas partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ de $[a, b]$, dizemos que $\mathcal{P}_2$ *refina* ou *é* *um refinamento* para $\mathcal{P}_1$ e denotamos $\mathcal{P}_2 \prec \mathcal{P}_1$ se $\{\mathcal{P}_1\} \subset \{\mathcal{P}_2\}$. Também usaremos a notação alternativa $\mathcal{P}_1 \succ \mathcal{P}_2$ como tendo o mesmo significado que $\mathcal{P}_2 \prec \mathcal{P}_1$

Um fato imediato a partir das definições que acabamos de dar é que dadas duas partições quaisquer de $[a,b]$, $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, a partição $\mathcal{P}$ tal que $\{\mathcal{P}\} = \{\mathcal{P}_1\} \cup \{\mathcal{P}_2\}$ satisfaz $\mathcal{P} \prec \mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P} \prec \mathcal{P}_2$. Denotaremos a partição $\mathcal{P}$ assim definida a partir das partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ por $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$.

Lema 25.1
Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e sejam $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ partições de $[a,b]$ com $\mathcal{P}_2 \prec \mathcal{P}_1$. Então $S_*(f;\mathcal{P}_1) \le S_*(f;\mathcal{P}_2) \le S^*(f;\mathcal{P}_2) \le S^*(f;\mathcal{P}_1)$.

Prova: Seja $\mathcal{P}_1 := \{I_i\}_{i=1}^{n_1}$ e $\mathcal{P}_2 := \{J_k\}_{k=1}^{n_2}$. Sejam

$$m_{i,1} := \inf\{f(x) \,:\, x \in I_i\}, \quad m_{k,2} := \inf\{f(x) \,:\, x \in J_k\}$$

e definamos $M_{i,1}$ e $M_{k,2}$ de modo semelhante apenas trocando inf por sup, respectivamente.

Como $\mathcal{P}_2 \prec \mathcal{P}_1$, então dado qualquer intervalo J_k em $\mathcal{P}_2$, existe I_i em $\mathcal{P}_1$ tal que $J_k \subset I_i$. Por outro lado, se $J_k \subset I_i$, então $m_{i,1} \le m_{k,2}$ e $M_{k,2} \le M_{i,1}$ (por quê?). Além disso, se $\mathcal{P}_2 \prec \mathcal{P}_1$ então, pela definição da relação $\prec$, cada intervalo I_i de $\mathcal{P}_1$ satisfaz $I_i = J_{k_i} \cup J_{k_i+1} \cdots \cup J_{k_i+\nu_i}$ com $J_{k_i+l} \in \mathcal{P}_2$, $l = 0, 1, \ldots, \nu_i$. Logo,

$$\begin{aligned} S_*(f;\mathcal{P}_1) &= \sum_{i=1}^{n_1} m_{i,1}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{\nu_i} m_{i,1}(x_{k_i+l} - x_{k_i+l-1}) \\ &\le \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{\nu_i} m_{k_i+l,2}(x_{k_i+l} - x_{k_i+l-1}) \qquad \text{(por quê?)} \\ &= \sum_{k=1}^{n_2} m_{k,2}(x_k - x_{k-1}) = S_*(f;\mathcal{P}_2). \end{aligned}$$

Analogamente provamos que $S^*(f;\mathcal{P}_2) \le S^*(f;\mathcal{P}_1)$, o qual deixamos para você como exercício.

Concluímos a prova do lema usando a desigualdade trivial $S_*(f;\mathcal{P}_2) \le S^*(f;\mathcal{P}_2)$. □

Os dois próximos resultados constituem duas versões para o que chamaremos de Critério de Cauchy para Integrabilidade. A primeira versão que damos a seguir se baseia em somas superiores e inferiores.

Teorema 25.1 (Critério de Cauchy para Integrabilidade I)
As duas afirmações seguintes são equivalentes:

(i) $f \in \mathcal{R}[a,b]$;

(ii) Qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\mathcal{P}$ é uma partição qualquer de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$, então

$$S^*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{P}) < \varepsilon. \tag{25.1}$$

Prova: ((i)⇒(ii)) Suponhamos $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Então, pelo Teorema 24.4, dado $\varepsilon > 0$, podemos obter $\delta' = \delta'(\varepsilon/2)$ tal que se $\mathcal{P}$ é uma partição com $\|\mathcal{P}\| < \delta'$, então $|S^*(f;\mathcal{P}) - L| < \varepsilon/2$ e $|S_*(f;\mathcal{P}) - L| < \varepsilon/2$. Assim, tomando $\delta = \delta(\varepsilon) := \delta'(\varepsilon/2)$, se $\|\mathcal{P}\| < \delta$, então, pela desigualdade triangular,

$$S^*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{P}) \le |S^*(f;\mathcal{P}) - L| + |S_*(f;\mathcal{P}) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que demonstra a implicação.

((ii)⇒(i)) Suponhamos que dado $\varepsilon > 0$ podemos obter $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para toda partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$, temos (25.1). Para $\varepsilon = 1/k$, seja $\delta_k = \delta(1/k)$, $k \in \mathbb{N}$. Podemos supor que $\delta_1 \ge \delta_2 \ge \delta_3 \ge \cdots$, pois se isso não valer podemos trocar por $\delta_k' := \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\}$. Agora, tomamos partições $\mathcal{P}_k$ com $\|\mathcal{P}_k\| < \delta_k$ tais que $\mathcal{P}_1 \succ \mathcal{P}_2 \succ \mathcal{P}_3 \succ \cdots$. Para tanto, primeiro tomamos uma partição $\mathcal{P}_1$ qualquer com $\|\mathcal{P}_1\| < \delta_1$, dividimos cada subintervalo de $\mathcal{P}_1$ em subintervalos de comprimento menor do que δ_2 para obter $\mathcal{P}_2 \prec \mathcal{P}_1$; em seguida dividimos cada subintervalo de $\mathcal{P}_2$ em subintervalos de comprimento menor do que δ_3 para definir $\mathcal{P}_3$, e assim por diante.

Temos, $S_*(f;\mathcal{P}_1) \le S_*(f;\mathcal{P}_2) \le S_*(f;\mathcal{P}_3) \le \cdots \le M(b-a)$, onde $M := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ (por quê?). Assim, $(S_*(f;\mathcal{P}_k))$ é uma sequência não-decrescente e limitada superiormente. Logo, existe $L_* := \lim_{k\to\infty} S_*(f;\mathcal{P}_k)$ (por quê?). Analogamente, temos $S^*(f;\mathcal{P}_1) \ge S^*(f;\mathcal{P}_2) \ge S^*(f;\mathcal{P}_3) \ge \cdots \ge m(b-a)$, onde $m := \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ e, portanto, $(S^*(f;\mathcal{P}_k))$ é uma sequência não-crescente e limitada inferiormente. Segue que existe $L^* := \lim_{k\to\infty} S^*(f;\mathcal{P}_k)$. Por hipótese temos, $0 \le S^*(f;\mathcal{P}_k) - S_*(f;\mathcal{P}_k) < 1/k$. Passando ao limite quando $k \to \infty$, obtemos $L^* = L_*$. Ponhamos, $L := L^* = L_*$.

Seja $\varepsilon > 0$ e $\delta := \delta(\varepsilon/3)$ tal que (25.1) vale com $\varepsilon/3$ em lugar de ε, se $\|\mathcal{P}\| < \delta$. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $|S_*(f;\mathcal{P}_k) - L| < \varepsilon/3$, $|S^*(f;\mathcal{P}_k) - L| < \varepsilon/3$ e $S^*(f;\mathcal{P}_k) - S_*(f;\mathcal{P}_k) < \varepsilon/3$. Dada uma partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$, definamos $\mathcal{Q}_k := \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_k$. Temos

$$S_*(f;\mathcal{P}) \le S_*(f;\mathcal{Q}_k) \le S^*(f;\mathcal{Q}_k) \le S^*(f;\mathcal{P})$$

e

$$S_*(f;\mathcal{P}_k) \leq S_*(f;\mathcal{Q}_k) \leq S^*(f;\mathcal{Q}_k) \leq S^*(f;\mathcal{P}_k).$$

Segue daí e da desigualdade triangular que

$$\begin{aligned}|S_*(f;\mathcal{P}) - L| &\leq |S_*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{Q}_k)| + |S_*(f;\mathcal{Q}_k) - L| \\ &\leq |S_*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{Q}_k)| + |S_*(f;\mathcal{Q}_k) - S_*(f;\mathcal{P}_k)| + |S(f;\mathcal{P}_k) - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos $|S^*(f;\mathcal{P}) - L| < \varepsilon$. Então, pelo Teorema 24.4, concluímos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$. □

O critério que acabamos de estabelecer admite a formulação alternativa seguinte, aparentemente distinta porém equivalente.

Teorema 25.2 (Critério de Cauchy para Integrabilidade I')
As duas afirmações seguintes são equivalentes:

(i) $f \in \mathcal{R}[a,b]$;

(ii') Qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são partições quaisquer de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$, $\|\mathcal{Q}\| < \delta$, então

$$S^*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{Q}) < \varepsilon. \tag{25.2}$$

Prova: ((i)⇒(ii')) Inteiramente semelhante à prova da implicação correspondente no Teorema 25.1. Deixamos os detalhes para você como exercício.

((ii')⇐(i)) A condição (ii') claramente implica a condição (ii) do Teorema 25.1, que por sua vez implica a condição (i), pelo mesmo Teorema 25.1.
□

Como anunciado, daremos a seguir a segunda versão Critério de Cauchy para Integrabilidade, a qual é baseada em somas de Riemann.

Teorema 25.3 (Critério de Cauchy para Integrabilidade II)
Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $f \in \mathcal{R}[a,b]$;

(ii) Dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que dada qualquer partição $\mathcal{P} := \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$ e dois conjuntos quaisquer de aferições $t_i, s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para $\mathcal{P}$ definindo partições aferidas $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ e $\ddot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], s_i)\}_{i=1}^n$, temos

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\ddot{\mathcal{P}})| < \varepsilon. \tag{25.3}$$

Prova: ((i)⇒(ii)) Suponhamos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Pelo Teorema 25.1, existe $\delta > 0$ tal que se $\mathcal{P}$ é uma partição de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$, então $0 \le S^*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{P}) < \varepsilon$. Agora, dadas duas partições aferidas $\dot{\mathcal{P}}$ e $\ddot{\mathcal{P}}$ com base em $\mathcal{P}$ como na afirmação (ii), temos

$$S_*(f;\mathcal{P}) \le S(f;\dot{\mathcal{P}}) \le S^*(f;\mathcal{P}) \quad \text{e} \quad S_*(f;\mathcal{P}) \le S(f;\ddot{\mathcal{P}}) \le S^*(f;\mathcal{P}) \quad \text{(por quê?)}$$

e, portanto,

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\ddot{\mathcal{P}})| \le S^*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{P}) < \varepsilon \qquad \text{(por quê?)}.$$

((ii)⇒(i)) Suponhamos que valha (ii). Seja $\varepsilon > 0$ e $\delta = \delta(\varepsilon/2) > 0$ como em (ii) com $\varepsilon/2$ em lugar de ε. Seja $\mathcal{P} := \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ uma partição de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$. Como anteriormente, denotemos $m_i := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ e $M_i := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Tomemos aferições $t_i, s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que

$$|f(t_i) - m_i| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{e} \quad |f(s_i) - M_i| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

o que é sempre possível pelas propriedades do supremo e do ínfimo (por quê?). Façamos, $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ e $\ddot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], s_i)\}_{i=1}^n$.

Assim, temos

$$\begin{aligned} 0 \le S^*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{P}) &\le |S(f;\ddot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{P}})| \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (|M_i - f(s_i)| + |m_i - f(t_i)|)(x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon \qquad \text{(por quê?)}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 25.1, concluímos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ como desejado. □

Como no caso do Teorema 25.1, o Teorema 25.3 também admite uma formulação alternativa aparentemente distinta porém equivalente.

Teorema 25.4 (Critério de Cauchy para Integrabilidade II')
Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $f \in \mathcal{R}[a,b]$;

(ii') Dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que dadas quaisquer partições aferidas $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ e $\dot{\mathcal{Q}} := \{(J_l, s_l)\}_{l=1}^m$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$ e $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta$, então

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{Q}})| < \varepsilon. \tag{25.4}$$

Prova: ((i)⇒(ii')) Totalmente semelhante à prova da implicação correspondente no Teorema 25.3. Deixamos os detalhes para você como exercício.

((ii')⇒(i)) A condição (ii') claramente implica a condição (ii) do Teorema 25.3, que por sua vez implica a condição (i), pelo próprio Teorema 25.3. □

Como primeiro exemplo de aplicação do Critério de Cauchy vamos provar a seguir a integrabilidade à Riemann das funções contínuas num intervalo fechado $[a,b]$.

Teorema 25.5 (Integrabilidade das Funções Contínuas)
Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$, então $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Prova: Segue do Teorema 17.2 que f é uniformemente contínua em $[a,b]$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $t, s \in [a,b]$ e $|t-s| < \delta$, então $|f(t) - f(s)| < \varepsilon/(b-a)$.

Seja $\mathcal{P} = \{I_i\}_{i=1}^n$ uma partição de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$. Sejam $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ e $\ddot{\mathcal{P}} := \{(I_i, s_i)\}_{i=1}^n$ duas partições aferidas com os mesmos subintervalos de $\mathcal{P}$. Temos

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\ddot{\mathcal{P}})| \le \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(s_i)|(x_i - x_{i-1}) \le \frac{\varepsilon}{(b-a)}(b-a) = \varepsilon. \quad \text{(por quê?)}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, pelo Teorema 25.3 concluímos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$. □

Em seguida utilizamos o Critério de Cauchy para estabelecer um resultado frequentemente útil na verificação da integrabilidade à Riemann de funções num intervalo $[a,b]$.

Teorema 25.6 (Teorema do Sanduíche para Integrais)
Seja $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Então $f \in \mathcal{R}[a,b]$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existem funções α_ε e ω_ε em $\mathcal{R}[a,b]$ com

$$\alpha_\varepsilon(x) \le f(x) \le \omega_\varepsilon(x) \qquad \text{para todo } x \in [a,b], \tag{25.5}$$

e tais que

$$\int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{25.6}$$

Prova: ($\Rightarrow$) Esta implicação é trivial pois basta tomar $\alpha_\varepsilon = \omega_\varepsilon = f$ para todo $\varepsilon > 0$.

($\Leftarrow$) Seja $\varepsilon > 0$. Sejam α_ε e ω_ε funções em $\mathcal{R}[a,b]$ satisfazendo (25.5) e (25.6) com $\varepsilon/3$ em lugar de ε. Como α_ε e ω_ε pertencem a $\mathcal{R}[a,b]$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição aferida qualquer de $[a,b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então

$$\left|S(\alpha_\varepsilon;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b \alpha_\varepsilon\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad \left|S(\omega_\varepsilon;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b \omega_\varepsilon\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{25.7}$$

Seja $\mathcal{P}$ uma partição qualquer de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$ e $\dot{\mathcal{P}}, \ddot{\mathcal{P}}$ duas partições aferidas com os mesmos subintervalos de $\mathcal{P}$. Segue das desigualdades em (25.7) que

$$-\frac{\varepsilon}{3} + \int_a^b \alpha_\varepsilon < S(\alpha_\varepsilon;\dot{\mathcal{P}}) \quad \text{e} \quad S(\omega_\varepsilon;\dot{\mathcal{P}}) < \frac{\varepsilon}{3} + \int_a^b \omega_\varepsilon,$$

o mesmo também valendo em para $S(\alpha_\varepsilon;\ddot{\mathcal{P}})$ e $S(\omega_\varepsilon;\ddot{\mathcal{P}})$.

Devido a (25.5), temos $S(\alpha_\varepsilon;\dot{\mathcal{P}}) \le S(f;\dot{\mathcal{P}}) \le S(\omega_\varepsilon;\dot{\mathcal{P}})$, bem como $S(\alpha_\varepsilon;\ddot{\mathcal{P}}) \le S(f;\ddot{\mathcal{P}}) \le S(\omega_\varepsilon;\ddot{\mathcal{P}})$. Assim, vale que

$$S(f;\dot{\mathcal{P}}),\, S(f;\ddot{\mathcal{P}}) \in \left(-\frac{\varepsilon}{3} + \int_a^b \alpha_\varepsilon\,,\ \frac{\varepsilon}{3} + \int_a^b \omega_\varepsilon\right).$$

Portanto,

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\ddot{\mathcal{P}})| < \frac{2\varepsilon}{3} + \int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Segue então do Critério de Cauchy 25.3 que $f \in \mathcal{R}[a,b]$. □

Exemplos 25.1

(a) Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências satisfazendo $a_0 := 1 > a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > 0$, $\lim a_n = 0$ e $|b_n| < M$ para um certo $M > 0$. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) := 0$ e $f(x) := b_n$ para $x \in (a_n, a_{n-1}]$, para $n \in \mathbb{N}$ com $a_0 = 1$. Então $f \in \mathcal{R}[0,1]$ e $\int_0^1 f = \sum b_n(a_{n-1} - a_n)$. Observe que a série $\sum b_n(a_{n-1} - a_n)$ é convergente devido às hipóteses sobre a_n e b_n (por quê?).

De fato, dado $\varepsilon > 0$, como $\lim a_n = 0$, existe $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tal que $0 < a_n < \varepsilon/(2M)$ para $n \geq N_0$. Definimos

$$\alpha_\varepsilon = \begin{cases} b_n, & x \in (a_n, a_{n-1}],\ n = 1, \dots, N_0 \\ -M, & x \in [0, a_{N_0}] \end{cases}, \tag{25.8}$$

$$\omega_\varepsilon = \begin{cases} b_n, & x \in (a_n, a_{n-1}],\ n = 1, \dots, N_0 \\ M, & x \in [0, a_{N_0}] \end{cases}. \tag{25.9}$$

Do Teorema 24.3(iv) temos que α_ε e ω_ε, assim definidas, pertencem a $\mathcal{R}[0,1]$ e valem (25.5) e (25.6). Logo, pelo Teorema 25.6, segue que $f \in \mathcal{R}[0,1]$. Além disso, do Teorema 24.3(i) e da desigualdade (25.5) segue que

$$\int_a^b \alpha_\varepsilon \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \omega_\varepsilon.$$

Como

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b \alpha_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b \omega_\varepsilon = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} b_n(a_{n-1} - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(a_{n-1} - a_n),$$

segue que $\int_a^b f = \sum b_n(a_{n-1} - a_n)$.

(b) O Critério de Cauchy para Integrabilidade 25.3 pode ser usado para mostrar que uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *não* é integrável à Riemann. Para isso basta mostrarmos que: *Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para qualquer $\delta > 0$ existem partições aferidas $\dot{\mathcal{P}}$ e $\ddot{\mathcal{P}}$ possuindo os mesmos subintervalos de uma partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$ e tais que $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\ddot{\mathcal{P}})| \geq \varepsilon_0$.*

Aplicaremos essa observação à função de Dirichlet $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := 1$ se $x \in [0,1]$ é racional e $f(x) := 0$ se $x \in [0,1]$ é irracional.

De fato, podemos tomar $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Se $\dot{\mathcal{P}}$ e $\ddot{\mathcal{P}}$ são partições aferidas correspondentes a uma mesma partição $\mathcal{P}$ qualquer de $[a,b]$, tais que as aferições de $\dot{\mathcal{P}}$ são racionais, enquanto as aferições de $\ddot{\mathcal{P}}$ são irracionais, teremos sempre $S(f;\dot{\mathcal{P}}) = 1$, ao passo que $S(f;\ddot{\mathcal{P}}) := 0$ (por quê?). Devido à densidade dos racionais e dos irracionais em $[0,1]$, podemos tomar partições $\mathcal{P}$ com normas arbitrariamente pequenas e formar partições aferidas $\dot{\mathcal{P}}$ e $\ddot{\mathcal{P}}$ como mencionado. Concluímos então que a função de Dirichlet não é integrável à Riemann.

Operações Não-Lineares com Funções Integráveis

No resultado a seguir vamos estabelecer o bom comportamento de $\mathcal{R}[a,b]$ em relação às operações de produto, quociente, tomada do módulo ou valor absoluto e composição com funções Lipschitz.

Teorema 25.7
Seja $f,g \in \mathcal{R}[a,b]$. Então:

(i) $fg \in \mathcal{R}[a,b]$;

(ii) Se $|g(x)| > \eta > 0$ para $x \in [a,b]$, então $f/g \in \mathcal{R}[a,b]$;

(iii) $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

(iv) Se $f([a,b]) \subset [c,d]$ e $H : [c,d] \to \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz, então $H \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Prova: (i) Como $f,g \in \mathcal{R}[a,b]$, pelo Teorema 24.2 existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \le M$ e $|g(x)| \le M$ para $x \in [a,b]$. Além disso, pelo Teorema 25.1, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\mathcal{P}$ é uma partição de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$, então

$$0 \le S^*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{e} \quad 0 \le S^*(g;\mathcal{P}) - S_*(g;\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Tomemos um tal $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ como mencionado. Seja $\mathcal{P} := \{I_i\}_{i=1}^n$ uma partição de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$, e sejam $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i,t_i)\}_{i=1}^n$, $\ddot{\mathcal{P}} := \{(I_i,s_i)\}_{i=1}^n$ duas partições aferidas associadas possuindo os mesmos subintervalos de $\mathcal{P}$, $I_i := [x_{i-1},x_i]$. Sejam

$$M_i^f := \sup\{f(t) \,:\, t \in [x_{i-1},x_i]\}, \qquad m_i^f := \inf\{f(t) \,:\, t \in [x_{i-1},x_i]\},$$

e M_i^g, m_i^g definidos analogamente com g em lugar de f. Temos

$$\begin{aligned}
|S(fg;\dot{\mathcal{P}})-S(fg;\ddot{\mathcal{P}})| &= \left|\sum_{i=1}^n (f(t_i)g(t_i)-f(s_i)g(s_i))(x_i-x_{i-1})\right| \\
&\le \sum_{i=1}^n |f(t_i)g(t_i)-f(s_i)g(s_i)|(x_i-x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n |(f(t_i)g(t_i)-f(t_i)g(s_i))+(f(t_i)g(s_i)-f(s_i)g(s_i))|(x_i-x_{i-1}) \\
&\le \sum_{i=1}^n \big(|f(t_i)||g(t_i)-g(s_i)|+|g(s_i)||f(t_i)-f(s_i)|\big)(x_i-x_{i-1}) \\
&\le M\sum_{i=1}^n (M_i^g-m_i^g)(x_i-x_{i-1})+M\sum_{i=1}^n (M_i^f-m_i^f)(x_i-x_{i-1}) \\
&= M(S^*(g;\mathcal{P})-S_*(g;\mathcal{P}))+M(S^*(f;\mathcal{P})-S_*(f;\mathcal{P})) \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M}+M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon>0$ é arbitrário, segue do Teorema 25.3 que $fg\in\mathcal{R}[a,b]$.

