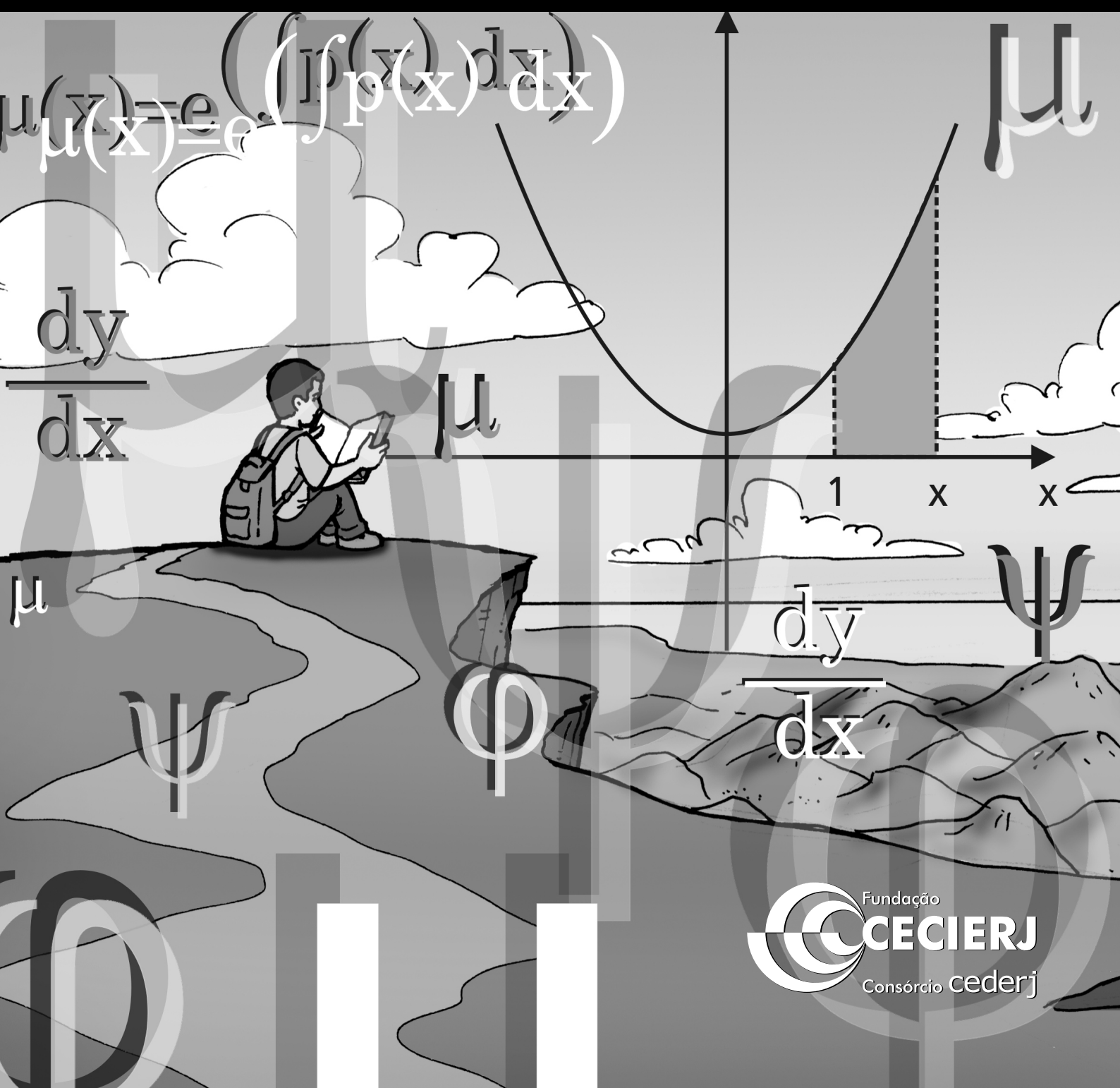


Equações Diferenciais





Fundação

CECIERJ

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Equações Diferenciais

Volume 2 - Módulos 2 e 3
2ª edição

Pedro do Nascimento Nobrega



**GOVERNO DO
Rio de Janeiro**

**SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA**



**Ministério
da Educação**



Apoio:



FAPERJ

Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Presidente

Masako Oya Masuda

Vice-presidente

Mirian Crapez

Coordenação do Curso de Matemática

UFF - Regina Moreth

UNIRIO - Luiz Pedro San Gil Jutuca

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

Pedro do Nascimento Nobrega

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL

Cristine Costa Barreto

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO

Anna Maria Osborne

Ana Tereza de Andrade

Jane Castellani

Leonardo Villela

Nilce P. Rangel Del Rio

COORDENAÇÃO DE AVALIAÇÃO DO MATERIAL DIDÁTICO

Débora Barreiros

AVALIAÇÃO DO MATERIAL DIDÁTICO

Letícia Calhau

Departamento de Produção

EDITORA

Tereza Queiroz

REVISÃO TIPOGRÁFICA

Equipe Cederj

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO

Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL

Marcelo Freitas

CAPA

Morvan de Araujo Neto

PRODUÇÃO GRÁFICA

Oséias Ferraz

Patricia Seabra

Copyright © 2005, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

N754e

Nobrega, Pedro do Nascimento.

Equações Diferenciais. v. 2 - 2. ed. / Pedro do Nascimento Nobrega. – Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.
281p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 978-85-7648-670-1

1. Equações diferenciais lineares. 2. Sistemas de equações diferenciais. 3. Sistemas autônomos. I. Título.

CDD: 515.35

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO
NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO
RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Vieiralses

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO**
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL
DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO
DO RIO DE JANEIRO**
Reitora: Malvina Tania Tuttman

SUMÁRIO

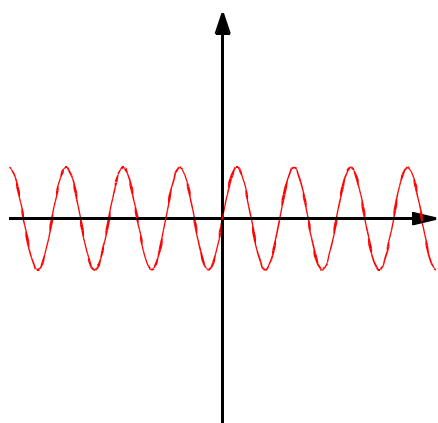
Aula 11 – Equações diferenciais lineares de ordem superior _____	125
Aula 12 – Soluções de equações diferenciais lineares de ordem superior _____	143
Aula 13 – Equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem _____	167
Aula 14 – Equações não-homogêneas de segunda ordem _____	181
Aula 15 – Aplicação de equações diferenciais lineares de segunda ordem _____	195
Aula 16 – Sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Autovalores reais distintos _____	211
Aula 17 – Representação geométrica de sistemas autônomos. Sistemas com autovalores complexos _____	235
Aula 18 – Sistemas com autovalores reais repetidos _____	253
Aula 19 – Sistemas não-homogêneos _____	271

Aula 11 – Equações diferenciais lineares de ordem superior

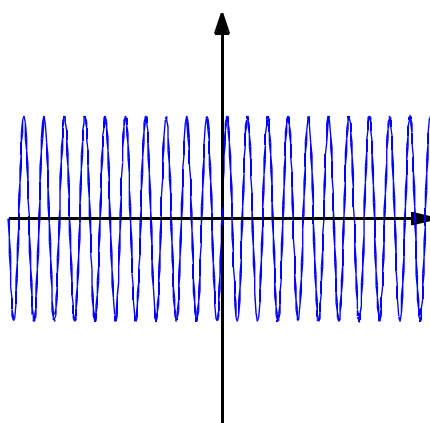
Objetivos

Depois de estudar esta aula você será capaz de

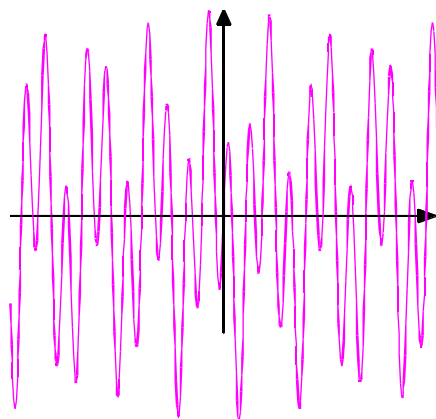
1. Definir os espaços vetoriais de funções n -vezes continuamente diferenciáveis em intervalos I da reta.
2. Definir as equações diferenciais lineares por meio de operadores lineares entre espaços $\mathcal{C}^n(I)$



$$S_1 \rightsquigarrow \text{sen}[(5\pi/2)x]$$



$$S_2 \rightsquigarrow -2\cos[(7\pi/2)(2x-1)]$$



$$-3S_1 + 2S_2 \rightsquigarrow -3\text{sen}[(5\pi/2)x] - 4\cos[(7\pi/2)(2x-1)]$$

Introdução

Nota Histórica

O século XVIII foi uma era de intenso desenvolvimento da teoria de equações diferenciais. Praticamente todos os matemáticos de destaque testaram suas habilidades em integrar (i.é resolver) equações diferenciais. Um grande número dos métodos elementares de integração de equações diferenciais, que constituem a parte inicial de todos os cursos universitários sobre o assunto (de que, aliás, nosso curso não foi exceção) foi estabelecido pelos matemáticos do século XVIII. Classes inteiras de equações e métodos de resolução foram estudados pelos maiores matemáticos de então: Clairaut, D'Alembert, Laplace, Monge, Lagrange, e, naturalmente, Euler. Em particular, grandes sucessos foram alcançados no estudo de equações lineares, que tem merecido atenção especial desde aquele tempo devido à sua grande ocorrência nas aplicações.



L.A. Cauchy

O trabalho do matemático francês Augustin Cauchy, no início do século XIX, inaugurou uma nova etapa na teoria de equações diferenciais.

O conceito central da teoria, antes de Cauchy, era o de solução geral de uma dada equação.

Uma vez obtida uma solução geral, as diversas soluções particulares eram obtidas pela atribuição de valores específicos às constantes. Nessa linha, o problema básico era o de achar a solução geral de uma dada equação. Procurava-se, via de regra, uma solução por quadraturas, isto é, uma solução dada por uma fórmula contendo somente funções elementares (polinômios, trigonométricas, exponencial, e suas inversas) numa combinação finita, construída por meio de operações algébricas e integrações. Cauchy inverteu essa perspectiva completamente, determinando uma nova direção principal de desenvolvimento da teoria de equações da forma $dy/dx = f(x, y)$.

Para ele, o conceito básico era o de solução particular de uma tal equação, a qual assumia um valor prescrito num ponto pré-fixado. O conhecimento de uma tal solução particular nos possibilita obter a solução geral. A questão mais importante passava a ser a da existência de uma solução particular; o que ficou conhecido como problema de Cauchy.

Uma de nossas metas a partir de agora é entender claramente essa “inversão de direção” do Cauchy, ou seja como construir uma noção de *solução geral* de uma equação diferencial partindo do conhecimento de soluções particulares. Só que a partir de agora estaremos restritos às equações lineares.

Os fenômenos lineares são tão importantes que merecem uma discussão mais demorada. Eles vão ocupar todo o restante do nosso curso. Para adquirir um pouco mais de familiaridade com a noção de linearidade, comecemos examinando o *princípio de superposição* de fenômenos físicos.

A noção matemática de linearidade, de certa forma, emerge de um princípio de superposição de causas e efeitos, que governa o relacionamento de diversos sinais e sistemas do mundo físico.

Sinais e Sistemas

Sinais fazem parte de nossa vida cotidiana de uma maneira indispensável. Para dar um exemplo, a forma mais básica de comunicação humana se desenvolve através do uso de sinais de fala. Seja por conversação cara a cara, por telefone, ou via computador. Outra forma de interação entre pessoas, ou do homem com o mundo é por meio de sinais visuais, imagens de pessoas ou objetos.

O correio eletrônico e a Internet são poderosos transportadores de sinais de um ponto a outro.

Ao ouvir os batimentos cardíacos de um paciente, ou examinar visualmente um eletrocardiograma, o médico interpreta sinais de som, sinais gráficos, que lhe transmitem informações sobre o estado de saúde do paciente.

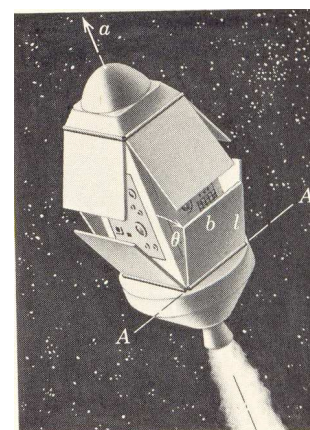
E os exemplos se multiplicam. As ilustrações desta página mostram dois sistemas de comunicações altamente sofisticados.

Um *signal*, como o próprio nome indica, é um conjunto de informações ou dados.

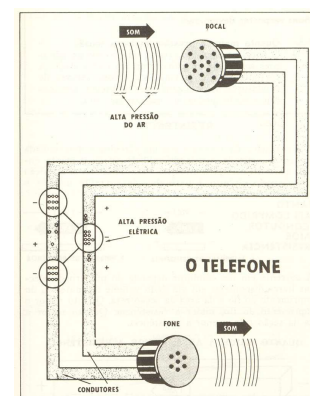
Do ponto de vista matemático, um sinal é uma função que representa uma quantidade ou variável física e contém informações sobre o comportamento ou natureza de um fenômeno. Os sinais sonoros, por exemplo, são traduzidos em ondas que se propagam através de um meio, emitidas por uma fonte e recebidas por um sistema capaz de extrair informações dessas ondas. As ondas sonoras são funções matemáticas da posição e do tempo.

Há sempre um sistema associado à geração de cada sinal, e outro associado à extração da informação transmitida pelo sinal. Na comunicação por telefone, por exemplo, uma fonte sonora emite os sinais de fala, que se propagam na forma de ondas de pressão no ar. Essas ondas são convertidas por meio de um sistema razoavelmente complexo, em sinais elétricos, que são transmitidos por uma rede de telefonia até o sistema receptor, que os reconverte sinais de pressão no ar, identificáveis pelo ouvinte, que aliás os processa recorrendo a um outro sistema, o auditivo, que traduz as vibrações que as ondas recebidas provocam nos tímpanos em informações (sinais) elétricos, que são levados pela rede neurológica a uma região bem específica do cérebro, que as reprocessa e permite ao receptor tomar atitudes, decisões.

Um sistema pode ser formalmente definido como uma entidade que manipula um



Um satélite artificial pode medir, por exemplo, temperatura e radiação - os sinais de entrada - e codificar esta informação em um sinal de rádio de alta frequência (a saída)



ou mais sinais para realizar uma função, produzindo assim novos sinais.

Matematicamente um *sistema* é um modelo de um processo físico que recebe um sinal de entrada (um excitação), modifica-o, ou extrai dele alguma informação, e produz um sinal de saída (uma resposta).

Um *sistema* é então como que uma “máquina” que transforma um sinal de entrada (função) “ X ” numa resposta (função) “ Y ”.

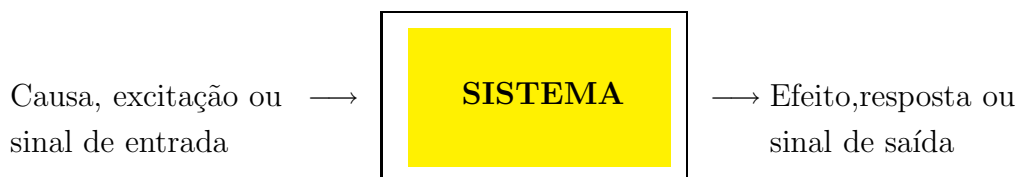


Figura 11.1

Vamos nos limitar aos sistemas que satisfazem à seguinte condição de regularidade: sempre que ele é alimentado por uma excitação de tipo X , ele produz uma resposta Y , que pode ser do mesmo tipo de X ou não.

Sistemas Lineares

Suponha que temos uma entrada X_1 , para a qual um sistema produz uma saída Y_1



Figura 11.2

Suponha também que o sistema produz a resposta Y_2 a uma outra entrada X_2

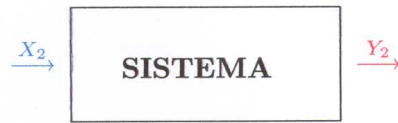


Figura 11.3

Agora vamos continuar nossa exploração e alimentar nossa máquina (o Sistema) simultaneamente com as entradas X_1 e X_2 ; supondo que podemos representar essa entrada simultânea pela *soma* das entradas individuais, ou seja, agora a entrada do sistema é $X_1 + X_2$:

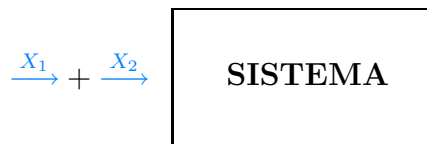


Figura 11.4

Se a resposta do sistema a esta entrada combinada (“superposta”) $X_1 + X_2$ é exatamente a soma das respostas individuais a X_1 e a X_2 , i.é, $Y_1 + Y_2$, diremos que o sistema é aditivo.

A representação simbólica da saída é

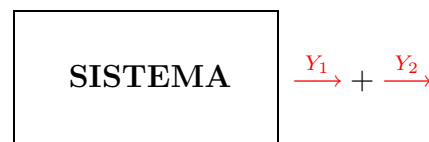


Figura 11.5

Admitamos finalmente que podemos alimentar nossa máquina com uma entrada $\alpha \cdot X$, (α sendo um número real qualquer),



Figura 11.6

e que a resposta a $\alpha \cdot X$ seja precisamente igual a α vezes a resposta individual a X , $\alpha \cdot Y$

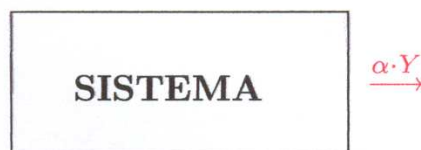


Figura 11.7

Em resumo: À superposição de “entradas” o sistema responde com a superposição das respectivas “saídas”.

A seqüência de diagramas, das figuras 11.2 a 11.7, fornece o esquema básico do princípio superposição. Por mais que pareça um modelo simplificado demais, literalmente inúmeros “sistemas” concretos do mundo físico têm exatamente este comportamento. Bem verdade que um grande número de modelos “concretos” envolve superposições de um número infinito de entradas e/ou saídas. Mas o princípio de linearidade se mantém.

Uma observação: A figura da começo da aula mostra um sistema que processa os sinais representados pelas funções $\sin[(5\pi/2)x]$ e $-2\cos[(7\pi/2)(2x-1)]$. A terceira figura é o sinal representado pela função $-3\sin[(5\pi/2)x] - 4\cos[(7\pi/2)(2x-1)]$, superposição de menos três vezes o primeiro sinal com duas vezes o segundo sinal.

Nota: Repare que os sinais, em si, não são lineares, são funções não-lineares. Quem tem um procedimento linear é o sistema.

Se Y representa a resposta de um sistema a uma entrada genérica X , então podemos representar o sistema como sendo uma *transformação* de \mathbf{T} , um *operador* que leva X em Y .

$$X \xrightarrow{\mathbf{T}} Y,$$

ou

$$\mathbf{T} \cdot X = Y.$$

Comentário: Um fato curioso é que as “máquinas lineares”, isto é os agentes transformadores de sinais, tantas vezes são representados (modelados) por operadores diferenciais (ou integrais) lineares, conforme definição mais abaixo, cujas entradas e respostas são funções definidas em intervalos especificados que alguns autores chegam a caracterizar um sistema como sendo linear quando é possível modelá-lo por um (diferencial/integral) linear. Exageros à parte ¹, isso ilustra uma certa tendência de identificar um objeto com uma representação dele.

Não vamos mais além do que já fomos nessas areias movediças filosóficas. Daqui em diante, e até o final do curso, estaremos lidando com equações diferenciais lineares, que serão caracterizadas por meio de operadores diferenciais lineares, os quais podem ser pensados como sistemas que admitem como entradas funções de uma certa coleção, transformando-as segundo procedimentos lineares, e produzindo como resposta outras funções.

¹ todos conhecemos exemplos de sistemas representados por álgebras lineares

Atenção! Não afirmamos que todo sistema linear é representado por um operador diferencial. Existem sistemas para os quais vale o princípio de superposição que utilizam outras representações matemáticas, mas neste curso estaremos interessados somente nos sistemas representáveis por equações diferenciais

Nossa agenda de trabalho é a seguinte:

- caracterizar e estudar os conjuntos de funções que contêm as entradas e respostas dos sistemas lineares (os quais serão sempre representados por operadores diferenciais lineares)
- definir rigorosamente uma equação diferencial linear
- definir as soluções de equações lineares (serão as entradas que são transformadas, pelo sistema, em uma função pré-determinada), estudar as idéias de Cauchy sobre a existência de soluções gerais de equações diferenciais lineares e aprender os métodos básicos de obtenção de soluções
- finalmente, exemplificar o princípio de superposição de causas e efeitos com alguns modelos dados por equações diferenciais, de fenômenos do mundo “físico”, resgatando a identificação entre os fenômenos lineares e as equações diferenciais lineares.

Os espaços $\mathcal{C}^k(I)$

Os espaços $\mathcal{C}^k(I)$ são os conjuntos que contêm as entradas e as saídas dos sistemas que são associados a equações diferenciais lineares.

Considere um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ qualquer. Este intervalo pode ser limitado, (a, b) ; limitado só por um lado, $(a, +\infty)$; ou mesmo a reta toda, que sempre pode ser pensada como o intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Obs: Como regra geral, vamos trabalhar só com intervalos abertos.

- Uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável em I , ou de classe \mathcal{C}^1 no intervalo I se

- 1) f é derivável em todos os pontos de I
- 2) A função derivada f' é contínua em I

Exemplo 11.1

Exemplos triviais são as funções constantes, a função identidade, as funções polinomiais (em quaisquer intervalos).

Atividade 11.1

Assinale verdadeiro ou falso no espaço indicado:

$$i) \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{é de classe } \mathcal{C}^1 \text{ em } \mathbb{R} \quad \text{V () } \text{ F ()}$$

ii) sen $x \left(\frac{|x|}{x} \right)$ é de classe \mathcal{C}^1 em \mathbb{R} $\forall () \quad \mathcal{F} ()$

- Uma função é duas vezes continuamente diferenciável em I se é duas vezes derivável em todos os pontos de I e a função segunda derivada, f'' , é contínua em I

- De maneira geral, uma função é m vezes continuamente derivável em I , ou de classe \mathcal{C}^m em I se é m vezes derivável em I e a função derivada de ordem m é contínua em I .

- Uma função de classe \mathcal{C}^0 em I é uma função apenas contínua em I .

- Representamos o conjunto das funções de classe \mathcal{C}^k em um intervalo I pelo símbolo $\mathcal{C}^k(I)$, ou $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$

Intuitivamente, o Teorema 11.1 assegura que o conjunto de funções que podem alimentar os sistemas lineares, i.e., os conjuntos $\mathcal{C}^k(I)$, não são vazios, e que se f e g são funções de um desses conjuntos, então $f + g$ e $\alpha \cdot f$ também estão em $\mathcal{C}^k(I)$, e portanto podem alimentar o sistema. Matematicamente trata-se apenas de um caso particular de um fato bem conhecido do nosso curso de Álgebra Linear: qualquer subconjunto não-vazio \mathcal{W} de um espaço vetorial (no caso \mathcal{V} - o espaço vetorial de todas as funções de I em \mathbb{R}) que é fechado com relação à adição de elementos de \mathcal{V} , e com relação à multiplicação de elementos de \mathcal{V} por números, é -ele mesmo - um espaço vetorial contido em \mathcal{V} , o que significa que adicionando elementos de \mathcal{W} , não saímos de \mathcal{W} . O mesmo ocorre com a multiplicação de um elemento de \mathcal{W} por um número real. Podemos ignorar (se nos for conveniente) o espaço maior \mathcal{V} .

Teorema 11.1

Para cada $k \geq 0$,

- a função nula θ definida por $\theta(x) = 0$ para todo $x \in I$ pertence a $\mathcal{C}^k(I)$.
- se f e g são funções de $\mathcal{C}^k(I)$ então $f + g$ definida em cada ponto de I por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ a função αf definida em cada ponto de I por $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ também é função de $\mathcal{C}^k(I)$.

Aplicando este resultado ao nosso contexto, concluímos que: os conjuntos $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ são subespaços vetoriais dos espaços vetoriais $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ de todas as funções de I em \mathbb{R} .

Em particular, para todo k , cada $\mathcal{C}^k(I)$ é - ele mesmo - um espaço vetorial real.

Lembrete: Os elementos desses espaços $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ são *funções* (não mais obrigatoriamente n -uplas de números reais, ou setas desenhadas num plano, ou matrizes \dots)

Atividade 11.2

Toda função da classe $\mathcal{C}^k(I)$ é automaticamente da classe $\mathcal{C}^{k-1}(I)$.

Dizendo de maneira mais precisa,

“Para cada $k \geq 1$, se f é uma função de $\mathcal{C}^k(I)$ então f pertence a $\mathcal{C}^{k-1}(I)$ ”

Verifique esta afirmação para a função

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

no espaço $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Isto é:

- i) Mostre que f é derivável em todo \mathbb{R}
- ii) Mostre que f' é contínua em \mathbb{R}

As equações diferenciais lineares

As equações diferenciais lineares serão definidas a partir de um operador (sistema) básico, o operador D :

Definição 11.1

Para cada $k \geq 1$,

$$D : \mathcal{C}^k(I) \longrightarrow \mathcal{C}^{k-1}(I)$$

é definido por

$$D(f) = \frac{d}{dx}(f) = f'$$

Assim

Exemplo 11.2

$$D(x) = 1, \quad D(\operatorname{sen} x) = \cos x, \quad D(e^{ax}) = ae^{ax}, \text{ etc}$$

Obs: Cada vez que o operador D atua sobre uma função, ele produz uma função de classe menor ou igual à da função original.

A seguir, definimos as potências do operador D . Para cada $n \geq 0$

$$D^n =: \underbrace{D \circ \cdots \circ D}_{n \text{ vezes}}$$

Por definição

$$D^0 \equiv Id.$$

Id é a função identidade: $Id(x) = x$ para todo $x \in I$

Simbolicamente, para cada $n \geq 1$, $D^n \equiv \frac{d^n}{dx^n}$

Anote: O operador D^n só pode se aplicar a funções que sejam no mínimo n vezes deriváveis. Entretanto, para podermos explorar as equações lineares de modo conveniente, vamos exigir que a função $D^n(f)$ seja contínua. Ou seja, exigiremos que D^n seja um operador definido em $\mathcal{C}^n(I)$, e que seu contra-domínio seja $\mathcal{C}^0(I)$, o conjunto das funções contínuas em I .

Exemplo 11.3

$$D^2(\text{sen } x) = -\text{sen } x, \quad D^n(xe^x) = ne^x + xe^x, \text{ etc}$$

Operações com os operadores D

Definimos agora operações envolvendo os operadores D^n :
a *adição de operadores* e a *multiplicação de operadores por funções de classe* \mathcal{C}^k , $k \geq 0$:

Definição 11.2

Dados dois operadores D^n e D^m , o operador soma $D^n + D^m$ atua sobre as funções de $\mathcal{C}^n(I) \cap \mathcal{C}^m(I)$ da seguinte maneira

$$(D^n + D^m)(f) \stackrel{\text{def}}{=} D^n(f) + D^m(f)$$

ou, dizendo de outro modo,

$$\forall x \in I, (D^n + D^m)(f)(x) = D^n(f)(x) + D^m(f)(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x) + \frac{d^m f}{dx^m}(x)$$

Para cada $n \geq 0$, $f \cdot D^n$ é definido por

$$(f \cdot D^n)(g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \frac{d^n g}{dx^n}(x),$$

para todo $x \in I$

Anote também: Em vez de $(f \cdot D^n)(g)$ é comum escrever $f(x)D^n(g)$ ou então $f(x)g^{(n)}$

Exemplo 11.4

$$(x^3 D^2)(y) = x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} = x^3 y''$$

Um *operador diferencial linear canônico de ordem n* sobre o intervalo I é um operador definido por

Um operador canônico de ordem n pode ser visto como o modelo de um sistema que admite com entradas funções de $\mathcal{C}^n(I)$ e as transforma, de acordo com as operações de adição de operadores D^k e multiplicação de operadores D^k por funções em respostas que são funções de $\mathcal{C}(I)$.

Escreva as expressões abaixo na forma $L \cdot y$, sendo L um operador diferencial canônico. Indique a ordem de L :

Solução:

Obs: Nos itens (a) e (c) substituímos respectivamente a função identidade e a função $Id.sen(x)$ pelo número 1 e por $sen(x)$ apenas. Esta é uma prática comum, mas devemos exercê-la com cuidado. Por exemplo, o operador $L \equiv xD^2 - 4D + 7$ é a mesma coisa que $xD^2 - 4D + 7Id$.

Assim

e não

Construindo novos operadores canônicos a partir de operadores conhecidos;

Podemos estender as operações de adição de operadores D^k , multiplicação de operadores D^k por funções; e composição de operadores D^n aos elementos do espaço de todos os operadores lineares canônicos sobre I .

Por exemplo, Se $L_1 = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_1(x)D + a_0(x)Id$ o que escrevemos abreviadamente como $L_1 = \sum_{k=0}^n a_k(x)D^k$ e se $L_2 = \sum_{k=0}^m b_k(x)D^k$ definimos $L_1 + L_2$ por

$$(L_1 + L_2) = \sum_{k=0}^r [a_k(x) + b_k(x)]D^k$$

Obs: r representa o maior dos números n e m . Se necessário, completamos os coeficientes do operador de menor ordem com a função nula, como fazemos com a adição de polinômios.

- Definamos agora $f(x) \cdot L = f(x) \cdot \left(\sum_{k=0}^n a_k(x)D^k \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n [f(x) \cdot a_k(x)]D^k$

- Por fim, se definimos, da maneira óbvia, a composição de operadores $f(x)D^n$ e $g(x)D^p$

$$[f(x)D^n] \circ [g(x)D^p](y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \frac{d^n}{dx^n} \left[g(x) \frac{d^p y}{dx^p} \right]$$

esta operação se estende à composição de operadores $L_1 \circ L_2$ (também denotada simplesmente por $L_1 L_2$).