(ii) Basta provar que $1/g\in\mathcal{R}[a,b]$ e então aplicar o ítem (i) a f e $1/g$. Provemos então que $1/g\in\mathcal{R}[a,b]$. Dadas duas partições aferidas de $[a,b]$, $\dot{\mathcal{P}}:=\{(I_i,t_i)\}_{i=1}^n$ e $\ddot{\mathcal{P}}=\{(I_i,s_i)\}_{i=1}^n$, possuindo os mesmos subintervalos de uma partição $\mathcal{P}:=\{I_i\}_{i=1}^n$, $I_i:=[x_{i-1},x_i]$, temos

$$\begin{aligned}
|S(1/g;\dot{\mathcal{P}})-S(1/g;\ddot{\mathcal{P}})| &= \left|\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{g(t_i)}-\frac{1}{g(s_i)}\right)(x_i-x_{i-1})\right| \\
&\le \sum_{i=1}^n \frac{|g(s_i)-g(t_i)|}{|g(t_i)||g(s_i)|}(x_i-x_{i-1}) \\
&\le \frac{1}{\eta^2}\left(S^*(g;\mathcal{P})-S_*(g;\mathcal{P})\right). \qquad \text{(por quê?)}
\end{aligned}$$

Seja $\varepsilon>0$ dado. Como g é integrável, existe $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que se $\|\mathcal{P}\|<\delta$, então $0\le S^*(g;\mathcal{P})-S_*(g;\mathcal{P})<\eta^2\varepsilon$. Assim, se $\dot{\mathcal{P}}$ e $\ddot{\mathcal{P}}$ são partições aferidas com os mesmos subintervalos de uma partição $\mathcal{P}$ com $\|\mathcal{P}\|<\delta$, pela estimativa que acabamos de fazer teremos

$$|S(1/g;\dot{\mathcal{P}})-S(1/g;\ddot{\mathcal{P}})|<\frac{1}{\eta^2}\eta^2\varepsilon=\varepsilon.$$

Segue então do Teorema 25.3 que $1/g\in\mathcal{R}[a,b]$, o que conclui a prova de (ii).

(iii) De novo, dadas duas partições aferidas de $[a,b]$, $\dot{\mathcal{P}}:=\{(I_i,t_i)\}_{i=1}^n$ e $\ddot{\mathcal{P}}=\{(I_i,s_i)\}_{i=1}^n$, possuindo os mesmos subintervalos de uma partição $\mathcal{P}:=$

$\{I_i\}_{i=1}^n$, $I_i := [x_{i-1}, x_i]$, temos

$$\begin{aligned} |S(|f|;\dot{\mathcal{P}}) - S(|f|;\ddot{\mathcal{P}})| &= \left|\sum_{i=1}^n (|f(t_i)| - |f(s_i)|)(x_i - x_{i-1})\right| \\ &\le \sum_{i=1}^n \big||f(t_i)| - |f(s_i)|\big|(x_i - x_{i-1}) \\ &\le \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(s_i)|(x_i - x_{i-1}) \\ &\le S^*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{P}). \qquad \text{(por quê?)} \end{aligned}$$

Como nos ítens anteriores, usamos o Teorema 25.1 para obter que existe $\delta > 0$ tal que o último membro da desigualdade anterior é menor que ε se $\|\mathcal{P}\| < \delta$ e então usamos o Teorema 25.3 para concluir que $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.

O fato de que $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$ segue de $f \le |f|$, $-f \le |f|$ e do Teorema 24.3(i). Deixamos os detalhes da demonstração para você como exercício.

(iv) Por definição, dizer que $H : [c,d] \to \mathbb{R}$ é Lipschitz significa que existe $C > 0$ tal que $|H(y) - H(z)| \le C|y - z|$, para $y, z \in [c,d]$. Mais uma vez, dadas duas partições aferidas de $[a,b]$, $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ e $\ddot{\mathcal{P}} = \{(I_i, s_i)\}_{i=1}^n$, possuindo os mesmos subintervalos de uma partição $\mathcal{P} := \{I_i\}_{i=1}^n$, $I_i := [x_{i-1}, x_i]$, temos

$$\begin{aligned} |S(H(f);\dot{\mathcal{P}}) - S(H(f);\ddot{\mathcal{P}})| &= \left|\sum_{i=1}^n (H(f(t_i)) - H(f(s_i)))(x_i - x_{i-1})\right| \\ &\le \sum_{i=1}^n \big|H(f(t_i)) - H(f(s_i))\big|(x_i - x_{i-1}) \\ &\le C\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(s_i)|(x_i - x_{i-1}) \\ &\le C\big(S^*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{P})\big). \end{aligned}$$

Da mesma forma que no ítem anterior, usamos os Teoremas 25.1 e 25.3 para concluir que $H \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$. Deixamos os detalhes para você como exercício.
$\square$

O Teorema da Aditividade

A seguir estabeleceremos o fato de que a integral é uma "função aditiva" do intervalo sobre o qual a função é integrada. O significado preciso dessa propriedade ficará claro no enunciado do resultado.

Teorema 25.8

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $c \in (a,b)$. Então $f \in \mathcal{R}[a,b]$ se, e somente se, suas restrições a $[a,c]$ e $[c,b]$ são ambas integráveis à Riemann. Nesse caso vale

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{25.10}$$

Prova: ($\Rightarrow$) Suponhamos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Seja $\varepsilon > 0$ e tomemos $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ como no enunciado do Teorema 25.4. Seja $f_1 := f|[a,c]$ e sejam $\dot{\mathcal{P}}_1$ e $\dot{\mathcal{Q}}_1$ partições aferidas de $[a,c]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}_1\| < \delta$ e $\|\dot{\mathcal{Q}}_1\| < \delta$. Combinando-se $\dot{\mathcal{P}}_1$ e $\dot{\mathcal{Q}}_1$ com uma mesma partição aferida qualquer de $[c,b]$ com norma $< \delta$ podemos estender $\dot{\mathcal{P}}_1$ e $\dot{\mathcal{Q}}_1$ a partições aferidas $\dot{\mathcal{P}}$ e $\dot{\mathcal{Q}}$ de $[a,b]$ satisfazendo $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$ e $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta$. Além disso, teremos

$$S(f_1; \dot{\mathcal{P}}_1) - S(f_1; \dot{\mathcal{Q}}_1) = S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \dot{\mathcal{Q}}),$$

já que usamos a mesma partição aferida de $[c,d]$ para estender $\dot{\mathcal{P}}_1$ e $\dot{\mathcal{Q}}_1$ a $\dot{\mathcal{P}}$ e $\dot{\mathcal{Q}}$, respectivamente.

Como $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$ e $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta$, então $|S(f_1; \dot{\mathcal{P}}_1) - S(f_1; \dot{\mathcal{Q}}_1)| < \varepsilon$. Segue então do Teorema 25.4 que $f_1 \in \mathcal{R}[a,c]$.

De forma quase idêntica se demonstra que $f_2 := f|[c,b]$ está em $\mathcal{R}[c,b]$.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $f_1 = f|[a,c]$ e $f_2 = f|[c,d]$ estão em $\mathcal{R}[a,c]$ e $\mathcal{R}[c,b]$, respectivamente, e sejam $L_1 := \int_a^c f_1$ e $L_2 := \int_c^b f_2$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}_1$ é uma partição aferida de $[a,c]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}_1\| < \delta_1$, vale $|S(f_1; \dot{\mathcal{P}}_1) - L_1| < \varepsilon/3$. Do mesmo modo, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}_2$ é uma partição aferida de $[c,d]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}_2\| < \delta_2$, então $|S(f_2; \dot{\mathcal{P}}_2) - L_2| < \varepsilon/3$.

Como f_1 é limitada em $[a,c]$ e f_2 é limitada em $[c,b]$ (por quê?), segue que f é limitada em $[a,b]$. Seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \le M$ para $x \in [a,b]$. Definamos $\delta = \delta(\varepsilon) := \min\{\delta_1, \delta_2, \varepsilon/6M\}$ e seja $\dot{\mathcal{P}}$ uma partição aferida de $[a,b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$. Vamos provar que

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon. \tag{25.11}$$

Se c é um dos pontos da partição $\mathcal{P}$ cujos subintervalos são os mesmos de $\dot{\mathcal{P}}$, repartimos $\dot{\mathcal{P}}$ numa partição aferida $\dot{\mathcal{P}}_1$ de $[a,c]$ e uma partição aferida $\dot{\mathcal{P}}_2$ de $[c,b]$. Como $S(f; \dot{\mathcal{P}}) = S(f_1; \dot{\mathcal{P}}_1) + S(f_2; \dot{\mathcal{P}}_2)$, e como $\dot{\mathcal{P}}_1$ tem norma menor que δ_1 e $\dot{\mathcal{P}}_2$ tem norma menor que δ_2, a desigualdade (25.11) segue imediatamente da desigualdade triangular.

Se c não é um ponto de $\mathcal{P} := (a = x_0, x_1, \dots, x_n = b)$, então existe $k \le n$ tal que $c \in (x_{k-1}, x_k)$. Sejam $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$, $\dot{\mathcal{P}}_1$ a partição aferida de $[a, c]$ definida por

$$\dot{\mathcal{P}}_1 := \{(I_1, t_1), \ldots, (I_{k-1}, t_{k-1}), ([x_{k-1}, c], c)\},$$

e $\dot{\mathcal{P}}_2$ a partição aferida de $[c, b]$ definida por

$$\dot{\mathcal{P}}_2 := \{([c, x_k], c), (I_{k+1}, t_{k+1}), \ldots, (I_n, t_n)\},$$

com $I_i := [x_{i-1}, x_i]$. Um cálculo simples mostra que

$$\begin{aligned} S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f_1; \dot{\mathcal{P}}_1) - S(f_2; \dot{\mathcal{P}}_2) &= f(t_k)(x_k - x_{k-1}) - f(c)(x_k - x_{k-1}) \\ &= (f(t_k) - f(c))(x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Segue daí que

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f_1; \dot{\mathcal{P}}_1) - S(f_2; \dot{\mathcal{P}}_2)| \le 2M(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon/3. \tag{25.12}$$

Mas como $\|\dot{\mathcal{P}}_1\| < \delta \le \delta_1$ e $\|\dot{\mathcal{P}}_2\| < \delta \le \delta_2$, temos que

$$|S(f_1; \dot{\mathcal{P}}_1) - L_1| < \varepsilon/3 \quad \text{e} \quad |S(f_2; \dot{\mathcal{P}}_2) - L_2| < \varepsilon/3,$$

o qual juntamente com (25.12) nos dá (25.11). Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e que (25.10) vale. □

Definição 25.1
Se $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e se $\alpha, \beta \in [a, b]$ com $\alpha < \beta$, definimos

$$\int_\beta^\alpha f := -\int_\alpha^\beta f \quad \text{e} \quad \int_\alpha^\alpha f := 0. \tag{25.13}$$

Com a definição que acabamos de dar, o Teorema da Aditividade facilmente implica o seguinte resultado, cuja demonstração se resume à verificação de todos os possíveis casos dependendo do ordenamento entre α, β, γ, e será deixada para você como exercício (veja o exercício 12).

Teorema 25.9
Se $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e α, β, γ são quaisquer números em $[a, b]$, então

$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^\gamma f + \int_\gamma^\beta f. \tag{25.14}$$

Exercícios 25.1

1. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Mostre que $f \notin \mathcal{R}[a, b]$ se, e somente se, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existem partições aferidas $\dot{\mathcal{P}}_n$ e $\dot{\mathcal{Q}}_n$ com $\|\dot{\mathcal{P}}_n\| < 1/n$ e $\|\dot{\mathcal{Q}}_n\| < 1/n$ tais que $|S(f; \dot{\mathcal{P}}_n) - S(f; \dot{\mathcal{Q}}_n)| \ge \varepsilon_0$.

2. Considere a função f definida por $f(x) := x+1$ para $x \in [0,1]$ racional, e $f(x) := 0$ para $x \in [0,1]$ irracional. Mostre que f não é integrável à Riemann.

3. Se $S(f;\dot{\mathcal{P}})$ é uma soma de Riemann qualquer de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, mostre que existe uma função degrau (veja exercício 13) $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\int_a^b \varphi = S(f;\dot{\mathcal{P}})$.

4. Suponha que f é contínua em $[a,b]$, que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ e que $\int_a^b f = 0$. Prove que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

5. Mostre que a hipótese de que f é contínua no exercício anterior não pode ser retirada.

6. Se f e g são contínuas em $[a,b]$ e se $\int_a^b f = \int_a^b g$, prove que existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

7. Se f é limitada por M em $[a,b]$ e se a restrição de f a todo intervalo $[c,b]$ com $c \in (a,b)$ é integrável à Riemann, mostre que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e que $\int_c^b f \to \int_a^b f$ quando $c \to a+$. [Dica: Sejam $\alpha_c(x) := -M$ e $\omega_c(x) := M$ para $x \in [a,c)$ e $\alpha_c(x) = \omega_c(x) := f(x)$ para $x \in [c,b]$. Aplique o Teorema do Sanduíche para Integrais 25.6.]

8. Use o exercício anterior para mostrar que a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \in (0,1]$ e $f(0) := 0$ pertence a $\mathcal{R}[0,1]$.

9. Se f é contínua em $[a,b]$, mostre que existe $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f = f(c)(b-a)$. Esse resultado é às vezes chamado de Teorema do Valor Médio para Integrais.

10. Suponhamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, que $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b$ e que a restrição de f a $[c_{i-1}, c_i]$ pertence a $\mathcal{R}[c_{i-1}, c_i]$ para $i = 1, \ldots, m$. Prove que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e
$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{m} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f.$$
[Dica: Use o Teorema 25.8 e Indução Matemática.]

11. Suponha que $a > 0$ e que $f \in \mathcal{R}[-a,a]$.

    (a) Se f é *par* (isto é, se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in [-a,a]$), então $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$.

(b) Se f é *ímpar* (isto é, se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in [-a, a]$), então $\int_{-a}^{a} f = 0$.

12. Prove o Teorema 25.9.

Aula 26 – O Teorema Fundamental do Cálculo

Metas da aula: Provar o Teorema Fundamental do Cálculo e dar exemplos de suas aplicações no cálculo de integrais.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber os enunciados das duas formas do Teorema Fundamental do Cálculo e aplicar corretamente esses resultados para o cálculo de integrais.

Introdução

Nesta aula vamos estabelecer a conexão entre as noções de derivada e integral, usualmente bastante explorada nos cursos de Cálculo para se computar integrais. O Teorema Fundamental do Cálculo é o resultado que exprime essa conexão. Ele possui duas formas: a primeira versa sobre a integral da derivada de uma função; a segunda, sobre a derivada de uma integral com limite superior variável. Juntas, essas duas formas do Teorema Fundamental podem ser sintetizadas a grosso modo com a afirmação de que a derivada e a integral são operações inversas uma da outra. Porém, é preciso tomar cuidado com as sutilezas nas hipóteses para a validade de cada um desses resultados.

O Teorema Fundamental (Primeira Forma)

A Primeira Forma do Teorema Fundamental fornece a base teórica para o método de calcular integrais que você aprendeu no curso de Cálculo. Ela afirma que se uma função f é a derivada de uma função F, *e se f pertence a* $\mathcal{R}[a,b]$, então $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. É comum denotar-se $F\big|_a^b := F(b) - F(a)$. A função F tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$ é chamada uma *antiderivada* ou *primitiva de f* em $[a,b]$. O enunciado que daremos a seguir admite um conjunto *finito* de pontos excepcionais c onde $F'(c)$ não existe ou não é igual a $f(c)$.

Teorema 26.1 (Teorema Fundamental (Primeira Forma))
Suponhamos que exista um conjunto *finito* E em $[a,b]$ e funções $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que:

(a) F é contínua em $[a,b]$;

(b) $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b] \setminus E$;

(c) $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Então temos

$$\int_a^b f = F(b) - F(a). \tag{26.1}$$

Prova: Como o conjunto E é finito, podemos supor sem perda de generalidade que $E = \{a,b\}$; o caso geral se reduz a esse fazendo-se uma partição do intervalo $[a,b]$ numa união finita de intervalos concatenados.

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $f \in \mathcal{R}[a,b]$ pela hipótese (c), existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ é uma partição qualquer de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$, então

$$\int_a^b f - \varepsilon \le S_*(f;\mathcal{P}) \le \int_a^b f \le S^*(f;\mathcal{P}) \le \int_a^b f + \varepsilon. \tag{26.2}$$

Pelo Teorema do Valor Médio 22.4 aplicado a F sobre $[x_{i-1}, x_i]$ temos que existe $u_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(u_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Somando-se as equações anteriores de $i = 1$ a $i = n$, notando que os membros à esquerda formam uma soma telescópica, e usando o fato de que $F'(u_i) = f(u_i)$ obtemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Agora, consideremos a partição aferida $\dot{\mathcal{P}} := \{[x_{i-1}, x_i], u_i)\}_{i=1}^n$. Temos $S(f;\dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i - x_{i-1})$, $S_*(f;\mathcal{P}) \le S(f;\dot{\mathcal{P}}) \le S^*(f;\mathcal{P})$, e portanto

$$\int_a^b f - \varepsilon \le S(f;\dot{\mathcal{P}}) \le \int_a^b f + \varepsilon.$$

Como $F(b) - F(a) = S(f;\dot{\mathcal{P}})$, segue que

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que vale a equação (26.1). □

Observação 26.1

Se a função F é diferenciável em todo ponto de $[a,b]$, então a hipótese (a) é automaticamente satisfeita (por quê?). Mesmo que F seja derivável em todo ponto de $[a,b]$ a condição (c) pode não valer já que existem funções F satisfazendo essa condição tais que F' não é integrável à Riemann (veja Exemplo 26.1 (e)).

Exemplos 26.1

(a) Se $f(x) := x^4$ para $x \in [a,b]$, então $f(x) = F'(x)$ para todo $x \in [a,b]$, onde $F(x) := \frac{1}{5}x^5$. Além disso, f é contínua, logo $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Portanto, o Teorema Fundamental (com $E = \emptyset$) implica

$$\int_a^b x^4\,dx = \frac{1}{5}(b^5 - a^5).$$

(b) Se $f(x) = 1/(x^2+1)$ para $x \in [a,b]$, então f é contínua e $f(x) = F'(x)$ para todo $x \in [a,b]$, onde $F(x) := \arctan x$. Portanto, o Teorema Fundamental (com $E = \emptyset$) implica que

$$\int_a^b \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan b - \arctan a.$$

(c) Se $f(x) := \operatorname{sgn}(x)$ para $x \in [-5,5]$, então $f(x) = F'(x)$ para todo $x \in [-5,5] \setminus \{0\}$, onde $F(x) := |x|$. Como $\operatorname{sgn}(x)$ é uma função degrau em $[-5,5]$, temos que $f \in \mathcal{R}[-5,5]$. Segue então do Teorema Fundamental (com $E = \{0\}$) que

$$\int_{-5}^{5} \operatorname{sgn}(x)\,dx = |5| - |-5| = 5 - 5 = 0.$$

(d) Se $f(x) := 1/\sqrt{x}$ para $x \in (0,4]$ e $f(0) := 0$, então $f(x) = F'(x)$ para $x \in (0,4] = [0,4] \setminus \{0\}$, onde $F(x) := \sqrt{x}$. Porém, como f não é limitada em $[0,4]$, $f \notin \mathcal{R}[0,4]$. Logo o Teorema Fundamental não pode ser aplicado nesse caso. (Entretanto é possível estender o conceito de integral para além da noção de integral de Riemann que aprendemos neste curso, de modo a incluir a função f na classe das funções integráveis (relativamente à noção mais geral de integral) e de tal forma que o Teorema Fundamental ainda seja válido nesse caso.)

(e) Se $f(x) := 2x\operatorname{sen}(1/x^2) - (2/x)\cos(1/x^2)$ para $x \in (0,1]$ e $f(0) := 0$, então $f(x) = F'(x)$ para todo $x \in [0,1]$, onde $F(x) := x^2\operatorname{sen}(1/x^2)$ para $x \in (0,1]$ e $F(0) := 0$ ($F'(0) = 0$ (!), por quê?). Embora F seja contínua em $[0,1]$ e $F'(x) = f(x)$ em $[0,1]$, a função f não é limitada em $[0,1]$, donde concluímos que $f \notin \mathcal{R}[0,1]$. Logo, o Teorema Fundamental não pode ser aplicado nesse caso. (Cabe aqui também uma observação semelhante à do exemplo anterior quanto a possibilidade de extensão da noção de integral de modo a incluir esse exemplo mantendo a validade do Teorema Fundamental.)

O Teorema Fundamental (Segunda Forma)

Vamos em seguida estabelecer a segunda forma do Teorema Fundamental na qual desejamos derivar uma integral com limite superior variável. Antes porém introduziremos o conceito de integra indefinida e estabeleceremos um resultado simples mostrando a continuidade dessa função.

Definição 26.1
Se $f \in \mathcal{R}[a,b]$, então a função definida por

$$F(x) := \int_a^x f \quad \text{para } x \in [a,b], \tag{26.3}$$

é chamada a *integral indefinida* de f com *ponto-base* a. Qualquer outro ponto em $[a,b]$ pode ser escolhido como ponto base: nesse caso a integral indefinida diferirá da F em (26.3) por uma constante.

Teorema 26.2
Seja $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $M > 0$ tal que $|f(x)| \le M$ para todo $x \in [a,b]$. Então a integral indefinida F definida por (26.3) satisfaz $|F(z) - F(w)| \le M|z-w|$ para todos $z, w \in [a,b]$. Em particular, F é contínua em $[a,b]$.

Prova: Pelo Teorema da Aditividade 25.8 temos

$$F(z) = \int_a^z f = \int_a^w f + \int_w^z f = F(w) + \int_w^z f,$$

donde segue que

$$F(z) - F(w) = \int_w^z f.$$

Agora, como $-M \le f(x) \le M$ para $x \in [a,b]$, o Teorema 24.3(i) implica que

$$-M(z-w) \le \int_w^z f \le M(z-w),$$

donde concluímos que

$$|F(z) - F(w)| = \left| \int_w^z f \right| \le M|z-w|,$$

como afirmado. Como F é Lipschitz em $[a,b]$, segue que F é contínua em $[a,b]$. $\square$

Teorema 26.3 (Teorema Fundamental (Segunda Forma))
Seja $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e suponhamos que f é contínua em $\bar{x} \in [a,b]$. Então a integral indefinida, dada por (26.3), é diferenciável em $\bar{x}$ e $F'(\bar{x}) = f(\bar{x})$.