$L_1 \circ L_2$ é o operador que atua sobre elementos $y \in \mathcal{C}^n(I)$ da seguinte maneira

$$(L_1 \circ L_2)(y) \stackrel{\text{def}}{=} L_1[L_2(y)]$$

Alerta!! Você com certeza já percebeu a analogia que existe entre os operadores diferenciais canônicos e os polinômios.

Por exemplo, no caso da operação de adição:

Operador Diferencial Linear	Polinômio
$L_1 = \sum_{k=0}^n a_k(x)D^k$	$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$
$L_2 = \sum_{k=0}^m b_k(x)D^k$	$q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$
$(L_1 + L_2) = \sum_{k=0}^r [a_k(x) + b_k(x)]D^k$	$p(x) + q(x) = \sum_{k=0}^r [a_k + b_k]x^k$

Mas é preciso tomar cuidado, pois os coeficientes de um operador linear canônico podem ser funções, enquanto os coeficientes de um polinômio são sempre constantes. Quando os coeficientes de um operador linear canônico não são funções constantes, a associação da multiplicação (composição) de operadores com multiplicação de polinômios pode conduzir a erros.

Exemplo 11.6

Se $L_1 = xD - 1$ e $L_2 = xD + 1$ temos

$$\begin{aligned} L_1 L_2(y) &= (xD - 1)[(xD + 1).y] = (xD - 1)(xy' + y) = \\ &= xD(xy' + y) - (xy' + y) = x(y' + xy'' + y') - (xy' + y) = x^2 y'' + xy' - y = \\ &= [x^2 D^2 + xD - 1] \cdot y \end{aligned}$$

Portanto

$$L_1 L_2 = x^2 D^2 + xD - 1.$$

Se tivéssemos efetuado a multiplicação (i.é, a composição) de $xD - 1$ por $xD + 1$ como a multiplicação de polinômios teríamos obtido como resposta

$$L_1 L_2 = x^2 D^2 - 1,$$

que é uma resposta errada.

Atividade 11.3

(i) - Calcule $L_1 + L_2$ e $L_2 L_1$ sendo $L_1 = xD - 3x^2$ e $L_2 = 2\sin xD^3 + 1$

Resposta: $L_1 + L_2 =$ _____

$L_2 L_1 =$ _____

(ii) - Mostre através de um exemplo, que, em geral, $L_1 L_2 \neq L_2 L_1$

Solução: _____

Equações Diferenciais lineares de ordem n , finalmente**Definição 11.4**

Uma *equação diferencial linear de ordem n* , num intervalo I é uma equação da forma

$$a_n(x)D^n y + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + a_1(x)Dy + a_0(x)y = h(x), \quad (11.1)$$

onde as funções a_i , chamadas de *funções coeficientes*, e a função h , chamada de termo independente ou segundo membro da equação, são pelo menos contínuas em I .

Na linguagem de operadores lineares canônicos, a equação diferencial (11.1) é escrita simplesmente como $L(y) = h$, (ou $L \cdot y = h$, ou mesmo $Ly = h$), sendo - é claro -

$$L(y) \stackrel{\text{def}}{=} a_n(x)D^n y + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + a_1(x)Dy + a_0(x)y$$

Obs: Dizemos que a equação (11.1) é linear porque o operador L é linear. Isto é

$$\forall y_1, y_2 \in \mathcal{C}^n(I), \quad L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$

e

$$\forall y \in \mathcal{C}^n(I), \forall c \in \mathbb{R} \quad L(cy) = c L(y)$$

Alguns conceitos e nomenclaturas usuais:

- A *ordem* da equação diferencial linear $L(y) = h(x)$ é por definição igual ao maior expoente n dos operadores D^k que ocorrem na equação.
- A equação é homogênea se o segundo membro h é a função θ , identicamente nula sobre o intervalo I
- A equação é de coeficientes constantes se $\forall i, a_i$ é uma função constante, em cujo caso escrevemos

$$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \cdots + a_1 D y + a_0 y = h(x)$$

Um operador diferencial linear de ordem n pode ser visto esquematicamente como um sistema

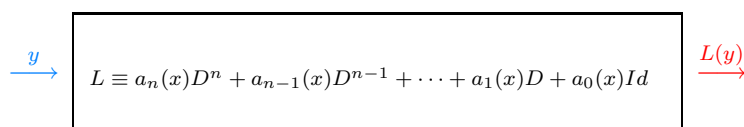


Figura 11.8

Nessa representação, uma *solução* da equação $Ly = h$ é uma função do conjunto de entradas que é transformada por L na função h .²

Mas o estudo das soluções de uma equação diferencial linear fica para a próxima aula.

² L é um operador constante sobre o conjunto das entradas que são soluções

Exercícios**Exercício 11.1**

Considere $I = \mathbb{R}$. Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

é de classe \mathcal{C}^1 .

Solução: Devemos mostrar que f é derivável em todo o \mathbb{R} e que sua derivada é contínua em \mathbb{R} .

Para mostrar que $f'(0)$ existe, precisamos calcular $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$ e mostrar que ambos são iguais. Nos outros pontos não há problemas.

Para mostrar que f' é contínua em 0, precisamos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'(0)$$

Exercício 11.2

Calcule as seguintes expressões:

a) $(D^2 + D)e^x$

b) $(D - 7)\sin x$

c) $[xD^2 - (\sin x)D + 4](\cos x)$

d) $(e^x D - x)(x^3 \sin x)$

Obs: $D - 7$ é o operador $D - 7Id$, $(e^x D - x)$ é o operador $(e^x D - xId)$

Respostas:

a) $2e^x$

b) $-\cos x - 7\sin x$

c) $\sin^2 x + (4 - x) \cos x$

d) $(3x^2 e^x - x^4) \sin x + x^3 e^x \cos x$

Exercício 11.3

Escreva o operador $D^2(xD - 1)$ na forma canônica $a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_1(x)D + a_0(x)Id$

Sugestão: Aplique o operador dado em uma função y arbitrária.

Resposta: $D^2(xD - 1) = xD^3 + D^2$

Exercício 11.4

Calcule a soma $L_1 + L_2$ e o “produto” $L_1 \circ L_2$ de cada uma dos seguintes pares de operadores diferenciais lineares sobre \mathbb{R}

a) $L_1 = D^2 + D$

$L_2 = D - 7e^x$

b) $L_1 = e^x D^2 - D + 4$

$L_2 = e^{-x} D^2 + D$

Respostas:

a) $L_1 + L_2 = D^2 + 2D - 7e^x$

$L_1 L_2 = D^3 + (1 - 7e^x) - 21e^x D - 14e^x$

b) $L_1 + L_2 = (e^x + e^{-x})D^2 + 4$

$L_1 L_2 = D^4 + (e^x - e^{-x} - 2)D^3 + (x + 4)e^{-x}D^2 + 4$

Exercício 11.5

Mostre que

$$(aD^m)(bD^n) = abD^{m+n}$$

sempre que a e b são constantes

Sugestão: Escreva o operador $aD^m)(bD^n)$ na forma canônica (aplicando-o a uma função arbitrária y).

Exercício 11.6

Calcule $(xD)^2(\operatorname{sen} x)$ e compare com $x^2D^2(\operatorname{sen} x)$.

Respostas: $(xD)^2(\operatorname{sen} x) = x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x$; $x^2D^2(\operatorname{sen} x) = -x^2 \operatorname{sen} x$

Conclusão Importante: Se os coeficientes não são constantes não podemos compor operadores lineares em estrita analogia com a multiplicação de polinômios. Isto é

$$(a(x)D^n) \circ (b(x)D^m) \neq a(x)b(x)D^{m+n}$$

Exercício 11.7

Decomponha o operador $D^2 - 3D + 2$ em um produto de dois operadores de ordem um.

Solução: Quando os coeficientes de um operador são todos constantes, o exercício 16.5 mostra que podemos tratar esse operador como se fosse um polinômio na “variável” D .

Associamos a $D^2 - 3D + 2$ o polinômio $x^2 - 3x + 2$

A fatoração deste último é $(x - 1)(x - 2)$

Por analogia, $D^2 - 3D + 2 = (D - 1)(D - 2)$

Você está convidado a verificar a igualdade de operadores, mostrando que a forma canônica de $(D - 1)(D - 2)$ é $D^2 - 3D + 2$

Exercício 11.8

Decomponha os operadores $D^4 - 1$ e $D^3 - 3D^2 + 4$ como produtos de operadores de menor ordem, cada um dos quais não pode ser “fatorado” como produto de operadores de ordem ainda menor

Respostas: Aplicando a técnica do exercício anterior (fatorando completamente os polinômios associados aos operadores):

$$D^4 - 1 = (D - 1)(D + 1)(D^2 + 1); \quad D^3 - 3D^2 + 4 = (D + 1)(D - 2)^2$$

Exercício 11.9

Determine os coeficientes e calcule a ordem da equação diferencial linear

$$(D + 1)^3y = 0$$

no intervalo $I = (0, 1)$

Respostas: A ordem é 3, e os coeficientes(segundo as “potências decrescentes” de D são

$$a_3 = 1, a_2 = 3, a_1 = 3, a_0 = 1$$

Exercício 11.10

Determine a ordem de cada uma das seguintes equações diferenciais lineares nos intervalos indicados

a) $(x + |x|)y''' - y' = \cos x$ em $(-1, 1)$; em $(0, +\infty)$

b) $\sqrt{x}y'' - 2y' + (\sin x)y = \ln x$ em $(1, +\infty)$

Respostas:

a) A equação é de ordem três em $(-1, 0)$, e de ordem um em $(0, 1)$

b) A equação é de ordem 2 em $(1, +\infty)$

Resumo

Nesta aula, com a ajuda do conceito de sistema

entrada \rightarrow sistema \rightarrow saída,

introduzimos a idéia de linearidade, associando-a a um princípio de superposição. Tornamos o estudo mais preciso introduzindo os espaços vetoriais de funções n vezes continuamente diferenciáveis em um intervalo e estudando os operadores diferenciais lineares como transformações definidas naqueles espaços vetoriais. Esses são os elementos necessários para o tratamento dos sistemas lineares, ou melhor de sistemas cujas representações matemáticas são equações diferenciais lineares. A aula terminou com a definição de equação diferencial linear de ordem n .

Avaliação

Convidamos você a reler o que foi escrito logo após a nota histórica do começo desta aula. Dissemos lá que o nosso ideal era o de determinar as soluções gerais de equações diferenciais ordinárias. Infelizmente quase nunca dá para cumprir este programa de obtenção de soluções gerais. Nem mesmo para equações de ordem um. Há exemplos de equações para as quais não se consegue uma expressão (envolvendo constantes arbitrárias) contendo todas as soluções. Todavia na categoria das equações diferenciais lineares, e não só de primeira ordem, é possível garantir a existência de soluções gerais.

Melhor ainda, essas equações diferenciais lineares ocorrem em muitos modelos matemáticos, ou como partes de modelos matemáticos, de diversos sistemas do mundo físico.

Nesta aula, procuramos apresentar alguns dos elementos necessários para compreender intuitivamente e definir rigorosamente as equações diferenciais lineares. Nas próximas aulas vamos definir suas soluções e aprender métodos efetivos para calculá-las em muitas situações importantes.

Aula 12 – Soluções de equações diferenciais lineares de ordem superior

Objetivos

Ao terminar de estudar esta aula, você estará apto a

- 1) Conceituar solução de uma equação diferencial linear de ordem n qualquer
- 2) Definir funções linearmente dependentes e linearmente independentes sobre um intervalo
- 3) Definir e calcular o determinante wronskiano de n funções $(n - 1)$ -vezes continuamente diferenciáveis em um intervalo I , utilizá-lo no estudo de soluções de equações diferenciais lineares em I .
- 4) Caracterizar o conjunto de soluções de uma equação diferencial linear de ordem n , homogênea, como subespaço vetorial de dimensão n , do espaço $\mathcal{C}^n(I)$

Soluções de equações lineares de ordem n

Definição 12.1

Dizemos que uma função φ é uma solução de $Ly = h(x)$ se $\varphi \in \mathcal{C}^n(I)$ e $\forall x \in I$,

$$L(\varphi(x)) = a_n(t)D^n\varphi(x) + a_{n-1}(t)D^{n-1}\varphi(x) + \cdots + a_1(t)D\varphi(x) + a_0(t)\varphi(x) = h(x)$$

Exemplo 12.1

- A função $\varphi(x) = e^{2x}$ é solução da equação diferencial linear de primeira ordem $y' - 2y = 0$ em $I = \mathbb{R}$, pois é de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e $\forall x \in \mathbb{R}$, $(e^{2x})' - 2e^{2x} = 0$.

- A função $y = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x$ é solução da equação linear de segunda ordem $4x^2 y'' + 4xy' + (4x^2 - 1)y = 0$ no intervalo $(0, +\infty)$

Atividade 12.1

Verifique se a função $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$ é solução da equação

$$[D^2 + (\operatorname{tg} x)D - 6 \cot g^2 x] y = 0$$

no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Resposta: _____

Comentário:

Usando a visualização de equações diferenciais lineares como sistemas que produzem respostas a entradas que lhes são fornecidas,

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{y} & \boxed{L \equiv a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)Id} & \xrightarrow{L(y)} \end{array}$$

Figura 12.1

temos o seguinte: dada uma função $h(x)$ em $\mathcal{C}^0(I)$, resolver a equação linear $L \cdot y = h(x)$ é calcular as entradas y que são levadas, por L , exatamente sobre a função h .

Então o conjunto das soluções é um subconjunto do conjunto de entradas. É o conjunto *imagem inversa* de h , por L :

$$L^{-1}\{h\} \subset \mathcal{C}^n(I)$$

Naturalmente o problema de determinar todas as soluções de uma equação diferencial linear é o problema de descrever $L^{-1}\{h(x)\}$.

O Teorema de Existência e Unicidade de Soluções

Para caracterizar o conjunto de todas as soluções de uma equação diferencial linear, utilizaremos uma versão de um resultado fundamental, demonstrado pela primeira vez por Cauchy, (não somente para equações diferenciais lineares, mas para equações não lineares satisfazendo certas condições, as quais são sempre verificadas pelas equações lineares)

Trata-se do famoso Teorema de Existência e Unicidade de Soluções de problemas de valor inicial, o qual exige - por razões técnicas - que as equações sejam *normais* no sentido da seguinte definição.

Definição 12.2

Uma equação diferencial linear

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x)$$

é *normal* no intervalo I se $\forall x \in I, a_n(x) \neq 0$

Um Problema de Valor Inicial (PVI) envolvendo uma equação diferencial linear de ordem n , normal, $Ly = h(x)$, definida num intervalo I , consiste em calcular uma solução $\varphi(x)$ da equação, definida em todo o intervalo e tal que

$$\varphi(x_0) = y_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

onde $x_0 \in I$ é um ponto qualquer (escolhido e fixado), e y_0, \dots, y_{n-1} são n números reais escolhidos arbitrariamente.

Para resolver um problema de valor inicial, devemos não somente achar uma solução de $Ly = h(x)$, como também achar a solução tal que seu valor e de suas derivadas sucessivas até a de ordem $n - 1$ em um ponto escolhido arbitrariamente no intervalo I sejam números escolhidos (também de maneira completamente livre).

Notação: É muito comum representar um problema de valor inicial da seguinte maneira concisa

$$\left\{ \begin{array}{l} L \cdot y = h(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{array} \right.$$

Onde L , como sempre, designa o operador linear

$$\begin{aligned} L &\equiv a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_0(x) = \\ &= a_n(x) D^n + a_{n-1}(x) D^{n-1} + \cdots + a_1(x) D + a_0(x), \end{aligned}$$

só que agora suposto ser normal (não esqueça)

Um resultado que parece improvável, mas que, ao contrário, pode ser rigorosamente provado, é que todo problema de valor inicial envolvendo equações lineares normais num intervalo possui uma solução; e essa solução é única.

Mais precisamente

Teorema 12.1**(Existência e Unicidade de Soluções de Equações Lineares)**

Seja

$$L \cdot y = h(x)$$

uma equação diferencial linear de ordem n , *normal*, definida num intervalo I , e seja x_0 um ponto qualquer de I . Então, para y_0, y_1, \dots, y_{n-1} números reais escolhidos arbitrariamente, existe uma, e somente uma, solução $\varphi(x)$ da equação acima, com a propriedade de que

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Comentário: A demonstração do Teorema de Existência e Unicidade (T.E.U) está além dos métodos que temos ao nosso dispor.

Algumas atividades e exemplos nos ajudarão a compreender melhor o Teorema de Existência e Unicidade (T.E.U.)

Atividade 12.2

As funções $\varphi_1(x) = -2$ e $\varphi_2(x) = x - 2$ ambas são soluções da equação diferencial linear de primeira ordem

$$xy' - y = 2,$$

a qual é normal no intervalo $(0, +\infty)$.

Mas seus gráficos não podem ter nenhum ponto em comum no intervalo $(0, +\infty)$. Caso existisse um ponto x_0 de $(0, +\infty)$ com $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) = y_0$, então teríamos duas soluções diferentes para o PVI

$$\begin{cases} xy' - y = 2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{o que é proibido pelo T.E.U..}$$

Desenhe, no espaço ao lado,
os gráficos das funções $\varphi_1(x)$
e $\varphi_2(x)$ do exemplo (12.2).
Observe que esses gráficos
não se cortam em nenhum
ponto do intervalo aberto
onde a equação é normal.

Comentário: Uma constatação trivial, mas importante, que podemos fazer a partir do teorema de existência e unicidade é que o conjunto-solução de uma equação diferencial linear normal não é vazio. Isso pode até parecer um detalhe de menor importância, mas - ao contrário - nos dá uma enorme garantia de que, quando estivermos tentando resolver uma equação linear, não estaremos trabalhando em vão.

Exemplo 12.2

As funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \operatorname{cos} x$ não podem ser soluções de uma mesma equação diferencial linear de primeira ordem no intervalo $(0, \pi)$, pois seus gráficos se cortam num ponto deste intervalo, e isso é proibido pelo Teorema de existência e Unicidade.

Atividade 12.3

Assinale V para as afirmativas que você considera corretas e F para as incorretas:

- 1) As funções seno e cosseno podem ser soluções de equações de primeira ordem no intervalo $(0, \pi)$ ()
- 2) As funções seno e cosseno podem ser soluções de um mesmo PVI envolvendo uma equação linear de segunda ordem no intervalo $(0, \pi)$ ()
- 3) As funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$ não podem ser soluções de um mesmo PVI envolvendo uma equação linear de segunda ordem no intervalo $(-\pi, \pi)$ ()

Equações Diferenciais Lineares Homogêneas

Começaremos agora a tirar partido da Álgebra Linear que estudamos anteriormente. Sabemos por exemplo que o núcleo de um operador linear é sempre um subespaço do espaço domínio.

Portanto ...

... quando $h = 0$, a função constante nula, e a equação é normal, o conjunto de soluções, $L^{-1}\{0\}$, é um *subespaço vetorial* de $\mathcal{C}^n(I)$ ³.

É por aí que vamos iniciar o trabalho de obtenção de soluções de equações lineares normais.

Em determinado momento, o resultado fundamental, Teorema de Existência e Unicidade de soluções, de Cauchy, intervirá de modo decisivo.

As noções de dependência/ independência lineares de soluções de equações diferenciais lineares homogêneas

Nossa meta, até o final da aula 13, é mostrar que o conjunto de soluções de uma equação diferencial linear homogênea normal de ordem n é subespaço vetorial de dimensão n de $\mathcal{C}^n(I)$.

O que significa isso?

Significa que o conjunto $L^{-1}\{0\}$ possui bases com n elementos - digamos $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ - de tal modo que todo elemento de $L^{-1}\{0\}$, isto é *toda* solução da equação homogênea, se escreve como combinação linear

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x). \quad (12.1)$$

Ora, a equação (12.1) nada mais é do que a solução geral da equação homogênea normal, no sentido pleno da expressão; isto é, (12.1) é uma fórmula contendo todas as soluções possíveis da equação diferencial linear homogênea normal.

O interessante é que para provar isso, vamos apelar para o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções, que é um teorema que garante a existência de soluções particulares.

É isso que chamamos antes de “virada de mesa” de Cauchy.

Para chegar lá, vamos por partes. Quando se fala em base, está-se falando de vetores linearmente independentes. Convém formular a noção de independência linear para funções. É o que passamos a fazer.

Digressão geométrica

Para fixar idéias, considere inicialmente o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$ cujos elementos podem ser representados graficamente por setas (segmentos orientados)

Se dois vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 são paralelos, então existe uma reta passando pela origem sobre a qual podemos considerar cópias dos vetores, obtidas por translação paralela

³Adotaremos a prática comum de denotar a função constante nula simplesmente pelo símbolo 0, e o subespaço trivial contendo somente a função nula por $\{0\}$

Soluções de equações diferenciais lineares de ordem superior

Obs: Continuamos a denotar os vetores transladados por \vec{v}_1 e \vec{v}_2 .

Em seguida, fazemos novas translações, de modo que os dois segmentos que representam os vetores, tenham suas origens no ponto $(0, 0)$. Finalmente, multiplicando esses vetores (que continuamos sempre chamando de \vec{v}_1 e \vec{v}_2) por constantes convenientes c_1 e c_2 não nulas podemos tornar os seus comprimentos iguais e, se já não for o caso, trocar o sentido de um deles para que tenham sentidos opostos.

Toda essa ginástica mostra que é possível caracterizar por meio de uma equação o fato de dois vetores serem paralelos, ou poderem ser deslocados paralelamente, de modo a pertencer a uma mesma reta, i.é, serem dependentes de uma mesma reta.

Que reta pode ser essa?

Certamente uma reta paralela aos vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 .

O problema é que existe um número infinito de retas paralelas a \vec{v}_1 e \vec{v}_2 . Para determinar de maneira única uma reta paralela a \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , escolhemos a que passa pela origem.

Dado um vetor não nulo qualquer, existe uma e uma única reta paralela a esse vetor passando pela origem.

Usando a reta passando pela origem podemos traduzir algebricamente o fato de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 serem paralelos.

Tomando as suas cópias sobre aquela reta, multiplicamos cada vetor por um coeficiente de ajuste de modo que sua soma venha a ser exatamente o vetor nulo.

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = 0 \quad (12.2)$$

Observações:

- Você deve se convencer de que, para que a equação algébrica (12.2) traduza o fato de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 serem paralelos, não podemos ter c_1 e c_2 simultaneamente nulos. Se c_1 e c_2 pudessem ser ambos nulos então quaisquer vetores (paralelos ou não) satisfariam uma equação da forma acima.
- Portanto a equação (12.2) não serviria para caracterizar paralelismo.
- Dados dois vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 de um espaço vetorial qualquer, uma expressão da forma

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$$

é chamada de *combinação linear* dos vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 . Os números c_1, c_2 são os *coeficientes* da combinação linear.

- Podemos considerar a condição expressa pela equação (12.2) como uma espécie de tradução, sem figuras, do fato de os vetores serem paralelos (dependerem de uma mesma reta). Assim,

Os vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 dependem de uma mesma reta se existir uma combinação linear nula deles, onde nem todos os coeficientes são nulos.

Você deve observar que é importante que os coeficientes c_1 e c_2 não sejam simultaneamente nulos. Se não fizermos esta exigência, quaisquer dois vetores \vec{w}_1 e \vec{w}_2 , paralelos ou não, podem ser multiplicados pela constante $c = 0$, i.é, fazemos $c_1 = c_2 = 0$ na combinação linear da equação (12.2) e então $c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2 = 0$

Tente imaginar como seria mostrar, por meio de um diagrama, fazendo translações e multiplicações por constantes, que duas matrizes, ou duas funções, são dois vetores paralelos, ou linearmente dependentes.

Inimaginável, não é?

- Dois vetores são linearmente independentes se não são paralelos, i.é, se não podem ser transladados e ajustados convenientemente de modo a que somem o vetor nulo. Em termos puramente algébricos \vec{v}_1 e \vec{v}_2 são linearmente independentes se a única maneira de termos $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = 0$ é quando $c_1 = c_2 = 0$. Ou ainda; \vec{v}_1 e \vec{v}_2 são linearmente independentes se a única combinação linear nula de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 é a que tem todos os coeficientes iguais a zero.
- As caracterizações algébricas de dependência e independência lineares se estendem de modo imediato a um número finito de vetores de qualquer natureza. Vamos nos apoiar nesta construção que não envolve apelo a figuras para determinar se um conjunto de funções de $C^n(I)$ é formado por funções linearmente dependentes ou não.

O vetor nulo é sempre um ponto de qualquer reta passando pela origem, seja qual for a direção da reta.

Definição 12.3

- Um conjunto $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ de funções pertencentes ao $\mathcal{C}^1(I)$ é linearmente dependente se existem constantes c_1, \dots, c_k não simultaneamente nulas, tais que

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_k\varphi_k(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

- $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ é um conjunto linearmente independente se

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_k\varphi_k(x) = 0 \quad \forall x \in I \implies c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$$

P Anote aí: Na combinação linear $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_k\varphi_k(x)$ usada para decidir a dependência ou independência linear de um conjunto de funções, não podemos ficar trocando os valores das constantes de acordo com a variável x . Examine o exemplo a seguir:

Exemplo 12.3

Consideremos as funções $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{cos} x$ do espaço $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Queremos saber se elas são linearmente dependentes ou linearmente independentes (ou nenhuma das duas coisas).

Formamos a expressão

$$c_1 \operatorname{cos} x + c_2 \operatorname{sen} x = 0 \tag{12.3}$$

e investigamos se as constantes têm de ser ambas nulas, ou se existem constantes não simultaneamente nulas que tornam esta relação verdadeira para todos os valores de $x \in \mathbb{R}$. Vejamos

Se escolhermos $x = 0$ na equação (12.3) ficamos com a igualdade

$$c_1 \operatorname{cos} 0 + c_2 \operatorname{sen} 0 = 0$$

de onde concluímos que $c_1 = 0$

Então devemos ter $c_1 = 0$ sempre. Pois 0 é o único valor que torna a equação (12.3) verdadeira para $x = 0$. E a relação tem de ser verdadeira para todos os valores de x , em particular para $x = 0$

Escolhendo agora $x = \pi/2$ na equação (12.3) obtemos

$$c_1 \operatorname{cos} \pi/2 + c_2 \operatorname{sen} \pi/2 = 0$$

de onde concluímos que $c_2 = 0$. De acordo com o mesmo raciocínio, devemos ter c_2 sempre.

Assim

$$c_1 \cos x + c_2 \sin x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies c_1 = c_2 = 0$$

Portanto $\sin x$ e $\cos x$ são funções linearmente independentes em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Vejamos mais um exemplo

Exemplo 12.4

Sejam as funções e^x , e^{-x} e $\cosh x$ no mesmo espaço $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Formemos a combinação linear nula

$$c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cosh x = 0$$

Como, por definição $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, então

$$\begin{aligned} c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cosh x = 0 &\Leftrightarrow c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{c_3}{2} e^x + \frac{c_3}{2} e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(c_1 + \frac{c_3}{2}\right) e^x + \left(c_2 + \frac{c_3}{2}\right) e^{-x} = 0 \end{aligned}$$

Observe agora que não precisamos ter todos os coeficientes iguais a zero.

Acontece que $c_1 = c_2 = -\frac{c_3}{2}$. Então podemos escolher qualquer valor para c_3 , por exemplo $c_3 = 1$ e tomarmos $c_1 = c_2 = -\frac{1}{2}$. Existe a combinação linear nula

$$\left(-\frac{1}{2}\right)e^x + \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-x} + 1 \cosh x = 0$$

onde nem todos os coeficientes são nulos.

Portanto o conjunto $\{e^x, e^{-x}, \cosh x\}$ é linearmente dependente em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Funções Linearmente Independentes - continuação

Teorema 12.2

Sejam $y_1(x)$, $y_2(x)$, \dots , $y_n(x)$ funções $(n-1)$ -vezes continuamente deriváveis no intervalo aberto I .

Suponha que existe um ponto $x_0 \in I$ tal que os vetores

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_n(x_0) \\ y_n'(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

sejam linearmente independentes em \mathbb{R}^n .

Então as funções $y_1(x)$, $y_2(x)$, \dots , $y_n(x)$ são linearmente independentes no espaço $\mathcal{C}^{n-1}(I)$

Demonstração:

Formemos a combinação linear nula

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0 \quad (12.4)$$

Precisamos mostrar que $c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0$.

Derivando $(n-1)$ -vezes a equação (12.4), obtemos o sistema

$$\begin{cases} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0 \\ c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \cdots + c_n y_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) + c_2 y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

Agora substituímos x por x_0 e reescrevemos o sistema na forma de uma equação vetorial:

$$c_1 \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} y_n(x_0) \\ y_n'(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como os vetores desta combinação linear são, por hipótese, linearmente independentes em \mathbb{R}^n então

$$c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0.$$

Ou seja, se temos uma combinação linear nula em $\mathcal{C}^n(I)$ como na equação 15.7, então todos os coeficientes são nulos.

Isso significa que as funções $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ são linearmente independentes no espaço $\mathcal{C}^{n-1}(I)$ ■

O teorema (12.2) transforma o problema de verificar se um conjunto de funções é linearmente independente no problema de verificar se um conjunto de n vetores em \mathbb{R}^n é linearmente independente. E para saber se um conjunto de vetores em \mathbb{R}^n é linearmente independente basta efetuar uma conta: calcular o determinante da matriz cujas colunas são os vetores.

Assim, nas condições do teorema (12.2), se o determinante

$$\det \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

for diferente de zero em algum ponto $x_0 \in I$ então as funções $y_1(x), \dots, y_n(x)$ são linearmente independentes em $\mathcal{C}^n(I)$.

Para referência e uso futuro registramos a seguinte definição:

Definição 12.4

Sejam $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funções $(n - 1)$ -vezes continuamente deriváveis no intervalo aberto I .

O determinante

$$W[y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)] = \det \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

é chamado de determinante *Wronskiano* das funções $y_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, no ponto x_0

Atividade 12.4

Diga se a frase abaixo é verdadeira ou falsa:

“As funções $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = e^x$, $y_3(x) = \tan x$ são linearmente independentes no intervalo $(-1/2, 1/2)$, pois seu determinante wronskiano em $x_0 = 0$ é diferente de zero.”

Resposta: _____

Explorando o determinante wronskiano

Abordaremos a questão da obtenção de soluções de equações lineares a partir da próxima aula.

Agora vamos estudar um resultado relativo ao determinante wronskiano, que vai nos facilitar a tarefa de decidir se um conjunto de soluções de uma equação é linearmente dependente ou independente.

Exemplo 12.5

Mostre que as funções $f_1(x) = xe^x$ e $f_2(x) = |x|e^x$ são linearmente independentes sobre $(-\infty, 0)$, mas $W[f_1(x), f_2(x)] = 0$

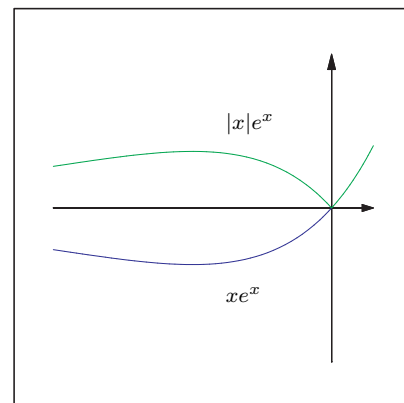
Solução:

Por um lado a combinação linear nula $c_1xe^x + c_2(|x|e^x) = 0$ nos dá como única possibilidade $c_1 = c_2 = 0$ (Fazendo $x = -1$ obtemos a equação $-c_1/e + c_2/e = 0$. Fazendo $x = 1$ obtemos $c_1e + c_2e = 0$. O único jeito de termos a equação verificada tanto para $x = 1$ quanto para $x = -1$ é $c_1 = c_2 = 0$. Então devemos ter $c_1 = c_2 = 0$ para todos os valores de x

Portanto f_1 e f_2 são linearmente independentes

Por outro lado, um cálculo simples nos fornece

$$W[xe^x, |x|e^x] = \det \begin{vmatrix} xe^x & -xe^x \\ e^x + xe^x & -e^x - xe^x \end{vmatrix} = -x^2e^x - xe^{2x} + xe^{2x} + x^2e^x = 0$$



Atenção!!! Não há nada de errado com o exemplo anterior. Revendo com cuidado o início desta aula, você vai perceber que o que nós fizemos foi mostrar que se o wronskiano era diferente de zero (bastava em um ponto) então as funções eram linearmente independentes.

O exemplo acima mostra que a recíproca não vale, em geral.

Atividade 12.5

Verifique que as funções x^3 e $|x|^3$ são linearmente independentes em $C^{+\infty}(\mathbb{R})$ e no entanto seu determinante wronskiano é identicamente nulo.

Sugestão: Calcule separadamente $W[x^3, |x|^3]$ para valores de $x \geq 0$ e valores de $x < 0$

*Mas o resultado recíproco não está totalmente perdido: se f_1, f_2, \dots, f_n forem soluções de uma mesma equação diferencial linear homogênea normal de ordem n , então*⁴

$$f_1, \dots, f_n \text{ são l.i.} \implies W[f_1(x), \dots, f_n(x)] \neq 0$$

⁴E esta é a situação que nos interessa, afinal

Você está convidado a demonstrar esta recíproca junto conosco.

Vamos lá?

Vamos demonstrar apenas o caso $n = 2$. A situação geral é análoga.

Queremos mostrar que se y_1 e y_2 são funções linearmente independentes em um intervalo I e ambas são soluções de uma equação diferencial linear de segunda ordem normal $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$ então

$$W[y_1(x), y_2(x)] \neq 0.$$

Obs: Provar o resultado acima é a mesma coisa que provar que

se y_1 e y_2 são soluções de uma equação diferencial linear de segunda ordem normal

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \quad e \quad W[y_1(x), y_2(x)] = 0$$

então y_1 e y_2 são linearmente dependentes.

É este segundo enunciado que vamos provar

Atividade 12.6

Complete as hipóteses:

- a) Hipótese 1: y_1 e y_2 são soluções da equação _____
- b) Hipótese 2: o determinante _____ é nulo no intervalo I

Escolha um ponto x_0 qualquer de I e forme o sistema de equações

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases} \quad (12.5)$$

As incógnitas do sistema (12.5) são _____ e _____

O determinante principal do sistema(12.5) é precisamente _____

Usando a hipótese _____ podemos garantir que o sistema é indeterminado.

Logo $c_1 = 0, c_2 = 0$ não é a única solução.

Seja $(\overline{c}_1, \overline{c}_2)$ uma solução diferente de $(0, 0)$

Assinale a alternativa correta:

A função

$$y(x) = \overline{c}_1 y_1(x) + \overline{c}_2 y_2(x) \quad (12.6)$$

é (___) / não é (___) uma solução da equação diferencial

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

Além disso a função (12.6) satisfaz às condições

$$y(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(x_0) = 0.$$

Mas a função nula também é uma solução da mesma equação e satisfaz às mesmas condições iniciais.

Então o Teorema de _____ de soluções de problemas de valor inicial obriga que as funções _____ e _____ sejam iguais em todos os pontos do intervalo I .

Podemos então escrever a igualdade

$$\overline{c}_1 y_1(x) + \overline{c}_2 y_2(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in I$$

Observando que pelo menos um dos coeficientes $\overline{c}_1, \overline{c}_2$ é diferente de zero, temos uma combinação linear nula das funções y_1, y_2 onde nem todos os coeficientes são iguais a zero.

Isso quer dizer que as funções _____ são _____ em I , o que conclui a demonstração.

Provamos que se valem as hipóteses (a) e (b) então y_1 e y_2 são linearmente dependentes.

■

Repetindo para não esquecer:

- Se $W[y_1(x_0), y_2(x_0)] \neq 0$ em algum ponto $x_0 \in I$ então $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes sempre
- Podemos ter $y_1(x)$ e $y_2(x)$ linearmente independentes e $W[y_1(x), y_2(x)] = 0$ em todos os pontos de I . Mas neste caso $y_1(x)$ e $y_2(x)$ não podem ser soluções de uma mesma equação linear homogênea normal de segunda ordem
- Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções de uma equação diferencial linear homogênea normal de segunda ordem então

$$y_1 \text{ e } y_2 \text{ são linearmente independentes} \iff W[y_1(x_0), y_2(x_0)] \neq 0$$

em algum $x_0 \in I$.

Comentário: Agora fica mais cômodo testar se um conjunto de soluções de uma mesma equação é linearmente independente ou não. Basta calcular o seu determinante wronskiano e checar se ele é diferente de zero em algum ponto.

Exemplo 12.6

a) $\varphi_1(x) = \sin x$, $\varphi_2(x) = \cos x$ e $\varphi_3(x) = e^x$ são soluções da equação

$$(D^3 - D^2 + D - 1)y = 0,$$

no intervalo $I = (-\pi/2, \pi/2)$

b) Calcule $W[\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0)]$

c) Determine a solução geral de $y''' - y'' + y' - y = 0$

Solução:

a) Verifiquemos apenas para a função seno. As demais verificações são semelhantes. Temos

$$\varphi_1(x) = \sin x, \quad \varphi_1'(x) = \cos x, \quad \varphi_1''(x) = -\sin x, \quad \varphi_1'''(x) = -\cos x$$

Substituindo na equação:

$$(-\cos x) - (-\sin x) + (\cos x) - (\sin x) = 0 \quad \text{para todo } x \in (-\pi/2, \pi/2)$$

Portanto $\varphi_1(x) = \sin x$ é solução da equação. //

b)

$$\begin{aligned} W[\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0)] &= \det \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & e^x \\ \cos x & -\sin x & e^x \\ -\sin x & -\cos x & e^x \end{pmatrix}_{x=0} = \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \end{aligned}$$

c) Como $W[\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0)] \neq 0$, o conjunto $\{\sin x, \cos x, e^x\}$ constitui uma base para o espaço das soluções de $y''' - y'' + y' - y = 0$.

A solução geral é $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 e^x$, onde c_1, c_2 e c_3 são constantes arbitrárias.

Atividade 12.7

(A fórmula de Abel e Ostrogradskii para o Wronskiano)

Considere a equação diferencial linear de segunda ordem, homogênea, normal em um intervalo I :

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (12.7)$$

Podemos dividir todos os coeficientes por $a_2(x)$ obtendo uma equação da forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (12.8)$$

onde $p(x) = a_1(x)/a_2(x)$ e $q(x) = a_0(x)/a_2(x)$.

Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções da equação (15.15).

a) Mostre que

$$\frac{d}{dx} W[y_1(x), y_2(x)] = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' \quad (12.9)$$

b) Como y_1 e y_2 são soluções da equação (15.15), temos

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \quad \text{e} \quad y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$$

Agora, tirando os valores de y_1'' e y_2'' respectivamente nestas duas últimas equações, e substituindo na fórmula (15.16), mostre que

$$\frac{d}{dx}W[y_1(x), y_2(x)] = -p(x)y_1y_2' + p(x)y_2y_1' = -p(x)(y_1y_2' - y_2y_1')$$

c) A última relação nos mostra que $W[y_1(x), y_2(x)]$ é solução da equação diferencial de primeira ordem, homogênea

$$z' + p(x)z = 0.$$

Escreva a expressão geral da solução desta linear homogênea de primeira ordem e obtenha a fórmula de Abel/Ostrogradskii para o wronskiano de duas soluções da equação (15.15):

$$W[y_1(x), y_2(x)] = Ce^{-\int p(x) dx} = Ce^{-\int [a_1(x)/a_2(x)] dx}$$

Esta última expressão é conhecida como fórmula de Abel para o Wronskiano de duas soluções da equação (12.7) (ou equação (15.15), é claro).

Exemplo 12.7

Calcule uma expressão para o wronskiano de um par de soluções da equação $x^2y'' + xy' + (x^2 + 1)y = 0$ no intervalo $(0, +\infty)$.

Solução: De acordo com a fórmula de Abel, se y_1 e y_2 são soluções da equação $x^2y'' + xy' + (x^2 + 1)y = 0$ no intervalo $(0, +\infty)$, então

$$[W[y_1(x), y_2(x)] = Ce^{-\int p(x) dx},$$

onde, neste caso $p(x) = \frac{x}{x^2}$. Assim,

$$W[y_1(x), y_2(x)] = Ce^{-\int 1/x dx} = \frac{C}{x}$$

Obs: Não devemos concluir que o wronskiano é independente do par de soluções. A constante C varia de acordo com as soluções consideradas. Para cada par de soluções temos uma constante particular.

Por exemplo, calculemos o wronskiano das duas soluções y_1 e y_2 da equação $x^2y'' + xy' + (x^2 + 1)y = 0$ que satisfazem às condições $y_1(1) = 0$, $y_1'(1) = 1$, $y_2(1) = y_2'(1) = 1$:

Já sabemos que a forma geral do wronskiano de qualquer par de soluções da equação acima é

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \frac{C}{x}$$

No ponto $x = 1$, $W[y_1(1), y_2(1)] = C/1 = C$.

$$\text{Por outro lado } W[y_1(1), y_2(1)] = \det \begin{pmatrix} y_1(1) & y_2(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

Portanto $C = -1$.

Concluimos então que o Wronskiano das soluções y_1 e y_2 da equação $x^2y'' + xy' + (x^2 + 1)y = 0$ que satisfazem às condições $y_1(1) = 0$, $y_1'(1) = 1$, $y_2(1) = y_2'(1) = 1$ é

$$W[y_1(x), y_2(x)] = -\frac{1}{x}$$



N.H. Abel 1802-1829
Apesar de sua curta vida, Abel deixou um legado matemático muito importante. É dele a demonstração de que é impossível resolver uma equação do quinto grau por meio de radicais

A dimensão do espaço das soluções

Tendo explorado um pouco uma das características que os vetores de uma base do espaço vetorial das soluções, $L^{-1}(0)$, devem possuir: a de serem linearmente independentes, chegou a vez de falar sobre a outra característica dos vetores de uma base de um espaço vetorial: *Eles devem gerar todos os vetores do espaço.*

Será o coroamento dos nossos esforços teóricos, e vai dar a direção segundo a qual prosseguiremos as atividades.

Teorema 12.3

Seja $L \equiv a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_1(x)D + a_0(x)$ um operador linear normal de ordem n em um intervalo I .

O espaço das soluções da equação homogênea $L \cdot y = 0$ tem dimensão finita e essa dimensão é precisamente n (a ordem da equação)

Esta demonstração evidencia a importância do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções no estudo de equações diferenciais.

Demonstração.⁵ Observe que nada do que fizemos até agora nos garantia que a dimensão do espaço das soluções era finita.

Demonstraremos o teorema, exibindo explicitamente um conjunto gerador do espaço das soluções, formado por n funções linearmente independentes.

Escolha um ponto $x_0 \in I$

Consideremos os n problemas com valores iniciais abaixo. Os vetores de valores iniciais são distintos, mas a equação diferencial linear de ordem n , homogênea e normal, é a mesma para todos.

$$\left\{ \begin{array}{l} L \cdot y = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} L \cdot y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \\ y''(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{array} \right\} \quad \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} L \cdot y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{array} \right\}$$

Sejam $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ as respectivas soluções desses PVI's.

Observando que $W[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), \dots, \varphi_n(x_0)] = \det Id_{(n \times n)} = 1$, podemos usar o teorema 14.2 para concluir que $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ são funções linearmente independentes.

Afirmamos agora que as funções $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ geram o espaço das soluções $Ker(L)$.

Para mostrar isto, devemos mostrar que toda solução ψ de $L \cdot y = 0$ se escreve como combinação linear das funções $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Isto é, devemos mostrar que, para cada $\psi \in Ker(L)$, existem constantes

$$c_1, c_2, \dots, c_n$$

tais que

$$\psi(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x)$$

para todo $x \in I$.

Podemos escolher $\psi \neq \theta$, pois $Ker(L) \neq \{0\}$, já que $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in Ker(L)$. E então o vetor de condições iniciais

$$(\psi(x_0), \psi'(x_0), \dots, \psi^{(n-1)}(x_0)) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

⁵Você pode pular esta demonstração num primeiro estudo

pois se $(\psi(x_0), \psi'(x_0), \dots, \psi^{(n-1)}(x_0))$ fosse o vetor nulo então o Teorema de Existência e Unicidade de soluções acarretaria que $\psi = \theta$, já que o vetor de condições iniciais da solução constante nula 0 também é $(0, 0, \dots, 0)$.⁶

Consideremos a função

$$\eta(x) = \psi(x) - c_1 \varphi_1(x) - c_2 \varphi_2(x) - c_3 \varphi_3(x) - \dots - c_n \varphi_n(x) \quad (12.10)$$

onde escolhemos $c_1 = \psi(x_0)$, $c_2 = \psi'(x_0)$, \dots , $c_n = \psi^{(n-1)}(x_0)$

Como L é um operador linear, então

$$L(\eta(x)) = L(\psi(x)) - c_1 L(\varphi_1(x)) - c_2 L(\varphi_2(x)) - \dots - c_n L(\varphi_n(x))$$

Para cada termo individual vale

$$L(\psi(x)) = 0, \quad L(\varphi_1(x)) = 0, \quad L(\varphi_2(x)) = 0, \quad \dots, \quad L(\varphi_n(x)) = 0$$

já cada uma das funções é uma solução da equação $L \cdot y = 0$, então

$$L(\eta(x)) = 0$$

Para cada $j = 1, 2, \dots, n-1$, calculando a derivada de ordem j das funções na equação (12.10), temos

$$\eta^{(j)}(x_0) = \psi^{(j)}(x_0) - c_1 \varphi_1^{(j)}(x_0) - c_2 \varphi_2^{(j)}(x_0) - \dots - c_n \varphi_n^{(j)}(x_0)$$

Assim

$$\eta(x_0) = \psi(x_0) - c_1 \cdot 1 - c_2 \cdot 0 - \dots - c_n \cdot 0 = 0$$

(lembre que $\psi(x_0) = c_1$, $\varphi_1(x_0) = 1$, e todos os demais $\varphi_k(x_0) = 0$, $k = 2, 3, \dots, n-1$)

Da mesma forma

$$\eta'(x_0) = \psi'(x_0) - c_1 \cdot 0 - c_2 \cdot 1 - \dots - c_n \cdot 0 = 0$$

(lembre que $\psi'(x_0) = c_2$, $\varphi_2'(x_0) = 1$, e todos os demais $\varphi_k'(x_0) = 0$, $k = 1, 3, \dots, n-1$)

Portanto

$$\forall j = 1, 2, \dots, n-1 \quad \eta^{(j)}(x_0) = 0$$

E isso diz que $\eta(x)$ é solução do PVI

$$L \cdot y = 0, \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Novamente apelando para o Teorema de existência e unicidade, conclui-se que $\eta = \theta$, de onde

$$\psi(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x)$$

como queríamos demonstrar ■

Encaminhamento

O teorema (14.3) fornece a estratégia para obter todas as soluções (i.é, a solução *geral*, no melhor sentido do termo) de uma equação diferencial linear de ordem n , homogênea e normal em um intervalo I

⁶E se $\psi = 0$, sempre poderemos escolher $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, não restando nada a demonstrar

- Encontre/calcule n soluções y_1, \dots, y_n da equação
- prove que essas soluções são linearmente independentes e \dots

\dots e pronto! A solução geral da equação é

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

Exercícios

Exercício 12.1

Verifique se $y(x) = e^x \operatorname{sen} x$ é solução de $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Exercício 12.2

Repita o exercício precedente para a função $y(x) = x \ln(-x)$ e a equação $x^2 y'' - xy' + y = 0$ no intervalo $(-\infty, 0)$

Exercício 12.3

Mostre que $y = 1/x$ é solução da equação $y' + y^2 = 0$. Mostre também que, se $C \neq 0, 1$ então $y = C/x$ não é solução.

Existe alguma contradição deste fato com o T.E.U. apresentado na aula?

Exercício 12.4

Determine quais dos pares de funções abaixo são linearmente independentes, e quais são linearmente dependentes na reta:

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------------------|
| a) $f(x) = \pi$ | $g(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$ |
| b) $f(x) = x^3$ | $g(x) = x^2 x $ |
| c) $f(x) = 1 + x$ | $g(x) = 1 + x $ |
| d) $f(x) = xe^x$ | $g(x) = x e^x$ |
| e) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ | $g(x) = 1 - \cos 2x$ |

Respostas: a) L.D., b) L.I., c) L.I., d) L.I., e) L.D.

Exercício 12.5

Diga se é verdadeiro ou falso, justificando sua resposta

Sempre que um conjunto de funções y_1, y_2, \dots, y_m é linearmente dependente (em um intervalo I), então é possível escrever (pelo menos) uma delas como combinação linear das demais.

Sugestão: Escreva uma combinação linear nula das funções y_i . O coeficiente de pelo menos uma das funções é diferente de zero. Verifique se é possível tirar o valor dessa função em termos das demais.

Exercício 12.6

Mostre que uma equação linear de 2ª ordem,

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

pode ser substituída por um par de equações simultâneas de 1ª ordem.

Adote o seguinte procedimento:

Faça sucessivamente

$$y_1 = y$$

$$y_2 = y_1'$$

Repare que $y_2' = (y_1')' = y''$ e tire o valor de y'' na equação de segunda ordem, o que dá

$$y_2' = -\frac{a_1(x)}{a_2(x)}y_2' - \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y_1.$$

Temos então um sistema de duas equações para as incógnitas y_1' e y_2' . - Mostre que o sistema acima pode ser escrito em forma matricial como

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0(x)}{a_2(x)} & -\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Exercício 12.7

Demonstre que toda equação de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x)$$

num intervalo I pode ser convertida numa equação linear de segunda ordem por meio da mudança de variáveis $y = \frac{v}{(a_2 \cdot v)}$.

Exercício 12.8

Mostre que a mudança de variáveis $v = y'/y$ reduz a equação diferencial linear normal de 2ª ordem

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

à equação de Riccati

$$v' + v^2 + a_1(x)v + a_0(x) = 0,$$

e conclua então que resolver a equação de segunda ordem acima equivale a resolver o par de equações simultânea de primeira ordem

$$\begin{cases} dy/dx = vy \\ dv/dx = -v^2 - a_1(x)v - a_0(x) \end{cases} \quad (\text{eq. de Riccati associada})$$

Solução:

Exercício 12.9

Desenhe numa mesma figura os gráficos das funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = 1 - x^2/2$, para $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Agora, utilizando o T.E.U., responda às seguintes questões:

a) $f(x)$ e $g(x)$ podem ser solução de um problema de valor inicial, com uma equação diferencial linear homogênea de primeira ordem no intervalo considerado?

b) $f(x)$ e $g(x)$ podem ser solução de um problema de valor inicial, com uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem no intervalo considerado?

c) $f(x)$ e $g(x)$ podem ser solução de um problema de valor inicial, com uma equação diferencial linear homogênea de terceira ordem no intervalo considerado?

Exercício 12.10

Calcule o determinante wronskiano dos seguintes conjuntos de funções:

a) $\{\cos 2x, \sin 2x, 1\}$ em \mathbb{R}

b) $\{\cos 2x, \sin 2x, \sin^2 x, 1\}$ em \mathbb{R}

c) $\left\{ \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right), 1 \right\}$ em $(-\infty, -1)$

Respostas: a) 8, b) 0, c) $-2/(x^2 - 1)$

Exercício 12.11

a) Mostre que as funções e^{-x} , $\sinh x - \frac{1}{2}e^x$, $2e^{2x}$, 1 são soluções da equação

$$y''' - y'' - 2y' = 0$$

b) Escolha três dentre as funções do item anterior que formem uma base para o espaço das soluções da equação $(D^3 - D^2 - 2D)y = 0$

Exercício 12.12

Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''' - y'' - 2y' = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

Sugestão: Utilize o resultado do exercício precedente

Exercício 12.13

Encontre, entre as funções $x + \frac{1}{x}$, $x + x \ln(x)$, $\frac{1}{x} + x \ln(1/x)$, $x(1 - \ln(x))$, uma base para o espaço das soluções da equação

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0$$

Calcule o wronskiano

Exercício 12.14

Calcule o wronskiano das duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ da equação $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$, n inteiro positivo, que satisfazem às condições iniciais $y_1(0) = y_1'(0) = 2$, $y_2(0) = 1$, $y_2'(0) = -1$

Resposta: $-4/(1-x^2)$

Exercício 12.15

Desafio: Seja f uma função ímpar em $\mathcal{C}^1(-a, a)$ [isto é, $f(-x) = -f(x)$ para todos os x em $(-a, a)$]. Suponha que

- $f(0) = f'(0) = 0$
- f não é a função identicamente nula

Mostre que

$$W[f(x), |f(x)|] = 0$$

para todo $x \in (-a, a)$, mas f e $|f|$ são linearmente independentes em $\mathcal{C}^1(-a, a)$.

Resumo

Os tópicos que abordamos nesta aula foram

- A definição de solução de uma equação diferencial linear de ordem qualquer
- a caracterização do conjunto de soluções de uma equação linear homogênea normal como sendo um espaço vetorial

- uma apresentação do Teorema de Existência e Unicidade de soluções de equações diferenciais lineares normais
- a definição de dependência e independência lineares em conjuntos de funções de $\mathcal{C}^k(I)$
- a definição do determinante wronskiano, sua utilização na determinação da dimensão do espaço de soluções de uma equação diferencial linear homogênea normal

Avaliação

A aula foi de caráter mais conceitual. Tivemos de “encarar” algumas especulações e examinar conceitos que não são triviais, mas que são extremamente importantes para o prosseguimento da matéria.

Procure refletir sobre o Teorema de Existência e Unicidade e não deixe de fazer os exercícios correspondentes.

Os exercícios relacionando as equações de Riccati com as lineares de segunda ordem homogêneas têm um grande apelo histórico, mas não serão utilizados no restante do curso.

Aula 13 – Equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem

Objetivos

Ao terminar de estudar esta aula você será capaz de

- 1) - obter soluções de equações diferenciais lineares de segunda ordem, homogêneas, normais, de coeficientes contínuos, desde que se conheça previamente uma solução.
- 2) - obter soluções gerais de quaisquer equações diferenciais lineares de segunda ordem, homogêneas, e de coeficientes constantes.

Introdução

Vimos na aula anterior que, para calcular a solução geral de uma equação diferencial linear de segunda ordem, homogênea, normal em um intervalo I

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (13.1)$$

é preciso obter duas soluções linearmente independentes da equação. Para equações de coeficientes contínuos existem basicamente duas situações em que se consegue construir uma solução geral da equação (13.1):

- quando conhecemos previamente uma solução
- quando a equação tem coeficientes constantes

Método da Redução da Ordem

Suponhamos que, por inspeção/experimentação, ou - usando técnicas mais avançadas, como a utilização de séries de potências (quando os coeficientes são mais do que contínuos, são analíticos em I , o que significa intuitivamente que eles podem ser substituídos localmente por séries de Taylor), ... enfim, de alguma maneira, se conhece uma solução de (13.1).

O método da redução de ordem permite - em tese - descobrir uma segunda solução $y_2(x)$, linearmente independente de $y_1(x)$.

Passemos ao laboratório. Vamos fazer algumas experiências

Dividindo a equação (13.1) por $a_2(x)$, vamos trabalhá-la sob a *forma normalizada*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (13.2)$$

onde $p(x) = a_1(x)/a_2(x)$ e $q(x) = a_0(x)/a_2(x)$ são funções contínuas em I .

Uma primeira observação é que para cada constante c , a função $c y_1(x)$ também é uma solução da equação (13.2).

Acontece que $c y_1(x)$ é linearmente dependente de $y_1(x)$.

Portanto não nos serve.

Mas repare só o que acontece quando substituímos a constante c pela função identidade: em lugar de $c y_1(x)$ ponhamos $x y_1(x)$.

Calculando o wronskiano de $y_1(x)$ e $x y_1(x)$,

$$W[y_1(x), x y_1(x)] = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & x y_1(x) \\ y_1'(x) & y_1(x) + x y_1'(x) \end{pmatrix} = [y_1(x)]^2.$$

Vemos que se $y_1(x) \neq 0$ em todos os pontos de I então $y_2(x) = x y_1(x)$ é linearmente independente de $y_1(x)$.

Agora, só a condição $y_1(x) \neq 0$ em todo I , (que implica em $W[y_1(x), y_2(x)] \neq 0$), não é suficiente para garantir que $y_2(x) = x y_1(x)$ seja solução da equação (13.2).

Vejam os dois exemplos. No primeiro $[y_1(x)]^2 \neq 0$ em todos os pontos de I e $x y_1(x)$ é solução da equação. No segundo, apesar de $[y_1(x)]^2 \neq 0$ em todos os pontos de I , $x y_1(x)$ não é solução da equação.

Exemplo 13.1

Considere a equação $y'' - 2y' + y = 0$.

É bem fácil verificar que $y_1(x) = e^x$ é uma solução desta equação.

Mais ainda, $y_2(x) = x e^x$ também é solução da equação.

E como $W[y_1(x), x y_1(x)] = [y_1(x)]^2 = e^{2x}$ as duas soluções são linearmente independentes, e a solução geral da equação é

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

Exemplo 13.2

Tomemos agora a equação $y'' + 4y = 0$ no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$y_1(x) = \cos 2x$ é solução desta equação.

Considerando $y_2(x) = x \cos 2x$, é claro que $W[y_1(x), y_2(x)] = \cos^2 2x$

Assim $\cos 2x$ e $x \cos 2x$ são linearmente independentes em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Todavia $y_2(x) = x \cos 2x$ não é solução da equação $y'' + 4y = 0$

(De fato, se $y = x \cos 2x$ então $y'' + y = -2\sin x$)

Conclusão: Multiplicar uma solução por x às vezes produz uma nova solução linearmente independente da primeira, às vezes não.

O método da redução de ordem consiste numa generalização do procedimento acima:

queremos obter soluções da forma $y_2(x) = u(x)y_1(x)$, onde $u(x)$ não precisa mais ser a função identidade. Isto é, dada uma equação do tipo (13.2), da qual conhecemos uma solução $y_1(x)$, queremos determinar uma função $u(x)$ de tal modo que $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ seja uma solução de (13.2) e seja linearmente independente com $y_1(x)$.

Para descobrir se uma tal função existe, vamos fazer um raciocínio de trás para a frente. Suponhamos que existe uma solução da forma $u(x)y_1(x)$ e tratemos de descobrir como é a $u(x)$.

Temos (omitindo temporariamente o argumento x , para não sobrecarregar a notação)

$$\begin{aligned} y_2 &= uy_1 \\ y_2' &= u'y_1 + uy_1' \\ y_2'' &= u''y_1 + u'y_1' + u'y_1' + uy_1'' \end{aligned}$$

Substituindo y_2 e suas derivadas na equação (13.2),

$$\underbrace{u''y_1 + u'y_1' + u'y_1' + uy_1''}_{y_2''} + \underbrace{p(u'y_1 + uy_1')}_{py_2'} + \underbrace{q(uy_1)}_{qy_2} = 0;$$

podemos reescrever a última equação como

$$(uy_1'' + puy_1' + qy_1) + (u''y_1 + 2u'y_1' + pu'y_1) = 0 \quad (13.3)$$

Fatorando u na expressão do primeiro parêntese obtemos $u(y_1'' + py_1' + qy_1)$.

E como y_1 é solução de (13.2), então $y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$, de modo que (13.3) se reduz a

$$u''y_1 + 2u'y_1' + pu'y_1 = 0$$

e chamando u' de v , obtemos a equação

$$v' + \left(p(x) + 2 \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} \right) v = 0, \quad (13.4)$$

que é uma linear de primeira ordem.



Jean d'Alembert
(1717-1783)

Matemático francês, contemporâneo de Euler, a quem se atribui a descoberta do método de redução de ordem

Daí é que vem o nome *redução de ordem*. Para resolver a equação (15.11), de segunda ordem, precisamos resolver a equação, que é de primeira ordem. O problema passou a ser o de calcular uma solução de uma equação de ordem reduzida de uma unidade.