Prova: Inicialmente suporemos que $\bar{x} \in [a, b)$ e vamos analisar a derivada à direita de F em $\bar{x}$. Como f é contínua em $\bar{x}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\bar{x} \le x < \bar{x} + \delta$, então

$$f(\bar{x}) - \varepsilon < f(x) < f(\bar{x}) + \varepsilon. \tag{26.4}$$

Suponha que h satisfaz $0 < h < \delta$. O Teorema da Aditividade 25.8 implica que f é integrável nos intervalos $[a, \bar{x}]$, $[a, \bar{x} + h]$ e $[\bar{x}, \bar{x} + h]$ e que

$$F(\bar{x} + h) - F(\bar{x}) = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f.$$

Porém, no intervalo $[\bar{x}, \bar{x} + h]$ a função f satisfaz a desigualdade (26.4), de modo que (pelo Teorema 24.3(i)) temos

$$(f(\bar{x}) - \varepsilon)\, h \le F(\bar{x} + h) - F(\bar{x}) = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f \le (f(\bar{x}) + \varepsilon)\, h.$$

Dividindo por h e subtraindo $f(\bar{x})$, obtemos

$$\left| \frac{F(\bar{x} + h) - F(\bar{x})}{h} - f(\bar{x}) \right| \le \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que o limite à direita quando $h \to 0+$ do quociente de Newton é dado por

$$\lim_{h \to 0+} \frac{F(\bar{x} + h) - F(\bar{x})}{h} = f(\bar{x}).$$

Do mesmo modo provamos que a derivada à esquerda de F em $\bar{x} \in (a, b]$ é $f(\bar{x})$, o que conclui a prova da afirmação. □

Como consequência imediata do resultado anterior temos que se f é contínua em $[a, b]$, então a integral indefinida F, dada por (26.3), é diferenciável em $[a, b]$ e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Isto pode ser resumido da seguinte forma: *Se f é contínua em $[a, b]$, então sua integral indefinida é uma antiderivada de f.*

Veremos a seguir que, em geral, a integral indefinida não precisa ser uma antiderivada: seja porque a derivada da integral indefinida não existe, seja porque essa derivada não é igual a f.

Exemplos 26.2

(a) Se $f(x) := \operatorname{sgn}(x)$ em $[-1, 1]$, então $f \in \mathcal{R}[-1, 1]$ e tem a integral indefinida $F(x) := |x| - 1$ com ponto-base em -1. No entanto, como $F'(0)$ não existe, F não é uma antiderivada de f em $[-1, 1]$.

(b) Seja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função de Thomae, considerada no Exemplo 24.1(f), definida por $g(x) := 0$ se $x \in [0,1]$ é irracional, $g(0) := 0$ e por $g(x) := 1/n$ se $x \in [0,1]$ é um número racional, e $x = m/n$ onde $m, n \in \mathbb{N}$ não possuem divisores comuns a não ser 1. Então sua integral indefinida $G(x) := \int_0^x g$ é identicamente 0 em $[0,1]$, pois $g \geq 0$ e assim temos $0 \leq \int_0^x g \leq \int_0^1 g = 0$, como vimos no Exemplo 24.1(f). Em particular, temos $G'(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$. Portanto, $G'(x) \neq g(x)$ para $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, de modo que G não é uma antiderivada de g em $[0,1]$.

Mudança de Variáveis

O Teorema a seguir justifica o método da mudança de variáveis muito utilizado para computar integrais, já estudado nos cursos de Cálculo.

Teorema 26.4 (Mudança de Variáveis)
Seja $J := [\alpha, \beta]$ e suponhamos que $\varphi : J \to \mathbb{R}$ possui derivada contínua em J. Se $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua num intervalo I contendo $\varphi(J)$, então

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx. \tag{26.5}$$

Prova: Definamos $F(x) := \int_{\varphi(\alpha)}^x f(s)\, ds$ para $x \in I$; F é uma integral indefinida de f com ponto-base em $\varphi(\alpha)$. Seja $G(t) := F(\varphi(t))$ para $t \in J$. Pela Regra da Cadeia, temos $G'(t) = F'(\varphi(t))\, \varphi'(t) = f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$, onde na última igualdade aplicamos o Teorema Fundamental 26.3. Como $G(\alpha) = 0$, o Teorema Fundamental 26.2 implica

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)\, ds = F(\varphi(\beta)) = G(\beta) = G(\beta) - G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt.$$

□

Exemplos 26.3
(a) $\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} t)^2 \cos t\, dt = 1/3$.

De fato, tomando $\varphi(t) = \operatorname{sen} t$, $J = [0, \pi/2]$ e $f(x) = x^2$, podemos aplicar o Teorema 26.4 para obter

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} t)^2 \cos t\, dt = \int_0^1 x^2\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(b) Seja $I(a) := \int_{a^2}^{(\pi/2)^2} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt$ para $a \in (0, \pi/2]$. Então, $I(a) = 2\cos a$. Em particular, $I(0+) = 2$.

De fato, se $\varphi(t) := \sqrt{t}$ para $t \in [a^2, (\pi/2)^2]$, então $\varphi'(t) = 1/(2\sqrt{t})$ é contínua em $[a^2, (\pi/2)^2]$. Tomando $f(x) := 2\operatorname{sen} x$, então o integrando tem a forma $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ e podemos aplicar o Teorema 26.4 para obter

$$I(a) = \int_a^{\pi/2} 2\operatorname{sen} x\, dx = -2\cos x\Big|_{x=a}^{\pi/2} = 2\cos a,$$

como afirmado. Claramente, $I(0+) = \lim_{a\to 0+} I(a) = 2$.

Exercícios 26.1

1. Se $n \in \mathbb{N}$, mostre que o Teorema Fundamental 26.2 implica $\int_a^b x^n\, dx = (b^{n+1} - a^{n+1})/(n+1)$. Quem é o conjunto finito E neste caso?

2. Se $f(x) := -x$ para $x < 1$ e $f(x) := x$ para $x \geq 1$ e se $F(x) := \frac{1}{2}|x^2 - 1|$, mostre que $\int_{-2}^3 f(x)\, dx = F(3) - F(-2) = 5/2$.

3. Seja $F(x) := -\frac{1}{2}x^2$ para $x < 0$ e $F(x) := \frac{1}{2}x^2$ para $x \geq 0$. Mostre que $\int_a^b |x|\, dx = F(b) - F(b)$.

4. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

   (a) Se $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma antiderivada de f em $[a, b]$, mostre que $F_c(x) := F(x) + c$ também é uma antiderivada de f em $[a, b]$.

   (b) Se F_1 e F_2 são antiderivadas de f em $[a, b]$, mostre que $F_1 - F_2$ é uma função constante em $[a, b]$.

5. Se $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e se $c \in [a, b]$, a função definida por $F_c(x) := \int_c^x f$ para $x \in [a, b]$ é chamada a *integral indefinida* de f com *ponto-base* c. Encontre uma relação entre F_a e F_c.

6. Seja $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e defina $F(x) := \int_a^x f$ para $x \in [a, b]$.

   (a) Determine $G(x) := \int_x^b f$ em termos de F.

   (b) Determine $H(x) := \int_x^{\operatorname{sen} x} f$ em termos de F.

7. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e seja $v : [c, d] \to \mathbb{R}$ diferenciável em $[c, d]$ com $v([c, d]) \subset [a, b]$. Se definirmos $G(x) := \int_a^{v(x)} f$, mostre que $G'(x) := f(v(x))\, v'(x)$ para todo $x \in [c, d]$.

8. Encontre F' quando F é definida em $[0, 1]$ por:

(a) $F(x) := \int_0^{x^2} (1+t^3)^{-1}\,dt$.

(b) $F(x) := \int_{x^2}^{x} \sqrt{1+t^2}\,dt$.

9. Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua e $\int_0^x f = \int_x^1 f$ para todo $x \in [0,1]$, mostre que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.

10. Use o Teorema 26.4 (Mudança de Variáveis) para calcular as seguintes integrais.

(a) $\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,dt$;

(b) $\int_0^2 t^2(1+t^3)^{-1/2}\,dt$;

(c) $\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$;

(d) $\int_1^4 \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

Aula 27 – Seqüências e Séries de Funções

Metas da aula: Definir convergência pontual e convergência uniforme para sequências de funções. Estabelecer o critério de Cauchy para convergência uniforme de funções. Enunciar e demonstrar o Teste de Weierstrass para a convergência uniforme de séries de funções. Estabelecer os resultados básicos sobre séries de potências.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber as definições de convergência pontual e de convergência uniforme para uma sequência de funções.
- Saber distingüir claramente esses dois tipos de convergência de sequências de funções. Dar exemplos de sequências de funções que convergem pontualmente mas não convergem uniformemente.
- Saber o critério de Cauchy para convergência uniforme de sequências de funções e algumas de suas aplicações.
- Saber o enunciado e algumas aplicações do Teste de Weierstrass para a convergência uniforme de séries de funções.
- Conhecer os fatos básicos sobre séries de potências: determinação do raio de convergência; convergência uniforme da série em intervalos fechados contidos no intervalo aberto definido pelo raio de convergência.

Introdução

Dado $A \subset \mathbb{R}$ suponhamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenhamos associada uma função $f_n : A \to \mathbb{R}$. Diremos que (f_n) é uma *sequência de funções* definidas em A tomando valores em $\mathbb{R}$. Sequências de funções surgem com muita frequência em Análise, por exemplo, quando desejamos encontrar uma função verificando determinadas condições e adotamos a estratégia de resolver tal problema obtendo sucessivamente funções que satisfazem aproximadamente tais condições, com aproximações cada vez melhores.

Nesta aula vamos estudar dois tipos importantes de convergência para uma sequência de funções (f_n). O primeiro tipo de convergência de funções que definiremos é também o mais simples; a convergência pontual. Significa simplesmente que a sequência de números reais $(f_n(x))$ converge para um número $f(x)$ para todo $x \in A$; nesse caso dizemos que a função $f : A \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) := \lim f_n(x)$ para $x \in A$, é o limite pontual da sequência de funções $f_n : A \to \mathbb{R}$.

O segundo tipo de convergência que veremos é a convergência uniforme de funções $f_n : A \to \mathbb{R}$ para uma função $f : A \to \mathbb{R}$. Significa, grosso modo, que existe uma sequência de números positivos (M_n) satisfazendo $\lim M_n = 0$ e $|f_n(x) - f(x)| \leq M_n$ para todo $x \in A$. A convergência uniforme é portanto mais restritiva que a convergência pontual, no sentido de que a convergência uniforme implica a convergência pontual, sendo a recíproca em geral falsa, como veremos.

Uma questão básica quando lidamos com uma sequência de funções qualquer, (f_n), é saber se certas propriedades verificadas por todos os membros f_n dessa sequência, tais como continuidade e integrabilidade, também são verificadas pela função limite f, no caso em que a sequência f_n converge em algum sentido para a função f. Veremos na próxima aula que o conceito de convergência uniforme de funções fornece resposta positiva a essa questão em diversos casos, como o da continuidade e da integrabilidade, e que o mesmo não é verdadeiro em relação ao conceito de convergência pontual.

Convergência Pontual e Convergência Uniforme

Iniciemos a seguir o estudo detalhado desses modos de convergência. Comecemos com a definição da convergência pontual de uma sequência de funções.

Definição 27.1
Seja $A \subset \mathbb{R}$, (f_n) uma sequência de funções definidas em A com valores em $\mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Dizemos que a sequência (f_n) *converge pontualmente para f em A* se, para cada $x \in A$, a sequência de números reais $(f_n(x))$ converge para $f(x)$.

Usando a definição de limite de uma sequência de números reais podemos reescrever a Definição 27.1 na forma: (f_n) converge pontualmente para f em A se para todo $x \in A$ e todo $\varepsilon > 0$ existe $N_0 = N_0(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \in \mathbb{N}$ e $n > N_0$, então $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

O detalhe a ser destacado é que na definição de convergência pontual N_0 depende não apenas de ε mas, em geral, também de $x \in A$. Essa é a diferença fundamental entre a convergência pontual e a convergência uniforme de funções que definimos a seguir.

Definição 27.2

Seja $A \subset \mathbb{R}$, (f_n) uma sequência de funções definidas em A com valores em $\mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Dizemos que a sequência (f_n) *converge uniformemente para f em A* se para todo $\varepsilon > 0$ existem $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \in \mathbb{N}$ e $n > N_0$, então $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$.

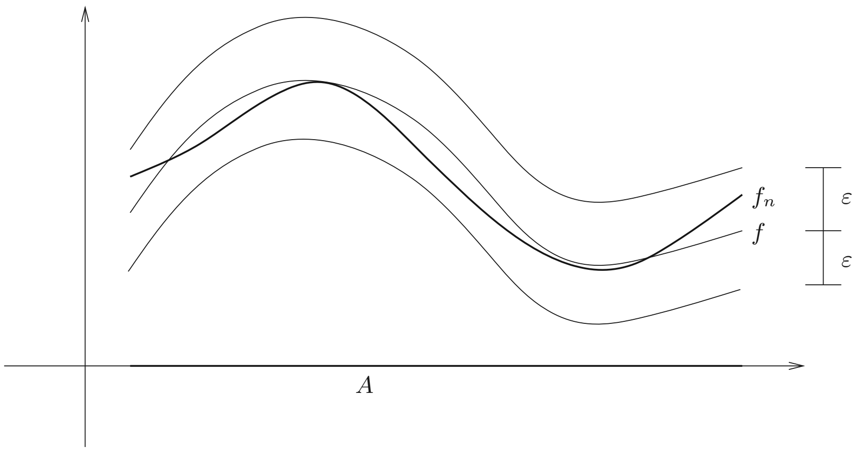


Figura **27.1**: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$.

Portanto, como já havíamos alertado, na definição de convergência uniforme de funções o N_0 depende apenas de ε e não de $x \in A$. É interessante estabelecermos explicitamente a negação da definição de convergência uniforme como no lema a seguir, cuja demonstração deixamos para você como importante exercício.

Lema 27.1

Seja $A \subset \mathbb{R}$, (f_n) uma sequência de funções definidas em A com valores em $\mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Então (f_n) não converge uniformemente a f em A se, e somente se, para algum $\varepsilon_0 > 0$ existe uma subsequência (f_{n_k}) de (f_n) e uma sequência (x_k) em A tal que $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

A seguir analisamos alguns exemplos.

Exemplos 27.1

(a) Se $f_n(x) := x/n$ para $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, então $\lim f_n(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, (f_n) converge pontualmente para a função f identicamente nula em $\mathbb{R}$, isto é, $f(x) := 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Neste caso, (f_n) *não* converge uniformemente a f em $\mathbb{R}$. De fato, se tomarmos $\varepsilon_0 = 1$ e $x_n = n$ temos

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1,$$

e pelo Lema 27.1 isso implica que (f_n) não converge uniformemente a f em $\mathbb{R}$.

Por outro lado, é fácil ver que essa mesma sequência (f_n) converge uniformemente para a função identicamente nula f em todo intervalo $[-L, L]$ para qualquer $L > 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, como $L/n \to 0$, podemos encontrar $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L/N_0 < \varepsilon$. Assim, se $n > N_0$, temos

$$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{x}{n}| \leq \frac{L}{N_0} < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, isso que mostra que (f_n) converge uniformemente a f em $[-L, L]$.

(b) $f_n(x) = x^n$ para $x \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$.

Para $x \in [0,1)$ claramente temos $x^n \to 0$, ao passo que $f_n(1) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, (f_n) converge pontualmente a f em $[0,1]$, com $f(x) = 0$ para $x \in [0,1)$ e $f(1) = 1$. Observe que o limite pontual $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função descontínua em $\bar{x} = 1$.

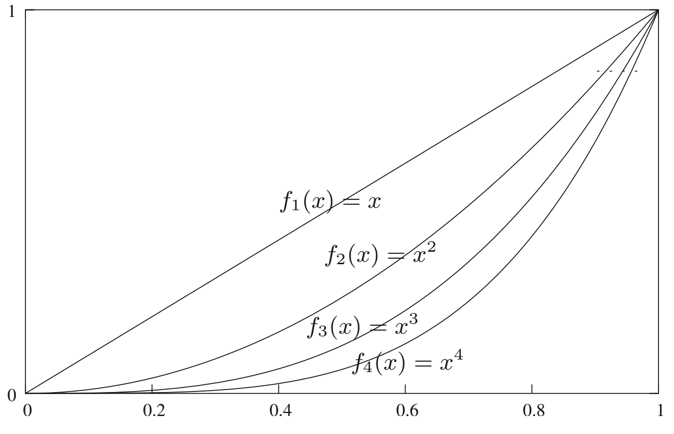


Figura **27.2**: Os 4 primeiros elementos da sequência $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$.

(c) Se $f_n, f : [0,1] \to \mathbb{R}$ são definidas como no ítem anterior, então (f_n) *não* converge a f uniformente em $[0,1]$. Por outro lado, para todo $0 < \delta < 1$, (f_n) converge uniformemente a f em $[0, 1-\delta]$.

De fato, aplicando o Lema 27.1, para $\varepsilon_0 := 1/2$, podemos tomar a própria sequência (f_n) e a sequência (x_n) em $[0,1]$ dada por $x_n := (1/2)^{1/n}$ e obter

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2},$$

verificando assim a condição para que f_n não convirja uniformemente para f em $[0,1]$. Por outro lado, fixado $\delta \in (0,1)$, dado qualquer $\varepsilon > 0$, como $(1-\delta)^n \to 0$, podemos encontrar $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(1-\delta)^n < \varepsilon$ para todo $n > N_0$. Assim, para $n > N_0$ temos $0 \leq x^n \leq (1-\delta)^n < \varepsilon$, para todo $x \in [0, 1-\delta]$, o que mostra que (f_n) converge uniformemente a f em $[0, 1-\delta]$.

(d) Seja $A = \{1/m : m \in \mathbb{N}\}$ e $f_n : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(1/m) := \frac{m}{m+n}.$$

Claramente, (f_n) converge pontualmente à função constante f identicamente igual a 0 em A. Observe que 0 é um ponto de acumulação de A e para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo temos

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{m}{m+n} = 1.$$

Por outro lado, para a função f identicamente igual a 0 em A evidentemente temos

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Esses fatos podem ser resumidos da seguinte forma:

$$\lim_{x\to 0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x).$$

(e) Se $f_n(x) := nx(1-x^2)^n$, $x \in [0,1]$, então (f_n) converge pontualmente para a função identicamente nula, $f(x) := 0$, $x \in [0,1]$.

De fato, temos $f_n(0) = f_n(1) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fixado $x \in (0,1)$ definamos $a = 1 - x^2$. Temos $0 < a < 1$, e $0 < nx(1-x^2)^n = nxa^n < na^n$. Agora, já vimos nas aulas sobre limites de sequências que o Teste da Razão para Sequências implica que a sequência $x_n := na^n$ converge a 0 se $0 < a < 1$ já que

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{(n+1)a^{n+1}}{na^n} = \lim(1 + \frac{1}{n})a = a < 1,$$

o que mostra que $(f_n(x))$ converge a 0 também para $x \in (0,1)$.

Veremos na aula que vem, como consequência de um resultado sobre o limite das integrais de sequências uniformemente convergentes, que a sequência (f_n) não converge uniformemente em $[0,1]$. A verificação direta dessa afirmação seria um tanto complicada.

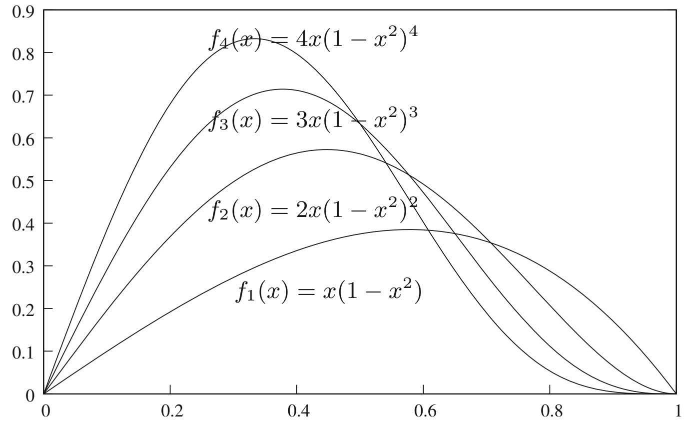


Figura **27.3**: Os 4 primeiros elementos da sequência $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, $x \in [0,1]$.

A Norma Uniforme

É conviente introduzirmos a noção de norma uniforme de funções limitadas para o estudo da convergência uniforme de sequências de funções.

Definição 27.3
Se $A \subset \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ é uma função, dizemos que g é *limitada em* A se a imagem de g, denotada por $g(A)$, é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$. Se g é limitada, definimos a *norma uniforme de* g *em* A por

$$\|g\| := \sup\{|g(x)| \,:\, x \in A\}. \tag{27.1}$$

Note que decorre da definição anterior que se $\varepsilon > 0$, então

$$\|g\| \le \varepsilon \Leftrightarrow |g(x)| \le \varepsilon \qquad \text{para todo } x \in A. \tag{27.2}$$

Lema 27.2
Uma sequência (f_n) de funções em $A \subset \mathbb{R}$ converge uniformemente em A para f se, e somente se, $\|f_n - f\| \to 0$.

Prova: ($\Rightarrow$) Se (f_n) converge uniformemente em A para f, então pela Definição 27.2, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $N_0(\varepsilon)$ tal que se $n > N_0(\varepsilon)$ então

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \text{para todo } x \in A.$$

Em particular, $f_n - f$ é limitada e da definição de supremo segue que $\|f_n - f\| \le \varepsilon$ se $n > N_0(\varepsilon)$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário isso implica que $\|f_n - f\| \to 0$.

($\Leftarrow$) Se $\|f_n - f\| \to 0$, então dado $\varepsilon > 0$ existe um natural $N_0(\varepsilon)$ tal que se $n > N_0(\varepsilon)$ então $\|f_n - f\| < \varepsilon$. Segue da definição da norma uniforme que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $n > N_0(\varepsilon)$ e $x \in A$. Decorre daí que (f_n) converge uniformemente em A para f. □

Fazendo uso da norma uniforme, podemos obter uma condição necessária e suficiente para a convergência uniforme, semelhante à que vimos para sequências de números. No enunciado a seguir, quando nos referirmos à norma uniforme de uma função estará implícita a afirmação de que tal função é limitada.

Teorema 27.1 (Critério de Cauchy para Convergência Uniforme) Seja (f_n) uma sequência de funções de $A \subset \mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$. Então (f_n) converge uniformemente em A para uma função $f : A \to \mathbb{R}$ se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ existe um número $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $m > N_0(\varepsilon)$ e $n > N_0(\varepsilon)$, então $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$.

Prova: $(\Rightarrow)$ Se $f_n \to f$ uniformemente em A, então dado $\varepsilon > 0$ existe um natural $H_0(\frac{1}{2}\varepsilon)$ tal que se $n > H_0(\frac{1}{2}\varepsilon)$ então $\|f_n - f\| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Logo, se $m > H_0(\frac{1}{2}\varepsilon)$ e $n > H_0(\frac{1}{2}\varepsilon)$, então

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le |f_m(x) - f(x) + |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

para todo $x \in A$. Portanto, $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$, para $m, n > H_0(\frac{1}{2}\varepsilon) =: N_0(\varepsilon)$.