Resolvendo a equação (13.4) pelos métodos da Aula 3, obtemos

$$v(x) = \frac{c}{[y_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)}, \quad c = \text{constante}$$

Como $v = u'$ temos

$$u(x) = c \int \frac{1}{[y_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)} dx.$$

Estamos precisando descobrir uma função $u(x)$ adequada a nossos propósitos. Na verdade conseguimos toda uma família de funções. Para cada escolha de c temos uma função $u(x)$.

Então basta escolher um valor para c .

Mas atenção! Não podemos escolher $c = 0$, pois isso daria $u(x) = 0$ e conseqüentemente $y_2(x) = 0$, o que não nos serve porque a função nula é linearmente dependente com qualquer outra função, e portanto não pode fazer parte de uma base para o espaço das soluções de (13.2). Podemos escolher qualquer $c \neq 0$. Escolhendo $c = 1$,

$$u(x) = \int \frac{1}{[y_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)} dx$$

e temos para segunda solução da equação (13.2)

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{1}{[y_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)} dx$$

Para completar a tarefa, precisamos mostrar que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes.

Mas isso decorre imediatamente da fórmula de Abel:

$$W[y_1(x), y_2(x)] = e^{\left(-\int p(x)dx\right)} \neq 0 \quad \text{para todo } x.$$

Portanto alcançamos nosso objetivo.

Atividade 13.1

Repetindo para não esquecer:

Conhecida uma solução $y_1(x)$, da equação diferencial linear, homogênea, normal ; para obter uma segunda solução $y_2(x)$ da forma $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ linearmente independente da primeira, usando o método da redução de ordem, basta:

Exemplo 13.3

Comprove diretamente que $W[y_1(x), y_2(x)] = e^{\left(-\int p(x)dx\right)}$, quando y_1 e y_2 são duas soluções da equação (13.4), sendo y_2 obtida a parti de y_1 por redução de ordem.

Solução:

$$\begin{aligned} W[y_1(x), y_2(x)] &= \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_1(x) \cdot \int \frac{1}{[y_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)} dx \\ y_1'(x) & y_1'(x) \cdot \int \frac{1}{[y_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)} dx + y_1(x) \cdot \frac{1}{[y_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)} \end{pmatrix} = \\ &= y_1(x)y_1'(x) \cdot \int \frac{1}{[y_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)} dx + [y_1(x)]^2 \cdot \frac{1}{[y_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)} dx - \\ &\quad - y_1(x)y_1'(x) \cdot \int \frac{1}{[y_1(x)]^2} \cdot e^{\left(-\int p(x)dx\right)} dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$W[y_1(x), y_2(x)] = e^{\left(-\int p(x)dx\right)}$$

Exemplo 13.4

Calcule a solução geral de $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$, $x > 0$, sabendo que $y_1(x) = 1/x$ é uma solução da mesma.

Solução: Usaremos a fórmula desenvolvida na técnica de redução de ordem.

Escrevendo a equação na forma normalizada

$$y'' + 3/2xy' - 1/2x^2y = 0$$

vemos que a função coeficiente de y' é $p(x) = 3/2x$ Então

$$y_2(x) = (1/x) \cdot \int \frac{e^{-\int 3/2x dx}}{(1/x)^2} dx$$

é uma segunda solução, linearmente independente de $y_1(x) = 1/x$

Calculando as integrais temos $y_2(x) = 1/x \cdot \frac{2}{3}x^{3/2} = \frac{2}{3}x^{1/2}$.

Sendo assim, a solução geral de $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$ é

$$y(x) = c_1 \frac{1}{x} + c_2 x^{1/2}$$

Observação: o fator $\frac{2}{3}$ foi englobado na segunda constante arbitrária, c_2 .

Atividade 13.2

Considere a *equação de Legendre com parâmetro igual a um*:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad -1 < x < 1.$$

Mostre que a função $\varphi_1(x) = x$ é uma solução. Determine a solução geral da equação de Legendre.

Resposta: _____

Equações de coeficientes constantes

A segunda situação geral em que é possível calcular uma solução geral para a equação linear de segunda ordem homogênea (13.1), extremamente comum nas aplicações, é quando as funções coeficientes são constantes.

Trabalhando com a equação na forma normalizada, a equação (13.2) toma a forma

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (13.5)$$

Teorema 13.1

- A equação $y'' + py' + qy = 0$ tem sempre uma solução da forma

$$\varphi(x) = e^{ax}$$

onde a é uma constante.

- a é uma raiz (real ou complexa) da equação algébrica

$$r^2 + pr + q = 0,$$

chamada de *equação característica* da equação $y'' + py' + qy = 0$

Demonstração: Seja $\varphi(x) = e^{ax}$, $a = \text{constante}$. Então

$$\varphi''(x) + p\varphi'(x) + q\varphi(x) = a^2e^{ax} + ape^{ax} + qe^{ax}. \text{ Portanto}$$

$$\varphi''(x) + p\varphi'(x) + q\varphi(x) = 0 \iff e^{ax}[a^2 + ap + q] = 0.$$

Como e^{ax} nunca se anula $\varphi(x) = e^{ax}$ é solução de $y'' + py' + qy = 0 \iff a^2 + ap + q = 0 \iff a$ é uma raiz da equação característica.

E já que toda equação do segundo grau tem sempre uma raiz (real ou complexa) a , então a equação $y'' + py' + qy = 0$ tem sempre uma solução da forma e^{ax} ■

Este teorema dá a pista para encontrar a solução geral de qualquer equação homogênea de 2ª ordem com coeficientes constantes.

A primeira coisa a fazer é calcular as raízes da equação auxiliar $r^2 + pr + q = 0$, mais conhecida como *equação característica*.

Temos alguns casos a considerar:

1º caso:

A equação característica tem duas raízes reais, distintas: r_1 e r_2 .

Então podemos formar duas soluções da equação diferencial $y'' + py' + qy = 0$, a saber:

$$e^{r_1x} \quad \text{e} \quad e^{r_2x}$$

Um exercício simples mostra que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad W[e^{r_1x}, e^{r_2x}] = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)x} \neq 0.$$

Sendo assim, a solução geral da equação é

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$

2º caso:

A equação característica $r^2 + pr + q = 0$ tem duas raízes reais iguais:

$$r_1 = r_2 = r.$$

Em princípio, temos apenas uma solução

$$\varphi_1(x) = e^{rx}$$

Precisamos encontrar uma outra solução $\varphi_2(x)$, que seja linearmente independente de φ_1 .

Podemos aplicar diretamente a fórmula desenvolvida na seção anterior e calcular diretamente $\varphi_2(x) = xe^{rx}$ como uma segunda solução.

Mas, vamos repetir uma parte do raciocínio, para fixar:

Procurando uma segunda solução da forma $\varphi_2(x) = u(x)e^{rx}$, sabemos que $v = u'$ deve satisfazer

$$\varphi_1 v' + (2\varphi_1' + p\varphi_1)v = 0$$

ou seja

$$e^{rx}v' + (2re^{rx} + pe^{rx})v = 0$$

Como $r = -p/2$ então $p = -2r$ e a expressão entre parênteses se reduz a

$$2re^{rx} + (-2r)e^{rx} = 0$$

Portanto a equação de 1ª ordem para v fica

$$v' = 0$$

De onde $v = cte$.

Escolhendo a constante como sendo 1

Assim $u' = v = 1$. De modo que

$$u(x) = x$$

Então $u(x) = x$ de modo que

$$\varphi_2(x) = xe^{rx} \quad \blacksquare$$

A solução geral da equação (13.5) é

$$y(x) = (c_1 + xc_2)e^{rx}$$

Resta ainda a examinar o

3º caso:

A equação característica $r^2 + pr + q = 0$ tem duas raízes complexas conjugadas $r_1 = a + bi$, $r_2 = a - bi$, sendo $b \neq 0$.

Nestas condições é possível mostrar ⁷ que a equação característica pode ser reescrita como

$$r^2 - 2ar + (a^2 + b^2) = 0.$$

Afirmamos que as funções $\varphi_1(x) = e^{ax} \cos bx$ e $\varphi_2(x) = e^{ax} \sin bx$ são soluções linearmente independentes da equação

$$y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0, \quad b \neq 0$$

Provemos apenas que φ_1 é solução. A verificação de que φ_2 é solução é completamente análoga. Tem-se:

$$\varphi_1'(x) = a e^{ax} \cos bx - b e^{ax} \sin bx$$

$$\varphi_1''(x) = a^2 e^{ax} \cos bx - ab e^{ax} \sin bx - ab e^{ax} \sin bx - b^2 e^{ax} \cos bx$$

Substituindo na equação,

$$\begin{aligned} a^2 e^{ax} \cos bx - ab e^{ax} \sin bx - ab e^{ax} \sin bx - b^2 e^{ax} \cos bx - 2a^2 e^{ax} \cos bx + \\ + 2ab e^{ax} \sin bx - (a^2 + b^2) e^{ax} \cos bx = 0 \end{aligned}$$

o que mostra que φ_1 é solução.

Para mostrar que φ_1 e φ_2 são linearmente independentes observamos que

$$W[\varphi_1(x), \varphi_2(x)] = -be^{ax}$$

que é diferente de zero, já que $b \neq 0$.

Portanto a solução geral de $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$, $b \neq 0$ é

$$y(x) = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx.$$

Resumo Geral

Para resolver a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p, q, \text{ constantes}$$

⁷Seja $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ um polinômio de grau ≥ 1 , e seja $\beta \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ (i.é $\beta \neq \overline{\beta}$).

Então $p(\beta) = 0 \iff x^2 - (\beta + \overline{\beta})x + \beta\overline{\beta} \in \mathbb{R}[x]$ divide $f(x)$.

Se $gr[f(x)] = 2$ então $f(x) = x^2 - (\beta + \overline{\beta})x + \beta\overline{\beta}$.

primeiro encontramos as raízes r_1, r_2 da equação auxiliar (ou característica)

$$r^2 + pr + q = 0.$$

A seguir, a solução geral da equação dada pode ser expressa em termos de r_1 e r_2 como se segue:

r_1, r_2	Solução Geral
Reais, $r_1 \neq r_2$	$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
Reais, $r_1 = r_2 = r$	$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{rx}$
Complexos, $r_1 = a + bi$ $r_2 = a - bi$	$y(x) = e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$

Exemplo 13.5

Encontre uma equação diferencial linear com coeficientes constantes cuja solução geral seja $c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x$

Solução: Seja $y'' + py' + qy = 0$ a equação procurada.

$$\begin{aligned} \sin 3x \text{ é solução} &\iff -9 \sin 3x + p3 \cos 3x + q \sin 3x = 0 \\ &\iff (q - 9) \sin 3x + 3p \cos 3x = 0 \end{aligned}$$

A equação $(q - 9) \sin 3x + 3p \cos 3x = 0$ é uma combinação linear nula de duas soluções linearmente independentes.

Devemos ter $q - 9 = 0$ e $3p = 0$

Daí $p = 0$, $q = 9$ e a equação procurada é

$$y'' + 9y = 0$$

Exemplo 13.6

Encontre uma equação diferencial linear com coeficientes constantes cuja solução geral seja $c_1 + c_2 x e^x$

Solução: Seja $y'' + py' + qy = 0$ a equação procurada.

$$\begin{aligned} e^x \text{ é solução} &\iff e^x + p e^x + q e^x = 0 \\ &\iff (p + q + 1) e^x = 0 \end{aligned}$$

Daí podemos concluir apenas que $p + q + 1 = 0$.

Equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem

Usando a outra solução xe^x temos:

$$\begin{aligned} xe^x \text{ é solução} &\iff 2e^x + xe^x + pe^x + pxe^x + qxe^x = 0 = 0 \\ &\iff (1 + p + q)xe^x + (2 + p)e^x = 0 \end{aligned}$$

A equação $(1 + p + q)xe^x + (2 + p)e^x = 0$ é uma combinação linear nula de duas soluções linearmente independentes.

Devemos ter $1 + p + q = 0$ e $2 + p = 0$ Daí $p = -2$ e $q = 1$ e a equação procurada é

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Exercícios

Exercício 13.1

Encontre a solução geral de cada uma das equações, sendo dada uma solução:

1) $y'' + \frac{1}{x}y' = 0$; $y_1(x) = 1$

2) $xy'' - (x + 2)y' + 2y = 0$; $y_1(x) = e^x$

3) $xy'' - y' = 0$; $y_1(x) = 1$

4) $xy'' + (x + 2)y' + y = 0$; $y_1(x) = 1/x$

5) $4x^2y'' - 8xy' + 9y = 0$; $y_1(x) = x^{3/2}$

6) $xy'' + (x - 1)y' - y = 0$; $y_1(x) = e^{-x}$

Respostas:

1) $y(x) = c_1 + c_2 \ln x$; 2) $y(x) = c_1 e^x + c_2(x^2 + 2x + 2)$ 3) $c_1 + c_2 x^2/2$;
4) $y(x) = c_1/x + c_2 e^{-x}/x$; 5) $c_1 x^{3/2} + c_2 \ln(x)x^{3/2}$; 6) $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2(x - 1)$.

Exercício 13.2

Encontre a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais:

1.) $y'' + y' - 2y = 0$ 2.) $3y'' - 5y' + 2y = 0$ 3.) $8y'' + 14y' - 15y = 0$

4.) $y'' - 2y' = 0$ 5.) $y'' + 2y = 0$ 6.) $3y'' + 2y = 0$

7.) $y'' + 4y' + 8y = 0$ 8.) $4y'' - 4y' + 3y = 0$ 9.) $y'' - 2y' + 2y = 0$

10.) $9y'' - 12y' + 4y = 0$ 11.) $y'' + 2y' + 4y = 0$ 12.) $2y'' - 2\sqrt{2}y' + y = 0$

13.) $2y'' - 5\sqrt{3}y' + 6y = 0$ 14.) $9y'' + 6y' + y = 0$ 15.) $64y'' - 48y' + 17y = 0$.

Respostas:

1.) $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$; 2.) $y(x) = c_1 e^{(2/3)x} + c_2 e^x$; 3.) $y(x) = c_1 e^{(-5/2)x} + c_2 e^{(3/4)x}$

4.) $y(x) = c_1 + c_2 e^{2x}$; 5.) $y(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{2}x) + c_2 \cos(\sqrt{2}x)$; 6.) $y(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{6}/3)x + c_2 \cos(\sqrt{6}/3)x$; 7.) $y(x) = c_1 e^{-2x} \operatorname{sen}(2x) + c_2 \cos(2x)$; 8.) $y(x) = c_1 e^{x/2} \operatorname{sen}(\sqrt{2}/2)x + c_2 e^{x/2} \cos(\sqrt{2}/2)x$; 9.) $y(x) = c_1 e^x \operatorname{sen}(x) + c_2 e^x \cos(x)$; 10.) $(c_1 + c_2 x)e^{(2x/3)}$; 11.) $y(x) = c_1 e^{-x} \operatorname{sen}(\sqrt{3}x) + c_2 e^{-x} \cos(\sqrt{3}x)$; 12.) $y(x) = c_1 e^{\sqrt{2}/2x} + c_2 x e^{\sqrt{2}/2x}$; 13.) $y(x) = c_1 e^{\sqrt{3}/2x} + c_2 e^{2\sqrt{3}x}$; 14.) $y(x) = c_1 e^{-1/3x} + c_2 x e^{-1/3x}$; 15.) $y(x) = c_1 e^{(3/8)x} \operatorname{sen}(\frac{\sqrt{2}}{4}x) + c_2 e^{(3/8)x} \cos(\frac{\sqrt{2}}{4}x)$

Exercício 13.3

Encontre as soluções dos problemas de valor inicial dados:

16.) $2y'' - y' - 3y = 0; y(0) = 2, y'(0) = -\frac{7}{2}$

17.) $y'' - 8y' + 16y = 0; y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = -\frac{1}{3}$.

18.) $4y'' - 12y' + 9y = 0; y(0) = 1, y'(0) = \frac{7}{2}$.

19.) $y'' + 2y = 0; y(0) = 2, y'(0) = 2\sqrt{2}$

20.) $4y'' - 4y' + 5y = 0; y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = 1$.

Respostas:

16.) $y(x) = -\frac{7}{5}e^{(3/2)x} + \frac{7}{5}e^{-x}$; 17.) $y(x) = \frac{1}{2}e^{4x} - \frac{7}{3}xe^{4x}$; 18.) $y(x) = e^{4x} - \frac{1}{2}xe^{4x}$; 19.) $y(x) = 2\operatorname{sen}(\sqrt{2}x) + 2\cos(\sqrt{2}x)$; 20.) $y(x) = \frac{3}{4}e^{x/2} \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}e^{x/2} \cos(x)$

Exercício 13.4

Encontre uma equação diferencial linear com coeficientes constantes cuja solução geral seja:

(a) $(c_1 + c_2 x)e^{-3x}$

(b) $c_1 e^x \operatorname{sen} 2x + c_2 e^x \cos 2x$

(c) $(c_1 + c_2 x)e^{-2x}$

(d) $c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$

Respostas:

(a) $y'' + 6y' + 9y = 0$; (b) $y'' - 2y' + 5y = 0$; (c) $y'' + 4y' = 4y = 0$; (d) $y'' = 4y' + 3y = 0$

Resumo

Nesta aula

- aprendemos como construir a solução geral de uma equação diferencial

linear de segunda ordem, normal , com coeficientes contínuos, pelo método de redução de ordem , desde que fosse conhecida previamente uma solução

- aprendemos a construir a solução geral de qualquer equação diferencial de segunda ordem, homogênea, com coeficientes constantes.

Avaliação

Nesta aula utilizamos todo o aparato teórico construído nas duas últimas aulas anteriores , e resolvemos efetivamente a questão de obter soluções de equações diferenciais lineares, normais, homogêneas, em dois casos muito freqüentes tanto nas aplicações quanto na teoria de equações de segunda ordem.

Na próxima aula, vamos continuar na mesma linha de aplicação dos resultados teóricos vistos nas aulas 12 e 13, ampliando nosso “arsenal” de técnicas de obtenção de soluções de modo a poder resolver equação diferenciais de segunda ordem normais não-homogêneas.

Até lá!

Aula 14 – Equações não-homogêneas de segunda ordem

Objetivo

Ao terminar de estudar esta aula, você estará apto a obter soluções de equações diferenciais lineares de segunda ordem, normais, não-homogêneas, em duas situações importantes:

- 1) - quando é conhecida a solução geral de uma equação homogênea deduzida da equação não-homogênea, utilizando o método da variação dos parâmetros
- 2) - quando a equação não-homogênea tem coeficientes constantes, utilizando o método dos coeficientes a determinar (às vezes chamado de método da tentativa criteriosa)

Equações não-homogêneas

Nesta aula estudaremos as equações diferenciais lineares de ordem dois não-homogêneas

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \quad (14.1)$$

Na linguagem de operadores, a equação se escreve

$$a_2(x)D^2y + a_1(x)Dy + a_0(x)y = g(x)$$

Lembramos que os coeficientes $a_i(x)$, $0 \leq i \leq 2$ e a função $g(x)$ são funções contínuas definidas em um intervalo I , e que $a_2(x) \neq 0$ em todos os pontos de I .

Iniciamos esta aula com algumas observações/definições simples:

- Uma solução da equação não-homogênea (14.1) é uma função φ pertencente ao espaço $\mathcal{C}^2(I)$ tal que para todo $x \in I$,

$$a_2(x)\varphi''(x) + a_1(x)\varphi'(x) + a_0(x)\varphi(x) = g(x).$$
- O conjunto das soluções da equação (14.1) não é mais um subespaço vetorial de $\mathcal{C}^2(I)$

- A equação (14.1) é equivalente à equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x), \quad (14.2)$$

chamada de *forma normalizada* da equação (14.1).

Aqui, evidentemente, $(p(x) = a_1(x)/a_2(x), q(x) = a_0(x)/a_2(x), h(x) = g(x)/a_2(x)$

- A **equação homogênea associada** à equação (14.2) como sendo

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (14.3)$$

Teorema 14.1

Suponha que $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ são duas soluções da equação (14.2). Então $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ é solução da equação (14.3)

Demonstração.

$$\begin{aligned} \varphi_1 \text{ é solução de (14.2)} &\iff \varphi_1''(x) + p(x)\varphi_1'(x) + q(x)\varphi_1(x) = h(x) \\ \varphi_2 \text{ é solução de (14.2)} &\iff \varphi_2''(x) + p(x)\varphi_2'(x) + q(x)\varphi_2(x) = h(x) \end{aligned}$$

Subtraindo membro a membro, e usando da linearidade da derivada, podemos escrever

$$(\varphi_1 - \varphi_2)''(x) + p(x)(\varphi_1 - \varphi_2)'(x) + q(x)(\varphi_1 - \varphi_2)(x) = h(x) - h(x) = 0,$$

o que mostra que $\varphi_1 - \varphi_2$ é solução da equação (14.3). ■

Segue imediatamente do resultado acima que, se conhecermos uma solução particular $\varphi_1(x)$ da equação não homogênea, então para qualquer outra solução $y(x)$ da não homogênea vale que $y(x) - \varphi_1(x)$ é solução da homogênea associada.

Ora, se a *solução geral* da homogênea associada é

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

podemos garantir que, existirão constantes α_1 e α_2 tais que

$$y(x) - \varphi_1(x) = \alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x)$$

ou ainda

$$y(x) = \varphi_1(x) + \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$$

Agora veja, a solução $y(x)$ considerada acima, foi absolutamente genérica. A conclusão vale para qualquer solução $y(x)$, o que pode mudar são as constantes, que denotaremos por c_1 e c_2 . Ora, quem dá conta de todas as expressões $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ quando c_1 e c_2 variam arbitrariamente é justamente a solução geral da equação homogênea associada.

Concluimos daí que

A solução geral da equação não-homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x).$$

é obtida adicionando-se uma solução particular, $\varphi_1(x)$, dela à solução geral da sua equação homogênea associada

P Registre: A fórmula

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \varphi_1(x) \quad (14.4)$$

expressa a *solução geral da equação não-homogênea (14.2)*

Exemplo 14.1

O objetivo deste exemplo é mostrar que a afirmação de que *a solução geral da não-homogênea é igual à soma da solução geral da homogênea associada com uma solução particular da não-homogênea*, já era verdadeira para as equações lineares de primeira ordem ⁸.

i) A função

$$y_p(x) = e^{\left(-\int p(x) dx\right)} \left[\int e^{\int p(x) dx} q(x) dx \right] \quad (I)$$

é uma *solução particular* da equação não homogênea de 1ª ordem

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Demonstração. : De fato,

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= -p(x) \cdot e^{\left(-\int p(x) dx\right)} \cdot \left[\int e^{\int p(x) dx} q(x) dx \right] + q(x) \\ &= -p(x)y_p + q(x). \end{aligned}$$

ii) A função

$$y_h = C e^{\left(-\int p(x) dx\right)} \quad (II)$$

é a solução geral da homogênea associada: $y' + p(x)y = 0$.

⁸e, como você já deve estar desconfiado(a), vale para equações de ordem n qualquer

Atividade 14.1

Demonstre a afirmação do item (ii)

iii) Mostremos agora que $y_h(x) + y_p(x)$ é solução geral da equação linear não-homogênea:

$$\begin{aligned}y_h(x) + y_p(x) &= C e^{\left(-\int p(x) dx\right)} + e^{\left(-\int p(x) dx\right)} \cdot \left[\int e^{\int p(x) dx} q(x) dx \right] \\&= e^{\left(-\int p(x) dx\right)} \cdot \left[\int e^{\int p(x) dx} q(x) dx + C \right]\end{aligned}$$

Portanto $y_h(x) + y_p(x)$ coincide com a solução geral que conhecemos, desde a Aula 3, para a equação linear de primeira ordem não-homogênea.

Dizendo de outro modo, a solução *geral* da equação linear de primeira ordem não-homogênea é da forma

$$y_h(x) + y_p(x),$$

como queríamos demonstrar ■

Encaminhamento: A fórmula (14.4) indica o caminho para determinar a solução geral de uma equação diferencial linear de segunda ordem, não-homogênea .

Precisamos resolver dois problemas:

- 1^o) - calcular a solução geral da equação homogênea associada
- 2^o) - obter uma solução particular da equação não-homogênea

A obtenção de soluções gerais de homogêneas foi abordada na aula anterior.

Veremos a seguir dois métodos de construir soluções particulares de equações não-homogêneas.

O primeiro método, e o mais geral, é o da variação dos parâmetros, que se aplica a equações de coeficientes contínuos. O outro método é o dos coeficientes a determinar, que entretanto se aplica somente a equações de coeficientes constantes e cujos segundos membros são funções de formas bem especiais ⁹.

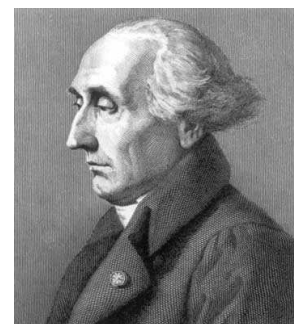
⁹se bem que muito freqüentes nas aplicações

O método da Variação dos Parâmetros (Lagrange)

Nota Histórica

O método, que descreveremos logo abaixo, lembra o da redução de ordem, mas a motivação de Lagrange foi totalmente outra (e acabou roubando o nome de método da variação das constantes). A inspiração de Lagrange proveio inicialmente do estudo das equações das trajetórias de planetas em torno do Sol. Um problema que surgiu logo após a demonstração de que as órbitas dos planetas eram elipses, tendo o Sol em um dos focos, foi o da estabilidade secular do eixo maior das órbitas planetárias: *Será que, com o passar dos séculos, o eixo maior das órbitas elípticas não iria ficando progressivamente maior, de modo que após algum tempo (um longo tempo talvez) os planetas viessem a se desgarrar da atração solar?* Ao abordar este problema, Lagrange levou em consideração as influências

que um planeta sofre não somente do Sol, mas também dos outros planetas. E aí ele introduziu o método da variação das constantes (que determinavam a posição de um planeta em sua órbita) permitindo coeficientes variáveis nas equações do movimento dos planetas. Lagrange não resolveu completamente a questão (ninguém resolveu até hoje), mas inventou um bocado de matemática nova que veio a ser muito empregada em outros contextos. Mais tarde ele generalizou o método de variação das constantes às equações diferenciais ordinárias lineares quaisquer. Lagrange foi um dos maiores matemáticos do século XVIII, tendo contribuído de maneira profunda em vários ramos da matemática: Teoria dos Números, Geometria, Álgebra, Mecânica e Análise. Alguns dizem que o único que rivalizava com ele em capacidade matemática, naquela época, era Euler. Bem... Gauss já estava bem ativo muitos anos antes de Lagrange falecer.



J.L. Lagrange
1736-1813

Um grande matemático do século XVIII. Fez contribuições importantes em vários campos da Matemática.

O método da variação dos parâmetros (que, em textos mais antigos, era chamado de método da variação das constantes) em uma apresentação moderna e elementar, no contexto de equações diferenciais lineares, consiste em buscar uma solução particular da equação não-homogênea (14.2) a partir da solução geral de sua equação homogênea associada (14.3).

Se a solução geral (14.3) é $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ busca-se uma solução particular de (14.2) da forma

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

sendo $c_1(x)$ e $c_2(x)$ funções a determinar.

Substituindo y_p e suas derivadas na equação (14.2), e agrupando ¹⁰:

$$c_1(a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + c_2(a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) + (c_1' y_1 + c_2' y_2)' + a_1(c_1' y_1 + c_2' y_2) + (c_1' y_1' + c_2' y_2') = h.$$

¹⁰omitindo a variável x , para simplificar.

Como y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea, os dois primeiros parênteses do lado esquerdo da igualdade acima são nulos, e ficamos com:

$$(c'_1 y_1 + c'_2 y_2)' + a_1(c'_1 y_1 + c'_2 y_2) + (c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2) = h.$$

Esta identidade será satisfeita se c_1 e c_2 puderem ser escolhidos de tal forma que

$$c'_1(x)y_1(x) + c'_2(x)y_2(x) = 0, \quad (14.5)$$

$$c'_1(x)y'_1(x) + c'_2(x)y'_2(x) = h(x). \quad (14.6)$$

para todo x .

Para cada x , (14.5 - 14.6) formam um sistema de equações (algébricas) lineares nas incógnitas $c'_1(x)$ e $c'_2(x)$. O determinante dos coeficientes desse sistema é o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{pmatrix}$$

que reconhecemos como o Wronskiano, $W[y_1(x), y_2(x)]$, das soluções linearmente independentes $y_1(x)$ e $y_2(x)$, da equação homogênea associada (14.3). Esse determinante é diferente de zero, e utilizando a *regra de Cramer*:

$$c'_1(x) = -\frac{h(x)y_2(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]}, \quad c'_2(x) = \frac{h(x)y_1(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]}.$$

Daí, por integração,

$$c_1(x) = -\int \frac{h(x)y_2(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]} dx, \quad c_2(x) = \int \frac{h(x)y_1(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]} dx$$

Agora substitui-se $c_1(x)$ e $c_2(x)$ na expressão da solução particular

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x).$$

Exemplo 14.2

Achar a a solução geral de

$$y'' + y = \operatorname{tg} x$$

Solução: A solução geral da equação homogênea associada é

$$y_h(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x.$$

Temos então $W[\operatorname{sen} x, \cos x] = -1$, e a solução particular é

$$y_p(x) = c_1(x) \operatorname{sen} x + c_2(x) \cos x,$$

onde

$$c_1(x) = -\int \frac{\operatorname{tg} x \cos x}{-1} dx = -\cos x,$$

Equações não-homogêneas de segunda ordem

$$c_2(x) = \int \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x}{-1} dx = \operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

Assim,

$$y_p(x) = -\cos x \operatorname{sen} x + [\operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)] \cos x = -\cos x \ln\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

A solução geral de $y'' + y = \operatorname{tg} x$ é

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x - \cos x \ln\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

Exemplo 14.3

Achar a a solução geral de

$$y'' - 5y' + 6y = e^x$$

Solução: A solução geral da equação homogênea associada é

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Temos então $W[e^{2x}, e^{3x}] = e^{5x}$, e a solução particular é

$$y_p(x) = c_1(x) e^{2x} + c_2(x) e^{3x},$$

onde

$$c_1(x) = - \int \frac{e^x e^{3x}}{e^{5x}} dx = e^{-x},$$

$$c_2(x) = \int \frac{e^x e^{2x}}{e^{5x}} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

Assim,

$$y_p(x) = e^{-x} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} e^{3x} = \frac{1}{2} e^x$$

E a solução geral de $y'' - 5y' + 6y = e^x$ é

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^x$$

O método dos coeficientes a determinar

Este método permite determinar uma solução particular da equação de coeficientes constantes

$$y'' + py' + q = h(x), \quad p, q \text{ constantes}, \quad (14.7)$$

para certos tipos particulares de funções $h(x)$.