$(\Leftarrow)$ Reciprocamente, suponhamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_0(\varepsilon)$ tal que se $m, n > N_0(\varepsilon)$, então $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$. Segue então que para cada $x \in A$ temos

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_m - f_n\| < \varepsilon \qquad \text{para } m, n > N_0(\varepsilon). \tag{27.3}$$

Segue que $(f_n(x))$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Portanto, pelo Critério de Cauchy para Sequências, $(f_n(x))$ é uma sequência convergente. Definimos $f : A \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) := \lim f_n(x) \qquad \text{para } x \in A.$$

Fazendo $n \to \infty$ em (27.3), segue que para todo $x \in A$ temos

$$|f_m(x) - f(x)| \le \varepsilon \qquad \text{para } m > N_0(\varepsilon).$$

Portanto a sequência (f_n) converge uniformemente em A para f. □

Séries de Funções

Assim como no caso das sequências numéricas e sua relação com as séries numéricas, um caso particular de sequências de funções é o das séries de funções, $\sum f_n$, que nada mais são do que sequências de funções (s_N) que se escrevem como somas parcias de uma sequência de funções (f_n), isto é,

$$s_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x).$$

Em vez de usar a notação (s_N), é comum adotar-se a notação $\sum f_n$ para denotar a série cujas somas parciais são $s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$. Frequentemente iniciamos a série a partir de $n = 0$ em vez de $n = 1$, como no caso das séries de potências que veremos mais adiante.

Como as séries de funções são um caso particular de sequências de funções, temos automaticamente definidos os conceitos de convergência pontual e de convergência uniforme de séries de funções.

Nomeadamente, se $A \subset \mathbb{R}$ e $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, dizemos que a série de funções $\sum f_n$ converge pontualmente para $f : A \to \mathbb{R}$ em A se para todo $x \in A$ a sequência das somas parciais $s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ converge (quando $N \to \infty$) para $f(x)$. Nesse caso escrevemos

$$f(x) = \sum f_n(x) \qquad \text{ou} \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad x \in A. \tag{27.4}$$

Similarmente, dizemos que a série $\sum f_n$ converge uniformemente para $f : A \to \mathbb{R}$ em A se a sequência das somas parciais $s_N := \sum_{n=1}^{N} f_n$ converge uniformemente para f em A. Nesse caso escrevemos

$$f = \sum f_n \qquad \text{ou} \qquad f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n. \tag{27.5}$$

As notações em (27.5) às vezes também são usadas no caso da convergência pontual como uma forma simples para (27.4).

Como aplicação do Teorema 27.1, estabelecemos a seguir um resultado muito importante devido a Weierstrass dando uma condição suficiente para a convergência uniforme de séries de funções.

Teorema 27.2 (Teste M de Weierstrass)
Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $f_n : A \to \mathbb{R}$. Suponhamos que existam números $M_n > 0$ tais que $|f_n(x)| \le M_n$ para todo $x \in A$, e que $\sum M_n$ converge. Então a série de funções $\sum f_n$ converge uniformemente em A.

Prova: Dado $\varepsilon > 0$, como $\sum M_n$ converge podemos obter $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $M, N > N_0(\varepsilon)$, então

$$\sum_{n=M+1}^{N} M_n < \varepsilon. \qquad \text{(por quê?)}$$

Logo, temos

$$\left|\sum_{n=M+1}^{N} f_n(x)\right| \le \sum_{n=M+1}^{N} |f_n(x)| \le \sum_{n=M+1}^{N} M_n < \varepsilon,$$

para todo $x \in A$. Tomando o supremo em $x \in A$, obtemos

$$\|s_N - s_M\| \le \varepsilon,$$

para $M, N > N_0(\varepsilon)$. Portanto, pelo Teorema 27.1, a série $\sum f_n$ converge uniformemente. □

Séries de potências

Entre as séries de funções ocupam lugar de destaque as séries de potências, isto é, séries da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. De fato, as funções mais importantes da Análise, como a exponencial, o logarítmo e as funções trigonométricas, podem ser expressas como séries de potências. Para simplificar, vamos estudar séries de potências com $x_0 = 0$; o caso geral se reduz a este através da mudança de variável $y = x - x_0$.

Com relação à convergência de uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, a primeira coisa a observar é que uma tal série sempre converge para $x = 0$, com limite obviamente igual a a_0.

Por outro lado, se a sequência $(\sqrt[n]{|a_n|})$ não é limitada, então a sequência $(|a_n x^n|) = ((\sqrt[n]{|a_n|}|x|)^n)$ também não é limitada para $x \neq 0$, o que implica que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ não converge para $x \neq 0$, pois seu termo geral $x_n := a_n x^n$ não satisfaz $|x_n| \to 0$. Concluímos assim que séries de potências para as quais a sequência $(\sqrt[n]{|a_n|})$ é ilimitada só convergem em $x = 0$, divergindo para todo $x \neq 0$. Este é o caso da série $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$.

Consideremos agora o caso em que a sequência $(\sqrt[n]{|a_n|})$ é limitada. Portanto, existe $M > 0$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \le M$. Seja $0 < \lambda \le M$ tal que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ para o qual $\sqrt[n]{|a_n|} < \lambda$ para todo $n \ge N_0$. Então o termo geral da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x_n = a_n x^n$, satisfaz $\sqrt[n]{|x_n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|x| < \lambda|x|$ para todo $n \ge N_0$. Portanto, se x é tal que $\lambda|x| < 1$, temos $\sqrt[n]{|x_n|} < \lambda|x| < 1$ e pelo Teste da Raiz (Teorema 11.4) podemos concluir que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para $|x| < 1/\lambda$. Seja

$$L := \inf\{\lambda > 0 \,:\, \text{existe } N_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \sqrt[n]{|a_n|} < \lambda \text{ para } n \ge N_0\}. \quad (27.6)$$

Chamamos o número $r = 1/L$ o *raio de convergência da série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Exemplos 27.2

(a) A série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ tem raio de convergência igual a 1 já que $a_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Já sabemos que tal série converge se $|x| < 1$ e diverge se $|x| \geq 1$.

(b) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ tem raio de convergência igual a 1. Ela converge para $x \in [-1, 1)$ e diverge se $x \notin [-1, 1)$.

De fato, temos $\lim \sqrt[n]{(1/n)} = 1/(\lim \sqrt[n]{n}) = 1$ (v. Exemplo 6.1(i)). Logo, para todo $\lambda > 1$, tomando $\varepsilon = \lambda - 1$ na definição de $\lim \sqrt[n]{(1/n)} = 1$, vemos que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < \lambda$ para todo $n \geq N_0$. Por outro lado, para todo $\lambda < 1$, tomando $\varepsilon = 1 - \lambda$ na definição de $\lim \sqrt[n]{(1/n)} = 1$, concluímos que existe N_0 tal que $\sqrt[n]{|a_n|} > \lambda$ para todo $n \geq N_0$. Segue então da definição de ínfimo que $L = 1$ (por quê?) para a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ e, portanto, $r = 1$.

Vemos facilmente pelo Teste da Raiz que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ converge se $|x| < 1$, pois neste caso

$$\lim \sqrt[n]{|\frac{1}{n} x^n|} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} |x| < 1.$$

Sabemos também que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente (v. Exemplo 10.3(e)) e que a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (v. Exemplo 10.3(a)). Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ converge em -1 e diverge em 1.

Finalmente, pelo Teste da Raiz, temos que se $|x| > 1$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ diverge, já que neste caso, para o termo geral $x_n = \frac{1}{n} x^n$, temos que $|x_n|$ é divergente pois $|x_{n+1}|/|x_n| = \dfrac{n}{n+1} |x| \to |x| > 1$ e pelo Teorema 7.7 isto implica que $|x_n|$ é divergente. Em particular, $|x_n|$ não converge a zero, como deve acontecer para séries convergentes.

Resumimos as propriedades do raio de convergência no seguinte teorema.

Teorema 27.3

Se a sequência $(\sqrt[n]{|a_n|})$ não é limitada, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ só converge em $x = 0$. Por outro lado, se a sequência $(\sqrt[n]{|a_n|})$ é limitada e L é dado por (27.6), então a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para $|x| < r$, onde $r := 1/L$ é o raio de convergência da série, e diverge para $|x| > r$. Para $x = -r$ e $x = r$ nada se pode afirmar em geral sobre a convergência ou divergência da série. Se a sequência $(\sqrt[n]{|a_n|})$ é convergente então $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$.

Prova: A prova da afirmação sobre a convergência apenas em $x = 0$ no caso em que $(\sqrt[n]{|a_n|})$ não é limitada já foi feita no início desta seção. Do mesmo modo, o fato de que a série converge para $|x| < r$ e diverge para $|x| > r$ se $(\sqrt[n]{|a_n|})$ é limitada, segue do Teste da Raiz, como foi visto no início desta discussão sobre séries de potências, cujo argumento recordamos a seguir.

De fato, se $|x| < r$, então para λ satisfazendo $L = \frac{1}{r} < \lambda < \frac{1}{|x|}$ temos que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|x| < \lambda|x| < (1/|x|)|x| = 1$ para todo $n \geq N_0$, pela definição de ínfimo (por quê?). Logo, $\sum a_n x^n$ é absolutamente convergente para $|x| < r$ pelo Teste da Raiz.

Por outro lado, se $|x| > r$, então para λ' satisfazendo $\frac{1}{|x|} < \lambda' < 1/r = L$, existe uma subsequência n_k satisfazendo $\sqrt[n_k]{|a_{n_k} x^{n_k}|} = \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}|x| > \lambda'|x| > (1/|x|)|x| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de novo pela definição de ínfimo (por quê?). Logo, o Teste da Raiz implica que $\sum a_n x^n$ é divergente se $|x| > r$.

Finalmente, se $(\sqrt[n]{|a_n|})$ é convergente então para qualquer $\lambda > \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < \lambda$ para $n \geq N_0$, como se deduz facilmente tomando $\varepsilon = \lambda - \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ na definição de $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$. Portanto, todo $\lambda > \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ pertence ao conjunto no membro à direita em (27.6). Por outro lado, se $\lambda' < \lim \sqrt[n]{|a_n|}$, tomando $\varepsilon = \lim \sqrt[n]{|a_n|} - \lambda'$ na definição de $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$, deduzimos facilmente que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda' < \sqrt[n]{|a_n|}$ para todo $n \geq N_0$ e, portanto, λ' é uma cota inferior do conjunto no membro à direita em (27.6). Logo $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$. □

Como consequência do Teste M de Weierstrass temos o seguinte importante fato sobre séries de potências.

Teorema 27.4
A série de potências $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em todo intervalo fechado $[-s, s]$ se $0 < s < r$, onde r é o raio de convergência da série.

Prova: A série $\sum a_n x^n$ é absolutamente convergente para todo $x \in (-r, r)$. Em particular, a série $\sum |a_n| s^n$ é convergente. Como, para $x \in [-s, s]$ temos $|a_n x^n| \leq |a_n| s^n$, segue do Teorema 27.2 que a série $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em $[-s, s]$. □

Exercícios 27.1

1. Mostre que $\lim x/(x + n) = 0$ para todo $x \geq 0$. Mostre que para todo $a > 0$ a convergência é uniforme no intervalo $[0, a]$, mas não é uniforme no intervalo $[0, \infty)$.

2. Mostre que $\lim nx/(1 + n^2x^2) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que para

todo $a > 0$ a convergência é uniforme no intervalo $[a, \infty)$, mas não é uniforme no intervalo $[0, \infty)$.

3. Mostre que a sequência de funções $f_n(x) := nx/(1 + nx)$ converge pontualmente em $[0, \infty)$. Mostre que para todo $a > 0$ a convergência é uniforme no intervalo $[a, \infty)$, mas não é uniforme no intervalo $[0, \infty)$.

4. Mostre que a sequência de funções $f_n(x) := x^n/(1 + x^n)$ converge pontualmente em $[0, \infty)$. Mostre que para todo $0 < a < 1$ e todo $1 < b < \infty$ a convergência é uniforme nos intervalos $[0, a]$ e $[b, \infty)$, mas a convergência não é uniforme em $[0, \infty)$.

5. Mostre que se (f_n) e (g_n) convergem uniformemente em $A \subset \mathbb{R}$ para f e g, respectivamente, então $(f_n + g_n)$ converge uniformemente em A para $f + g$.

6. Mostre que se (f_n) e (g_n) são sequências de funções limitadas em $A \subset \mathbb{R}$ que convergem uniformemente em A para f e g, respectivamente, então $(f_n g_n)$ converge uniformemente em A para fg.

7. Seja (f_n) uma sequência de funções convergindo uniformemente para f em A e que satisfaz $|f_n(x)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in A$. Se g é uma função contínua no intervalo $[-M, M]$, mostre que a sequência $(g \circ f_n)$ converge uniformemente para $g \circ f$ em A.

8. Mostre que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1 - x^n)$ converge pontualmente para $x \in (-1, 1]$. Mostre que para todo $0 < a < 1$ a convergência é uniforme no intervalo $[-a, a]$.

9. Prove que se a série de funções $\sum |f_n(x)|$ converge uniformemente em $A \subset \mathbb{R}$, então $\sum f_n(x)$ também converge uniformemente em A.

10. Se $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$, prove que as séries de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ têm ambas raio de convergência igual a $1/\sqrt{L}$.

11. Determine o raio de convergência de cada uma das séries de potências:

    (a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$;

    (b) $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} x^n$;

    (c) $\sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}} x^n$.

Aula 28 – Câmbio de Limites

Metas da aula: Estabelecer os principais resultados sobre troca de ordem de operações de limite, os quais fornecem condições para a preservação de propriedades como continuidade, integrabilidade e diferenciabilidade na passagem ao limite de uma seqüência de funções.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Conhecer o resultado que garante a continuidade do limite uniforme de uma seqüência de funções contínuas e algumas de suas aplicações.

- Conhecer o resultado que garante a integrabilidade do limite uniforme de uma seqüência de funções integráveis e algumas de suas aplicações.

- Conhecer o resultado que garante a diferenciabilidade do limite de uma seqüência de funções diferenciáveis cujas derivadas convergem uniformemente e algumas de suas aplicações.

Introdução

Como foi dito na aula anterior, a questão central sobre limites de seqüências de funções é aquela sobre a preservação na passagem ao limite de certas propriedades verificadas pelos membros das seqüências. Nesta aula estabeleceremos resultados que tratam dessa questão em relação às propriedades de continuidade, integrabilidade e diferenciabilidade. Todas essas propriedades são definidas a partir de operações de passagem ao limite. Assim, a questão da sua preservação no limite de uma seqüência de funções se reduz ao problema de sabermos em que circunstâncias podemos trocar a ordem das operações de limites referentes à seqüência de funções e à propriedade particular verificada por cada membro da seqüência. Por exemplo, se (f_n) é uma seqüência de funções contínuas, num intervalo I, que converge a uma função f em I, a questão de saber se f é contínua em I se reduz ao problema de saber se

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\bar{x}} f_n(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to\bar{x}}\lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Passemos ao estudo dessa questão.

Preservação da Continuidade

O seguinte resultado estabelece a possibilidade de executarmos um *câmbio de limites* entre o limite no índice dos membros de uma seqüência de funções definidas num conjunto A e o limite de cada um dos membros quando x tende a um ponto de acumulação $\bar{x}$ de A.

Teorema 28.1
Suponhamos que $f_n \to f$ uniformemente num conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Seja $\bar{x}$ um ponto de acumulação de A, e suponhamos que

$$\lim_{x\to\bar{x}} f_n(x) = L_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{28.1}$$

Então (L_n) converge e

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \lim_{n\to\infty} L_n. \tag{28.2}$$

A equação (28.2) pode ser escrita na forma

$$\lim_{x\to\bar{x}} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\bar{x}} f_n(x). \tag{28.3}$$

Prova: Seja $\varepsilon > 0$ dado. Pelo Critério de Cauchy 27.1 para convergência uniforme aplicado à seqüência (f_n), existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_0$, $m \geq N_0$, então

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad \text{para todo } x \in A. \tag{28.4}$$

Fazendo $x \to \bar{x}$ em (28.4), obtemos

$$|L_n - L_m| \leq \varepsilon \qquad \text{para } n \geq N_0,\ m \geq N_0,$$

de modo que (L_n) é uma seqüência de Cauchy e portanto converge, digamos para L.

Agora,

$$|f(x) - L| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n| + |L_n - L|. \tag{28.5}$$

Primeiro escolhemos n tal que

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{para todo } x \in A, \tag{28.6}$$

o que é possível pela convergência uniforme de (f_n), e tal que

$$|L_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{28.7}$$

Então, para esse n, escolhemos uma vizinhança de $\bar{x}$, $V = V_\delta(\bar{x})$, tal que

$$|f_n(x) - L_n| \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{se } x \in V \cap A,\ x \neq \bar{x}. \tag{28.8}$$

Substituindo as desigualdades (28.6), (28.7) e (28.8) em (28.5), obtemos que

$$|f(x) - L| \leq \varepsilon \qquad \text{se } x \in V \cap A,\ x \neq \bar{x},$$

o que é equivalente a (28.2). $\square$

Segue imediatamente do Teorema 28.1 o seguinte resultado cuja verificação deixamos para você como exercício.

Teorema 28.2
Se (f_n) é uma sequência de funções contínuas em $A \subset \mathbb{R}$ e se $f_n \to f$ uniformemente em A, então f é contínua em A.

Preservação da Integrabilidade

No Exemplo 27.1(e) vimos que a sequência (f_n), com $f_n(x) := nx(1 - x^2)^n$, $x \in [0,1]$, converge pontualmente para a função identicamente nula, $f(x) := 0$, $x \in [0,1]$. Se $g_n(x) := -\frac{1}{2}(1-x^2)^{n+1}$, $x \in [0,1]$, então $f_n(x) = \frac{n}{n+1}g_n'(x)$. Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{n}{n+1}\int_0^1 g_n'(x)\,dx = \frac{n}{n+1}(g_n(1) - g_n(0)) = \frac{n}{n+1}(\frac{1}{2}) \to \frac{1}{2}.$$

Portanto, neste caso temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

O resultado seguinte implica, em particular, que a sequência (f_n) que acabamos de considerar não converge uniformemente em $[0,1]$, pois se a convergência fosse uniforme seria possível o *câmbio* entre $\lim\limits_{n\to\infty}$ e $\int_0^1$ como atesta o seguinte teorema.

Teorema 28.3
Seja (f_n) uma sequência de funções em $\mathcal{R}[a,b]$ e suponhamos que (f_n) converge *uniformemente* em $[a,b]$ para f. Então $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e vale

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n. \tag{28.9}$$

Prova: Segue do Teorema 27.1 que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tal que se $n \geq N_0$, $m \geq N_0$, então

$$-\varepsilon \leq f_n(x) - f_m(x) \leq \varepsilon \qquad \text{para } x \in [a,b].$$

Daí, pelo Teorema 24.3, segue que

$$-\varepsilon(b-a) \leq \int_a^b f_n - \int_a^b f_m \leq \varepsilon(b-a).$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, a sequência numérica $(\int_a^b f_n)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e portanto converge para algum número, digamos $L \in \mathbb{R}$.

Mostremos agora que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f = L$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, seja $N_0(\varepsilon)$ tal que se $n > N_0(\varepsilon)$, então $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [a,b]$. Se $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^N$ é uma partição aferida de $[a,b]$ e $n > N_0(\varepsilon)$, então

$$\begin{aligned}
|S(f_n;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{P}})| &= \left|\sum_{i=1}^N (f_n(t_i) - f(t_i))(x_i - x_{i-1})\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^N |f_n(t_i) - f(t_i)|(x_i - x_{i-1}) \\
&\sum_{i=1}^N \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a).
\end{aligned}$$

Agora escolhemos $p \geq N_0(\varepsilon)$ tal que $|\int_a^b f_p - L| < \varepsilon$ e seja $\delta = \delta(\varepsilon, p)$ tal que

$$|\int_a^b f_p - S(f_p;\dot{\mathcal{P}})| < \varepsilon \qquad \text{sempre que } \|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta.$$

Então temos

$$\begin{aligned}
|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| &\leq |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f_p;\dot{\mathcal{P}})| + |S(f_p;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f_p| + |\int_a^b f_p - L| \\
&\leq \varepsilon(b-a) + \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(b-a+2).
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue então que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f = L$, como desejado. □

Preservação da Diferenciabilidade

Mencionamos em aula passada que Weierstrass mostrou que a função definida pela série

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\cos(3^k x)$$

é contínua em todo ponto mas não é diferenciável em nenhum ponto de $\mathbb{R}$ (veja Figura **28.1**). Considerando-se as somas parciais dessa série, obtemos uma sequência de funções (s_N) diferenciáveis em todo ponto, a qual converge uniformemente pelo Teste M de Weierstrass 27.2. Assim, apesar da sequência de funções diferenciáveis (s_N) convergir uniformemente, a função limite $f(x)$ não é diferenciável em nenhum ponto. Isso mostra que a convergência uniforme de funções diferenciáveis não implica a diferenciabilidade da função limite.

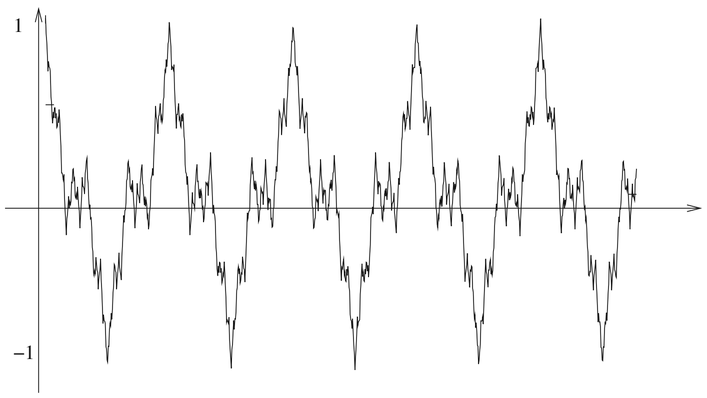


Figura **28.1**: A função de Weierstrass.

Mostramos a seguir que se a sequência (f_n) converge num intervalo limitado I e a *sequência das derivadas* (f_n') é uniformemente convergente em I então a função limite de (f_n) é diferenciável em todo ponto de I. Na verdade, como veremos, a convergência uniforme de (f_n) decorre da convergência uniforme de (f_n') e da convergência de $(f_n(x_0))$ para algum $x_0 \in I$.

Teorema 28.4
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado e seja (f_n) uma sequência de funções diferenciáveis em I com valores em $\mathbb{R}$. Suponhamos que existe $x_0 \in I$ tal que $(f_n(x_0))$ converge, e que a sequência (f_n') das derivadas converge uniformemente em I para uma função g. Então a sequência (f_n) converge uniformemente em I para uma função f que possui derivada em todo ponto de I e $f' = g$.