Comentário: Apesar de restrito, o método é aplicável em um grande número de problemas concretos, e por essa razão vamos apresentá-lo aqui.

Observação: As demonstrações das proposições que seguem são em termos das propriedades dos operadores diferenciais de coeficientes constantes, e serão omitidas.

Resumimos a seguir os principais casos em que o método é utilizado:

Teorema 14.2

Se, na equação (14.7) $h(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, então existe uma solução particular da forma $y_p(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$, de mesmo grau que $h(x)$ sendo b_0, b_1, \dots, b_n coeficientes a determinar.

Exemplo 14.4

Determine uma solução particular de

$$y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$$

Solução: Usando o teorema (14.2) procuramos uma solução particular da forma $y_p(x) = ax + b$, polinômio do mesmo grau que $2x + 1$.

Então $y'_p(x) = a$ e $y''_p = 0$.

Substituindo na equação obtemos $0 - 3a + 2(ax + b) = 2x + 1$, isto é

$$2ax + 2b - 3a = 2x + 1.$$

Igualando os coeficientes das potências de x , calcula-se $a = 1$ e $b = 2$

Portanto a solução particular é

$$y_p(x) = x + 2$$

Obs: Mesmo quando o polinômio que ocorre como termo independente no lado direito de (15.15) não contém todas as potências de x , devemos procurar uma solução particular da forma $y_p(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$. Os cálculos indicarão se algum(uns) coeficiente(s) b_i s devem ser nulos.

Quando o lado direito é uma constante, devemos procurar uma solução particular constante

Exemplo 14.5

Determine uma solução particular para $y'' + 7y = x^2$

Solução: Procuramos uma solução particular da forma $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, um polinômio do segundo grau com todos os coeficientes, em princípio.

Tem-se $y'_p(x) = 2ax + b$ e $y''_p(x) = 2a$.

Substituindo na equação chega-se a $2a + 7(ax^2 + bx + c) = x^2$ Igualando os coeficientes das potências de x dos dois lados, vem que $7a = 1$, $7b = 0$ e $2a + 7c = 0$.

Daí $a = 1/7$, $b = 0$ e $c = -2/49$ A solução particular é

$$y_p(x) = 1/7x^2 - 2/49.$$

Teorema 14.3

Se, na equação (14.7) $h(x) = e^{\alpha x}$, então existe uma solução particular da forma

$$y_p(x) = b e^{\alpha x}$$

sendo b um coeficiente a determinar.

Exemplo 14.6

Calcule uma solução particular para $y'' + y' + y = e^{-2x}$

Solução: Aplicando diretamente o teorema (14.3), procuramos uma solução particular da forma $y_p(x) = ae^{-2x}$. Calculando as derivadas de $y_p(x)$ até a segunda ordem e substituindo na equação, obtemos $4ae^{-2x} - 2ae^{-2x} + ae^{-2x} = e^{-2x}$

Daí $3a = 1$ e a solução particular é

$$y_p(x) = \frac{1}{3} e^{-2x}$$

Teorema 14.4

Se, na equação (14.7) $h(x) = \cos \beta x$ ou $h(x) = \sin \beta x$, então existe uma solução particular da forma

$$y_p(x) = b_1 \cos \beta x + b_2 \sin \beta x$$

sendo b_1 e b_2 um coeficientes a determinar.

Atividade 14.2

Calcule uma solução particular da equação $3y'' - y = 2 \cos x$

Resposta: $y_p(x) =$ _____

Obs.: Note que o lado direito da equação (15.15) não precisa conter obrigatoriamente as duas parcelas $\cos \beta x$ e $\sin \beta x$. Basta a ocorrência de uma delas para que procuremos uma solução particular da forma $y_p(x) = b_1 \cos \beta x + b_2 \sin \beta x$

Teorema 14.5

Se, na equação (14.7) $h(x) = (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)e^{\alpha x} \cos \beta x$ ou $g(x) = (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)e^{\alpha x} \sin \beta x$, então existe uma solução particular da forma

$$y_p(x) = (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n)e^{\alpha x} \cos \beta x + \\ + (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n)e^{\alpha x} \sin \beta x$$

sendo $b_0, \dots, b_n, c_0, \dots, c_n$ coeficientes a determinar.

Exemplo 14.7

A forma de uma solução particular de $2y'' - y' + 5y = x e^{2x} \sin x$ é

$$y_p(x) = (b_0 + b_1x) e^{2x} \cos x + (c_0 + c_1x) e^{2x} \sin x$$

onde b_0, b_1, c_0, c_1 são coeficientes a determinar.

Atenção !!!: Se algum termo na expressão de $y_p(x)$ for solução da *homogênea associada*, propõe-se $xy_p(x)$ para solução particular. Caso algum termo de $xy_p(x)$ seja solução da homogênea associada então a solução particular buscada é $x^2y_p(x)$.

Exemplo 14.8

Calcule a solução geral de $(D^2 - 4)y = -e^{2x}$

Solução: Aplicando o teorema (14.3), procuramos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = ae^{2x}$$

Calculando as derivadas desta y_p e substituindo na equação diferencial, chega-se a

$$4ae^{2x} - 4ae^{2x} = -e^{2x},$$

de onde se conclui que $0 = -1$, o que é um absurdo.

Isso aconteceu porque $-e^{2x}$ é solução da homogênea associada à equação $(D^2 - 4)y = -e^{2x}$.

Equações não-homogêneas de segunda ordem

Experimentamos então $y_p(x) = xae^{2x}$.

Neste caso $y_p'(x) = ae^{2x} + 2axe^{2x}$ e $y_p''(x) = 4ae^{2x} + 4axe^{2x}$. Substituindo na equação:

$$4ae^{2x} + 4axe^{2x} - 4axe^{2x} = -e^{2x},$$

e portanto $a = -1/4$. A solução particular é

$$y_p(x) = -1/4 x e^{2x}$$

Atividade 14.3

Calcule uma solução particular das equações abaixo pelo método dos coeficientes a determinar:

a) $y' = 1$

b) $y' + 3y = 1$

Atenção !!!: Outros tipos de funções $h(x)$ aos quais o método se aplica podem ser obtidos como consequência do seguinte fato: “ Se $y_p(x)$ e $\tilde{y}_p(x)$ são soluções respectivamente das equações

$$y'' + py' + qy = g_1(x) \quad \text{e} \quad y'' + py' + qy = g_2(x)$$

então $c_1 y_p(x) + c_2 \tilde{y}_p(x)$ é solução particular de

$$y'' + py' + qy = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x).$$

Exemplo 14.9

A equação diferencial $y'' + y' - 2y = e^x - x \cos x$ tem uma solução particular da forma

$$y_p(x) = ke^x + (b_0 + b_1x) \cos x + (c_0 + c_1x) \sin x,$$

pois

$$y'' + y' - 2y = e^x \quad \text{tem uma solução particular da forma} \quad ke^x$$

$$\text{e } y'' + y' - 2y = -x \cos x \quad \text{tem uma solução particular da forma}$$

$$(b_0 + b_1x) \cos x + (c_0 + c_1x) \sin x$$

Exemplo 14.10

Encontre uma equação diferencial linear com coeficientes constantes cuja solução geral seja $(c_1 + c_2 x)e^{-3x} + x$

Solução: Sabemos que a solução geral de uma equação diferencial linear não-homogênea é a soma da solução geral da equação diferencial linear homogênea associada com uma solução particular da própria equação não-homogênea.

Examinando a forma da solução geral proposta: $(c_1 + c_2 x)e^{-3x} + x$, somos levados a dividir o problema em duas partes:

1 - Determinar uma equação diferencial linear homogênea - digamos $L(y) = 0$ - cuja solução geral seja $(c_1 + c_2 x)e^{-3x}$.

2 - Calcular uma função $h(x)$ de tal modo que a $f(x) = x$ seja uma solução particular de $L(y) = h(x)$.

Vejamos como funciona:

Na aula anterior, aprendemos a calcular equações diferenciais lineares homogêneas normais, de coeficientes constantes, a partir de suas soluções gerais:

Seja $y'' + py' + qy = 0$ a equação procurada.

A função $y_2(x) = xe^{-3x}$ é solução desta equação. Logo

$$-6e^{-3x} + 9x e^{-3x} + p(e^{-3x} - 3x e^{-3x}) + qx e^{-3x} = 0$$

ou seja

$$(-9 + p)e^{-3x} + (9 - 3p + q)x e^{-3x} = 0;$$

e como e^{-3x} e $x e^{-3x}$ são funções linearmente independentes, os coeficientes da combinação linear nula acima devem ser todos iguais a zero.

Então $p - 9 = 0$ e $q - 3p + 9 = 0$. Isto é $p = 9$ e $q = 18$ e a equação homogênea cuja solução geral é $(c_1 + c_2 x)e^{-3x}$ é

$$y'' + 9y' + 18y = 0$$

Agora a segunda etapa: determinar uma função $h(x)$ tal que $y_p(x) = x$ seja solução particular de $y'' + 9y' + 18y = h(x)$.

Substituindo x e suas derivadas na equação acima, ficamos com

$$0 + 9 + 18x = h(x)$$

Assim $h(x) = 18x + 9$ e a solução do problema é

$$y'' + 9y' + 18y = 18x + 9.$$

Atenção !!! Só aplique o método dos coeficientes a determinar nos casos em que ele é aplicável (Teoremas (14.2) a (14.7)), ou em casos que possam ser reduzidos a eles, como no **Exemplo 15.10**.

O método não se aplica, por exemplo, à equação $L \cdot y = \ln(x)$, ou à equação $L \cdot y = 1/x$

Exercícios

Exercício 14.1

Ache a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais:

1) $y'' + y = 1/\cos x$ 2) $y'' - y' - 2y = e^{-x} \sin x$.

3) $4y'' + 4y' + y = xe^{2x}$ 4) $y'' + 3y' - 4y = x^2 e^x$

5) $y'' + 4y' + 4y = xe^{-x/2}$ 6) $y'' + 4y = e^{2x}/2$

Respostas:

- 1) $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + x \sin(x) \ln[\cos(x)] \cos(x)$ 2) $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{10} [3 \cos(x) - \sin(x)] e^{-x}$
- 3) $y(x) = c_1 e^{-x/2} + c_2 x e^{-x/2} + \frac{1}{5^3} (-4 + 5x) e^{2x}$ 4) $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{375} [25x^3 - 15x^2 + 6x] e^x$
- 5) $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{1}{27} (-16 + 12x) e^{-x/2}$ 6) $y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{1}{16} e^{2x}$

Exercício 14.2

Para cada uma das equações abaixo, comprove que a expressão dada é a solução geral da equação homogênea associada e, a seguir, encontre uma solução particular da equação:

Obs: As equações são de coeficientes variáveis. Portanto o método dos coeficientes a determinar *não se aplica*.

- 1) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x, x > 0$ $y_h = c_1 x + c_2 x^2$
- 2) $x^2 y'' - xy' + y = x(x+1)$ $y_h = (c_1 + c_2 \ln |x|)x$
- 3) $xy'' - (1+2x^2)y' = x^5 e^{x^2}$ $y_h = c_1 + c_2 e^{x^2}$
- 4) $(1-x^2)y'' - 2xy' = 2x$ $y_h = c_1 + c_2 \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

Respostas:

- 1) $y_p(x) = \frac{1}{4} x^3 [2 \ln(x) - 3]$ 2) $y_p(x) = x^2 + \frac{1}{2} x \ln^2(x)$
- 3) $y_p(x) = e^{x^2} \left(\frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \right)$ 4) $y_p(x) = -x = \log \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right)$

Exercício 14.3

Use o método dos coeficientes a determinar, para encontrar uma solução particular para cada uma das seguintes equações. Em seguida determine a solução geral da equação:

- 1) $y'' + y' = 3e^x$
- 2) $y'' + 2y' = 2x + 3e^x$
- 3) $y'' - y' = \sin x$
- 4) $y'' + y = 3 \cos x$
- 5) $y'' + 4y' + 2y = x e^{-2x}$
- 6) $y'' + y' - 6y = 6(x+1)$

Respostas:

- 1) $y_p(x) = \frac{3}{2} e^x, y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{3}{2} e^x$
- 2) $y_p(x) = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x, y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2} (x^2 - x)$
- 3) $y_p(x) = -\frac{s}{e} n(x) \frac{1}{2} \cos(x), y(x) = c_1 + c_2 e^x - \frac{s}{e} n(x) \frac{1}{2} \cos(x)$
- 4) $y_p(x) = \frac{3}{2} \cos(x) + \frac{3}{2} x \sin(x), y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \frac{3}{2} \cos(x) + \frac{3}{2} x \sin(x)$
- 5) $y_p(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}, y(x) = c_1 e^{-(2+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{2})x} - \frac{1}{2} e^{-2x}$
- 6) $y_p(x) = x^2 + 2x + 1, y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x + 1$

$$2) y_p(x) = -x - \frac{7}{6}, y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} - x - \frac{7}{6}$$

Resumo

Nesta aula aprendemos a calcular soluções gerais de equações diferenciais lineares de segunda ordem normais segundo dois métodos

- O método da variação dos parâmetros
 - O método dos coeficientes a determinar
- O primeiro método pressupõe que a solução geral da equação homogênea associada seja conhecida
- O segundo método só se aplica a equações de coeficientes constantes, e quando as funções no segundo membro da equação diferencial são de alguns tipos especiais.

Avaliação

Esta foi mais uma aula em que exploramos os resultados apresentados nas aulas de números 11 a 13. O método da variação dos parâmetros é mais geral do que o dos coeficientes a determinar. Uma desvantagem desse método é que não dispomos de um procedimento geral para calcular a solução geral da equação homogênea associada quando os coeficientes são funções apenas contínuas, ou mesmo de classe \mathcal{C}^k .

Já com relação às equações de segunda ordem com coeficientes constantes, sabemos como calcular a solução geral da homogênea associada em qualquer caso. Mas a função que ocorre no segundo membro tem de pertencer a um grupo bem seleto. Apesar disso, um grande de modelos matemáticos recai em equações com coeficientes constantes às quais o método de coeficientes a determinar se aplica.

Aula 15 – Aplicações de equações diferenciais lineares de segunda ordem

Objetivo

Ao final desta aula, você terá estudado alguns modelos matemáticos de fenômenos físicos importantes, envolvendo equações diferenciais lineares de segunda ordem.

Introdução - As Leis do Movimento de Newton

Boa parte desta aula é relacionada com as leis de movimento de Newton. Você conhece estas leis desde a escola de segundo grau, e as reviu e estudou com mais profundidade nos cursos de Física.

Vamos recordá-las:

Primeira Lei de Newton Um corpo permanece em repouso ou com velocidade constante (aceleração zero) quando não está submetido à ação de forças externas, isto é,

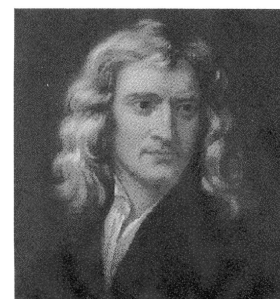
$$\vec{a} = 0 \quad \text{quando} \quad \vec{F} = 0$$

Segunda Lei de Newton A resultante das forças que atuam sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo pela sua aceleração, isto é,

$$\vec{F} = M \vec{a}$$

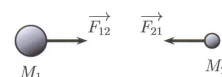
Terceira Lei de Newton Sempre que dois corpos interagem, a força \vec{F}_{12} que o primeiro corpo exerce sobre o segundo é igual e oposta à força \vec{F}_{21} que o segundo corpo exerce sobre o primeiro, isto é,

Comentário: Existem limitações inerentes à validade das Leis de Newton. As duas primeiras leis valem somente quando observadas em sistemas de referência inerciais (não acelerados). A terceira lei, em certos fenômenos de escala atômica, nem sempre é uma boa aproximação. Não vamos trabalhar com essas situações críticas, e vamos supor que as três leis são válidas.



Sir Isaac Newton
1643-1727

Um dos maiores de todos os tempos. Um dos “pais” do Cálculo. Suas obras em Matemática e Física se tornaram verdadeiras pedras angulares, influenciando profundamente os desenvolvimentos posteriores nesses campos.



Observe que a equação que exprime a segunda lei de Newton é uma equação diferencial de segunda ordem. Na forma geral, como enunciada acima, é uma equação vetorial. Introduzindo eixos coordenados, poderemos substituí-la por um sistema de três equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, não necessariamente lineares.

$$\begin{cases} F_x = M a_x \\ F_y = M a_y \\ F_z = M a_z \end{cases} \quad (15.1)$$

onde F_x, F_y, F_z representam as componentes, segundo os eixos x, y, z , da resultante $\vec{\mathbf{F}}$ das forças que atuam sobre a massa. Semelhantemente, a_x, a_y, a_z são as componentes da aceleração $\vec{\mathbf{a}}$, segundo os eixos coordenados.

Como sabemos, $\vec{\mathbf{a}}$ é a derivada de segunda ordem do vetor posição $\vec{\mathbf{r}}$ com relação ao tempo, isto é,

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2}.$$

Em termos de suas componentes o vetor $\frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2}$ se escreve

$$\frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \left(\frac{d^2 r_x}{dt^2}, \frac{d^2 r_y}{dt^2}, \frac{d^2 r_z}{dt^2} \right),$$

sendo, é claro, r_x, r_y e r_z as componentes do vetor posição $\vec{\mathbf{r}}$, com relação aos eixos coordenados. Assim, o sistema (15.1) se reescreve como

$$\begin{cases} F_x = M \frac{d^2 r_x}{dt^2} \\ F_y = M \frac{d^2 r_y}{dt^2} \\ F_z = M \frac{d^2 r_z}{dt^2} \end{cases} \quad (15.2)$$

Na próxima aula começaremos a estudar os sistemas de equações diferenciais. Mas só os lineares.

Nesta aula, veremos alguns exemplos de movimentos unidimensionais envolvendo a segunda lei de Newton onde a expressão matemática da segunda lei se reduz a

$$F = M d^2 r / dt^2 \quad (15.3)$$

onde estamos designando pela letra r a medida da posição (relativamente a uma origem) do corpo de massa M , a força F é uma função de r .

Uma observação final: para resolver a equação de movimento (15.3) precisamos conhecer (ou deduzir) a expressão da força F e “integrar” a equação (15.3), que é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

ATENÇÃO!!! Neste curso, todos os modelos que vamos estudar envolvem equações que são lineares.

Oscilador Harmônico Simples

Vamos estudar alguns exemplos de objetos em movimento, que permanecem numa região restrita do espaço, oscilando (ou vibrando, sob a ação

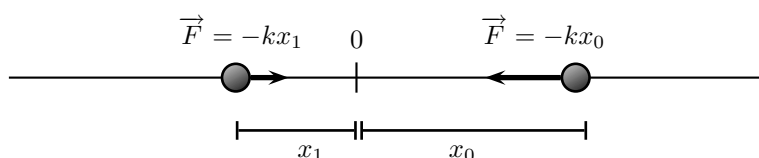
de uma força *restauradora*, em torno de uma posição média (ou de equilíbrio).

O modelo matemático para o movimento unidimensional de partículas sujeitas a forças restauradoras lineares é o *oscilador harmônico*.

Suponha que a posição da partícula no instante t é dada pela função

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad t \mapsto x(t)$$

e que a partícula (de massa m) está sujeita a uma força que a atrai para uma posição de equilíbrio (que vamos admitir que é a origem) com uma magnitude proporcional à distância até essa posição de equilíbrio, com constante de proporcionalidade $k > 0$, temos o seguinte esquema:



A segunda lei de Newton nos diz então que

$$m\ddot{x} = -kx$$

que é a equação ¹¹ do *movimento do oscilador harmônico simples* (ou *livre*).

Existem alguns tipos de movimento oscilatório cujos modelos matemáticos são obtidos fazendo pequenas modificações no modelo do oscilador simples:

Exemplo 15.1

Se o oscilador estiver submetido a uma força resistiva proporcional à sua velocidade (p. ex. uma força de atrito) a resultante das forças na equação do movimento deve incluir a parcela referente à força resistiva:

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x}$$

que é a equação do *oscilador harmônico amortecido*.

μ é a constante de atrito do meio em que a massa está oscilando

¹¹Quando se está derivando uma função em relação ao tempo muitas vezes a notação de derivada utiliza pontos sobre a função. O número de pontos deve ser igual à ordem de derivação. De fato esta notação é empregada para derivadas de ordem baixa

Exemplo 15.2

Quando, além da força restauradora, a partícula está submetida a uma força externa, (que vamos supor para simplificar só depende do tempo), $F = F(t)$, a equação do movimento se escreve

$$m\ddot{x} = -kx + F(t)$$

chamada de equação do *oscilador harmônico forçado*

Solução da equação diferencial do oscilador harmônico simples

Escrevemos a equação do oscilador sob a forma

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

onde $\omega^2 = k/m$. A solução geral desta equação é $x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$, onde c_1 e c_2 são constantes que podem ser determinadas sabendo-se a posição inicial $x(0) = x_0$ e a velocidade inicial $\dot{x}(0) = v_0$.

A solução do PVI

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

é

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (15.4)$$

Atividade 15.1

1. Faça os cálculos e obtenha a solução (15.4)
2. Escreva a solução $x(t)$ sob a forma

$$x(t) = A \cos (\omega t - \phi)$$

sendo A e ϕ constantes apropriadas.

Sugestão: Multiplique e divida a expressão de $x(t)$ por $\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$.

Solução:

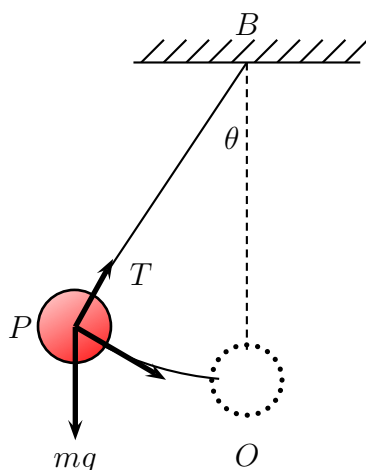
Nota: Esta maneira de representar a solução oscilador é bastante cômoda e útil.

A é chamado de *amplitude* do movimento. O período da função cosseno na expressão acima, $T = 2\pi/\omega$ é o *período do movimento*, que representa o tempo necessário para uma oscilação completa. O inverso do período é chamado de *freqüência do movimento*, $f = 1/T = \omega/2\pi$. A freqüência mede o número de oscilações por unidade de tempo. Finalmente, o ângulo ϕ é chamado de *ângulo de fase*.

Exemplo 15.3

Um modelo de oscilador harmônico simples: *O Pêndulo Simples*

Um pêndulo simples consiste de uma partícula de massa m (constante) fixada à extremidade de uma haste sem peso (ou de um fio inextensível), sendo a outra extremidade presa a um ponto fixo. Consideremos apenas os movimentos do pêndulo nos quais o sistema se move num plano vertical definido.



Na figura acima B é o ponto fixo e P é a partícula, afastada de sua posição de equilíbrio O .

P se move sob a influência de duas forças: (1) o peso mg , e (2) a tensão T no fio.

Sejam

$$PB = l, \quad \widehat{OBP} = \theta;$$

então, o deslocamento da partícula, medido ao longo do perímetro do arco circular de sua trajetória, é $s = l\theta$ (lei “zero” da Trigonometria). A velocidade tangencial instantânea correspondente é $ld\theta/dt$. E a aceleração tangencial correspondente é $ld^2\theta/dt^2$. A força de retorno (que puxa a partícula para a posição de equilíbrio) é a componente tangencial da resultante das forças que atuam na massa. A projeção da tensão na tangente é nula. A projeção do peso na direção da tangente é $-mg \sin \theta$.

De acordo com a 2ª lei de Newton temos

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta(t)$$

Usamos agora o desenvolvimento em série de McLaurin

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \dots$$

e observamos que, se nos restringimos a valores de θ suficientemente pequenos, $\sin \theta \sim \theta$, de maneira que podemos desprezar os termos correspondentes às potências de θ maiores do que 1.

Se consideramos só o primeiro termo do desenvolvimento de $\sin \theta$, então a equação de movimento toma a forma

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \theta(t)$$

ou ainda

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta, \quad \omega^2 = \frac{g}{l}.$$

Exemplo 15.4

O ângulo que mede o afastamento da posição de equilíbrio de uma massa m kg presa a um fio de comprimento l metros satisfaz à equação $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$. Calcule l , sabendo que $\omega^2 = 4$. Calcule também o período do movimento. Considere $g = 10m/s^2$

Solução: Como vimos ao estudar o modelo do pêndulo simples, $\omega = \sqrt{g/l}$, de modo que $4 = 10/l$, de onde imediatamente $l = 2,5$ metros.

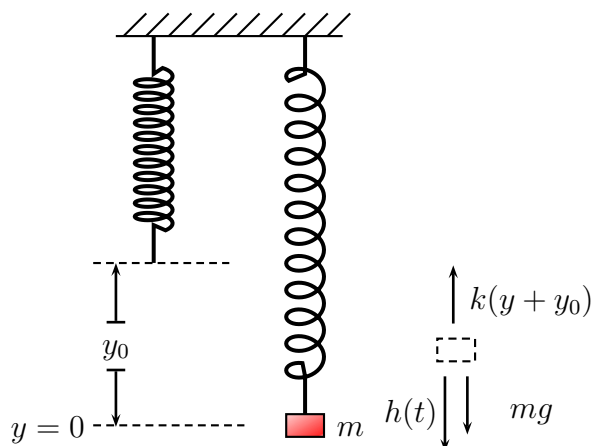
E como o período T é igual a $2\pi/\omega$, obtemos $T = 2\pi/2 = \pi$ segundos.

Estudo do Oscilador Harmônico Forçado

Consideremos o problema das oscilações de uma massa m presa a uma mola de constante k . Abandonado a si mesmo, o sistema massa-mola ficaria em equilíbrio numa posição y_0 unidades abaixo do comprimento da mola relaxada, conforme figura abaixo. Essa posição de equilíbrio será adotada como a posição inicial $y = 0$. Nessa posição ocorre o equilíbrio de forças $mg = -ky_0$.

Em seguida, desloca-se a massa verticalmente para uma posição diferente de $y = 0$ (sem velocidade inicial) e aplica-se uma força externa $h(t)$ vertical, de cima para baixo.

Queremos estudar a evolução do sistema com o tempo.



Acompanhando pela figura, podemos montar o problema de valor inicial que traduz a situação. Temos:

$$m \frac{d^2}{dt^2}(y + y_0) = -k(y + y_0) + mg + h(t)$$

Além disso,

$$y(0) = y_0, \quad y'_0 = 0$$

Como na posição de equilíbrio temos $mg - ky_0 = 0$ então a equação do movimento se simplifica e podemos escrever que o problema de Cauchy correspondente à situação física proposta é

$$\begin{cases} m y'' + ky = h(t) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Calculemos a solução deste problema para uma “força externa” $h(t)$ periódica.

Tomamos o modelo acima e aplica-se, no instante inicial uma força $h(t) = A \text{ sen } (\omega t)$. O problema de Cauchy se torna

$$\begin{cases} m y'' + ky = A \text{ sen } (\omega t) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Fazendo $k/m = \omega_0^2$, a equação diferencial homogênea associada $m y'' + ky = 0$, se reescreve como $y'' + \omega_0^2 y = 0$, a qual tem para solução geral

$$y_H(t) = C_1 \cos (\omega_0 t) + C_2 \text{ sen } (\omega_0 t).$$

Usando agora o método dos coeficientes a determinar, procuramos uma solução particular da forma $B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)$. Substituindo na equação, calculamos

$$y_P(t) = \frac{A \sin(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

supondo naturalmente que $\omega_0 \neq \omega$. Assim, a solução geral da equação do movimento é

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{A \sin(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Impondo as condições iniciais, calculamos

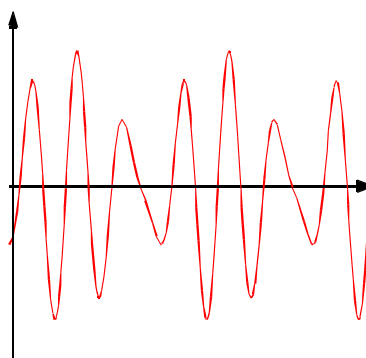
$$C_1 = y_0 \quad \text{e} \quad C_2 = -\frac{A\omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Portanto a solução do problema é

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t) - \frac{A\omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega_0 t) + \frac{A \sin(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (15.5)$$

desde que $\omega_0 \neq \omega$.

Se escolhermos, por exemplo, $y_0 = -1$, $A = 2$, $\omega_0 = 2$, $\omega = 1.5$, o gráfico da solução é



Observe que, apesar de bem complicado, o gráfico mostra que a solução é periódica, como era de se esperar, com uma amplitude bem definida.

Para completar a análise do modelo resta estudar como são as soluções no caso $\omega_0 = \omega$, caso existam.

É razoável adotar como solução, no caso $\omega_0 = \omega$, o limite quando $\omega \rightarrow \omega_0$ das soluções $y(t)$ definidas por (15.5). Usaremos a regra de L'Hôpital.

Temos:

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} [-\omega \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega t)]$$

Daí

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t) + A \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{\frac{d}{d\omega} [-\omega \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega t)]}{\frac{d}{d\omega} [\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)]}.$$

Isto é,

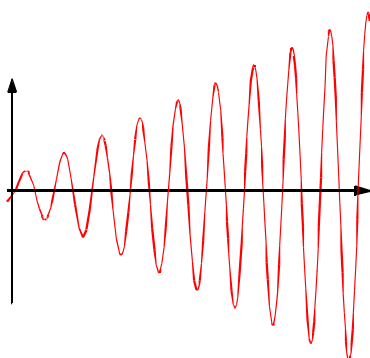
$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t) + A \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{-\sin \omega_0 t + \omega_0 t \cos \omega t}{-2\omega_0 \omega},$$

o que nos dá, finalmente,

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t) + A \frac{-\sin \omega_0 t + \omega_0 t \cos \omega_0 t}{-2\omega_0^2} \quad (15.6)$$

Obs: Intuitivamente, a solução (15.6), pode ser interpretada como a solução obtida quando sintonizamos a frequência ω da força aplicada com a frequência ω_0 interna de vibração do sistema (i.é, aquela frequência com que o sistema massa-mola vibraria, depois de deslocado da posição de equilíbrio, se não tivesse sido aplicada nenhuma força externa).

Vejamos como seria o gráfico da solução correspondente à escolha de parâmetros $y_0 = -1$, $A = 2$, $\omega_0 = \omega = 2$:



A amplitude da solução vai aumentando à medida que o tempo passa. Eventualmente a amplitude alcança um valor tão grande que a mola não tem mais como fazer o sistema retornar, ocorrendo uma ruptura.

Este é um exemplo do fenômeno da ressonância, que faz com que os engenheiros, ao projetar um sistema que possua vibrações internas, (uma ponte por exemplo), o façam de tal modo que as eventuais frequências de forças externas (imagine uma coluna de soldados marchando sobre a ponte) nunca entrem em sintonia de ressonância.

Seria um desastre!

E por falar em desastre ...

Atividade 15.2

O caso da ponte do estreito de Tacoma:

Em julho de 1940, a Ponte de Tacoma, no Estado de Washington, rompeu-se ao entrar em ressonância com rajadas do vento que soprava periodicamente na região.

Aqui, a força externa foi a força do vento. Atuando periodicamente sobre a ponte, com uma determinada frequência. Essa frequência entrou em sintonia com a frequência interna da ponte.

Que frequência interna é essa?

Faça uma pesquisa na Internet e procure mais informações sobre a ponte de Tacoma.

Sugestão: Procure links em português. Existem às dezenas.

Circuitos elétricos

O fluxo de corrente em uma rede elétrica constituída de um número finito de circuitos fechados é governado pelas seguintes leis, conhecidas como leis de *Kirchhoff*

1ª Lei de Kirchhoff A soma algébrica das correntes que entram e saem de um nó qualquer da rede é zero.

2ª Lei de Kirchhoff A soma algébrica das aumentos (ganhos) e das diminuições (perdas) de tensão nos vários componentes elétricos de qualquer circuito fechado da rede é zero.

Vamos nos limitar às redes constituídas de um único circuito formado por uma fonte de tensão V , uma resistência R , um capacitor de capacitância C e uma indutância L .

As fórmulas que relacionam o fluxo de corrente i com a variação da tensão através de cada um destes componentes são:

$$V_R = iR \quad \text{para resistência,}$$



$$V_L = L \frac{di}{dt} \quad \text{para indutância,}$$

$$i = C \frac{dV_C}{dt} \quad \text{para a capacitância.}$$

Consideremos um circuito RLC simples ao qual se aplica uma tensão senoidal. Queremos determinar a intensidade da corrente elétrica que percorre o circuito em cada instante t .

Tensões senoidais Dizemos que a tensão $V(t)$ é senoidal, se tem a seguinte forma

$$V(t) = E \cos(\omega t + \phi),$$

sendo E , ω e ϕ números reais.

Observação Significados dos parâmetros E , ω e ϕ :

Conforme aprendemos no curso de Cálculo I, E é um fator que mede o valor máximo de $|V(t)|$.

Significado físico de E

E é a amplitude máxima da tensão $V(t)$

Chamemos de T o *período* da tensão, isto é o tempo mínimo necessário para a forma $V(t)$ se repetir. Tem-se:

$$V(t+T) = V(t) \quad (15.7)$$

A *freqüência* f da voltagem é o número de vezes que a forma $V(t)$ se repete em cada unidade de tempo. A relação entre o período e a freqüência é dada por

Nº de repetições		tempo
1	→	T
f	→	1

Daí $1/f = T/1$, e portanto $f = 1/T$.

Usando a equação (15.7), podemos entender o significado físico de ω . Tem-se

$$\begin{aligned} V(t+T) = V(t) &\iff E \cos [\omega(t+T) + \phi] = E \cos (\omega t + \phi) \\ &\iff E \cos (\omega t + \omega T + \phi) = E \cos (\omega t + \phi) \\ &\iff \omega T = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Como o período T é o menor número positivo, tal que a forma de onda se repete após um tempo T , devemos escolher $k = 1$. Dessa forma

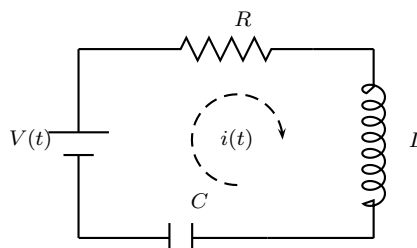
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{e} \quad 2\pi f = \omega.$$

E vemos que ω é uma medida da freqüência com que a voltagem oscila (se repete)

Significado físico dos parâmetros ω e ϕ

ϕ é um parâmetro que dá a medida do quanto a tensão no instante $t = 0$ é diferente da tensão máxima E .

Passemos então ao problema de determinar a corrente que percorre o circuito RLC quando aplicamos a tensão senoidal $V(t) = E \cos (\omega t + \phi)$.



Usando a segunda lei de Kirchhoff, temos que a soma das quedas de tensão na resistência ($E_R = iR$), na indutância ($E_L = L \frac{di}{dt}$) e no capacitor ($E_C = \int i dt$) é igual ao aumento de voltagem fornecido pela bateria ($V = E \cos(\omega t + \phi)$). Assim, a equação integro-diferencial (i.é, equação envolvendo derivadas e primitivas de uma função desconhecida) é

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E \cos(\omega t + \phi)$$

Derivando uma vez com respeito ao tempo obtemos a equação (puramente) diferencial do modelo matemático para o circuito:

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dV}{dt}$$

Ou seja,

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -E\omega \sin(\omega t + \phi) \quad (15.8)$$

Sabemos que a solução geral da equação acima é formada pela soma da solução geral da equação homogênea associada

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad (15.9)$$

Atividade 15.3

O Objetivo desta atividade é fazer parte da demonstração de que a solução geral da equação (15.9) sempre tende a zero quando $t \rightarrow +\infty$, independente das condições iniciais.

(a) Calcule a equação característica de (15.9) e suas raízes:

Solução:

(b) Sabemos que a solução geral $i_h(t)$ de (15.9) assume diferentes formas de acordo com o sinal do número $\alpha = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}$.

Suponha $\alpha > 0$.

Observando que a solução geral correspondente a este caso é

$$i_h(t) = c_1 e^{(-\frac{R}{2L} - \sqrt{\alpha})t} + c_2 e^{(-\frac{R}{2L} + \sqrt{\alpha})t}, \quad (15.10)$$

explique porque a primeira parcela de (15.10) sempre tende a zero quando $t \rightarrow +\infty$

Solução:

Prosseguindo, já que $L > 0$, $C > 0$ então $\frac{-1}{LC} < 0$. Adicionando $\frac{R^2}{4L^2}$ aos dois lados, concluímos que $\alpha < \frac{R}{2L}$. Portanto $-\frac{R}{2L} + \sqrt{\alpha} < 0$.

Você conclui então que a segunda parcela de (15.10) _____ quando $t \rightarrow +\infty$.

Conclusão geral

Se $\alpha > 0$ então $\lim_{t \rightarrow +\infty} i_h(t) = \underline{\hspace{2cm}}$.

Nota: As demonstrações de que $i_h(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$ para os casos $\alpha = 0$ e $\alpha < 0$ ficam como exercício para você fazer.

Comentário: A solução geral da equação homogênea associada (15.9) é chamada de *solução transitória*, e a corrente que persiste ao longo do tempo, é uma solução particular da equação não-homogênea (15.8):

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -E\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi),$$

que é chamada às vezes de *solução de estado permanente*.

Passemos a calcular a solução em estado permanente.

Segundo o método de coeficientes a determinar, como o termo independente é $-E\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$, procuramos uma solução particular da forma

$$i(t) = A \cos(\omega t + \phi) + B \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

onde A e B são constantes a determinar.

Substituindo na equação, obtemos

$$\begin{aligned} L[-\omega^2 A \cos(\omega t + \phi_1) - \omega^2 B \sin(\omega t + \phi_1)] \\ + R[-\omega A \sin(\omega t + \phi_1) + \omega B \cos(\omega t + \phi_1)] \\ + \frac{1}{C}[A \cos(\omega t + \phi_1) + B \sin(\omega t + \phi_1)] \\ = -E\omega \sin(\omega t + \phi_1). \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes correspondentes, obtemos

$$-\omega^2 LA + \omega RB + \frac{1}{C}A = 0$$

$$-\omega^2 LB - \omega RA + \frac{1}{C}B = -\omega E$$

Resolvendo estas equações, obtemos

$$A = \frac{RE}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}; \quad B = \frac{(\omega L - 1/\omega C)E}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

de maneira que

$$i(t) = \frac{E}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} [R \cos(\omega t + \phi_1) + (\omega L - 1/\omega C) \sin(\omega t + \phi_1)]$$

Observação: A corrente $i(t)$, em estado permanente, é dada por uma expressão da forma

$$A \cos \alpha + B \sin \alpha \quad (15.11)$$

Multiplicando e dividindo (15.11) por $\sqrt{A^2 + B^2}$, obtemos :

$$\sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \alpha + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \alpha \right) \quad (15.12)$$

E como

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 = 1$$

podemos garantir que existe um ângulo θ tal que

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \theta \quad \text{e} \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \theta \quad (15.13)$$

Das relações (15.13) deduz-se imediatamente que

$$\theta = \arctg \left(\frac{B}{A} \right) \quad (15.14)$$

Substituindo as relações (15.13) em (15.12) chegamos a:

$$\sqrt{A^2 + B^2} (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) = (\sqrt{A^2 + B^2}) \cos(\alpha - \theta) \quad (15.15)$$

sendo, obviamente $\theta = \arctg\left(\frac{B}{A}\right)$.

Podemos então reescrever $i(t)$ sob a forma

$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos \left[\omega t + \phi - \arctg \left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \right) \right] \quad (15.16)$$

que é da forma

$$i(t) = I \cos(\omega t + \psi).$$

Conclusão: A corrente (em estado permanente) correspondente a uma voltagem senoidal é uma função senoidal, ou um sinal de Corrente Alternada (CA), de mesma frequência que a da tensão alimentadora, embora a amplitude e a fase inicial sejam diferentes.

A corrente elétrica é uma função periódica.

Ela se repete.

Ela oscila.

Exercícios

Exercício 15.1

Uma massa presa a uma mola, é deslocada de 1 cm abaixo da posição de equilíbrio, num meio com coeficiente de atrito $\mu = 5$, de onde é abandonada com velocidade inicial 1 cm/seg. Determine o problema de valor inicial que governa o movimento harmônico amortecido da massa. A seguir, resolva o PVI.

Respostas: $y'' + 5y' + 4y = 0$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$; $y(t) = (5/3)e^{-t} - (2/3)e^{-4t}$

Exercício 15.2

Complete a demonstração da atividade (11.3), mostrando que se $\alpha = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} \leq 0$ então $\lim_{t \rightarrow +\infty} i_h(t) = 0$

Obs: Analise separadamente os casos $\alpha = 0$ e $\alpha < 0$ (pois as soluções são de formas diferentes nos dois casos)

Sugestão: No caso $\alpha = 0$ use a Regra de L'Hôpital. No outro caso, lembre que se $f(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow +\infty$ e $g(t)$ é limitada numa vizinhança de $+\infty$, i.é, $|g(t)| < M$ para todo $t \geq N$, onde $M > 0$ e $N > 0$ são constantes, então $f(t)g(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Exercício 15.3

Um circuito RL é um circuito formado por uma fonte de tensão $V(t)$, uma resistência R e uma indutância L . Suponha R e L constantes.

a) Usando as leis de Kirchhoff, deduza a equação diferencial que a corrente $i(t)$ que percorre o circuito satisfaz

b) Calcule a corrente quando o circuito é submetido a uma *tensão senoidal amortecida* $V(t) = E_0 e^{-at} \text{sen}(bt)$, E_0 , a , b constantes, $a > 0$.

[Suponha que, no instante $t = 0$, $i(0) = i_0$]

Respostas:

(a) $L \frac{di}{dt} + Ri = V(t)$

(b) $i(t) = i_0 + \frac{bE_0L}{Y^2} e^{-(R/L)t} + \frac{E_0}{Y} e^{-at} \text{sen}(bt - \beta)$,

onde $Y = \sqrt{(R - aL)^2 + b^2L^2}$, $R - aL = Y \cos\beta$, $bL = Y \text{sen}\beta$, $0 < \beta < \pi$

Resumo

Nesta aula estudamos dois tipos de aplicações importantes do material referente a equações lineares de coeficientes constantes, ambos relacionados com oscilações:

- modelos mecânicos envolvendo o oscilador harmônico (simples ou com amortecimento)
- modelos de oscilações elétricas.

Avaliação

O processo de construir(projetar) modelos e analisar suas respostas é, em geral, longo e, às vezes, cansativo. Mas é um trabalho compensador e essencial à nossa formação profissional.

Procuramos nos restringir a um mínimo de aplicações; e de tipos semelhantes. Ainda assim, sugiro que numa primeira leitura, você se detenha em um modelo procurando entendê-lo, interpretá-lo, refazê-lo e completá-lo.

Posteriormente, volte e estude os outros modelos, e procure modelos de outros tipos de problemas na literatura e na Internet.

Aula 16 – Sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Autovalores reais distintos

Objetivos

- 1) - Construir um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem em duas incógnitas (sendo que cada equação contém a derivada de primeira ordem de apenas uma das incógnitas) equivalente a uma equação diferencial linear de segunda ordem, normal num intervalo.
- 2) - Generalizar os sistemas de equações diferenciais de primeira ordem do item (1), incluindo os que não são provenientes de equações diferenciais lineares de segunda ordem normais.
- 3) - Escrever um sistema de duas equações lineares de primeira ordem em forma vetorial, definindo uma matriz de funções, um vetor de funções incógnitas, e um vetor de termos independentes.
- 4) - Calcular a solução geral de sistemas cujas matrizes são formadas por funções constantes, possuindo autovalores reais distintos e sem vetores de termos independentes.

Sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem

Consideremos uma equação diferencial linear de segunda ordem, normal num intervalo I

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x) \quad (16.1)$$

Vamos construir um sistema de duas equações de primeira ordem equivalente à equação (16.1), cujas incógnitas são duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$, da seguinte maneira:

- Em primeiro lugar, introduzimos as duas novas incógnitas:

$$y_1(x) \stackrel{def}{=} y(x) \quad (16.2)$$

$$y_2(x) \stackrel{def}{=} y_1'(x) \quad (16.3)$$

P Anote: As funções y_1 e y_2 são *sempre* definidas pelas relações (16.2) e (16.3), independentemente dos coeficientes da equação de segunda ordem (16.1). A função y_1 é sempre igual à função incógnita y da equação de segunda ordem, e y_2 é sempre igual à derivada de y .

Agora vamos construir um sistema de duas equações de primeira ordem com as funções y_1 e y_2 :

Repare que a equação (16.3) já é uma das equações diferenciais que queremos:

$$y_1' = y_2$$

Queremos agora uma equação para y_2' :

$$y_2' = ?$$

Isolando y'' no lado esquerdo da equação (16.1):

$$y'' = -q(x) y - p(x)y' + h(x) \quad (16.4)$$

Acontece que $y = y_1$ (conforme a equação (16.2)),
conseqüentemente $y' = y_1'$. Mas (ver equação (16.3)) $y_1' = y_2$

Substituindo y e y' no lado direito de (16.4) respectivamente por y_1 e y_2 :

$$y'' = -q(x) y_1 - p(x)y_2 + h(x). \quad (16.5)$$

Por outro lado, derivando os dois lados da equação (16.3):

$$y_2' = y_1'', \quad \text{que por sua vez é igual a } y''$$

Assim, substituindo y'' por y_2' no lado esquerdo de (16.5) temos finalmente

$$y_2' = -q(x) y_1 - p(x)y_2 + h(x). \quad (16.6)$$

As equações (16.3) e (16.6) formam um sistema de duas equações provenientes da equação de segunda ordem (16.1).

Em resumo:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x) \quad \text{e} \quad \begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y_1' \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -q(x) y_1 - p(x)y_2 + h(x) \end{cases}$$

Vejam alguns exemplos:

Exemplo 16.1

Determine um sistema de equações diferenciais de primeira ordem equivalente à equação

$$xy'' - 2x^2y' + 7y = \ln(x).$$

Indique o(s) intervalo(s) onde vale a equivalência.

Solução:

Devido à presença da função $\log(x)$ no segundo membro, a equação só é bem definida no intervalo $(0, +\infty)$. E ela é normal nesse intervalo.

Escrevendo a equação em forma normalizada temos

$$y'' - 2xy' + \frac{7}{x}y = \frac{\log(x)}{x} \quad (16.7)$$

Fazendo $y_1 = y$ e $y_2 = y'_1$, já temos a primeira equação do sistema, a saber:

$$y'_1 = y_2.$$

Precisamos calcular uma equação para y'_2 .

Agora,

$$y'_2 = (y'_1)' = y''$$

E da equação (16.7) tiramos o valor de $y'' = 2xy' - \frac{7}{x}y + \frac{\log(x)}{x}$. Assim

$$y'_2 = 2xy' - \frac{7}{x}y + \frac{\log(x)}{x}$$

Finalmente, substituímos no lado direito desta última equação y por y_1 e y' por y_2 , ficando com

$$y'_2 = 2xy_2 - \frac{7}{x}y_1 + \frac{\log(x)}{x},$$

que é a equação para y'_2 .

O sistema equivalente a $xy'' - 2x^2y' + 7y = \ln(x)$, em $(0, +\infty)$ é

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = -\frac{7}{x}y_1 + 2xy_2 + \frac{\log(x)}{x} \end{cases}$$

Exemplo 16.2

Foi dito que o sistema construído a partir de uma equação diferencial linear de segunda ordem normal é *equivalente* à equação. Mostremos que os conjuntos de soluções da equação de segunda ordem e do sistema construído a partir dela são iguais, e portanto a equação e o sistema realmente equivalem (têm os mesmos conjuntos de soluções).

Solução:

Seja então

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x)$$

uma equação linear de segunda ordem normal num intervalo I e seja

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = -q(x)y_1 - p(x)y_2 + h(x) \end{cases}$$

o sistema correspondente.

Ao resolver a equação de segunda ordem, calcula-se sua solução $y(x)$. Mas $y(x) = y_1(x)$. Portanto já temos a primeira solução do sistema. Derivando a solução $y(x)$, calculamos $y'(x)$, que é igual a $y'_1(x)$, a qual por sua vez é igual a $y_2(x)$.

Ou seja, partindo da solução $y(x)$ da equação de segunda ordem, obtemos as soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ do sistema a ela associado.

Toda solução da equação de segunda ordem normal dá origem a um par de soluções do sistema a ela associado.

Reciprocamente, suponha que conhecemos soluções y_1 e y_2 do sistema de equações

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = -q(x)y_1 - p(x)y_2 + h(x) \end{cases}$$

É claro que (derivando a primeira equação) obtemos $y'_2 = y''_1$, e substituindo y_2 por y'_1 e y'_2 por y''_1 na segunda equação ficamos com

$$y''_1 = -q(x)y_1 - p(x)y'_1 + h(x),$$

o que diz que y_1 é solução da equação de segunda ordem $y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x)$.

Como estamos partindo da hipótese de que conhecemos y_1 , então podemos dizer que conhecemos uma solução da equação de segunda ordem.

Toda par de soluções do sistema é relacionado a uma solução da equação de segunda ordem normal associada a ele

E era exatamente isso que queríamos provar: *Existe uma correspondência bijetiva entre as soluções de equação linear normal de segunda ordem e os pares de soluções do sistema de equações de primeira ordem associado a ela.*

Desafio: Como você faria para generalizar o procedimento dos exemplos anteriores e construir um sistema de n equações de primeira ordem equivalente a uma equação diferencial linear normal de ordem n ?

Observação: Até o final do curso, só vamos estudar sistemas de duas equações lineares de primeira ordem.

Os sistemas equivalentes a equações lineares normais de segunda ordem são casos particulares de sistema mais gerais, da forma

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + h_1(x) \\ y'_2 = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + h_2(x) \end{cases}$$

Registre: Sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem da forma geral acima são muito comuns, ocorrendo em diversos modelos matemáticos de problemas de outras ciências e também em problemas teóricos da própria Matemática.

Como exemplo, vejamos um modelo matemático de um sistema “concreto”, que não é construído a partir de uma equação diferencial normal de segunda ordem.

Você não precisa se preocupar com os detalhes técnicos. Numa primeira leitura, procure apenas acompanhar um processo modelagem matemática.

Soluções salinas em tanques interligados

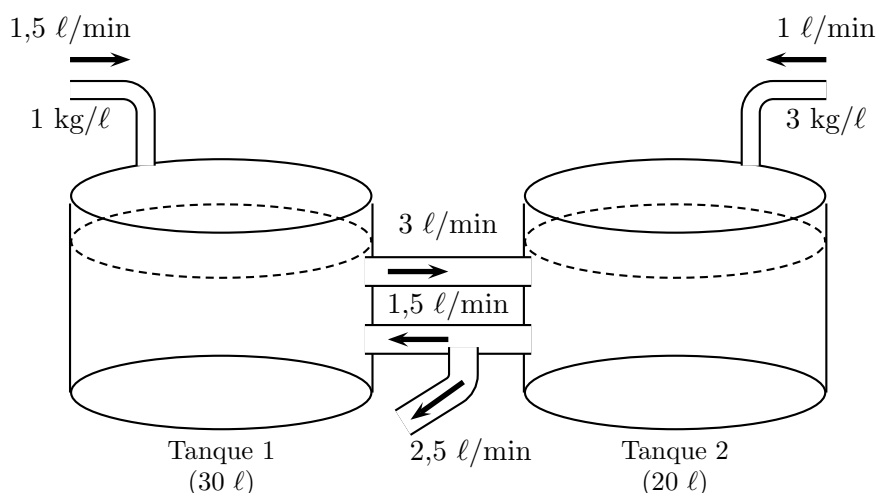


Figura 16.1

Consideremos os dois tanques interligados como na figura 16.1. O tanque 1 contém inicialmente 30 litros de água e 25 kg de sal, enquanto o tanque 2 contém inicialmente 20 litros de água e 15 kg de sal. Uma solução de 1 kg/l de sal entra no tanque 1 com uma vazão de 1,5 l/min. A mistura formada passa do tanque 1 para o tanque 2 com uma vazão de 3 l/min. Simultaneamente, entra no tanque 2 uma solução de 3 kg/l de água salgada (vinda de fora) com uma vazão de 1 l/min. Parte da solução formada no tanque 2 é expelida com uma vazão de 4 l/min; uma parte indo para o tanque 1 com uma vazão de 1,5 l/min, enquanto o resto deixa o sistema.

Determinar as quantidades de sal $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$ em cada um dos tanques, num instante t qualquer.

Solução: Consideremos o primeiro tanque: a quantidade de sal num instante t é igual à quantidade de sal original, mais a que entrou no tempo t menos a que saiu no tempo t . A mesma coisa vale para o segundo tanque (uma equação de balanço). Logo, a taxa de variação da quantidade de sal em um tanque é igual à taxa de variação da quantidade de sal que entra, menos a taxa de variação da quantidade de sal que sai. Uma outra observação importante é que os volumes das soluções nos dois tanques sempre são constantes. Assim, por exemplo, seja qual for a quantidade de sal $Q_1(t)$ no tanque 1 no instante t , podemos garantir que a quantidade de sal por litro na solução do tanque 1 é

$Q_1(t)/30$ kg/l. E a quantidade de sal por litro na solução do tanque 2 é $Q_2(t)/20$ kg/l. Portanto, a taxa de variação da quantidade de sal no tanque 1 será: (taxa que entra de fora) + (taxa que entra do tanque 2) - (taxa do que sai do próprio tanque 1), ou seja

$$\frac{dQ_1}{dt} = 1,5 + \frac{1,5}{20}Q_2(t) - \frac{3}{20}Q_1(t) \quad (i).$$

De modo análogo, a taxa de variação da quantidade de sal no tanque 2 será: (taxa que entra de fora) + (taxa que entra do tanque 1) - (taxa do que sai do próprio tanque 2). Então,

$$\frac{dQ_2}{dt} = 3,0 + \frac{3}{30}Q_1(t) - \frac{4}{20}Q_2(t) \quad (ii)$$

E assim as equações que governam as quantidades $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$ são

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{dt} = 1,5 + \frac{1,5}{20}Q_2(t) - \frac{3}{20}Q_1(t) \\ \frac{dQ_2}{dt} = 3,0 + \frac{3}{30}Q_1(t) - \frac{4}{20}Q_2(t) \end{cases}$$

Atividade 16.1

Escreva na linha abaixo as funções $a_{ij}(x)$, $1 \leq i, j \leq 2$, e as funções $h_k(x)$, $1 \leq k \leq 2$, para as quais o sistema

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + h_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + h_2(x) \end{cases}$$

é equivalente à equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$.

Resposta: _____

Nota: Nossa meta é, até o final do curso, efetuar um estudo sistemas gerais de equações diferenciais de primeira ordem (não só dos equivalentes a equações lineares normais de segunda ordem).

Começaremos com uma série de conceitos e resultados que, tal como no caso de equações diferenciais lineares de ordem superior a um, servirão de guia para o estudo a ser efetuado.

Definições e propriedades gerais dos sistemas de equações diferenciais lineares

Na seção anterior, vimos dois exemplos interessantes de sistemas de equações lineares de primeira ordem normais. Um de natureza teórica, o sistema equivalente a uma equação diferencial linear de segunda ordem normal, e um modelo concreto, o sistema que dá as concentrações de sal em cada um de dois tanques interligados entre si.

Definição 16.1

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto.

Um sistema normal de duas equações diferenciais de primeira ordem, em I , para as funções incógnitas y_1 e y_2 é um sistema da forma

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + h_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + h_2(x) \end{cases} \quad (16.8)$$

onde

$$a_{ij} : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad h_k : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

são funções contínuas, para $1 \leq i, j, k \leq 2$.

As funções $a_{ij}(x)$ são chamadas de *coeficientes do sistema* (16.8).

As funções h_k são os *termos independentes do sistema* (16.8)

Recordação: Uma função vetorial

$$\begin{aligned} \vec{F} : & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto \vec{F}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

é contínua (respectivamente derivável) em $x_0 \in I$, ou continuamente derivável em I) se e só se as *funções componentes* f_1 e f_2 são contínuas (respectivamente deriváveis) em x_0 , ou continuamente deriváveis em I .

Observe que as funções componentes são funções de I com valores em \mathbb{R} .

No caso de \vec{F} ser derivável em x_0 , o *vetor derivada de \vec{F} em x_0* é o vetor

$$\vec{F}'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ f_2'(x_0) \end{pmatrix}.$$

Voltando ao sistema da definição (16.1), introduzamos os seguintes elementos:

- o *vetor das incógnitas*

$$\vec{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

(que supomos ser uma função continuamente derivável em I);

- o *vetor de termos independentes*

$$\vec{H}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{pmatrix}.$$

(que é uma função vetorial contínua em I);

- e finalmente introduzamos a *matriz dos coeficientes do sistema* (16.8):

$$A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix}.$$

A *forma vetorial* (ou *matricial*) do sistema (16.8) é

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{pmatrix} \quad (16.9)$$

onde o ponto representa multiplicação de matrizes.

Usando uma notação mais simples ainda, costuma-se denotar o sistema (16.8), ou (16.9), por

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \vec{Y} + \vec{H}(x) \quad (16.10)$$

ou mesmo

$$\vec{Y}' = A(x)\vec{Y} + \vec{H}(x) \quad (16.11)$$

Diremos que (16.8) é a forma expandida (ou explícita) de (16.11).

Exemplo 16.3

Escreva na forma vetorial o sistema de equações de primeira ordem equivalente à equação diferencial linear de segunda ordem normal

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

Solução:

Como já vimos anteriormente, a forma expandida do sistema de equações de primeira ordem equivalente a $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ é

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -q(x)y_1 - p(x)y_2 + g(x) \end{cases}$$

A forma vetorial deste último sistema é

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) \end{pmatrix}$$

Exemplo 16.4

Escreva o sistema linear abaixo na forma matricial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 8y \end{cases}$$

Solução: Neste exemplo, estamos considerando funções $x(t)$ e $y(t)$ em vez de $y_1(x)$ e $y_2(x)$, o que obviamente não modifica nada.

Definindo $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ vem que a forma matricial do sistema linear acima é

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \vec{X}(t)$$

Atividade 16.2

Escreva o sistema abaixo em forma expandida

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

Resposta:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} \\ \frac{dy}{dt} = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

Prosseguimos com os fatos gerais sobre sistemas normais de equações de primeira ordem em duas variáveis apresentando a definição de solução de um tal sistema

Definição 16.2

Uma *solução* do sistema (16.11) é uma função vetorial continuamente derivável

$$\vec{\Phi} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tal que

$$\forall x \in I, \vec{\Phi}'(x) = A(x)\vec{\Phi}(x) + \vec{H}(x).$$

Equivalentemente, uma solução do sistema (16.8) é um par de funções $(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$, definidas no intervalo I tais que $\forall x \in I$,

$$\begin{cases} \varphi_1'(x) = a_{11}(x)\varphi_1(x) + a_{12}(x)\varphi_2(x) + h_1(x) \\ \varphi_2'(x) = a_{21}(x)\varphi_1(x) + a_{22}(x)\varphi_2(x) + h_2(x) \end{cases}$$

Obs: Naturalmente para todo $x \in I$, $\vec{\Phi}(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$

Um *problema de valor inicial* (PVI) para um sistema (16.11) consiste em, dado um par

$$(x_0, \vec{Y}_0),$$

onde $x_0 \in I$ e $\vec{Y}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ é um vetor qualquer de \mathbb{R}^2 , obter uma solução $\vec{\Phi}$, de (16.11), tal que $\vec{\Phi}(x_0) = \vec{Y}_0$.