Prova: Sejam $a < b$ os pontos extremos de I e seja $x \in I$ um ponto arbitrário. Se $m, n \in \mathbb{N}$, aplicamos o Teorema do Valor Médio 22.4 à diferença $f_m - f_n$ no intervalo de extremos x_0 e x. Concluímos que existe um ponto y (dependendo de m, n) tal que

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(x_0) - f_n(x_0) + (x - x_0)(f_m'(y) - f_n'(y)).$$

Portanto temos

$$\|f_m - f_n\| \leq |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + (b-a)\|f'_m - f'_n\|. \tag{28.10}$$

Segue de (28.10) e da hipótese de que $(f_n(x_0))$ é convergente, aplicando o Teorema 27.1, que (f_n) é uniformemente convergente em I. Seja f o limite da sequência (f_n). Como todas as f_n são contínuas em I e a convergência é uniforme, segue do Teorema 28.2 que f é contínua em I.

Para estabelecer a existência da derivada de f num ponto $c \in I$, aplicamos o Teorema do Valor Médio 22.4 a $f_m - f_n$ num intervalo com pontos extremos c e x. Concluímos que existe um ponto z (dependendo de m, n) tal que

$$(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(c) - f_n(c)) = (x-c)(f'_m(z) - f'_n(z)).$$

Portanto, se $x \neq c$, temos

$$\left|\frac{f_m(x) - f_m(c)}{x-c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c}\right| \leq \|f'_m - f'_n\|.$$

Como (f'_n) converge uniformemente em I, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_1 = N_1(\varepsilon)$ tal que se $m, n \geq N_1$ e $x \neq c$, então

$$\left|\frac{f_m(x) - f_m(c)}{x-c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c}\right| \leq \varepsilon. \tag{28.11}$$

Tomando o limite quando $m \to \infty$ em (28.11), obtemos

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x-c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x-c}\right| \leq \varepsilon, \tag{28.12}$$

se $x \neq c$ e $n \geq N_1$. Como $g(c) = \lim f'_n(c)$, existe $N_2(\varepsilon)$ tal que se $n \geq N_2(\varepsilon)$, então $|f'_n(c) - g(c)| < \varepsilon$. Agora, seja $N = \max\{N_1, N_2\}$. Como $f'_N(c)$ existe, podemos encontrar $\delta_N(\varepsilon)$ tal que se $0 < |x-c| < \delta_N(\varepsilon)$, então

$$\left|\frac{f_N(x) - f_N(c)}{x-c} - f'_N(c)\right| < \varepsilon. \tag{28.13}$$

Combinando (28.12) com $n = N$ e (28.13), concluímos que se $0 < |x-c| < \delta_N(\varepsilon)$, então

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x-c} - g(c)\right| < 3\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, isso mostra que $f'(c)$ existe e é igual a $g(c)$. Como $c \in I$ é arbitrário, concluímos que $f' = g$ em I. □

Aplicação às Séries de Potências

Vimos na aula passada que o estudo das séries de funções $\sum f_n$ se reduz ao estudo das sequências de funções considerando-se a sequência das somas parcias $(s_N)_{N=1}^{\infty}$, $s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$. Vimos também que as séries de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ocupam lugar destacado entre as séries de funções e que no caso das séries de potências é usual adotarmos como índice inicial $n = 0$, além de não haver perda de generalidade em cosiderarmos apenas o caso $x_0 = 0$. A seguir vamos aplicar às séries de potências os resultados sobre preservação de continuidade, integrabilidade e diferenciabilidade que acabamos de estabelecer.

Teorema 28.5
Se $r > 0$ é o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$, então a função $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, é contínua.

Prova: Pelo Teorema 27.4 temos que para todo $0 < s < r$ a série $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em $[-s, s]$. Assim, pelo Teorema 28.2 segue que f é contínua em $[-s, s]$ para todo $0 < s < r$ e portanto f é contínua em $(-r, r)$ como afirmado. □

Teorema 28.6 (Integração termo a termo)
Se r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$ e $[a, b] \subset (-r, r)$, então

$$\int_a^b \left(\sum a_n x^n\right) dx = \sum \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}). \tag{28.14}$$

Prova: Pelo Teorema 27.4 com $s = \max\{|a|, |b|\} < r$, temos que a convergência de $\sum a_n x^n$ é uniforme no intervalo $[a, b]$. Logo, como a integral da série é a integral do limite quando $N \to \infty$ das somas parciais $s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$, pelo Teorema 28.3 segue que a mesma coincide com o limite quando $N \to \infty$ da integral das somas parciais, $\int_a^b s_N$. Estas últimas por sua vez coincidem com as somas parciais da série à direita em (28.14) donde concluímos que vale a equação (28.14). □

Teorema 28.7 (Derivação termo a termo)
Se o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é $r > 0$, então o raio de convergência da série de potências obtida derivando-se termo a termo, $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$, também é igual a r. Além disso, se $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, então f é diferenciável em $(-r, r)$ e a derivada $f' : (-r, r) \to \mathbb{R}$ é dada por $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$.

Prova: Para qualquer $x \neq 0$, a série $S_1 := \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$ converge se e somente se a série $S_2 := \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^n$ converge, já que $S_2 = xS_1$. Portanto, o raio de convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$ coincide com o raio de convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^n$, o qual denotaremos por r'. Lembremos que dizer que certa propriedade vale ultimadamente para os membros de uma dada sequência (x_n) significa que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que a propriedade vale para x_n com $n \geq N_0$. Seja

$$L := \inf\{\lambda > 0 \,:\, \text{existe } N_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \sqrt[n]{|a_n|} < \lambda \text{ para } n \geq N_0\}$$

e

$$L' := \inf\{\lambda > 0 \,:\, \text{existe } M_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|a_n|} < \lambda \text{ para } n \geq M_0\}.$$

Pelo que foi visto na aula passada temos que $r = 1/L$ e $r' = 1/L'$.

Consideremos os conjuntos

$$A := \{\lambda > 0 \,:\, \text{existe } N_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \sqrt[n]{|a_n|} < \lambda \text{ para } n \geq N_0\}$$

e

$$A' := \{\lambda > 0 \,:\, \text{existe } M_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|a_n|} < \lambda \text{ para } n \geq M_0\},$$

de modo que $L = \inf A$ e $L' = \inf A'$. Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, segue que $\lambda \in A$ se, e somente se, $\lambda \in A'$ (por quê?), e portanto $A \equiv A'$. Logo, $L = L'$ e então concluímos que $r' = r$, ou seja, as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$ têm o mesmo raio de convergência r.

Agora, para todo $x \in (-r, r)$ temos que $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é o limite da sequência de somas parciais $(s_N(x))_{N=1}^{\infty}$, com $s_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$, enquanto $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$ é o limite da sequência de somas parciais $(s_N'(x))_{N=1}^{\infty}$, onde $s_N'(x)$ é a derivada de $s_N(x)$. Como a sequência de funções (s_N') converge uniformemente em $[-s, s]$ para todo $0 < s < r$, segue do Teorema 28.4 que g é a derivada de f, isto é, $g(x) = f'(x)$ para $x \in (-r, r)$, o que equivale a dizer que $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$. □

Exercícios 28.1

1. Suponhamos que (f_n) é uma sequência de funções contínuas num intervalo I que converge uniformemente em I a uma função f. Se $(x_n) \subset I$ converge a $x_0 \in I$, mostre que $\lim f_n(x_n) = f(x_0)$.

2. Mostre que a sequência $(x^n/(1 + x^n))$ não converge uniformemente em $[0, 2]$ usando o fato de que a função que é o limite pontual da sequência em $[0, 2]$ não é contínua em $[0, 2]$.

3. Determine o limite pontual em $[0,1]$ da sequência (f_n), com $f_n(x) := 1/(1+x)^n$, e diga se a convergência é uniforme ou não.

4. Seja $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g_n(x) := nx(1-x)^n$. Mostre que para todo $x \in [0,1]$ a sequência $(g_n(x))$ converge, que a convergência de (g_n) não é uniforme em $[0,1]$, mas que ainda assim vale
$$\int_0^1 (\lim g_n) = \lim \int_0^1 g_n.$$

5. Seja $\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$ uma enumeração para os números racionais em $I := [0,1]$, e seja $f_n : I \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = 1$, se $x \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, e $f_n(x) = 0$, se $x \in I \setminus \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$. Mostre que f_n é integrável à Riemann para cada $n \in \mathbb{N}$, que $f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) \le \cdots$ e que $f(x) := \lim f_n(x)$ é a função de Dirichlet ($f(x) := 1, x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $f(x) := 0$, $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$) que não é integrável à Riemann.

6. Seja $f_n(x) := x^n/n$ para $x \in [0,1]$. Mostre que a sequência (f_n) de funções diferenciáveis converge uniformemente para uma função diferenciável f em $[0,1]$, e a sequência das derivadas (f_n') converge pontualmente em $[0,1]$ para uma função g, mas que $g(1) \neq f'(1)$.

7. Seja $g_n(x) := e^{-nx}/n$ para $x \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $(g_n(x))$ e $(g_n'(x))$ convergem para todo $x \ge 0$. Sejam $g(x) := \lim g_n(x)$ e $h(x) := \lim g_n'(x)$, para $x \ge 0$. Determine, caso exista, $x_0 \ge 0$ tal que $h(x_0) \neq g'(x_0)$.

8. Seja $I := [a,b]$ e seja (f_n) uma sequência de funções $f_n : I \to \mathbb{R}$ que converge pontualmente em I para f. Suponhamos que cada derivada f_n' é contínua em I e que a sequência (f_n') é uniformemente convergente a g em I. Prove que $f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\,dt$ e que $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in I$.

9. Mostre que a sequência de funções $g_n(x) := x + \frac{1}{n}x^n$ converge uniformemente no intervalo $[0,1]$ para uma função diferenciável g e a sequência das derivadas g_n' converge pontualmente para em $[0,1]$, mas $g' \neq \lim g_n$.

10. Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. Mostre por indução que, para todo $k \in \mathbb{N}$, a função $f : (-r,r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) := \sum a_n x^n$, possui derivada de ordem k contínua em $(-r,r)$.

Além disso, para quaisquer $x \in (-r, r)$ e $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Em particular, $a_k = f^{(k)}(0)/k!$.

Aula 29 – Funções Exponenciais e Logaritmos

Metas da aula: Definir rigorosamente a função exponencial e^x e a função logaritmo $\log x$ bem como outras funções obtidas a partir destas.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Conhecer a definição formal da função exponencial e^x e a partir dela provar proposições elementares envolvendo esta função.
- Conhecer a definição formal da função logaritmo $\log x$ e saber usá-la na prova de propriedades básicas desta função.
- Saber como são definidas as potências x^α, $x \geq 0$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, e os logaritmos $\log_a x$, $x > 0$, para $a > 0$, $a \neq 1$.

Introdução

Nesta aula vamos definir rigorosamente a função exponencial e^x e a função logaritmo $\log x$, e vamos deduzir algumas de suas propriedades mais importantes. Em aulas anteriores assumimos alguma familiaridade com essas funções com o propósito de discutir exemplos. Consideramos que este é um momento adequado para darmos uma definição matemática rigorosa para essas funções tão importantes, a fim de estabelecer em bases firmes sua existência e determinar suas propriedades básicas.

A Função Exponencial

Antes de dar a definição da função exponencial vamos provar o seguinte lema.

Lema 29.1
A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, onde adotamos a convenção $0! := 1$, possui raio de convergência $r = +\infty$. Em particular, a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ converge uniformemente em $[-A, A]$ para todo $A > 0$.

Prova: Neste caso temos $a_n := 1/n!$. Vamos provar que $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, o que implica imediatamente que $r = +\infty$. De fato, temos

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1}|/|a_n| < \varepsilon/2$ para todo $n \geq N$. Logo, para $n > N$, temos

$$
\begin{aligned}
0 < \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|a_N|}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{|a_N|}} &= \sqrt[n]{|a_N|}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\cdots\frac{|a_{N+1}|}{|a_N|}} \\
&\leq \sqrt[n]{|a_N|}(\frac{\varepsilon}{2})^{(n-N)/n}.
\end{aligned}
$$

Como $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_N|} = 1$ e $\lim_{n\to\infty}(\frac{\varepsilon}{2})^{(n-N)/n} = \frac{\varepsilon}{2}$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$, então

$$\sqrt[n]{|a_N|}(\frac{\varepsilon}{2})^{(n-N)/n} < \varepsilon,$$

o que prova que $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Segue daí que $r = +\infty$.

O fato de que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ converge uniformemente em $[-A, A]$ para todo $A > 0$ segue diretamente do Teorema 27.4. □

Com base no Lema 29.1 definimos a função $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Teorema 29.1
A função $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, satisfaz:

(e1) $E'(x) = E(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(e2) $E(0) = 1$.

Além disso, se $\tilde{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também satisfaz (i) e (ii), então $\tilde{E}(x) = E(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em outras palavras, $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a única função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ satisfazendo (e1) e (e2).

Prova: Pelo Teorema 28.7, E é diferenciável em todo $x \in \mathbb{R}$ e $E'(x)$ é dada pela série das derivadas dos termos da série que define $E(x)$. Como $(x^n/n!)' = x^{n-1}/(n-1)!$ se $n \geq 1$, obtemos $E'(x) = E(x)$, o que prova (e1). A afirmação (e2) decorre trivialmente da definição de $E(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Provemos agora a unicidade da função E satisfazendo (e1) e (e2). Observemos inicialmente que qualquer função $\tilde{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo (e1) possui derivada de ordem n para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\tilde{E}^{(n)}(x) = \tilde{E}(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, o que pode ser facilmente provado por Indução Matemática (como?).

Suponhamos então que E_1 e E_2 são duas funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ satisfazendo as propriedades (e1) e (e2), e seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) := E_1(x) - E_2(x)$. Temos

$$F'(x) = E_1'(x) - E_2'(x) = E_1(x) - E_2(x) = F(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e

$$F(0) = E_1(0) - E_2(0) = 1 - 1 = 0.$$

Também podemos facilmente provar por indução que F tem derivadas de todas as ordens e $F^{(n)}(x) = F(x)$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$.

Seja $x \in \mathbb{R}$ qualquer e denotemos por I_x o intervalo fechado de extremos 0 e x. Como F é contínua em I_x, existe $K > 0$ tal que $|F(t)| \leq K$ para todo $t \in I_x$. Se aplicarmos o Teorema de Taylor a F no intervalo I_x e usarmos o fato de que $F^{(k)}(0) = F(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um ponto $c_n \in I_x$ tal que

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + \frac{F'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{F^{(n)}(c_n)}{n!}x^n \\ &= \frac{F(c_n)}{n!}x^n. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$|F(x)| \leq \frac{K|x|^n}{n!} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $\lim(|x|^n/n!) = 0$ (por quê?) deduzimos que $F(x) = 0$. Como $x \in \mathbb{R}$ foi tomado arbitrariamente, concluímos que $E_1(x) - E_2(x) = F(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. □

A função $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada *função exponencial* e é usualmente apresentada com as notações

$$\exp(x) := E(x) \quad \text{ou} \quad e^x := E(x) \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

O número $e := E(1)$ é chamado o *número de Euler*. O nome função exponencial e a notação e^x para $E(x)$ se justificam pelo teorema a seguir.

Teorema 29.2
A função exponencial satisfaz as seguintes propriedades:

(e3) $E(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

(e4) $E(x+y) = E(x)E(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$;

(e5) $E(r) = e^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Prova: (e3) Vamos fazer a prova por contradição. Seja $z \in \mathbb{R}$ tal que $E(z) = 0$, e seja I_z o intervalo fechado com extremos 0 e z. Pela continuidade de E, existe $K > 0$ tal que $|E(t)| \leq K$ para todo $t \in I_z$. O Teorema de Taylor implica que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um ponto $c_n \in I_z$ tal que

$$\begin{aligned} 1 = E(0) &= E(z) + \frac{E'(z)}{1!}(-z) + \cdots + \frac{E^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}(-z)^{(n-1)} + \frac{E^{(n)}(c_n)}{n!}(-z)^n \\ &= \frac{E^{(n)}(c_n)}{n!}(-z)^n. \end{aligned}$$

Assim temos $0 < 1 \leq (K/n!)|z|^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que nos dá uma contradição já que $\lim (K/n!)|z|^n = 0$ quando $n \to \infty$.

(e4) Fixemos $y \in \mathbb{R}$. Por (e3) temos que $E(y) \neq 0$. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) := \frac{E(x+y)}{E(y)} \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Claramente temos $F'(x) = E'(x+y)/E(y) = E(x+y)/E(y) = F(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, $F(0) = E(0+y)/E(y) = 1$. Segue então da unicidade da função E (v. Teorema 29.1) que $F(x) = E(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $E(x+y) = E(x)E(y)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $y \in \mathbb{R}$ é arbitrário concluímos que vale (e4).

(e5) Do ítem (e4), por Indução, segue que se $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, então

$$E(mx) = E(x)^m.$$

Em particular, fazendo $x = 1$ obtemos $E(m) = E(1)^m = e^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por outro lado, $1 = E(0) = E(m + (-m)) = E(m)E(-m)$, donde segue que $E(-m) = 1/E(m) = 1/e^m = e^{-m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$e = E(1) = E(n\frac{1}{n}) = (E(\frac{1}{n}))^n,$$

donde obtemos que $E(1/n) = e^{1/n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, se $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, temos

$$E(m/n) = (E(1/n))^m = (e^{1/n})^m = e^{m/n},$$

o que prova (e5). □

Teorema 29.3

A função exponencial E é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e tem imagem igual a $\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$. Além disso, temos (e6) $\lim_{x\to-\infty} E(x) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} E(x) = \infty$.

Prova: Sabemos que $E(0) = 1 > 0$ e $E(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como E é contínua em $\mathbb{R}$, segue do Teorema do Valor Intermediário 16.3 que $E(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $E'(x) = E(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R}$, de modo que E é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

Agora, da definição de E vemos claramente que $E(x) > 1 + x$ se $x > 0$ e, portanto, $e = E(1) > 1 + 1 = 2$. Logo, $E(n) = e^n > 2^n$ para $n \in \mathbb{N}$, donde segue que $E(n) \to \infty$ quando $n \to \infty$ (por quê?). Como E é crescente segue que

$$\lim_{x\to\infty} E(x) \overset{\text{(por quê?)}}{=} \lim_{n\to\infty} E(n) = \infty.$$

Do mesmo modo, como $0 < E(-n) = 1/E(n) < 1/2^n \to 0$ quando $n \to \infty$, segue que

$$\lim_{x\to-\infty} E(x) = \lim_{n\to\infty} E(-n) = 0.$$

Segue então do Teorema do Valor Intermediário 16.3 que todo $y > 0$ pertence a imagem de E, o que conclui a prova. $\square$

A Função Logaritmo

Vimos que a função exponencial E é uma função estritamente crescente diferenciável com domínio $\mathbb{R}$ e imagem $\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$. Segue então que E possui uma função inversa $L : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. A função $L : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, inversa de E, é chamada *logaritmo* (ou *logaritmo natural*) e é usualmente denotada por log ou ln (veja Figura **29.1**).

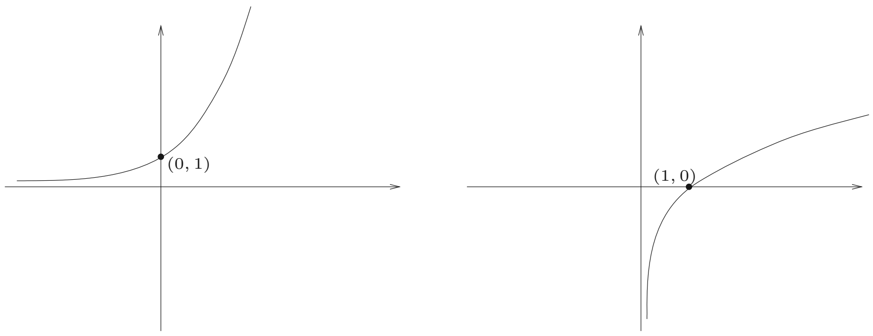


Figura **29.1**: À esquerda, o gráfico da função E. À direita, o gráfico da função L.

Como E e L são funções inversas uma da outra, temos

$$L(E(x)) = x \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

e

$$E(L(y)) = y \qquad \text{para todo } y > 0.$$

Essas fórmulas também podem ser escritas na forma

$$\log e^x = x, \qquad e^{\log y} = y.$$

Teorema 29.4
A função logaritmo $L : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ é estritamente crescente, possui imagem igual a $\mathbb{R}$ e satisfaz as seguintes propriedades:

(ln1) $L'(x) = 1/x$ para $x > 0$.

(ln2) $L(xy) = L(x) + L(y)$ para $x > 0$, $y > 0$.

(ln3) $L(1) = 0$ e $L(e) = 1$.

(ln4) $L(x^r) = rL(x)$ para $x > 0$, $r \in \mathbb{Q}$.

(ln5) $\lim_{x\to 0+} L(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to\infty} L(x) = \infty$.

Prova: Que L é estritamente crescente em $(0,\infty)$ com imagem igual a $\mathbb{R}$ segue do fato de que E é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ com imagem igual a $\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$.

(ln1) Como $E'(x) = E(x) > 0$, segue da Fórmula da Derivação da Função Inversa 21.2 que L é diferenciável em $(0,\infty)$ e

$$L'(x) = \frac{1}{E'(L(x))} = \frac{1}{E(L(x))} = \frac{1}{x} \qquad \text{para } x \in (0,\infty).$$

(ln2) Se $x > 0$ e $y > 0$, sejam $u := L(x)$ e $v := L(y)$. Então temos $x = E(u)$ e $y = E(v)$. Segue da propriedade (e4) do Teorema 29.2 que

$$xy = E(u)E(v) = E(u+v),$$

de modo que $L(xy) = L(E(u+v)) = u+v = L(x)+L(y)$, o que prova (ln2).

(ln3) A propriedade (ln3) segue imediatamente das relações $E(0) = 1$ e $E(1) = e$.

(ln4) Esse fato decorre de (ln2) e Indução Matemática para $r = n \in \mathbb{N}$ e é extendido para $r \in \mathbb{Q}$ por argumentos semelhantes aos usados na prova de 29.2(e5).

(ln5) Para estabelecer (ln5), primeiro observamos que o fato de que $2 < e$ implica $\lim e^n = \infty$ e $\lim e^{-n} = 0$. Como $L(e^n) = n$ e $L(e^{-n}) = -n$, segue do fato de que L é estritamente crescente que

$$\lim_{x\to\infty} L(x) = \lim_{n\to\infty} L(e^n) = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$
$$\text{e} \quad \lim_{x\to 0+} L(x) = \lim_{n\to\infty} L(e^{-n}) = \lim_{n\to\infty} -n = -\infty.$$

□

Funções Potências

Já discutimos em aula passada a função potência $x \mapsto x^r$, $x > 0$, onde r é um número racional. Por meio das funções exponencial e logaritmo podemos estender a noção de função potência para além dos racionais abarcando potências reais arbitrárias.

Definição 29.1
Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$ definimos

$$x^\alpha := e^{\alpha \log x} = E(\alpha L(x)).$$

A função $x \mapsto x^\alpha$ para $x > 0$ é chamada a *função potência* com expoente α.

Observe que a Definição 29.1 é claramente consistente com a definição que havíamos dado na Aula 19 no caso em que α é racional.

Nos dois teoremas enunciados a seguir estabelecemos diversas propriedades bem conhecidas das funções potências. Suas demonstrações seguem imediatamente das propriedades das funções exponencial e logaritmo e serão deixadas para você como exercício.

Teorema 29.5
Se $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$ e $y > 0$, então:

1. $1^\alpha = 1$,
2. $x^\alpha > 0$,
3. $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$,
4. $(x/y)^\alpha = x^\alpha / y^\alpha$.

Teorema 29.6
Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x \in (0, \infty)$, então:

1. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$,

2. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} = (x^\beta)^\alpha$,

3. $x^{-\alpha} = 1/x^\alpha$,

4. se $\alpha < \beta$, então $x^\alpha < x^\beta$ para $x > 1$.

O próximo resultado trata da diferenciabilidade das funções potências.

Teorema 29.7
Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então a função $(\cdot)^\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$, é contínua e diferenciável em $(0, \infty)$, e

$$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \text{para } x \in (0, \infty).$$

Prova: O resultado é consequência da Regra da Cadeia, da qual também temos

$$\begin{aligned} Dx^\alpha &= De^{\alpha \log x} = e^{\alpha \log x} \cdot D(\alpha \log x) \\ &= x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \text{para } x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

□

A Função $\log_a$

Se $a > 0$, $a \neq 1$, algumas vezes é útil termos definida a função $\log_a$.

Definição 29.2
Seja $a > 0$, $a \neq 1$. Definimos

$$\log_a x := \frac{\log x}{\log a} \qquad \text{para } x \in (0, \infty).$$

Para $x \in (0, \infty)$, o número $\log_a x$ é chamado *logaritmo de x na base a*. Observe que $\log_e = \log$ já que $\log e = 1$. O caso $a = 10$ nos dá o logaritmo na base 10 (ou logaritmo comum) que é frequentemente usado em computações.

Exercícios 29.1

1. Mostre que se $0 \leq x \leq a$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \leq e^x \leq 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^a x^n}{n!}.$$

2. Mostre que se $n \geq 2$, então

$$0 < e\, n! - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) n! < \frac{e}{n+1} < 1.$$

Observe que se e fosse um número racional, então $e\, n!$ seria iteiro para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Use este fato e a desigualdade acima para concluir que e não é um número racional.

3. Se $x \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, mostre que

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^{n-1} + \frac{(-x)^n}{1+x}.$$

Use isso para mostrar que

$$\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\, dt$$

e que

$$\left|\log(x+1) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

4. Use o ítem anterior para calcular $\log 1.1$ e $\log 1.4$ com precisão de quatro casas decimais. Quão grande devemos escolher n na desigualdade do ítem anterior para calcular $\log 2$ com precisão de quatro casas decimais?

5. Mostre que $\log(e/2) = 1 - \log 2$ e use esta equação para calcular $\log 2$ com precisão de quatro casas decimais.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = Ke^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

7. Demonstre as afirmações do Teorema 29.5.

8. Demonstre as afirmações do Teorema 29.6.

9. (a) Mostre que se $\alpha > 0$, então a função $x \mapsto x^\alpha$ é estritamente crescente em $(0, \infty)$ e que $\lim_{x\to 0+} x^\alpha = 0$ e $\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$.

   (b) Mostre que se $\alpha < 0$, então a função $x \mapsto x^\alpha$ é estritamente decrescente em $(0, \infty)$ e que $\lim_{x\to 0+} x^\alpha = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} x^\alpha = 0$.

10. Prove que se $a > 0$, $a \neq 1$, então $a^{\log_a x} = x$ para todo $x \in (0, \infty)$ e $\log_a(a^y) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

11. Se $a > 0$, $a \neq 1$, mostre que a função $x \mapsto \log_a x$ é diferenciável em $(0, \infty)$ e que $D \log_a x = 1/(x \log a)$ para $x \in (0, \infty)$.

12. Se $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ e $y > 0$, prove que $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

13. Se $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $b \neq 1$, mostre que

$$\log_a x = \left(\frac{\log b}{\log a}\right) \log_b x \qquad x \in (0, \infty).$$

Em particular, mostre que $\log_{10} x = (\log e / \log 10) \log x = (\log_{10} e) \log x$ para $x \in (0, \infty)$.

Aula 30 – Funções Trigonométricas

Metas da aula: Definir rigorosamente as funções trigonométricas.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Conhecer as definições formais das funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ e a partir delas provar proposições elementares envolvendo esta funções.

Introdução

Além das funções exponenciais e logarítmicas existe uma outra família muito importante de funções transcendentais conhecidas como as “funções trigonométricas”. Essas são as funções seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante. Em cursos elementares elas são usualmente introduzidas em bases geométricas, ora em termos de triângulos, ora em termos de círculos unitários. Nesta aula vamos definir essas funções de maneira analítica e então estabelecer algumas de suas propriedades básicas. Em particular, várias propriedades das funções trigonométricas que foram usadas em exemplos em aulas anteriores neste curso serão derivadas rigorosamente nesta aula.

Bastará lidarmos com as funções seno e cosseno já que as outras quatro funções trigonométricas são definidas em termos dessas duas.

As Funções Seno e Cosseno

Começamos nosso estudo das funções seno e cosseno com o seguinte resultado.

Lema 30.1
A série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

tem raio de convergência $r = \infty$. Em particular, a série converge uniformemente em todo intervalo da forma $[-A, A]$ com $A > 0$.

Prova: Segue imediatamente do fato de que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} = e^{|x|},$$

aplicando-se o Teste M de Weierstrass. $\square$

Podemos então definir

$$C(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}. \tag{30.1}$$

Como a série que define $C(x)$ tem raio de convergência $r = \infty$, segue do Teorema 28.7 que $C(x)$ é infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}$ e sua derivada de ordem k é dada pela série de potências cujos termos são as derivadas de ordem k dos termos da série que define $C(x)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Em particular, podemos definir

$$S(x) := -C'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots . \tag{30.2}$$

Teorema 30.1

(i) A função $C(x)$ satisfaz $C''(x) = -C(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, $C(0) = 1$ e $C'(0) = 0$ e é a única função satisfazendo tais propriedades.

(ii) A função $S(x)$ satisfaz $S''(x) = -S(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, $S(0) = 0$ e $S'(0) = 1$ e é a única função satisfazendo essas propriedades.

Prova: (i) O fato de que $C(x)$ satisfaz $C''(x) = -C(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, $C(0) = 1$ e $C'(0) = 0$ segue imediatamente da definição de $C(x)$ por derivação da série termo a termo.

Suponhamos que existam duas funções $C_1(x)$ e $C_2(x)$ satisfazendo $C_j''(x) = -C_j(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, $C_j(0) = 1$ e $C_j'(0) = 0$, $j = 1, 2$. Seja $D(x) := C_1(x) - C_2(x)$. Então temos que $D''(x) = -D(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, $D(0) = 0$ e $D'(0) = 0$. Agora, por indução, deduzimos facilmente que $D^{(k)}(0) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$ (por quê?). Temos também que $D^{(2k)}(x) = (-1)^k D(x)$. Seja $x \in \mathbb{R}$ arbitrário e I_x o intervalo fechado de extremos 0 e x. Como D é contínua, existe $K > 0$ tal que $|D(t)| \leq K$ para $t \in I_x$. Portanto, temos $|D^{(2k)}(t)| \leq K$ para todo $t \in I_x$ e todo $k \in \mathbb{N}$. Aplicando o Teorema de Taylor a $D(t)$ em I_x, obtemos que existe $c_n \in I_x$ tal que

$$\begin{aligned} D(x) &= D(0) + \frac{D'(0)}{1!} x + \cdots + \frac{D^{2n-1}(0)}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \frac{D^{(2n)}(c_n)}{(2n)!} x^{2n} \\ &= \frac{D^{(2n)}(c_n)}{(2n)!} x^{2n}. \end{aligned}$$

Segue daí que

$$|D(x)| \leq \frac{K|x|^{2n}}{(2n)!}$$

e, como $\lim_{n\to\infty}(K|x|^{2n})/((2n)!) = \lim_{m\to\infty}(K|x|^m)/(m!) = 0$, deduzimos que $D(x) = 0$. Como $x \in \mathbb{R}$ é arbitrário concluímos que $D(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, donde segue que $C_1(x) = C_2(x)$. Isto prova a unicidade de $C(x)$ com relação as propriedades $C''(x) = -C(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, $C(0) = 1$ e $C'(0) = 0$.

(ii) A prova de (ii) é inteiramente semelhante à prova de (i) e ficará para você como exercício. □

Como conseqüência da definição de $S(x)$ e do resultado anterior temos que vale:

(iii) $S'(x) = C(x)$,

já que $S'(x) = [-C'(x)]' = -C''(x) = C(x)$.

Teorema 30.2
As funções C e S satisfazem a Identidade de Pitágoras:

(iv) $(C(x))^2 + (S(x))^2 = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Prova: Seja $f(x) := (C(x))^2 + (S(x))^2$ para $x \in \mathbb{R}$. Então

$$f'(x) = 2C(x)(-S(x)) + 2S(x)C(x) = 0 \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Segue que $f(x) = f(0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mas $f(0) = 1 + 0 = 1$ e assim concluímos que $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. □

Definição 30.1
As funções $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por (30.1) e (30.2) são chamadas *função cosseno* e *função seno*, respectivamente, e comumente denotadas por

$$\cos x := C(x) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x := S(x) \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

A equação diferencial $f''(x) = -f(x)$, satisfeita por $C(x)$ e $S(x)$, admite na verdade infinitas soluções. Porém todas são obtidas como combinações lineares das funções $C(x)$ e $S(x)$, como estabelecido no resultado a seguir.

Teorema 30.3
Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que

$$f''(x) = -f(x) \qquad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

então existem números reais α, β tais que

$$f(x) = \alpha C(x) + \beta S(x) \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Prova: Seja $g(x) := f(0)C(x) + f'(0)S(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Vê-se facilmente que $g''(x) = -g(x)$ e que $g(0) = f(0)$, e como

$$g'(x) = -f(0)S(x) + f'(0)C(x),$$

segue que $g'(0) = f'(0)$. Portanto, a função $h := f - g$ é tal que $h''(x) = -h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$. Assim, segue como na prova do Teorema 30.1 que $h(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. □

A seguir vamos deduzir algumas das propriedades básicas das funções cosseno e seno.

Teorema 30.4

A função C é par e S é ímpar no sentido que

(v) $C(-x) = C(x)$ e $S(-x) = -S(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

Se $x, y \in \mathbb{R}$, então temos as fórmulas do cosseno e do seno da soma:

(vi) $C(x + y) = C(x)C(y) - S(x)S(y)$, $S(x + y) = S(x)C(y) + C(x)S(y)$.

Prova: (v) Se $f(x) := C(-x)$ para $x \in \mathbb{R}$, então vemos facilmente que $f''(x) = -f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Além disso, $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$. Portanto, pela unicidade garantida pelo Teorema 30.1(i), concluímos que $C(-x) = C(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De modo semelhante, definindo-se $g(x) := -S(-x)$ e aplicando-se a unicidade de $S(x)$ garantida no Teorema 30.1(ii), mostra-se que $S(-x) = -S(x)$.

(vi) Seja $y \in \mathbb{R}$ dado e seja $f(x) := C(x + y)$ para $x \in \mathbb{R}$. Verificamos facilmente que $f''(x) = -f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Portanto, pelo Teorema 30.3, existem números reais α, β tais que

$$f(x) = C(x + y) = \alpha C(x) + \beta S(x)$$

donde obtemos por derivação

$$f'(x) = -S(x + y) = -\alpha S(x) + \beta C(x)$$

para $x \in \mathbb{R}$. Fazendo $x = 0$, obtemos $C(y) = \alpha$ e $-S(y) = \beta$, donde segue $C(x + y) = C(x)C(y) - S(x)S(y)$. A segunda fórmula é provada de forma semelhante. □

A seguir estabelecemos algumas desigualdades que foram usadas em aulas passadas.

Teorema 30.5
Se $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, então temos

(vii) $-x \leq S(x) \leq x$;

(viii) $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq C(x) \leq 1$;

(ix) $x - \frac{1}{6}x^3 \leq S(x) \leq x$;

(x) $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq C(x) \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$.

Prova: O Teorema 30.2 implica que $-1 \leq C(t) \leq 1$ para $t \in \mathbb{R}$. Assim, se $x \geq 0$, então

$$-x \leq \int_0^x C(t)\,dt \leq x,$$

donde obtemos (vii). Integrando (vii) de 0 a x obtemos

$$-\frac{1}{2}x^2 \leq \int_0^x S(t)\,dt \leq \frac{1}{2}x^2,$$

o que nos dá

$$-\frac{1}{2}x^2 \leq -C(x) + 1 \leq \frac{1}{2}x^2.$$

Assim temos que $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq C(x)$, o que implica (viii).

A desigualdade (ix) segue integrando-se (viii), e (x) é obtida integrando-se (ix). □

O número π será definido analiticamente a partir do lema seguinte.

Lema 30.2
Existe $\gamma \in (\sqrt{2}, \sqrt{6 - 2\sqrt{3}})$ satisfazendo $C(\gamma) = 0$ e $C(x) > 0$ para $x \in [0, \gamma)$. O número 2γ é a menor raiz positiva da função S.

Prova: A desigualdade (x) do Teorema 30.5 implica que $C(x) > 0$ se $x \in [0, \sqrt{2})$ e que C tem ao menos uma raiz entre a raiz positiva $\sqrt{2}$ de $x^2 - 2 = 0$ e a menor raiz positiva de $x^4 - 12x^2 + 24 = 0$, que é $\sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$. Chamemos γ a menor dessas raízes. Temos então que $\sqrt{2} \leq \gamma \leq \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$. De fato, a partir de (x) podemos obter por duas integrações sucessivas que

$$C(x) \geq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6, \tag{30.3}$$

donde segue que $\gamma > \sqrt{2}$. Mais ainda, a partir de (30.3), também por duas integrações sucessivas, obtemos

$$C(x) \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8, \tag{30.4}$$

donde podemos concluir que $\gamma < \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$.

Segue da segunda fórmula no Teorema 30.4(vi) com $x = y$ que $S(2x) = 2S(x)C(x)$. Essa relação implica que $S(2\gamma) = 0$, de modo que 2γ é uma raiz positiva de S. A mesma relação implica que se 2δ é a menor raiz positiva de S, então $C(\delta) = 0$. Como γ é a menor raiz positiva de C, devemos ter $\delta = \gamma$. □

Definição 30.2
Denotamos por $\pi := 2\gamma$ a menor raiz positiva de S.

Observação 30.1
A desigualdade $\sqrt{2} < \gamma < \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$ implica que $2.828 < \pi < 3.185$.

Teorema 30.6
As funções C e S são periódicas de período 2π, no sentido que

(xi) $C(x + 2\pi) = C(x)$ e $S(x + 2\pi) = S(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

Além disso temos

(xii) $S(x) = C(\frac{1}{2}\pi - x) = -C(x + \frac{1}{2}\pi)$, $C(x) = S(\frac{1}{2}\pi - x) = S(x + \frac{1}{2}\pi)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Prova: (xi) Como $S(2x) = 2S(x)C(x)$ e $S(\pi) = 0$, então $S(2\pi) = 0$. Além disso, se $x = y$ em (vi) $C(2x) = (C(x))^2 - (S(x))^2$. Portanto, $C(2\pi) = 1$. Logo, (vi) com $y = 2\pi$ nos dá

$$C(x + 2\pi) = C(x)C(2\pi) - S(x)S(2\pi) = C(x),$$

e

$$S(x + 2\pi) = S(x)C(2\pi) + C(x)S(2\pi) = S(x).$$

(xii) Observe que $C(\frac{1}{2}\pi) = 0$, já que $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, e então (iv) implica que $(S(\frac{1}{2}\pi))^2 = 1$. Por outro lado, (ix) implica que $S(1) \geq 1 - \frac{1}{6} > 0$, donde segue que $S(x) > 0$ para $0 < x < \pi$ já que $S(0) = 0$, π é a menor raiz positiva de $S(x)$, e $0 < 1 < \pi$. Logo, $S(\frac{1}{2}\pi) = 1$. Usando as igualdades $C(\frac{1}{2}\pi) = 0$ e $S(\frac{1}{2}\pi) = 1$ juntamente com as fórmulas em (vi), obtemos as relações desejadas. □

Exercícios 30.1

1. Mostre que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ e $|\cos x| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Mostre que a propriedade (vii) do Teorema 30.5 não vale se $x < 0$ mas que temos $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre também que $|\operatorname{sen} x - x| \leq |x|^3/6$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. Mostre que se $x > 0$ então
$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

4. Mostre que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$ tem raio de convergência $r = \infty$. Defina
$$c(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}.$$
Mostre que c tem derivada de ordem k para todo $k \in \mathbb{N}$. Defina $s(x) := c'(x)$. Mostre que
$$s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n-1}.$$
Mostre que $s'(x) := c(x)$. Conclua que:
   (i) c satisfaz $c''(x) = c(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $c(0) = 1$;
   (ii) s satisfaz $s''(x) = s(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $s(0) = 0$.

5. Mostre que as funções c e s do ítem anterior satisfazem $(c(x))^2 - (s(x))^2 = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre ainda que c e é a única função satisfazendo (i) e s é a única função satisfazendo (ii) do ítem anterior.

6. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f''(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, mostre que existem números reais α, β tais que $f(x) = \alpha c(x) + \beta s(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Aplique isso às funções $f_1(x) = e^x$ e $f_2(x) = e^{-x}$ para $x \in \mathbb{R}$. Conclua a partir daí que $c(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ e $s(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ para $x \in \mathbb{R}$.(As funções c e s são chamadas o *cosseno hiperbólico* e o *seno hiperbólico*, respectivamente.)

7. Mostre que as funções c, s nos ítens precedentes são par e ímpar, respectivamente, e que
$$c(x+y) = c(x)c(y) + s(x)s(y), \qquad s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y),$$
para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

8. Mostre que $c(x) \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, que ambas c e s são estritamente crescentes em $(0, \infty)$, e que $\lim_{x\to\infty} c(x) = \lim_{x\to\infty} s(x) = \infty$.

Aula 31 – Topologia na Reta

Metas da aula: Apresentar os conceitos básicos de topologia na reta.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber as propriedades que caracterizam os conjuntos abertos e fechados da reta.

Introdução

As noções de limite e continuidade que foram estudadas em aulas passadas, relacionadas a conjutos de pontos da reta e funções neles definidas, podem ser estendidas para conjuntos abstratos quaisquer. A primeira coisa a fazer para realizar essa extensão é dotar esses conjuntos de uma "topologia". Isso significa distinguir uma família de subconjuntos do conjunto dado, contendo necessariamente o próprio conjunto e o conjunto vazio, a qual será tomada como a família dos "subconjuntos abertos" do conjunto dado. Essa família deverá ter necessariamente as duas seguintes propriedades: (i) a união de qualquer coleção de subconjuntos da família dos abertos deve ser um subconjunto pertencente a essa família; (ii) o mesmo deve valer para a interseção de um número finito de subconjuntos da família dos abertos. A partir daí se pode facilmente definir as noções de limite de uma sequência de pontos, bem como limite e continuidade de funções definidas nesses conjuntos, com valores em $\mathbb{R}$, por exemplo, o que não será feito aqui por estar bem além dos objetivos deste curso.

A Topologia Geral é a área da matemática que estuda a topologia dos conjuntos de pontos. Ela envolve muitas outras noções além do conceito fundamental de conjuntos abertos. É uma área que se situa nos fundamentos da matemática avançada, servindo como instrumento básico para diversos ramos dessa vasta ciência. As ideias básicas dessa teoria foram todas motivadas pelos conceitos da Análise Real e por questões surgidas no estudo dos subconjuntos da reta.

Nesta aula serão estudados os elementos básicos da topologia na reta. Mais especificamente, vamos definir quem são os conjuntos abertos da reta e verificar que os mesmos gozam das propriedades aludidas há pouco. Vamos também estudar algumas propriedades básicas dos complementares dos conjuntos abertos da reta, chamados "conjuntos fechados".

Conjuntos Abertos e Fechados em $\mathbb{R}$

Iniciamos nosso estudo da topologia da reta com a definição de vizinhança de um ponto que damos a seguir.

Definição 31.1
Uma *vizinhança* de um ponto $x \in \mathbb{R}$ é um conjunto V que contém uma ε-vizinhança $V_\varepsilon(x) := (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ de x para algum $\varepsilon > 0$.

Observe que uma vizinhança de x pode ser um conjunto de qualquer forma cotendo x; apenas exigimos que além de x esse conjunto também contenha uma ε-vizinhança de x.

Definição 31.2
Um subconjunto G de $\mathbb{R}$ é *aberto* em $\mathbb{R}$ se para cada $x \in G$ existe uma vizinhança V de x tal que $V \subset G$. Um subconjunto F de $\mathbb{R}$ é *fechado* em $\mathbb{R}$ se o complementar de F, $F^c := \mathbb{R} \setminus F$, é aberto em $\mathbb{R}$.

Da definição que acabamos de dar deduzimos facilmente que G é um aberto em $\mathbb{R}$ se, e somente se, G é uma vizinhança de cada um de seus pontos. Assim, para mostrar que um conjunto $G \subset \mathbb{R}$ é aberto, é suficiente mostrar que cada ponto em G tem uma ε-vizinhança contida em G, para algum $\varepsilon > 0$ que em geral dependerá de x. De fato, G é aberto se, e somente se, para cada $x \in G$, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $(x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x) \subset G$.

Por outro lado, para mostrar que um conjunto F é fechado, é suficiente mostrar que cada ponto $y \notin F$ possui uma ε-vizinhança disjunta de F. De fato, F é fechado se e somente se para cada $y \notin F$ existe $\varepsilon_y > 0$ tal que $F \cap (y-\varepsilon_y, y+\varepsilon_y) = \emptyset$.

Exemplos 31.1

(a) $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ é aberto. Para cada $x \in \mathbb{R}$ podemos tomar $\varepsilon := 1$.

(b) O intervalo $I := (0,1)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$.

Com efeito, para cada $x \in I$ podemos tomar $\varepsilon_x := \min\{x\,,\,1-x\}$. Deixamos para você como exercício mostrar que se $u \in (x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x)$ então $u \in I$.

(c) Qualquer intervalo $I := (a,b)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$.

De fato, nesse caso, para cada $x \in I$ basta tomar $\varepsilon_x := \min\{x - a\,,\,b-x\}$. Deixamos também para você a verificação de que se $u \in (x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x)$ então $u \in I$.