O Teorema de Existência e Unicidade. Sistemas homogêneos

Nesta seção, apresentaremos os resultados teóricos que fundamentam o estudo dos sistemas de equações.

O primeiro resultado, e o mais básico de todos, é o Teorema de Existência e Unicidade de soluções de problemas de valores iniciais para sistemas.

Teorema 16.1**Teorema de Existência e Unicidade de soluções de PVI's**

Para cada par $(x_0, \vec{Y}_0) \in I \times \mathbb{R}^2$ existe uma única solução $\vec{\Phi}$ do sistema (16.11), definida em todo o I , e tal que $\vec{\Phi}(x_0) = \vec{Y}_0$



Sugestão: Procure ler e entender bem os enunciados e resultados desta seção, sem se preocupar com demonstrações. Utilize-os como referência e ... vá em frente.

⇒ Um sistema (16.11) para o qual o vetor de termos independentes é nulo, isto é, um sistema da forma

$$\vec{Y}' = A(x)\vec{Y} \quad (16.12)$$

é chamado de *sistema linear homogêneo*.

Exemplo 16.5

A forma explícita do sistema homogêneo (16.12) é

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 \end{cases}$$

e a forma matricial é

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \vec{Y}$$

Considere o conjunto $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ das funções vetoriais continuamente deriváveis definidas no intervalo aberto I , com valores em \mathbb{R}^2 . $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ é um espaço vetorial com as operações de somas de funções e produto de funções por constantes reais.

Vale o seguinte resultado:

Proposição 16.1

Sejam Ψ_1 e Ψ_2 soluções do sistema linear homogêneo (16.12).

Se a e b são constantes reais arbitrárias, então $a\Psi_1 + b\Psi_2$ também é solução de (16.12)

Demonstração. Seja $\Gamma(x) = a\Psi_1(x) + b\Psi_2(x)$. Então

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma(x)}{dx} &= a \frac{d\Psi_1(x)}{dx} + b \frac{d\Psi_2(x)}{dx} \\ &= a A(x) \Psi_1(x) + b A(x) \Psi_2(x) \\ &= A(x)[a \Psi_1(x) + b \Psi_2(x)] \\ &= A(x) \Gamma(x) \end{aligned}$$

o que mostra que $\Gamma(x)$ é solução de (16.12) ■

Obs: A proposição que acabamos de provar mostra que o conjunto das soluções do sistema homogêneo (16.12) é um subespaço vetorial real de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$.

No espaço $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$, duas funções Φ_1 e Φ_2 são linearmente independentes se as únicas constantes c_1 e c_2 tais que

$$c_1 \Phi_1(x) + c_2 \Phi_2(x) = 0$$

para todo $x \in I$, são $c_1 = c_2 = 0$.

Equivalentemente, duas funções $\Phi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{pmatrix}$ e $\Phi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \end{pmatrix}$

de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ são linearmente independentes se $\forall x \in I$, os vetores

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) \\ \varphi_{21}(x) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \varphi_{12}(x) \\ \varphi_{22}(x) \end{pmatrix}$$

são linearmente independentes em \mathbb{R}^2

Sabemos lá do curso de Álgebra Linear, que dois vetores \vec{K}_1 e \vec{K}_2 em \mathbb{R}^2 são linearmente independentes se e só se a matriz cujas colunas são \vec{K}_1 e \vec{K}_2 possui determinante diferente de zero.

Representaremos a matriz cujas colunas são \vec{K}_1 e \vec{K}_2 por

$$\text{col}[\vec{K}_1, \vec{K}_2]$$

Atividade 16.3

Vamos tomar um sistema homogêneo $\vec{Y}' = A(x)\vec{Y}$ associado a (ou proveniente de) uma equação diferencial linear de segunda ordem homogênea normal $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

- A matriz do sistema homogêneo é

$$A(x) = \begin{pmatrix} \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \end{pmatrix}$$

- Se $\vec{Y}_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_{12} \end{pmatrix}$ e $\vec{Y}_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_{22} \end{pmatrix}$

são duas soluções do sistema $\vec{Y}' = A(x)\vec{Y}$ então podemos dizer que

$$y_{12} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{e} \quad y_{22} = \underline{\hspace{2cm}}$$

[Aí vai uma cola: $y_{12} = y_1'$. Por que? Veja a equação (16.3)]

- Portanto

$$\text{col}[\vec{Y}_1, \vec{Y}_2] = \begin{pmatrix} \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \end{pmatrix}$$

- Complete com o símbolo $=$ ou com o símbolo \neq

$$\det \text{col} [\vec{Y}_1, \vec{Y}_2] \text{_____} W[y_1(x), y_2(x)]$$

- Complete com a palavra *verdadeira* ou a palavra *falsa*:

(1) - Para um sistema linear homogêneo $\vec{Y}' = A(x)\vec{Y}$ associado a uma equação diferencial linear de segunda ordem normal $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, se $\vec{Y}_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_{12} \end{pmatrix}$ e $\vec{Y}_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_{22} \end{pmatrix}$ são duas soluções do sistema, então y_1 e y_2 são duas soluções da equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

A frase (1) é _____

(2) - Testar se duas soluções $\vec{Y}_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_{12} \end{pmatrix}$ e $\vec{Y}_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_{22} \end{pmatrix}$ de um sistema linear homogêneo $\vec{Y}' = A(x)\vec{Y}$, proveniente uma equação diferencial linear de segunda ordem normal $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ são linearmente independentes, isto é, verificar se

$$\det \text{col} [\vec{Y}_1, \vec{Y}_2]$$

é diferente de zero, é equivalente a verificar se o determinante wronskiano $W[y_1(x), y_2(x)]$ é diferente de zero.

A frase (2) é _____

Comentário: A atividade que você acaba de realizar mostra que a teoria de sistemas de equações de primeira ordem (16.8) não é contraditória com o estudo anterior de equações diferenciais de segunda ordem normais

Para finalizar, apresentamos um teorema que nos dá, como consequência, a estratégia de obtenção de soluções de sistemas homogêneos (16.12)

Teorema 16.2

O conjunto das soluções da equação linear homogênea (16.12) é um subespaço vetorial de dimensão dois de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$

Obs: A demonstração (que vamos omitir) é análoga à que fizemos na Aula 13 para provar que a dimensão do espaço das soluções de uma equação diferencial linear homogênea de ordem n era exatamente igual a n .

Aqui também, um ingrediente essencial para a demonstração é o Teorema de Existência e Unicidade de soluções de problemas de valores iniciais.

Anote então o que devemos fazer para obter todas as soluções de um sistema linear homogêneo (16.12).

Devemos

1. calcular duas soluções $\vec{Y}_1(x)$ e $\vec{Y}_2(x)$
2. mostrar que essas soluções são linearmente independentes (e que portanto $\{\vec{Y}_1, \vec{Y}_2\}$ é uma base para o espaço das soluções
3. escrever a solução geral

$$\vec{Y}(x) = c_1 \vec{Y}_1(x) + c_2 \vec{Y}_2(x)$$

Os itens números dois e três são fáceis de executar. Como antes, a dificuldade maior fica por conta do cálculo de duas soluções do sistema linear.

Iniciaremos agora o estudo de sistemas de coeficientes constantes, para os quais sempre podemos calcular duas soluções linearmente independentes. Este estudo será completado nas duas próximas aulas.

Sistemas Homogêneos de coeficientes constantes (o método dos autovalores e autovetores)

⇒ Um sistema (16.11) para o qual a matriz A dos coeficientes é formada por (funções) constantes, isto é um sistema da forma

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{pmatrix} \quad (16.13)$$

é chamado de *sistema linear de coeficientes constantes*.

Um *sistema homogêneo de coeficientes constantes* é um sistema (16.13) cujo vetor de termos independentes é nulo:

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \vec{Y} \quad (16.14)$$

Sistemas homogêneos de coeficientes constantes são chamados também de *sistemas homogêneos autônomos* (a variável x não aparece explicitamente nas equações do sistema)

Observação: A equação (16.14) é uma generalização das equações diferenciais lineares homogêneas de primeira ordem (de coeficientes constantes):

$$y' + py = 0, \quad \text{ou} \quad y' = a_{11} y \quad (a_{11} = -p),$$

que pode ser chamado de *caso unidimensional* de sistema linear homogêneo de coeficientes constantes.

Obtenção de Soluções de Equações Autônomas.

Começamos por um exemplo:

Exemplo 16.6

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 + 2y_2 \\ y'_2 = 8y_1 + y_2 \end{cases}$$

isto é,

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \vec{Y}.$$

Solução: Precisamos encontrar duas soluções linearmente independentes do sistema.

A solução da equação homogênea unidimensional

$$y' = a_{11} y$$

é

$$y(x) = Ce^{a_{11}x}$$

Para calcular uma solução do sistema de duas equações, uma idéia é - motivados pelo caso unidimensional - procurarmos uma solução que seja uma generalização da solução do caso unidimensional. Experimentaremos uma solução da forma

$$\vec{Y}(x) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{\lambda x}$$

sendo λ um escalar (i.é, um número real ou complexo) e

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

um vetor, ambos a serem determinados.

Observação: Estamos generalizando a solução unidimensional, substituindo a constante C por um vetor constante \vec{K} .

Substituindo no sistema:

$$\begin{pmatrix} (v_1 e^{\lambda t})' \\ (v_2' e^{\lambda t})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 e^{\lambda x} \\ v_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix}$$

ou seja

$$\begin{aligned} v_1 \lambda e^{\lambda x} &= v_1 e^{\lambda x} + 2v_2 e^{\lambda x} \\ v_2 \lambda e^{\lambda x} &= 8v_1 e^{\lambda x} + v_2 e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Simplificando o fator exponencial:

$$\begin{aligned} \lambda v_1 &= v_1 + 2v_2 \\ \lambda v_2 &= 8v_1 + v_2 \end{aligned}$$

ou ainda

$$A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix};$$

o que nos mostra que λ tem de ser um *autovalor* da matriz A , e $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ um *autovetor* de A associado, ou *pertencente*, ao autovalor λ .

Neste ponto, recordamos as seguintes definições do curso de Álgebra Linear

Definição 16.3

A equação polinomial $\det(A - \lambda Id) = 0$ é chamada de *equação de autovalores* ou de *equação característica* da matriz A .

O polinômio $\det(A - \lambda Id)$ é chamado de *polinômio característico* de A

Retornando ao exemplo que estávamos estudando, temos:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 8 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

ou seja

$$(\lambda - 1)^2 - 16 = 0$$

de onde tiramos $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -3$.

Precisamos calcular autovetores para cada um dos autovalores.

Para $\lambda_1 = 5$, resolvemos a equação vetorial

$$A\vec{K} = 5\vec{K}$$

isto é,

$$(A - 5Id)\vec{K} = \vec{0}$$

ou ainda

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daí tiramos a relação

$$4v_1 - 2v_2 = 0$$

de modo que \vec{K} pode ser qualquer vetor não-nulo (v_1, v_2) cujas componentes verificam a relação $v_2 = 2v_1$.

Por exemplo, escolhendo $v_1 = 1$ tiramos $v_2 = 2$.

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Assim

$$\vec{Y}_1(x) = e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

é uma solução do sistema dado.

Procedemos de modo análogo com $\lambda_2 = -3$:

$$A\vec{K} = -3\vec{K}$$

$$(A + 3Id)\vec{K} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De onde

$$v_2 = -v_1$$

Agora podemos tomar para \vec{K} qualquer vetor (v_1, v_2) tal que $v_2 = -v_1$. Podemos escolher, por exemplo,

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

então

$$\vec{Y}_2(x) = e^{-3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

é uma segunda solução do sistema.

É evidente que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

são vetores l.i. em \mathbb{R}^2 . Portanto

$$e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad e^{-3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

também o são, para todo $x \in \mathbb{R}$, pois são múltiplos de vetores linearmente independentes.

Esse é um fato geral da Álgebra Linear, que recordamos na proposição abaixo:

Proposição 16.2

Autovetores associados a autovalores distintos (de uma mesma matriz) são linearmente independentes.

Assim o conjunto

$$\{\vec{Y}_1(x), \vec{Y}_2(x)\}$$

é uma base do espaço das soluções de

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 8y_1 + y_2 \end{cases}$$

E então a solução geral do sistema acima é

$$\vec{Y}(x) = c_1 e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ou ainda

$$y_1(x) = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-3x}$$

$$y_2(x) = 2c_1 e^{5x} - 2c_2 e^{-3x}.$$

Resumindo

Dado um **sistema autônomo** em \mathbb{R}^2

$$\vec{Y}' = A\vec{Y}$$

cuja equação característica

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

tem duas raízes reais distintas

$$\lambda_1 \quad \text{e} \quad \lambda_2,$$

a sua solução geral é

$$\vec{Y}(x) = c_1 \vec{K}_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \vec{K}_2 e^{\lambda_2 x}$$

sendo \vec{K}_1 e \vec{K}_2 autovetores associados respectivamente a λ_1 e λ_2

Exemplo 16.7

Calcule a equação característica do sistema

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{Y}$$

Solução: A equação característica do sistema é

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ou seja

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

o que nos dá

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Exemplo 16.8

Calcule a solução geral do sistem

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{Y}$$

- Descreva o comportamento das soluções quando $x \rightarrow \infty$

Solução: A primeira coisa a fazer é calcular os autovalores da matriz do sistema, resolvendo a equação $\det(A - \lambda I) = 0$, sendo A a matriz do sistema. Temos

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \iff (3 - \lambda)(2 - \lambda) = 0$$

Os autovalores são

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 3$$

O próximo passo é calcular um autovetor associado (ou pertencente) a cada autovalor. Para isso devemos calcular um vetor $\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ tal que

$$A \cdot \vec{V} = \lambda \vec{V}$$

O que equivale a resolver a equação vetorial

$$(A - \lambda I) \vec{V} = \vec{0}$$

Para calcular um autovetor de $\lambda_1 = 2$ precisamos resolver

$$\begin{pmatrix} 3 - \lambda_1 & -2 \\ 0 & 2 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Isto é

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A única relação que conseguimos obter da equação matricial acima é $v_1 - 2v_2 = 0$. A outra relação se reduz a $0 = 0$, o que não informa nada sobre o vetor \vec{V}

Mas a relação $v_1 - 2v_2 = 0$ mostra que todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$ têm a segunda coordenada igual ao dobro da primeira.

Podemos escolher qualquer vetor diferente de $\vec{0}$ com esta característica. Por exemplo, podemos escolher

$$\vec{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Daí então

$$\vec{Y}_1(x) = \vec{K}_1 e^{2x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2x}$$

é uma solução do sistema.

Procedemos de maneira análoga com relação a $\lambda_2 = 3$.

Para calcular um autovetor de $\lambda_2 = 3$ precisamos resolver

$$\begin{pmatrix} 3 - \lambda_2 & -2 \\ 0 & 2 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Isto é

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Agora as relações que obtemos ao resolver a equação matricial são $-2v_2 = 0$ e $-v_2 = 0$, o que nos indica que podemos escolher qualquer autovetor da forma

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por exemplo

$$\vec{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$\vec{Y}_2(x) = \vec{K}_2 e^{3x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3x}$$

é uma segunda solução do sistema.

Como \vec{K}_1 e \vec{K}_2 pertencem a autovalores distintos, eles são linearmente independentes. Consequentemente $\vec{Y}_1(t)$ e $\vec{Y}_2(t)$ são soluções linearmente independentes.

A solução geral do sistema proposto é

$$\vec{Y}(t) = c_1 \vec{Y}_1(t) + c_2 \vec{Y}_2(t)$$

i.é,

$$\vec{Y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3x}$$

Exercícios

Exercício 16.1

- Escreva um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem equivalente à equação $y'' - 3y' + 2y = 0$.
- Resolva o sistema pelo método de autovalores e autovetores.
- Comprove que a primeira componente do vetor solução geral é exatamente a solução geral da equação $y'' - y = 0$
- Isso foi uma coincidência, ou trata-se de um fato que sempre vai acontecer?
- E o que você pode afirmar sobre a segunda componente do vetor solução geral?

Respostas:

- $\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \vec{Y}$
- $\vec{Y}t = c_1 \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix}$
- A primeira componente do vetor $\vec{Y}(t)$ é $c_1 e^x + c_2 e^{2x}$
- Quando o sistema provém de uma equação normal de segunda ordem isso sempre vai acontecer
- A segunda componente é sempre a derivada da solução geral da equação linear de segunda ordem normal.

Exercício 16.2

Escreva os sistemas abaixo em forma matricial

$$(1) \begin{cases} x' = 4x - 7y \\ y' = 5x \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x' = -3x + 4y + \text{sen}(t) \\ y' = 6x - y + t \end{cases}$$

Respostas:

$$(1) \vec{X}' = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \vec{X} \quad (2) \vec{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} \text{sen}(t) \\ t \end{pmatrix}$$

Exercício 16.3

a) Determine, no modelo dos tanques interligados, os valores de Q_1 e Q_2 para os quais o sistema está *em equilíbrio*, isto é, não varia com o tempo.

b) Sejam Q_1^ε e Q_2^ε os valores de equilíbrio. Qual dos tanques chega mais rapidamente ao estado de equilíbrio?

c) Faça $x_1(t) = Q_1(t) - Q_1^\varepsilon$ e $x_2(t) = Q_2(t) - Q_2^\varepsilon$. Determine o problema de valor inicial para x_1 e x_2 .

Exercício 16.4

Sejam \vec{K}_1 e \vec{K}_2 os autovetores associados respectivamente aos autovalores λ_1 e λ_2 no exemplo (16.6).

a) Construa a matriz $P = \text{col} [\vec{K}_1 \vec{K}_2]$

b) Mostre que $P^{-1} A P = \text{diag} (\lambda_1 \lambda_2)$, onde P^{-1} designa a matriz inversa de P e $\text{diag} (\lambda_1 \lambda_2)$ é a matriz diagonal formada pelos elementos λ_1 e λ_2

c) Calcule soluções $\vec{Z}_1(t)$ e $\vec{Z}_2(t)$ do sistema $\vec{Z}' = \text{diag} (\lambda_1 \lambda_2) \vec{Z}$

d) Mostre que $\vec{Y}_1(t) = P \vec{Z}_1(t)$ e $\vec{Y}_2(t) = P \vec{Z}_2(t)$ são soluções do sistema $\vec{Y}' = A \cdot \vec{Y}$.

Exercício 16.5

Escreva a forma explícita de $\vec{Y}' = A(x) \vec{Y}$ sendo

$$A(x) = \begin{pmatrix} 2x & e^x \\ \text{sen}(x) & -1 \end{pmatrix}$$

Resposta:
$$\begin{cases} y_1' = 2x y_1 + e^x y_2 \\ y_2' = \text{sen}(x) y_1 - y_2 \end{cases}$$

Exercício 16.6

Mostre que a equação dos autovalores (equação característica) do sistema

$$\vec{Y}' = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \vec{Y}$$

é

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(A) \lambda + \det(A) = 0,$$

$$\text{onde } \operatorname{tr}(A) \stackrel{\text{def}}{=} a_{11} + a_{22} \quad \text{e} \quad \det(A) \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exercício 16.7

Calcule a solução geral de

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} \vec{Y}$$

$$\text{Resposta: } \vec{Y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-10x}$$

Exercício 16.8

Resolva o problema de valor inicial

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{Y}; \quad \vec{Y}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Resposta: } \vec{Y}(t) = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x/2} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x/2}$$

Resumo

Nesta aula você fez o primeiro contato com os sistemas de duas equações diferenciais de primeira ordem normais; e aprendeu a classificá-los como homogêneos e não-homogêneos.

Você viu que toda equação diferencial linear normal de segunda ordem está associada a um sistema de equações diferenciais lineares normais de primeira ordem, mas que existem sistemas que não são associados a equações diferenciais lineares normais de segunda ordem.

Depois de reformular vetorialmente qualquer sistema de equações diferenciais normais de primeira ordem, você viu como - no caso dos sistemas homogêneos de coeficientes constantes, cujo conjunto de soluções é um espaço vetorial real de duas dimensões - aplicar o método dos autovalores e autovetores para produzir um par de soluções (quando a equação característica do sistema tem duas raízes reais distintas).

Avaliação

Foi uma aula comprida. Mas, num certo sentido, boa parte das definições e resultados fundamentais estudados já tinha tido uma formulação

análoga no contexto de equações lineares de ordem superior a um, estudadas em aulas anteriores.

Não se impressione com o modelo dos tanques. Inclusive, numa primeira leitura, você não precisa se preocupar em entender os detalhes. Trata-se de um modelo importante, como todo engenheiro químico sabe muito bem, e que (com as simplificações feitas) se apóia numa matemática simples. (Os modelos “reais” são muito mais complexos). De vez em quando é conveniente fazer contato com modelos interessantes.

Procure compreender bem a técnica de autovalores e autovetores, sem esquecer de que ela só se aplica a sistemas homogêneos de coeficientes constantes. Mas é uma classe muito importante de sistemas, e merece o estudo que dedicamos a ela.

Ah sim, procure lembrar que, ao utilizar a técnica de autovalores e autovetores, sempre se chega num ponto onde devemos escolher um autovetor associado a um dado autovalor. Portanto podem existir várias soluções igualmente válidas. Quer dizer: nem sempre a resposta de um questão, oferecida pelo professor, coincide com a que a gente obteve. Isso não quer dizer que sua solução, ou a do professor, está errada.

Aula 17 – Representação geométrica de sistemas autônomos . Sistemas com autovalores complexos

Objetivos

Ao terminar de estudar esta aula você estará capacitado a

1. representar geometricamente sistemas autônomos de equações diferenciais
2. obter soluções de sistemas de equações autônomos cuja equação característica possui autovalores complexos

Introdução

Interpretações geométricas dos sistemas de equações diferenciais autônomos

Considere um sistema autônomo de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (17.1)$$

onde f e g são duas funções diferenciáveis definidas num conjunto aberto de \mathbb{R}^2 , com valores em \mathbb{R} .

Observações:

- 1) - Recorde que o sistema (17.1) é *autônomo* quando a variável independente, t , não aparece explicitamente nas equações.
- 2) - Estamos escrevendo $\vec{Y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ em vez de $\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

A interpretação geométrica do sistema (17.1) é o seguinte. Em cada ponto (x, y) da região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o par ordenado $(f(x, y), g(x, y))$ define um vetor que é tangente à curva imagem da solução $\vec{\Phi}(t) = (x(t), y(t))$ que passa por aquele ponto.

As curvas imagens de soluções do sistema são chamadas de *curvas integrais* ou de *linhas de fluxo* do sistema de equações.



A. Lotka
1880-1949

Químico, demógrafo, ecologista e matemático. Nasceu em Lviv, agora parte da Ucrânia. Foi para os Estados Unidos em 1902. É bem conhecido pelo modelo predador-presa, proposto por ele em 1925 e pouco depois por Volterra. O modelo de Lotka-Volterra está na base de muitos modelos usados na análise da dinâmica de populações



Vito Volterra
1860-1940

O trabalho matemático mais famoso de Volterra é o relacionado a equações integrais. Em 1896 ele publicou artigos sobre o tema agora conhecido como Equações Integrais de Volterra. Seus trabalhos sobre a equação predador-presa são independentes dos de Lotka

Observação: As equações autônomas são muito interessantes. Sabe por quê? Porque podemos obter informações a respeito de suas soluções, **sem precisar resolvê-las previamente**.

Exemplo 17.1

Consideremos duas espécies, A (predadores) e B (presas), que convivem numa região fechada. Os predadores se alimentam exclusivamente das presas, enquanto estas se alimentam de uma outra fonte, presente no ambiente.

Sejam respectivamente $x(t)$ e $y(t)$ as populações das espécies B e A num instante t .

Fazemos as seguintes hipóteses:

- I) Se não houvesse predadores, a população de presas crescerá de acordo com a lei malthusiana: $dy/dt = cy$, $c > 0$
(Supõe-se também que a fonte de alimentos da espécie B é inesgotável)
- II) Se não houvesse presas, a população de predadores decrescerá de acordo com a lei $dx/dt = -ax$, $a > 0$
- III) Levando-se em conta a presença simultânea das duas espécies, supõe-se que a taxa de mortalidade da população de presas e a taxa de proliferação da população de predadores são ambas proporcionais ao número de encontros entre indivíduos das duas espécies. Substituímos então as equações das taxas de variação do número de indivíduos de cada espécie por

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = cy - dxy, & c, d > 0 \\ \frac{dx}{dt} = -ax + bxy, & a, b > 0 \end{cases} \quad (17.2)$$

Podemos justificar a introdução dos termos $-dxy$ e $+bxy$ nas equações de crescimento das populações B e A do seguinte modo. O número de encontros entre indivíduos das duas espécies num intervalo unitário de tempo é proporcional a xy . Introduzindo um fator de proporcionalidade α , podemos dizer que o número de encontros é igual a αxy . Esses encontros resultam negativos para as presas; digamos que a população y diminui de β_1 membros para cada n encontros. Logo, a população y diminui de

$$\frac{\beta_1}{n} \alpha xy \equiv dxy$$

membros por unidade de tempo. De modo análogo, esses encontros resultam benéficos para os predadores; digamos que a população x aumenta de β_2 membros para cada n encontros. Logo, a população x aumenta de

$$\frac{\beta_2}{n} \alpha xy \equiv bxy$$

membros por unidade de tempo. O coeficiente d mede a susceptibilidade da espécie B às ações predatórias, e o coeficiente b mede a habilidade predatória da espécie A .

As equações (17.2) são conhecidas como **equações de Lotka -Volterra** . Foram propostas por Lotka, em 1925, e por Volterra, um ano depois. Elas se aplicam a uma grande variedade de problemas.

Um exemplo específico: Imaginemos que $x(t)$ representa o número de raposas (em centenas) e $y(t)$ o número de coelhos (em milhares), isolados numa ilha, em determinado instante de tempo t . Uma equipe de biólogos, após um paciente estudo, obteve os seguintes dados para o modelo predador - presa:

$$a = -0.8, \quad b = 0.7, \quad c = 0.9 \quad \text{e} \quad d = -0.6,$$

de modo que as equações de Lotka-Volterra são

$$\begin{cases} x' = -0.8x + 0.7xy \\ y' = 0.9y - 0.6xy \end{cases} \quad (17.3)$$

Posteriormente, três expedições à ilha, em ocasiões distintas, estudaram as populações de raposas e coelhos para as diferentes “configurações” especificadas abaixo, no instante em que chegaram:

$$(t_0, x_0, y_0) = (0, 2, 5),$$

$$(t_0, x_0, y_0) = (0, 2, 1),$$

$$(t_0, x_0, y_0) = (0, 2, 3).$$

A figura (17.1) representa o campo de vetores e (no destaque) um pedaço de uma das curvas integrais associados ao sistema autônomo (17.3)

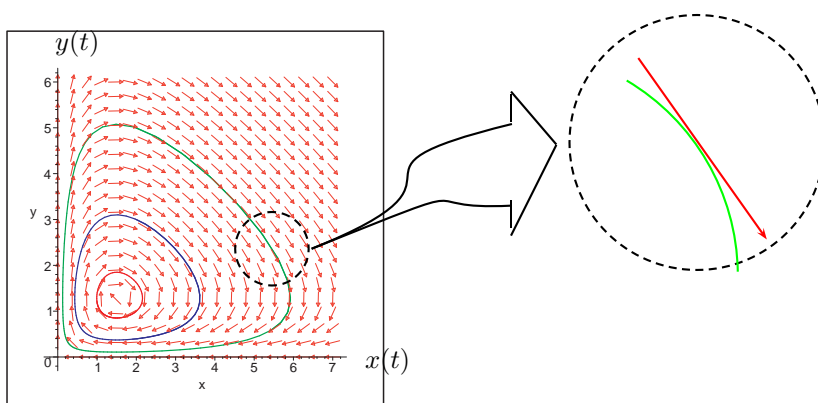


Figura 17.1

Atividade 17.1

- Identifique a órbita correspondente a cada um dos dados iniciais.
- Interprete o comportamento do número de indivíduos em cada espécie, em cada um dos casos acima. Qual é, aproximadamente, o maior valor de $x(t)$, e qual o correspondente valor de $y(t)$? em que intervalos o número de raposas está crescendo? O que está acontecendo com o número de coelhos nesses mesmos intervalos?

Resposta: _____

- Para quais valores de $x(t)$ e $y(t)$ temos uma situação de equilíbrio ecológico (onde as duas espécies têm, cada uma, um número aproximadamente constante de indivíduos)?

Resposta: _____

Definição 17.1

O plano xy no qual desenhemos os vetores $\vec{v} = (f(x, y), g(x, y))$, cada com origem no respectivo ponto $(x, y) \in \Omega$ é o **plano de fase**, da equação (17.1).

Quando especificamos condições iniciais $x(t_0) = a$ e $y(t_0) = b$, a solução particular que passa por (a, b) quando $t = t_0$ é a **órbita** da equação (17.1) por (a, b) .

O conjunto das órbitas de um sistema autônomo é chamado de **retrato de fase** do sistema.

Note: Como você deve ter notado, os conceitos de plano de fase, retrato de fase, órbita, etc. podem ser definidos para sistemas de equações de primeira ordem quaisquer. Mas, neste curso, vamos nos restringir aos sistemas homogêneos de *equações lineares*

Vejamos outro exemplo (agora um exemplo linear):

Exemplo 17.2

Espécies em competição

Suponhamos que duas espécies diferentes de animais, A e B , ocupam o mesmo ecossistema, e competem uma com a outra pelos mesmos recursos vitais (espaço, alimentos) do sistema. Designemos por $x(t)$ e $y(t)$ as quantidades respectivas de animais de cada espécie no tempo t . Na ausência de uma das espécies, vamos supor que o crescimento populacional da outra espécie é malthusiano:

$$\frac{dx}{dt} = ax \qquad \frac{dy}{dt} = cy.$$

As duas espécies convivendo simultaneamente no mesmo espaço, interferem uma sobre o crescimento da outra, simplesmente por “roubar” uma parte dos recursos vitais.

Se a taxa de consumo de cada indivíduo da espécie B é suposta constante, digamos b , então a população y consome recursos a uma taxa by . Construímos um modelo para o crescimento da população da espécie A , considerando a presença da espécie B , simplesmente subtraindo da taxa de crescimento de A a taxa de consumo de B , i.é, by . Obtemos:

$$\frac{dx}{dt} = ax - by$$

Analogamente, se cada indivíduo da espécie A consome recursos a uma taxa de d unidades por unidade de tempo, a taxa de crescimento da espécie B levando em conta a presença de x indivíduos da espécie A é tomada como sendo

$$\frac{dy}{dt} = cy - dx$$

Assim, o crescimento das duas espécies conjuntamente, é governado pela equação diferencial vetorial:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - by \\ \frac{dy}{dt} = cy - dx \end{cases}$$

Obs: a, b, c, d são constantes positivas.

Exemplo 17.3

Considere o seguinte modelo para duas espécies em competição:

$$\begin{cases} x' = 5x - 3y \\ y' = x - 4y \end{cases}$$

a) A equação dos autovalores do sistema é

$$\lambda^2 - \lambda - 17 = 0$$

cujas soluções são

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{69}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{69}}{2}$$

O vetor $\begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{69}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ é um autovetor associado ao autovalor λ_1 , e o vetor $\begin{pmatrix} \frac{1 - \sqrt{69}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

é um autovetor associado ao autovalor λ_2 , de modo que uma solução geral do sistema acima é

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{69}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\left[\frac{1 + \sqrt{69}}{2}\right]t} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1 - \sqrt{69}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\left[\frac{1 - \sqrt{69}}{2}\right]t} \quad (17.4)$$

A solução acima não nos dá diretamente muitas informações a respeito do comportamento de $x(t)$ e $y(t)$.

A representação geométrica do sistema é bem mais vantajosa do ponto de vista qualitativo (i.é. ela não contém informações numéricas precisas, mas somente informações qualitativas).

Vejam os:

b) O plano de fase deste modelo é

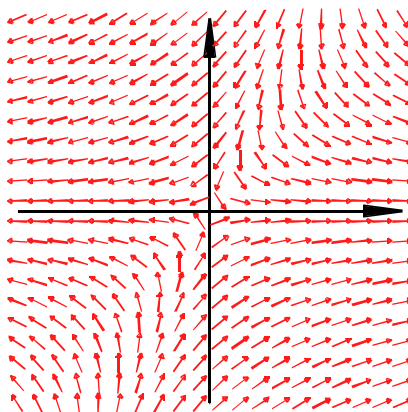


Figura 17.2

c) As órbitas correspondentes aos valores iniciais $\begin{pmatrix} x(0) = 1 \\ y(0) = 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x(0) = 2 \\ y(0) = 3 \end{pmatrix}$ são

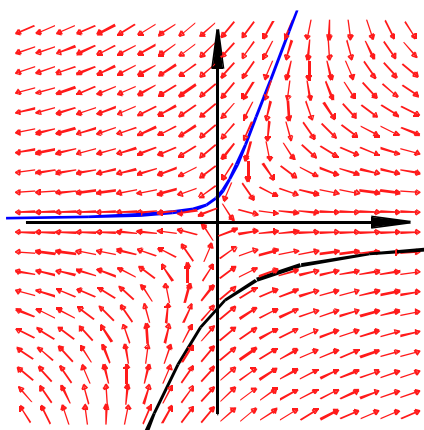


Figura 17.3

A atividade seguinte explora como podemos extrair informações geométricas do desenho de algumas órbitas, completando assim as informações numéricas obtidas a partir da fórmula (17.4)

Atividade 17.2

- Identifique qual órbita corresponde a qual conjunto de valores iniciais.
- Para as órbitas acima especificadas, quando $x(t) = 1$, qual é a tendência de variação de $y(t)$ à medida que t aumenta? E de $x(t)$?

Resposta: _____

- Para as órbitas especificadas pelas condições iniciais acima, existe alguma situação de equilíbrio (ou seja, existe alguma valor de $x(t)$ e de $y(t)$ para os quais as duas populações podem conviver, sem que uma delas tenha de se sacrificar para que a outra consiga alimentação?

Resposta: _____

Encaminhamento: Prosseguimos com os métodos de obtenção de soluções de sistemas autônomos, abordando o caso em que a equação dos autovalores possui raízes complexas ¹

Sistemas autônomos com autovalores complexos

Problema: Calcular a solução geral da equação vetorial autônoma

$$\vec{Y}' = A\vec{Y}$$

sendo que a matriz A , com coeficientes reais constantes, tem autovalores complexos.

Sejam $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$ as raízes da equação característica $\det(\lambda I - A) = 0$.

Escolhamos uma das raízes, por exemplo λ_1 .

Exatamente como no caso em que os autovalores eram reais, calculamos um autovetor

$$\vec{K}_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

¹lembre que se um número complexo é uma raiz de uma equação cujos coeficientes são constantes reais, então o seu conjugado também é raiz da mesma equação



L. Euler
1707-1783

Um gênio da Matemática. Euler fez contribuições pioneiras e decisivas em todos os ramos da Matemática da época. Formulou e resolveu questões de Teoria dos Números, Álgebra, Geometria, Equações Diferenciais, ... A seu respeito, Laplace, um outro grande matemático contemporâneo de Euler disse: "Estudem os trabalhos de Euler. Leiam Euler. Ele é o mestre de todos nós"

associado ao autovalor $a + bi$, por meio da equação

$$[(a + bi)I - A] \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, em geral, $\vec{K}_{\mathbb{C}}$ é um vetor cujas coordenadas são números complexos

$$\vec{K}_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 i \\ u_2 + v_2 i \end{pmatrix}$$

Continuando a analogia com o caso real, formamos a solução complexa

$$\vec{Y}_{\mathbb{C}} = e^{(a+bi)t} \begin{pmatrix} u_1 + v_1 i \\ u_2 + v_2 i \end{pmatrix}.$$

E para calcular as partes real e imaginária de $\vec{Y}_{\mathbb{C}}$, utilizamos a **fórmula de Euler**:

$$e^{(a+bi)t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \vec{Y}_{\mathbb{C}} &= e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \begin{bmatrix} u_1 + v_1 i \\ u_2 + v_2 i \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{at}(\cos bt + i \sin bt)(u_1 + v_1 i) \\ e^{at}(\cos bt + i \sin bt)(u_2 + v_2 i) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\vec{Y}_{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} (u_1 e^{at} \cos bt - v_1 e^{at} \sin bt) + i(u_1 e^{at} \sin bt + v_1 e^{at} \cos bt) \\ (u_2 e^{at} \cos bt - v_2 e^{at} \sin bt) + i(u_2 e^{at} \sin bt + v_2 e^{at} \cos bt) \end{bmatrix}$$

Ou ainda,

$$\vec{Y}_{\mathbb{C}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} (u_1 e^{at} \cos bt - v_1 e^{at} \sin bt) \\ (u_2 e^{at} \cos bt - v_2 e^{at} \sin bt) \end{bmatrix}}_{\vec{X}_1(t)} + i \underbrace{\begin{bmatrix} (u_1 e^{at} \sin bt + v_1 e^{at} \cos bt) \\ (u_2 e^{at} \sin bt + v_2 e^{at} \cos bt) \end{bmatrix}}_{\vec{X}_2(t)}$$

Então

$$\vec{Y}_{\mathbb{C}} = \vec{X}_1(t) + i \vec{X}_2(t).$$

Proposição 17.1

Se a matriz do sistema $\vec{Y}' = A\vec{Y}$ tem coeficientes reais e o sistema tem uma solução complexa $\vec{y}_{\mathbb{C}}(t) = \vec{X}_1(t) + i \vec{X}_2(t)$, então $\vec{X}_1(t)$ e $\vec{X}_2(t)$, respectivamente as partes real e imaginária da solução complexa $\vec{y}_{\mathbb{C}}(t)$ são duas soluções *reais*, linearmente independentes, da equação original $\vec{Y}' = A\vec{Y}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \vec{Y}' = A\vec{Y} &\iff [\vec{X}_1 + i \vec{X}_2]'(t) = A \cdot [\vec{X}_1(t) + i \vec{X}_2(t)] \\ \vec{X}_1'(t) + i \vec{X}_2'(t) &\iff A \cdot \vec{X}_1(t) + i A \cdot \vec{X}_2(t) \end{aligned}$$

Igualando as partes real e imaginária dos dois lados

$$\vec{Y}' = A\vec{Y} \iff \vec{X}_1'(t) = A \cdot \vec{X}_1(t) \quad \text{e}$$

$$\vec{X}_2'(t) = A \cdot \vec{X}_2(t).$$

Portanto $\vec{X}_1(t)$ e $\vec{X}_2(t)$ são duas soluções reais e linearmente independentes da equação $\vec{Y}' = A\vec{Y}$.

Assim, a solução geral (real) dessa equação é

$$\vec{Y}(t) = c_1 \vec{X}_1(t) + c_2 \vec{X}_2(t).$$

☞ **OBSERVAÇÃO :** Se tivéssemos escolhido o outro autovalor, $\lambda_2 = a - bi$, iríamos obter a mesma solução geral.

Resumindo:

Dada uma **equação vetorial autônoma** em \mathbb{R}^2

$$\vec{Y}' = A\vec{Y}$$

cuja equação característica

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

tem raízes complexas

$$\lambda_1 = a + bi, \quad \lambda_2 = a - bi,$$

escolhemos um autovalor (p.ex. $a + bi$) e calculamos um autovetor (complexo) $\vec{K}_{\mathbb{C}}$ associado a ele.

A solução complexa correspondente é $\vec{Y}_{\mathbb{C}}(t) = e^{(a+bi)t} \vec{K}_{\mathbb{C}}$. A partir daí, usando a fórmula de Euler, calculamos a solução geral real

$$\vec{Y}(t) = c_1 \vec{X}_1(t) + c_2 \vec{X}_2(t),$$

sendo $\vec{X}_1(t)$ e $\vec{X}_2(t)$ as partes real e imaginária de $\vec{Y}_{\mathbb{C}}(t)$.

Exemplo 17.4

Calcule a solução geral de

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} \vec{Y}$$

Solução:

Você está convidado a refazer todas as contas e conferir os resultados.

Pra calcular os autovalores da matriz do sistema devemos resolver a equação

$$\det(A - \lambda Id) = 0$$

isto é,

$$\lambda^2 + \lambda + \frac{5}{4} = 0,$$

que tem como raízes

$$\lambda_1 = -1/2 + i, \quad \text{e} \quad -1/2 - i.$$

Escolhendo o autovalor $\lambda_1 = -1/2 + i$, calculamos os autovetores complexos associados (ou pertencentes) a λ_1 resolvendo a equação vetorial $(A - \lambda_1 Id) \cdot \vec{V} = \vec{0}$, isto é

$$\begin{pmatrix} -1/2 - (-1/2 + i) & 1 \\ -1 & -1/2 - (-1/2 + i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daí extraímos a relação

$$v_2 = i v_1.$$

Escolhendo, por exemplo $v_1 = -1$ teremos $v_2 = i$.

Então $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

é um autovetor complexo pertencente ao autovalor complexo $-1/2 + i$.

Temos então a solução complexa

$$\vec{Y}_{\mathbb{C}}(t) = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1/2+i)t},$$

isto é

$$\begin{aligned} \vec{Y}_{\mathbb{C}}(t) &= \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} [e^{(-1/2)t} \cos(t) + i e^{(-1/2)t} \sin(t)] = \\ &= \begin{pmatrix} -i e^{(-1/2)t} \cos(t) + e^{(-1/2)t} \sin(t) \\ e^{(-1/2)t} \cos(t) + i e^{(-1/2)t} \sin(t) \end{pmatrix} = \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} e^{(-1/2)t} \sin(t) \\ e^{(-1/2)t} \cos(t) \end{pmatrix}}_{\vec{X}_1(t)} + i \underbrace{\begin{pmatrix} -e^{(-1/2)t} \cos(t) \\ e^{(-1/2)t} \sin(t) \end{pmatrix}}_{\vec{X}_2(t)} \end{aligned}$$

Então a solução geral é

$$\vec{Y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{(-1/2)t} \sin(t) \\ e^{(-1/2)t} \cos(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -e^{(-1/2)t} \cos(t) \\ e^{(-1/2)t} \sin(t) \end{pmatrix}$$

Comentário: Certamente obtivemos uma solução para o sistema autônomo dado. Entretanto não podemos negar uma certa frustração quando queremos entender um pouco mais como se comportam as trajetórias (soluções assumindo valores iniciais pré-estabelecidos).

Neste momento os planos de fase e desenhos de órbitas são auxiliares poderosos.

Primeiramente, vamos desenhar o plano de fase do sistema acima:

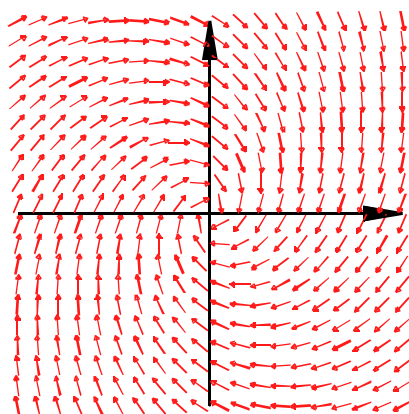


Figura 17.4

Vejam os desenhos das órbitas que passam pelos pontos $(x(0) = 0, y(0) = 2)$ e $(x(0) = 1, y(0) = -4)$

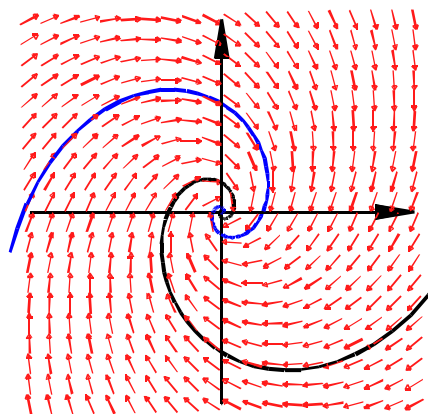


Figura 17.5

Percebemos então que as órbitas descrevem espirais tendendo à origem.

O pêndulo simples outra vez

Você lembra do estudo que fizemos do movimento harmônico simples de uma massa oscilando presa a um fio?

Foi na aula 15.

Repetimos ao lado a figura em que nos baseamos para deduzir uma equação diferencial, modelando o sistema

Após algumas manipulações com as séries de Maclaurin obtivemos a equação do modelo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta, \quad \omega^2 = \frac{g}{l}. \quad (17.5)$$

Vamos analisar o caso particular correspondente a $(\omega^2 = 4)$

A solução geral da equação (17.5) é

$$\theta(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$$

Se especificamos as condições iniciais

$$\theta(0) = 1 \quad \theta'(0) = -1$$

a solução correspondente é

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \sin(2t) - \cos(2t).$$

O gráfico desta solução tem o seguinte aspecto

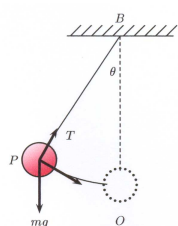


Figura 17.6

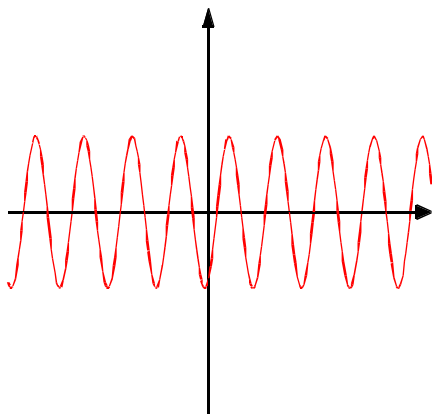


Figura 17.8

Podemos pesquisar informações adicionais sobre a solução, construindo o sistema autônomo equivalente à equação $\theta(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) - \cos(2t)$, e desenhando o seu plano de fase junto com a órbita que contém o ponto correspondente às condições iniciais $\theta(0) = 1$ $\theta'(0) = -1$.

O sistema autônomo equivalente à equação (17.5) é

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -4y_1 \end{cases} \quad (17.6)$$

onde $y_1(t) = \theta(t)$ e, naturalmente, $y_2(t) = \theta'(t)$.

Nos exercícios, você está convidado a calcular a solução geral do sistema (17.6) e também a órbita que passa por $(1, -1)$

O desenho do plano de fase contendo a órbita que passa por $(1, -1)$ é

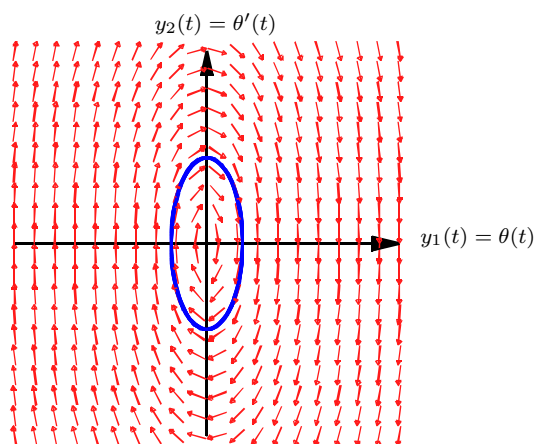


Figura 17.9

Observação A órbita é uma curva fechada, que indica que, se não houvesse atrito no ponto de vínculo e não houvesse resistência do ar, o movimento do pêndulo se repetiria para sempre, com a massa passando pela mesma posição, com a mesma velocidade, um número infinito de vezes.

Exercícios

Exercício 17.1

Calcule a equação dos autovalores do sistema autônomo (17.6). Determine em seguida sua solução geral e obtenha a solução particular correspondente ao vetor de condições iniciais $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercício 17.2

Análise a órbita desenhada na figura (17.9) e determine os pontos de máximo e mínimo de θ , os intervalos onde θ é crescente e os em que ela é decrescente. Faça o mesmo para $d\theta/dt$

Exercício 17.3

Faça um esboço do plano de fases do sistema

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Sugestão: Desenhe vários vetores do campo $(x, y) \mapsto (-y, x)$ correspondentes a pontos do eixo OX , pontos do eixo OY , pontos sobre as retas $y = \pm x$, com suas origens nos respectivos pontos (x, y) . Construa uma tabela.

Exercício 17.4

Calcule a solução geral de

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \vec{Y}$$

Sugestões:

a) Mostre que os autovalores da matriz A do sistema são

$$a + bi \quad \text{e} \quad a - bi$$

b) Mostre que

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

é um autovetor pertencente ao autovalor $a + bi$

c) Conclua (usando o autovalor $a + bi$) que

$$\vec{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} -e^{at} \operatorname{sen} bt \\ e^{at} \cos bt \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{at} \cos bt \\ e^{at} \operatorname{sen} bt \end{pmatrix}$$

são duas soluções linearmente independentes do sistema proposto.

Exercício 17.5

(a) - Determine a solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 8 = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

(b) Agora, obtenha um sistema autônomo equivalente ao PVI dado, e resolva-o pelo método dos autovalores.

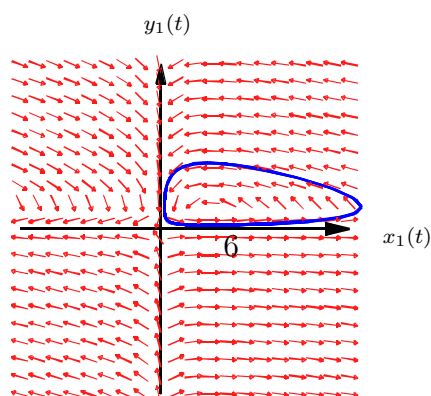
Compare sua solução com a solução da linear de segunda ordem do item (a)

Exercício 17.6

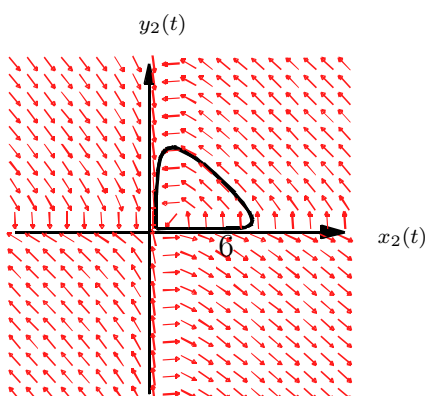
Dois modelos populacionais predador-presa (x_1, x_2 = presas, y_1, y_2 = predadores),

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3xy \\ \frac{dy}{dt} = -y + \frac{1}{2}xy \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4xy \\ \frac{dy}{dt} = -2y + 3xy \end{cases}$$

tem planos de fases respectivamente



Sistema I



Sistema II

Em cada plano de fase está desenhada a órbita correspondente ao dado inicial $(x(0), y(0)) = (2, 2)$ (Um casal de predadores e um casal de presas).

Assuma que as escalas são iguais nos dois sistemas.

- Em qual sistema o predador se reproduz mais rapidamente?
- Em qual deles o predador é mais bem-sucedido em pegar a presa?

Respostas:

- a) No sistema I, pois $y_1(t)$ começa a crescer mais rapidamente no sistema I.
 b) No sistema II, pois o número máximo de predadores é maior no sistema II, significando que os predadores conseguiram se alimentar de mais presas.

Exercício 17.7

Determine as soluções gerais de

$$\text{a) } \vec{Y}' = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \vec{Y} \quad \text{b) } \vec{Y}' = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \vec{Y} \quad \text{c) } \vec{Y}' = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \vec{Y}$$

Respostas:

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{Y}(t) &= c_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2 \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 2 \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix} e^{4t} \\ \text{b) } \vec{Y}(t) &= c_1 \begin{pmatrix} 5 \cos(3t) \\ 4 \cos(3t) + 3 \sin(3t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \sin(3t) \\ 4 \sin(3t) - 3 \cos(3t) \end{pmatrix} \\ \text{c) } \vec{Y}(t) &= c_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix} e^{4t} \end{aligned}$$

Exercício 17.8

Resolva o problema de valor inicial

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \vec{Y}, \quad \vec{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resposta:

$$\vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - 3 \sin(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} e^{-t}$$

Resumo

Nesta aula aprendemos a representar graficamente sistemas autônomos de equações de primeira ordem.

Em continuação ao estudo iniciado na aula 16, aprendemos a obter soluções de sistemas autônomos $\vec{Y}' = A\vec{Y}$ quando a matriz A tem coeficientes reais e autovalores complexos.

Avaliação

Os métodos gráficos constituem auxiliares importantes na obtenção de informações a respeito das soluções de sistemas autônomos de equações lineares. Na verdade, eles se aplicam também às equações não-lineares. Muitas informações relevantes podem ser obtidas pela análise de representações gráficas, sem que precisemos explicitamente as equações. Alguns exemplos envolvendo o modelo de Lotka -Volterra ilustram essa afirmação. Os exemplos e exercícios “não-lineares” podem ser considerados como informações extras. O nosso objeto de estudo, neste curso, são as equações e sistemas de equações lineares, o

Representação geométrica de sistemas autônomos . Sistemas com autovalores complexos

qual voltará a dominar a cena na próxima aula, quando veremos como obter soluções de sistemas autônomos $\vec{Y}' = A\vec{Y}$ quando a matriz A tem autovalores reais repetidos.

Aula 18 – Sistemas com autovalores reais repetidos

Objetivo

Ao terminar esta aula você estará apto a calcular as soluções de sistemas autônomos cujas matrizes possuem autovalores reais repetidos. Como consequência disso, você estará equipado para resolver *qualquer* sistema autônomo de duas equações lineares de primeira ordem.

Comentário: o trabalho anterior mostrou que, para obter as soluções de sistemas autônomos, devemos começar pelo cálculo dos autovalores das equações características associadas.

Já vimos como obter soluções de sistemas cujos autovalores são distintos, reais ou complexos. Abordaremos agora o caso das equações com autovalores repetidos.

Seja então a equação

$$\vec{Y}' = A\vec{Y}$$

tal que $\det(\lambda I - A) = 0$ tem raízes $\lambda_1 = \lambda_2 (= \lambda)$.

Diz-se que λ é um *autovalor de multiplicidade dois* da matriz A .

Exemplo 18.1

Determine a solução geral do sistema

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{Y}$$

Solução: Procedendo como de hábito, calculamos primeiramente os autovalores da matriz do sistema

$$\det(\lambda I - A) = 0 \iff (\lambda + 1)^2 = 0 \iff \lambda = -1$$

$\lambda = -1$ é um autovalor de A de multiplicidade dois.

Para determinar autovetores de A associados a $\lambda = -1$ precisamos resolver a equação matricial

$$\begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix}_{(\lambda=-1)} \vec{V} = \vec{0}$$

Isto é,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{V} = \vec{0} \quad (18.1)$$

Ora qualquer vetor \vec{V} de \mathbb{R}^2 torna a equação (18.1) verdadeira.

Dizendo de outro modo, todo vetor (diferente de $\vec{0}$) é autovetor da matriz A associado ao autovalor $\lambda = -1$.

E como, para calcular uma solução geral do sistema $\vec{Y}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{Y}$, precisamos de dois autovetores de A linearmente independentes, podemos escolher quaisquer dois vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^2 .

Por exemplo

$$\vec{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daí construímos as soluções

$$\vec{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} \quad \text{e} \quad \vec{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Portanto uma solução geral de $\vec{Y}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{Y}$, é

$$\vec{Y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Observação: Apesar de A possuir apenas um autovalor λ , foi possível determinar dois autovetores linearmente independentes associados a ele.

Neste exemplo, procedemos normalmente como no caso dos autovalores reais distintos.

Mas também pode ocorrer de termos apenas um autovetor \vec{K} associado a λ e conseqüentemente, apenas uma solução

$$\vec{Y}_1(t) = \vec{K} e^{\lambda t}.$$

Veja o seguinte exemplo

Exemplo 18.2

$$\vec{Y}' = A\vec{Y}$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Deixamos a seu cargo verificar que a equação dos autovalores deste sistema é

$$(\lambda - 2)^2 = 0,$$

e portanto A possui somente um autovalor de multiplicidade 2.

Quando calculamos os autovetores associados a $\lambda = 2$, isto é quando resolvemos a equação matricial

$$\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}_{(\lambda=2)} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ -v_1 + v_2 = 0 \end{cases}.$$

Vemos que os autovetores de A devem ser da forma $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$. Por exemplo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Então temos uma solução

$$\vec{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

O problema é que qualquer outro autovetor de A é linearmente dependente de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e conseqüentemente não temos como calcular dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor $\lambda = 2$.

Não podemos proceder como no exemplo anterior.

Entretanto você sabe que o conjunto das soluções de *qualquer* sistema homogêneo é um espaço vetorial de duas dimensões. Portanto sempre existem duas soluções linearmente independentes.

Precisamos conseguir uma segunda solução linearmente independente de $\vec{Y}_1(t)$.

Como fazê-lo?

Inspirados no método de redução de ordem usado no caso de equações de segunda ordem normais quando apenas uma solução era conhecida, vamos procurar uma segunda solução da forma

$$\vec{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix} e^{\lambda t} \quad (18.2)$$

onde estamos supondo que $k_1(t)$ e $k_2(t)$ são deriváveis em todos os pontos ¹, em particular são deriváveis em $t = 0$.

Mas dizer que $k_1(t)$ e $k_2(t)$ são deriváveis em $t = 0$ significa dizer que, numa vizinhança do ponto $t = 0$, podemos aproximá-las pelas retas tangentes aos seus gráficos. (Quer dizer, podemos substituir $k_1(t)$ e $k_2(t)$ pelas suas

¹Isto não é pedir muito. Afinal de contas a primeira solução $\vec{Y}_1(t)$ é derivável em todos os pontos

retas tangentes em $t = 0$, numa vizinhança de 0)

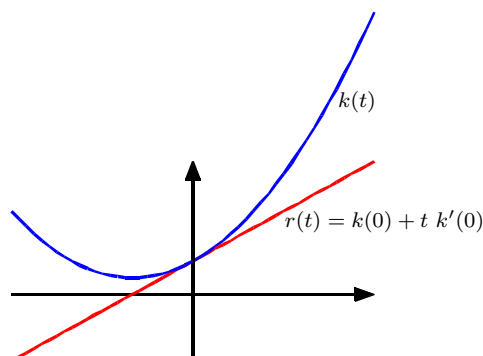


Figura 18.1

As equações dessas retas tangentes são

$$r_1(t) = k_1(0) + k'_1(0)t$$

$$r_2(t) = k_2(0) + k'_2(0)t$$

Assim, em vez de procurar uma segunda solução da forma (18.2), procuramos uma da forma

$$\vec{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} k_1(0) + t k'_1(0) \\ k_2(0) + t k'_2(0) \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

ou ainda

$$\vec{Y}_2(t) = \left[\begin{pmatrix} k_1(0) \\ k_2(0) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} k'_1(0) \\ k'_2(0) \end{pmatrix} \right] e^{\lambda t}$$

Façamos

$$\begin{pmatrix} k_1(0) \\ k_2(0) \end{pmatrix} = \vec{V}_1 \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} k'_1(0) \\ k'_2(0) \end{pmatrix} = \vec{V}_2$$

de modo que a segunda solução $\vec{Y}_2(t)$ que procuramos tem a forma

$$\vec{Y}_2(t) = [\vec{V}_1 + t\vec{V}_2] e^{\lambda t} \quad (18.3)$$

A questão pode ser reformulada da seguinte maneira:

Encontre vetores \vec{V}_1 e \vec{V}_2 tais que (18.3) seja uma segunda solução de $\vec{Y}' = A\vec{Y}$, linearmente independente de $\vec{Y}_1(t) = \vec{K}e^{\lambda t}$

Substituindo (18.3) na equação $\vec{Y}' = A\vec{Y}$:

$$\vec{V}_2 e^{\lambda t} + [\vec{V}_1 + t\vec{V}_2] \lambda e^{\lambda t} = A ([\vec{V}_1 + t\vec{V}_2] e^{\lambda t})$$