Do modo semelhante mostra-se que os intervalos $(-\infty, b)$ e $(a, +\infty)$ são cojuntos abertos.

(d) O intervalo $I := [0, 1]$ não é aberto.

De fato, qualquer vizinhança de $0 \in I$ conterá pontos que não pertencem a I.

(e) O intervalo $I := [0, 1]$ é fechado.

Para ver isso, seja $y \notin I$. Então, ou $y < 0$ ou $y > 1$. Se $y < 0$, tomamos $\varepsilon_y := |y|$, e se $y > 1$, tomamos $\varepsilon_y := y - 1$. Deixamos para você como exercício mostrar que em ambos os casos temos $I \cap (y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y) = \emptyset$.

(f) Cada um dos intervalos $I_1 := [0, 1)$ e $I_2 := (0, 1]$ não é aberto nem fechado.

(g) O conjunto vazio $\emptyset$ é ao mesmo tempo aberto e fechado em $\mathbb{R}$. Segue daí que o mesmo vale para o próprio conjunto $\mathbb{R}$.

De fato, o conjunto vazio $\emptyset$ não contém ponto algum, logo o requisito na Definição 31.2 de conjunto aberto é trivialmente satisfeito por inexistência de x pertencente a $\emptyset$. O conjunto $\emptyset$ também é fechado porque é o complementar de $\mathbb{R}$, que já vimos ser aberto. Finalmente, o fato de que $\mathbb{R}$ é fechado segue imediatamento do fato de que $\emptyset$ é aberto.

Do último exemplo vemos que as noções matemáticas de aberto e fechado para conjuntos não são antônimas, como ocorre com aquelas palavras na linguagem do dia a dia. De fato, como vimos no referido exemplo, $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são ambos simultaneamente abertos e fechados. A seguir vamos dar uma prova simples de que $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ com tal propriedade.

Teorema 31.1
$\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ com a propriedade de ser simultaneamente aberto e fechado.

Prova: Suponhamos que $E \subset \mathbb{R}$ tem tal propriedade, com $E \neq \mathbb{R}$ e $E \neq \emptyset$. Então existe um ponto $x \in E$. Como E é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset E$; podemos então obter $0 < M_* < \infty$ tal que $(x-M_*, x+M_*)$ é o maior intervalo aberto simétrico em torno de x contido em E. De fato, o conjunto $\mathcal{M}$ dos $M > 0$ tais que $(x - M, x + M) \subset E$ é limitado já que $E \neq \mathbb{R}$, e é não vazio já que $\varepsilon \in \mathcal{M}$. Logo, existe $M_* := \sup \mathcal{M}$. Observe que se $0 < M < M_*$, então $[x - M, x + M] \subset E$.

Agora, uma das duas alternativas seguintes deve necessariamente valer: (i) $u_1 := x - M_* \notin E$; (ii) $u_2 := x + M_* \notin E$. De fato, se (i) e (ii) fossem ambas falsas, como E é aberto, poderíamos obter $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$ tais que $(u_1 - \varepsilon_1, u_1 + \varepsilon_1) \subset E$ e $(u_2 - \varepsilon_2, u_2 + \varepsilon_2) \subset E$. Assim, tomando $\varepsilon_0 := \min\{\varepsilon_1 , \varepsilon_2\}$, teríamos $(x - M_* - \varepsilon_0, x + M_* + \varepsilon_0) \subset E$ e, portanto, $M_* + \varepsilon_0 \in \mathcal{M}$, contrariando o fato de que M_* é o supremo de $\mathcal{M}$.

Suponhamos que $u_1 \notin E$. Como E é fechado, então existe $\varepsilon_{u_1} > 0$ tal que $(u - \varepsilon_{u_1}, u + \varepsilon_{u_1}) \subset E^c := \mathbb{R} \setminus E$. Naturalmente, podemos supor que $\varepsilon_{u_1}/2 < M_*$; caso contrário basta tomar em lugar de ε_{u_1} um número positivo qualquer menor que $2M_*$. Em particular, nenhum ponto do intervalo $(u_1, u_1 + \varepsilon_{u_1})$ pertence a E. Porém, como $u_1 + (\varepsilon_{u_1}/2) = x - M_* + (\varepsilon_{u_1}/2)$ e $0 < M_* - (\varepsilon_{u_1}/2) < M_*$, então $[x - M_* + (\varepsilon_{u_1}/2), x + M_* - (\varepsilon_{u_1}/2)] \subset E$ e, em particular, $x - M_* + (\varepsilon_{u_1}/2) \in E$, o que está em contradição com o fato de que

$$x - M_* + (\varepsilon_{u_1}/2) \in (u_1, u_1 + \varepsilon_{u_1}) \subset E^c.$$

Supondo que vale $u_2 \notin E$ chegamos a uma contradição de maneira semelhante. Logo, se $E \neq \mathbb{R}$ e $E \neq \emptyset$, então E não pode ser aberto e fechado ao mesmo tempo. $\square$

O seguinte resultado básico mostra que os conjuntos abertos de $\mathbb{R}$ definidos pela Definição 31.2 gozam das propriedades relacionadas com as operações de união e de interseção mencionadas no início desta aula.

Teorema 31.2
(a) A união de uma coleção arbitrária de conjuntos abertos em $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto.

(b) A interseção de uma coleção finita qualquer de conjuntos abertos em $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto.

Prova: (a) Seja $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma família de conjuntos abertos em $\mathbb{R}$, e seja G a sua união. Considere um elemento $x \in G$. Pela definição de união, x deve pertencer a G_{λ_0} para algum $\lambda_0 \in \Lambda$. Como G_{λ_0} é aberto, existe uma vizinhança V de x tal que $V \subset G_{\lambda_0}$. Porém $G_{\lambda_0} \subset G$, de modo que $V \subset G$. Como x é um elemento arbitrário de G, concluímos que G é aberto em $\mathbb{R}$.

(b) Suponhamos que G_1 e G_2 sejam arbertos e seja $G := G_1 \cap G_2$. Para mostrar que G é aberto, consideremos $x \in G$; portanto, $x \in G_1$ e $x \in G_2$. Como G_1 é aberto, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1)$ está contido em G_1. Similarmente, como G_2 é aberto, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2)$ está contido em G_2. Se tomarmos ε como o menor entre ε_1 e ε_2, $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1\,,\,\varepsilon_2\}$, então a ε-vizinhança $U := (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ satisfaz ambos $U \subset G_1$ e $U \subset G_2$. Assim, $x \in U \subset G$. Como x é um elemento arbitrário de G, concluímos que G é aberto em $\mathbb{R}$.

Agora, dada uma coleção finita qualquer de conjuntos abertos, podemos usar um argumento simples de Indução para deduzir que a interseção dessa coleção é aberta. Deixamos a elaboração de tal argumento para você como exercício. $\square$

As propriedades correspondentes para conjuntos fechados serão estabelecidas a seguir com auxílio das identidades de De Morgan para conjuntos e seus complementares.

Teorema 31.3

(a) A interseção de uma coleção arbitrária de conjuntos fechados em $\mathbb{R}$ é um conjunto fechado.

(b) A união de uma coleção finita qualquer de conjuntos fechados em $\mathbb{R}$ é um conjunto fechado.

Prova: (a) Seja $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma família de conjuntos fechados em $\mathbb{R}$ e $F := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$. Dado um conjunto A, denotemos $A^c := \mathbb{R} \setminus A$. Então, pela identidade de De Morgan, $F^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda^c$, que é uma união de conjuntos abertos. Portanto, F^c é aberto pelo Teorema 31.2 e, por conseguinte, F é fechado.

(b) Suponhamos que $F_1, F_2, \ldots, F_n$ são fechados em $\mathbb{R}$ e seja $F := F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$. Pela identidade de De Morgan, o complementar de F, F^c, é dado por

$$F^c = F_1^c \cap \cdots \cap F_n^c.$$

Como cada conjunto F_i^c é aberto, para $i = 1, \ldots, n$, segue do Teorema 31.2 que F^c é aberto. Logo F é fechado. $\square$

Exemplos 31.2

(a) Seja $G_n := (0, 1 + 1/n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Então G_n é aberto para cada $n \in \mathbb{N}$ pelo Exemplo 31.1(c). No entanto, a interseção $G := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ é o intervalo $(0, 1]$ que não é um conjunto aberto. Assim, *a interseção de uma coleção infinita de conjuntos abertos em $\mathbb{R}$ pode perfeitamente não ser um conjunto aberto.*

(b) Seja $F_n := [1/n, 1]$ para $n \in \mathbb{N}$. Cada F_n é fechado, mas a união $F := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ é o conjunto $(0, 1]$ que não é fechado. Logo, *a união de* *uma coleção infinita de conjuntos fechados pode muito bem não ser um conjunto fechado.*

Caracterização dos Conjuntos Fechados

Estabelecemos a seguir uma caracterização dos subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$ em termos de sequências. Como veremos, os conjuntos fechados são precisamente aqueles conjuntos F que contêm os limites de todas as sequências convergentes cujos elementos pertencem a F.

Teorema 31.4
Seja $F \subset \mathbb{R}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) F é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$.

(ii) Se (x_n) é uma sequência convergente qualquer de elementos em F, então $\lim x_n$ pertence a F.

Prova: (i) $\Rightarrow$ (ii) Seja (x_n) uma sequência de elementos em F e $\bar{x} := \lim x_n$. Vamos mostrar que $\bar{x} \in F$. Suponhamos, ao contrário, que $\bar{x} \notin F$, isto é, $\bar{x} \in F^c$ o complementar de F. Como F^c é aberto e $\bar{x} \in F^c$, segue que existe uma ε-vizinhança V_ε de $\bar{x}$ tal que V_ε está contida em F^c. Como $\bar{x} = \lim x_n$, segue que existe um número natural $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tal que $x_n \in V_\varepsilon$ para $n \geq N_0$. Em particular, $x_{N_0} \in V_\varepsilon \subset F^c$ e portanto $x_{N_0} \in F^c$, o que contradiz a hipótese de que $x_n \in F$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, concluímos que $\bar{x} \in F$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Suponhamos, ao contrário, que F não é fechado, de modo que $G := F^c$ não é aberto. Então existe um ponto $y_0 \in G$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um ponto $y_n \in G^c = F$ tal que $|y_n - y_0| < 1/n$. Segue que $y_0 = \lim y_n$, e como $y_n \in F$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a hipótese (ii) implica que $y_0 \in F$, o que contraria o fato de que $y_0 \in F^c$. Logo, a hipótese de que F não é fechado implica que a afirmação (ii) não é verdadeira. Consequentemente, (ii) implica (i), como afirmado. $\square$

Recordemos que um ponto x é um *ponto de acumulação* de um conjunto F se toda ε-vizinhança de x contém um ponto de F diferente de x. Vimos em aula passada que todo ponto de acumulação de um conjunto F é o limite de uma sequência de pontos em F. Pelo que acabamos de dizer, o resultado seguinte é uma consequência imediata do Teorema 31.4. Deixamos para você como exercício dar uma prova direta desse resultado usando apenas as definições envolvidas.

Teorema 31.5
Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos de acumulação.

Caracterização dos Conjuntos Abertos em $\mathbb{R}$

O resultado seguinte mostra que os conjuntos abertos de $\mathbb{R}$ nada mais são do que uniões enumeráveis de intervalos abertos.

Teorema 31.6
Um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ é aberto se, e somente se, ele é a união de uma coleção enumerável de intervalos abertos em $\mathbb{R}$.

Prova: $\Leftarrow$ Como, pelo Exemplo 31.1(c), qualquer intervalo aberto é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$, segue do Teorema 31.2 que a união de uma coleção qualquer (enumerável ou não enumerável) de intervalos abertos é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Suponhamos que $G \neq \emptyset$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$. Para cada $x \in G$, seja $A_x := \{a \in \mathbb{R} : (a, x] \subset G\}$ e $B_x := \{b \in \mathbb{R} : [x, b) \subset G\}$. Como G é aberto, segue que A_x e B_x são conjuntos não vazios (por quê?). Se o conjunto A_x é limitado inferiormente, definimos $a_x := \inf A_x$; se A_x não é limitado inferiormente, pomos $a_x := -\infty$. Observe que em qualquer caso $a_x \notin G$ (por quê?). Analogamente, se B_x é limitado superiormente, definimos $b_x := \sup B_x$; se B_x não é limitado superiormente, pomos $b_x := \infty$. Observe também que em qualquer caso $b_x \notin B_x$ (por quê?).

Definimos $I_x := (a_x, b_x)$; claramente I_x é um intervalo aberto contendo x. Afirmamos que $I_x \subset G$. Para ver isso, seja $y \in I_x$ e suponhamos que $y < x$. Segue da definição de a_x que existe $a' \in A_x$ com $a' < y$, donde $y \in (a', x] \subset G$. De modo semelhante, se $y \in I_x$ e $x < y$, existe $b' \in B_x$ com $y < b'$, donde segue que $y \in [x, b') \subset G$. Como $y \in I_x$ é arbitrário, temos que $I_x \subset G$. Como $x \in G$ é arbitrário, concluímos que $\bigcup_{x \in G} I_x \subset G$.

Por outro lado, como para cada $x \in G$ trivialmente temos $x \in I_x$, segue também que $G \subset \bigcup_{x \in G} I_x$. Portanto, concluímos que $G = \bigcup_{x \in G} I_x$.

Agora, afirmamos que se $x, y \in G$ e $x \neq y$, então ou $I_x = I_y$ ou $I_x \cap I_y = \emptyset$. Para provar essa afirmação suponhamos que $z \in I_x \cap I_y$, donde segue que $a_x < z < b_y$ e $a_y < z < b_x$ (por quê?). Mostraremos que $a_x = a_y$. Caso contrário, segue da Propriedade da Tricotomia que ou (i) $a_x < a_y$, ou (ii) $a_y < a_x$. Caso tenhamos (i), então $a_y \in I_x = (a_x, b_x) \subset G$, o que contradiz o fato de que $a_y \notin G$. De modo semelhante, caso ocorra (ii), então $a_x \in I_y = (a_y, b_y) \subset G$, o que contradiz o fato de que $a_x \notin G$. Portanto devemos ter $a_x = a_y$. De modo inteiramente análogo provamos que $b_x = b_y$. Logo, concluímos que se $I_x \cap I_y \neq \emptyset$, então $I_x = I_y$.

Resta mostrar que a coleção de intervalos distintos $\{I_x : x \in G\}$ é enumerável. Agora, $E := \mathbb{Q} \cap G$ é enumerável e para cada $r \in E$ existe um único intervalo I_x tal que $r \in I_x$, já que os intervalos I_x distintos são disjuntos. Por outro lado, pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ e pelo fato de que $G = \bigcup_{x \in G} I_x$, cada I_x contém pelo menos um $r \in E$. Logo a função $f : E \to \{I_x : x \in G\}$, definida por $f(r) = I_x$ se $f(r) \in I_x$, é sobrejetiva. Logo, pelo que vimos na Aula 3, concluímos que a família $\{I_x : x \in G\}$ é uma coleção enumerável de intervalos. □

Exercícios 31.1

1. Mostre que os intervalos (a, ∞) e $(-\infty, a)$ são conjuntos abertos, e que os intervalos $[b, \infty)$ e $(-\infty, b]$ são conjuntos fechados.

2. Mostre que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}$.

3. Mostre que $A := \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ não é um conjunto fechado, mas $A \cup \{0\}$ é um conjunto fechado.

4. Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é nem aberto nem fechado.

5. Mostre que se G é um conjunto aberto e F é um conjunto fechado, então $G \setminus F$ é um conjunto aberto e $F \setminus G$ é um conjunto fechado.

6. Um ponto $x \in \mathbb{R}$ é dito um *ponto interior* de $A \subset \mathbb{R}$ caso exista uma vizinhança V de x tal que $V \subset A$. Mostre que um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se, e somente se, todo ponto de A é um ponto interior de A.

7. Um ponto $x \in \mathbb{R}$ é dito um *ponto de fronteira* de $A \subset \mathbb{R}$ caso toda vizinhança V de x contenha pontos em A e pontos em seu complementar A^c. Mostre que um conjunto A e seu complementar A^c têm exatamente os mesmos pontos de fronteira.

8. Mostre que um conjunto $G \subset \mathbb{R}$ é aberto se, e somente se, não contém nenhum dos seus pontos de fronteira.

9. Mostre que um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos de fronteira.

10. Se $A \subset \mathbb{R}$, seja $\overset{\circ}{A}$ a união de todos os conjuntos abertos contidos em A; o cojunto $\overset{\circ}{A}$ é chamado o *interior de* A. Mostre que:

    (a) $\overset{\circ}{A}$ é um conjunto aberto;

    (b) $\overset{\circ}{A}$ é o maior conjunto aberto contido em A;

    (c) um ponto $x \in \overset{\circ}{A}$ se, e somente se, x é um ponto interior de A.

11. Usando a notação do exercício anterior, sejam A e B conjuntos em $\mathbb{R}$. Mostre que:

    (a) $\overset{\circ}{A} \subset A$;

    (b) $\overset{\circ}{\left(\overset{\circ}{A}\right)} = \overset{\circ}{A}$;

    (c) $\overset{\circ}{(A \cap B)} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$;

    (d) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{(A \cup B)}$

    Dê um exemplo para mostrar que a inclusão no último ítem do exercício anterior pode ser própria e portanto em geral não vale $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{(A \cup B)}$.

12. Se $A \subset \mathbb{R}$, seja $\overline{A}$ a interseção de todos os conjuntos fechados contendo A; o conjunto $\overline{A}$ é chamado o *fecho de* A. Mostre que:

    (a) $\overline{A}$ é um conjunto fechado;

    (b) $\overline{A}$ é o menor conjunto fechado contendo A;

    (c) um ponto x pertence a $\overline{A}$ se, e somente se, ou x é interior a A ou x é um ponto fronteira de A.

13. Usando a notação do exercício anterior, sejam A e B conjuntos em $\mathbb{R}$. Mostre que:

    (a) $A \subset \overline{A}$;

    (b) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$;

    (c) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

    (d) $\overline{(A \cap B)} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

14. Dê um exemplo para mostrar que a inclusão no último ítem do exercício anterior pode ser própria.

Aula 32 – Conjuntos Compactos

Metas da aula: Definir e apresentar os principais fatos sobre conjuntos compactos na reta. Apresentar o conjunto de Cantor e suas propriedades básicas.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber a definição de um conjunto compacto na reta, bem como os principais fatos sobre essa classe de conjuntos na reta;

- Saber a caracterização dos conjuntos compactos na reta dada pelo Teorema de Heine-Borel;

- Saber definir o conjunto de Cantor e deduzir suas propriedades básicas.

Introdução

Além dos conjuntos abertos e fechados, uma noção fundamental em topologia geral, extremamente importante na análise matemática avançada, é a de conjunto compacto. Seja X um conjunto arbitrário dotado de uma topologia, isto é, uma família de subconjuntos distinguida como sendo a família dos subconjuntos abertos de X. Dizemos que um subconjunto K de X é compacto se qualquer coleção de subconjuntos abertos cuja união contém K possui uma subcoleção finita cuja união ainda contém K. Nesta aula vamos estudar as propriedades básicas dos subconjuntos compactos da reta. O teorema de Heine-Borel, que veremos no decorrer desta aula, fornece uma caracterização bastante simples para os conjuntos compactos em $\mathbb{R}$: um conjunto é compacto em $\mathbb{R}$ se, e somente se, é fechado e limitado. Este resultado não é verdadeiro para espaços topológicos arbitrários, isto é, conjuntos arbitrários dotados de topologia. Porém os métodos utilizados na investigação das propriedades dos conjuntos compactos em $\mathbb{R}$ servem de inspiração para a investigação dessa classe de conjuntos em espaços topológicos gerais, que é feita em cursos mais avançados.

Veremos ainda nesta aula a definição e as propriedades básicas do famoso conjunto de Cantor. Este vem a ser um subconjunto compacto contido no intervalo $[0, 1]$ com muitos aspectos curiosos, que motivaram as modernas teorias dos conjuntos fractais, do caos, etc.

Conjuntos Compactos em $\mathbb{R}$.

Como antecipamos na introdução, a definição de compacidade envolve a noção de cobertura aberta, que agora definimos formalmente.

Definição 32.1
Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Uma *cobertura aberta* de A é uma coleção $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ de cojuntos abertos em $\mathbb{R}$ cuja união contém A, isto é,

$$A \subset \bigcup_\alpha G_\alpha.$$

Se $\mathcal{G}'$ é uma subcoleção de conjuntos de $\mathcal{G}$ tais que a união dos conjuntos em $\mathcal{G}'$ também contém A, então $\mathcal{G}'$ é chamada uma *subcobertura* de $\mathcal{G}$. Se $\mathcal{G}'$ é composta por um número finito de conjuntos, então chamamos $\mathcal{G}'$ uma *subcobertura finita* de $\mathcal{G}$.

Claramente, podemos prover uma infinidade de coberturas abertas distintas para um dado conjunto qualquer em $\mathbb{R}$. Por exemplo, se $A := (0, 3]$, então você pode verificar facilmente que todas as seguintes coleções de conjuntos são coberturas abertas de A:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_0 &:= \{(0, \infty)\},\\
\mathcal{G}_1 &:= \{(0, n) \,:\, n \in \mathbb{N}\},\\
\mathcal{G}_2 &:= \{(r-1, r+1) \,:\, r \in \mathbb{Q},\ r > 0\},\\
\mathcal{G}_3 &:= \{(n-1, n+1) \,:\, n \in \mathbb{N}\},\\
\mathcal{G}_4 &:= \{(-1, 1),\, (0, 2),\, (1, 3),\, (2, 4)\},\\
\mathcal{G}_5 &:= \{(1/n, 4) \,:\, n \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}$$

Observamos que $\mathcal{G}_3$ é uma subcobertura de $\mathcal{G}_2$ e que $\mathcal{G}_4$ é uma subcobertura finita de $\mathcal{G}_3$. Observe também que $\mathcal{G}_5$ não possui subcobertura finita (por quê?). Evidentemente, é possível definir uma infinidade de outras coberturas abertas de A.

Definição 32.2
Diz-se que um subconjunto K de $\mathbb{R}$ é *compacto* se toda cobertura aberta de K tem uma subcobertura finita.

Em outras palavras, um conjunto K é compacto se, sempre que ele estiver contido na união de uma coleção $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ de conjuntos abertos em $\mathbb{R}$, então ele está contido na união de alguma subcoleção finita de conjuntos em $\mathcal{G}$. Assim, para provar que um subconjunto K de $\mathbb{R}$ é compacto, usando a definição anterior, devemos mostrar que dada uma coleção arbitrária de conjuntos abertos cuja união contém K, sempre é possível extrair dessa coleção um número finito de conjuntos cuja união ainda contém A. Por outro lado, para mostrar que um dado subconjunto Y de $\mathbb{R}$ não é compacto, basta exibirmos uma coleção de conjuntos abertos cuja união contém Y da qual não é possível extrair uma subcoleção finita que ainda contenha Y. Um exemplo deste último caso é fornecido pela cobertura $\mathcal{G}_5$ do conjunto $A = (0, 3]$, que vimos há pouco.

Exemplos 32.1

(a) Seja $K := \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ um subconjunto finito de $\mathbb{R}$. Se $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de K, então cada x_i está contido em algum G_{α_i} em $\mathcal{G}$. Então a união dos conjuntos na coleção finita $\{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \ldots, G_{\alpha_N}\}$ contém K, de modo que ela é uma subcobertura finita de $\mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ é arbitrária, segue que o conjunto finito K é compacto.

(b) Afirmamos há pouco que a cobertura $\mathcal{G}_5 = \{(1/n, 4) : n \in \mathbb{N}\}$ do conjunto $A = (0, 3]$ não possui subcobertura finita. De fato, se $\mathcal{G}' := \{(1/n_1, 4), (1/n_2, 4), \cdots, (1/n_r, 4)\}$ é uma subcoleção finita qualquer de conjuntos em $\mathcal{G}$, com $n_1 < \cdots < n_r$, então a união dos conjuntos em $\mathcal{G}'$ é simplesmente $(1/n_r, 4)$ que certamente não contém $(0, 3]$, já que, por exemplo, $1/n_r \in (0, 3]$, mas $1/n_r \notin (1/n_r, 4)$. Logo, $(0, 3]$ não é um conjunto compacto.

(c) O conjunto $A := [0, \infty)$ não é compacto.

De fato, se $G_n := (-1, n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, de modo que $\mathcal{G} = \{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma cobertura aberta de A. No entanto, se $\{G_{n_1}, G_{n_2}, \ldots, G_{n_r}\}$ é uma subcobertura finita qualquer de $\mathcal{G}$, com $n_1 < \cdots < n_r$, então

$$G_{n_1} \cup G_{n_2} \cup \cdots \cup G_{n_r} = G_{n_r} = (-1, n_r).$$

Evidentemente, essa união não contém $A = [0, \infty)$, e portanto A não é compacto.

(d) O conjunto $B = (0, 1)$ não é compacto.

Para provar esta afirmação procedemos de modo similar ao que foi feito nos ítens (b) e (c), considerando-se a cobertura aberta $\mathcal{G} := \{G_n : n \in \mathbb{N}\}$, com G_n desta feita definido por $G_n := (1/n, 1)$, por exemplo. Deixamos os detalhes para você como exercício.

O Teorema de Heine-Borel

A seguir vamos apresentar uma caracterização dos conjuntos compactos de $\mathbb{R}$. Essa caracterização é fornecida pelo Teorema de Heine-Borel. Inicialmente, vamos enunciar e provar a primeira parte da caracterização estabelecendo como condição necessária para um conjunto ser compacto em $\mathbb{R}$ que ele seja fechado e limitado. Essa implicação é um fato geral válido para conjuntos compactos em espaços topológicos bem mais gerais que $\mathbb{R}$, chamados "espaços métricos", cuja definição precisa foge aos objetivos deste curso. Já o fato de que essa condição também é suficiente no caso de $\mathbb{R}$ é o conteúdo do Teorema de Heine-Borel e não pode ser estendido a todos os espaços métricos.

Teorema 32.1
Se K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, então K é fechado e limitado.

Prova: Mostraremos primeiramente que K é limitado. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $G_n := (-n, n)$. Como cada G_n é aberto e como $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbb{R}$, vemos que a coleção $\mathcal{G} := \{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma cobertura aberta de K. Como K é compacto, essa cobertura aberta possui uma subcobertura finita $\{G_{n_1}, G_{n_2}, \ldots, G_{n_r}\}$. Podemos supor sem perda de generalidade que $n_1 < n_2 < \cdots < n_r$. Então

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{r} G_{n_k} = G_{n_r} = (-n_r, n_r).$$

Portanto, K é limitado, já que está contido no intervalo limitado $(-n_r, n_r)$.

Vamos agora mostrar que K é fechado, mostrando que seu complementar K^c é aberto. Para tal, seja $x_0 \in K^c$ arbitrário e para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $G_n := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| > 1/n\}$. É fácil ver que cada G_n é aberto e que $\mathbb{R} \setminus \{x_0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ (por quê?). Como $x_0 \notin K$, temos que $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Como K é compacto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{m} G_n = G_m.$$

Daí segue que $K \cap (x_0 - 1/m, x_0 + 1/m) = \emptyset$, de modo que o intervalo $(x_0 - 1/m, x_0 + 1/m)$ está contido em K^c. Mas como x_0 é um ponto arbitrário em K^c, concluímos que K^c é aberto, e portanto K é fechado. $\square$

A seguir provamos que as condições do Teorema 32.1 são também suficientes para um subconjunto de $\mathbb{R}$ ser compacto.

Teorema 32.2 (Teorema de Heine-Borel)
Um subconjunto K de $\mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.

Prova: Já provamos no Teorema 32.1 que se K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ então K é fechado e limitado. Resta, portanto, provar a recíproca, ou seja, que se K é um subconjunto de $\mathbb{R}$ fechado e limitado, então K é compacto.

Suponhamos então que $K \subset \mathbb{R}$ é fechado e limitado e seja $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ uma cobertura aberta de K. Desejamos provar que $\mathcal{G}$ possui uma subcobertura finita. Vamos fazer a demonstração por contradição. Vamos então assumir que K satisfaz a propriedade

(P): Não está contido na união de qualquer subcoleção finita de $\mathcal{G}$.

Por hipótese K é limitado e portanto existe $r > 0$ tal que $K \subset [-r, r]$. Seja $I_0 := [-r, r]$. Dividimos I_0 em dois subintervalos fechados de igual comprimento, r, $I_0' := [-r, 0]$ e $I_0'' := [0, r]$. Ao menos um dos dois subconjuntos $K \cap I_0'$ e $K \cap I_0''$ deve ser não vazio e herdar a propriedade (P) satisfeita por K. Do contrário cada um dos conjuntos $K \cap I_0'$ e $K \cap I_0''$ estaria contido na união de uma subcoleção finita de conjuntos em $\mathcal{G}$ e portanto $K = (K \cap I_0') \cup (K \cap I_0')$ também estaria contido na união de uma subcoleção finita de $\mathcal{G}$, o que contradiz o fato de que K satisfaz (P). Se (P) for satisfeita por $K \cap I_0'$, definimos $I_1 := I_0'$; senão, (P) será necessariamente satisfeita por $K \cap I_0''$, e então definimos $I_1 := I_0''$.

Agora dividimos I_1 em dois subintervalos fechados de igual comprimento, $r/2$, I_1' e I_1''. Como $K \cap I_1 = (K \cap I_1') \cup (K \cap I_1'')$, então ao menos um dos dois subconjuntos $K \cap I_1'$ e $K \cap I_1''$ deve ser não vazio e herdar a propriedade (P) que é satisfeita por $K \cap I_1$. Se $K \cap I_1'$ satisfaz (P), definimos $I_2 := I_1'$; senão, (P) tem de ser satisfeita por $K \cap I_1''$, e então definimos $I_2 := I_1''$. Denotando por $|I|$ o comprimento de um intervalo I, observe que temos $I_0 \supset I_1 \supset I_2$ e $|I_0| = 2r$, $|I_1| = r$ e $|I_2| = r/2$.

Continuando esse processo, obtemos uma sequência de intervalos encaixados (I_n). Pela Propriedade dos Intervalos Encaixados, vista na Aula 5, existe um ponto x_0 pertencente a todos os I_n, $n \in \mathbb{N}$. Como cada I_n contém uma infinidade de pontos em K (por quê?), o ponto x_0 é um ponto de acumulação de K. Além disso, como por hipótese K é fechado, segue do Teorema 31.5 que $x_0 \in K$. Portanto existe um conjunto G_{α_0} em $\mathcal{G}$ com $x_0 \in G_{\alpha_0}$. Como G_{α_0} é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}.$$

Por outro lado, como os intervalos I_n são obtidos por bisseções repetidas de $I_0 = [-r, r]$, segue que $|I_n| = r/2^{n-1}$. Segue que se n for suficientemente grande de modo que $r/2^{n-1} < \varepsilon$, então $K \cap I_n$ está contido em G_{α_0} que é um membro de $\mathcal{G}$, o que contradiz o fato de que $K \cap I_n$ satisfaz (P) por construção. Essa contradição se originou no fato de termos assumido que K satisfazia a propriedade (P). Assim, deve valer a negação de (P), e desse modo concluímos que K é compacto. $\square$

Como consequência imediata do Teorema de Heine-Borel temos o seguinte resultado cuja demonstração simples deixaremos para você como exercício.

Teorema 32.3
Se $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é uma família qualquer de conjuntos compactos em $\mathbb{R}$, então

$$K := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$$

é um conjunto compacto.

O Teorema de Heine-Borel nos permite dar uma infinidade de exemplos de conjuntos compactos. Por exemplo, segue imediatamente do Teorema de Heine-Borel que todo intervalo fechado limitado $[a, b]$ é um conjunto compacto em $\mathbb{R}$. Mais ainda, qualquer intervalo da reta que não seja desse tipo não é compacto.

Podemos combinar o Teorema de Heine-Borel com o Teorema de Bolzano-Weierstrass para obter a seguinte caracterização dos subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Teorema 32.4
Um subconjunto K de $\mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em K possui uma subsequência que converge para um ponto em K.

Prova: ($\Rightarrow$) Suponhamos que K é compacto e seja (x_n) uma sequência com $x_n \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 32.1, o conjunto K é limitado de modo que a sequência (x_n) é limitada. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) que converge. Também pelo Teorema 32.1 temos que K é fechado e então $\bar{x} := \lim x_n$ pertence a K, como consequência do Teorema 31.4. Assim, toda sequência em K tem uma subsequência que converge para um ponto de K.

($\Leftarrow$) Para estabelecer a recíproca, mostraremos que se K não é fechado ou se K não é limitado, então existe uma sequência de pontos em K que não possui subsequência alguma convergindo para um ponto de K. Primeiro, se K não é fechado, então pelo Teorema 31.4 existe uma sequência (x_n) de pontos em K que converge para um ponto $\bar{x}$ que não pertence a K. Como qualquer subsequência de (x_n) tem que convergir também para $\bar{x}$ e $\bar{x} \notin K$, segue que nenhuma subsequência de (x_n) converge para um ponto de K.

Segundo, se K não é limitado, então existe uma sequência (y_n) em K tal que $|y_n| > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (por quê?). Então toda subsequência de (y_n) é ilimitada, logo nenhuma subsequência de (y_n) pode convergir a um ponto de K. $\square$

O Conjunto de Cantor

Concluiremos esta aula com uma breve discussão sobre o célebre conjunto de Cantor que denotaremos $\mathcal{C}$. Ele é um exemplo muito interessante de um conjunto compacto em $\mathbb{R}$ que é diferente de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ que vimos até o momento. Ele tem inspirado modernas teorias matemáticas como a geometria fratal e a teoria do caos, entre outras. Também serve frequentemente como contra-exemplo para as mais variadas e falsas suposições sobre conjuntos da reta, que brotam de nossa intuição algumas vezes inadequada para nos dar uma ideia precisa desses objetos.

O conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ é obtido como resultado de um processo recorrente de remoção dos terços médios abertos de intervalos fechados remanescentes começando pelo intervalo fechado unitário $[0,1]$.

Assim, primeiramente removemos o terço médio aberto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ do intervalo $[0,1]$ para obter o conjunto

$$F_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1].$$

A seguir removemos o terço médio aberto de cada um dos intervalos fechados que compõem F_1 para obter o conjunto

$$F_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

Vemos que F_2 é a união de $2^2 = 4$ intervalos fechados, cada um dos quais é da forma $[k/3^2, (k+1)/3^2]$. Em seguida removemos os terços médios abertos de cada um dos intervalos fechados que compõem F_2 para obter o conjunto

$$F_3 := [0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27}, 1],$$

que é a união de $2^3 = 8$ intervalos fechados da forma $[k/3^3, (k+1)/3^3]$.

Continuamos desse modo: se F_n tiver sido construído na n-ésima etapa e consiste da união de 2^n intervalos da forma $[k/3^n, (k+1)/3^n]$, então F_{n+1} é obtido removendo-se o terço médio aberto de cada um desses intervalos. O conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ é então definido por

$$\mathcal{C} := \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Temos então, pelo Teorema 32.3, que $\mathcal{C}$ é um conjunto compacto.

A seguir listamos várias propriedades do conjunto de Cantor $\mathcal{C}$.

Exemplos 32.2

(a) O comprimento total dos intervalos removidos no pocesso de construção de $\mathcal{C}$ é igual a 1.

De fato, observamos que o primeiro terço médio tem comprimento $1/3$, os próximos dois têm comprimentos que somam $2/3^2$, os quatro seguintes têm comprimentos que somam $2^2/3^3$, e assim por diante. De modo geral temos que os terços médios abertos removidos de F_n para que seja obtido F_{n+1} têm comprimentos que somam $2^n/3^{n+1}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, com $F_0 := [0, 1]$. O comprimento total L dos intervalos removidos é então dado por

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Usando a fórmula para a soma de uma série geométrica, obtemos

$$L = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-(2/3)}\right) = 1.$$

Logo, $\mathcal{C}$ é um subconjunto do intervalo unitário $[0, 1]$ cujo complemento tem comprimento total igual a 1.

Note também que o comprimento total dos intervalos que compõem F_n é $(2/3)^n$, que tem limite 0 quando $n \to \infty$. Como $\mathcal{C} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que se a noção de comprimento total de um conjunto formado de intervalos puder ser estendida a $\mathcal{C}$, o comprimento total de $\mathcal{C}$ terá necessariamente que ser igual 0. A assim chamada "medida de Lebesgue", criada pelo célebre matemático francês Henri Lebesgue (1875-1941), cujo estudo está além dos objetivos deste curso, fornece uma extensão da noção de comprimento total para um conjunto formado de intervalos, que pode ser aplicada a $\mathcal{C}$, e, como esperado, atribui o valor 0 a $\mathcal{C}$.

(b) O conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ não contém nenhum intervalo aberto não-vazio.

De fato, se $\mathcal{C}$ contivesse um intervalo aberto não-vazio (a, b), então como $(a, b) \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deveríamos ter $0 < b - a < (2/3)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que nos dá uma contradição já que $\lim(2/3)^n = 0$.

(c) O conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ tem uma quantidade infinita de pontos (veremos a seguir que ele é não enumerável).

Os pontos extremos dos intervalos fechados que compõem cada um dos conjuntos F_n pertencem a $\mathcal{C}$. Por outro lado, cada F_n é composto de 2^n intervalos fechados disjuntos e, portanto, possui pelo menos 2^{n+1} pontos em $\mathcal{C}$ que são os referidos extremos dos intervalos. Assim, se assumíssemos que $\mathcal{C}$ possui um número finito qualquer N de elementos, poderíamos escolher n suficientemente grande tal que $2^{n+1} > N$ e assim chegar a uma contradição. Logo $\mathcal{C}$ possui uma quantidade infinita de pontos.

(d) O conjunto de Cantor é não enumerável.

Primeiro, vamos mostrar que existe uma bijeção φ entre $\mathcal{C}$ e o conjunto de todas as sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $a_n \in \{0, 1\}$, que denotamos por $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Definimos $\varphi : \mathcal{C} \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ da seguinte forma. Dado $c \in \mathcal{C}$, definimos $\varphi(c)_1 := 0$ se c pertence ao intervalo fechado $[0, 1/3] \subset F_1$ e pomos $I_1 := [0, 1/3]$. Caso contrário, temos necessariamente $c \in [2/3, 1]$ e então definimos $\varphi(c)_1 := 1$ e pomos $I_1 := [2/3, 1]$. Para definir $\varphi(c)_2$ observamos que $F_2 \cap I_1 = I_1' \cup I_1''$, onde I_1' e I_1'' são os dois intervalos fechados (à esquerda e à direita, respectivamente) que restam após removermos o terço médio aberto de I_1. Definimos então $\varphi(c)_2 = 0$ se $c \in I_1'$ e pomos $I_2 := I_1'$; do contrário, temos necessariamente $c \in I_1''$ e então definimos $\varphi(c)_2 := 1$ e pomos $I_2 = I_1''$. De modo semelhante, temos $F_3 \cap I_2 = I_2' \cup I_2''$ onde I_2' e I_2'' são os dois intervalos fechados (à esquerda e à direita, respectivamente) que restam após removermos o terço médio aberto de I_2. Daí então definimos $\varphi(c)_3 = 0$ se $c \in I_2'$ e pomos $I_3 := I_2'$; do contrário, temos necessariamente $c \in I_2''$ e então definimos $\varphi(c)_3 := 1$ e pomos $I_3 = I_2''$. Prosseguimos esse processo indutivamente. Supondo que tenhamos definido $\varphi(c)_n$ e I_n, então teremos $F_{n+1} \cap I_n = I_n' \cup I_n''$ e definimos $\varphi(c)_{n+1} = 0$ se $c \in I_n'$ e pomos $I_{n+1} = I_n'$; caso contrário, $c \in I_n''$, definimos $\varphi(c)_{n+1} = 1$ e pomos $I_{n+1} := I_n''$. Isso completa a definição de $\varphi(c) := (\varphi(c)_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

A função φ é injetiva. De fato, se $\varphi(c_1) = \varphi(c_2)$, então c_1 e c_2 estão contidos num mesmo intervalo fechado I_n dentre os 2^n intervalos fechados que compõem F_n, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como o comprimento de I_n é $1/3^n$, temos $|c_1 - c_2| \leq 1/3^n \to 0$ quando $n \to \infty$. Logo, $c_1 = c_2$.

A função φ é sobrejetiva. De fato, se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, então, usando a notação anterior, fazemos $I_1 := [0, 1/3]$ se $a_1 = 0$, ou $I_1 := [2/3, 1]$ se $a_1 = 1$. Fazemos $I_2 := I_1'$ se $a_2 = 0$, ou $I_2 := I_1''$ se $a_2 = 1$. De modo similar, fazemos $I_3 := I_2'$ se $a_3 = 0$, ou $I_3 := I_2''$ se $a_3 = 1$. Prosseguindo dessa forma, definimos uma sequência de intervalos fechados encaixados I_n para $n \in \mathbb{N}$, com comprimento de I_n igual a 3^n. Logo, existe um único $c \in \mathcal{C}$ tal que $\{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Vemos então claramente que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \varphi(c)$.

Agora, afirmamos que o conjunto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é não enumerável. Provaremos esta afirmação utilizando mais uma vez um argumento do tipo "diagonal" originalmente devido a Cantor. Suponhamos por contradição que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ seja enumerável e seja $\{\mathbf{x}^m : m \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração para $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, com $\mathbf{x}^m = (a_n^m)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n^m \in \{0,1\}$. Definimos a sequência $\mathbf{x} = (x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ da seguinte forma. Se $a_n^n = 0$, fazemos $x_n := 1$; se $a_n^n = 1$, pomos $x_n := 0$. Dessa forma temos que $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, o que nos dá uma contradição. Logo, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é não enumerável.

Já que $\varphi : \mathcal{C} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é uma bijeção e $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é não enumerável, como acabamos de mostrar, concluímos que $\mathcal{C}$ é não enumerável (por quê?).

Exercícios 32.1

1. Exiba uma cobertura aberta de $(-1, 1]$ que não possui subcobertura finita.

2. Exiba uma cobertura aberta de $\mathbb{N}$ que não possui subcobertura finita.

3. Mostre que $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ não é compacto exibindo uma cobertura aberta que não possui cobertura finita.

4. Mostre, usando a Definição 32.2, que $C := \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto compacto.

5. Prove, usando a Definição 32.2, que se F é um subconjunto fechado de um conjunto compacto K, então F é compacto.

6. Prove, usando a Definição 32.2, que a união $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ de uma coleção finita de conjuntos compactos $\{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$ é um conjunto compacto.

7. Dê um exemplo de uma coleção infinita enumerável de conjuntos compactos cuja união não é um conjunto compacto.

8. Prove, usando o Teorema de Heine-Borel, que a interseção de uma coleção arbitrária $\{K_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de conjuntos compactos é um conjunto compacto.

9. Seja $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de conjuntos compactos não vazios em $\mathbb{R}$ tal que $K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots$. Prove que $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

10. Seja $K \neq \emptyset$ compacto em $\mathbb{R}$ e seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Mostre que existem $a \in K$ e $b \in K$ satisfazendo
$$|x_0 - a| = \inf\{|x_0 - x| : x \in K\} \quad \text{e} \quad |x_0 - b| = \sup\{|x_0 - x| : x \in K\}.$$

11. Mostre que $1/3, 1/9 \in \mathcal{C}$ e $1/2, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8 \notin \mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$ é o conjunto de Cantor.

12. Mostre que cada ponto do conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ é um ponto de acumulação de $\mathcal{C}$ e é também um ponto de acumulação do complementar $\mathcal{C}^c$.

13. Mostre que o conjunto dos pontos extremos dos intervalos fechados que compõem os conjuntos F_n, $n \in \mathbb{N}$, na construção de $\mathcal{C}$, formam um subconjunto enumerável denso em $\mathcal{C}$. Mais especificamente, todo ponto $c \in \mathcal{C}$ é limite de uma sequência (x_n), onde x_n é um extremo de um dos intervalos fechados que compõem F_n.

14. Mostre que cada $x \in [0,1]$ pode ser escrito numa expansão ternária (base 3) na forma
$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k},$$
com $a_k \in \{0,1,2\}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

15. Mostre que a expansão do exercício anterior é única exceto para os números da forma $x = m/3^n$, com $m, n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq m \leq 3^n$, que admitem uma expansão finita
$$\frac{m}{3^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k},$$

com $a_n \in \{1, 2\}$, ou uma expansão infinita

$$\frac{m}{3^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k},$$

com $b_k = a_k$ para $k = 1, \dots, n-1$, $b_n = a_n - 1$ e $b_k = 2$ para $k \geq n+1$. Se $x = m/3^n$, com $m, n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq m \leq 3^n$, convencionaremos escolher a expansão finita se $a_n = 2$ e a infinita se $a_n = 1$, e denotaremos $x \equiv (\bullet a_1 a_2 \cdots a_n \cdots)_3$.

16. Usando a notação $x \equiv (\bullet a_1 a_2 \cdots a_n \cdots)_3$ introduzida no exercício anterior, prove que $x \in \mathcal{C}$ se, e somente se, $a_n \in \{0, 2\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

17. Determine os a_n em $1/4 \equiv (\bullet a_1 a_2 \cdots a_n \cdots)_3$, com a notação adotada nos dois exercícios anteriores, e diga se $1/4 \in \mathcal{C}$ ou $1/4 \notin \mathcal{C}$.

ISBN 978-85-7648-680-0

9 788576 486800

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

UERJ
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Universidade Federal Fluminense
uff

UNIVERSIDADE DO BRASIL

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

UNIRIO

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro

SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL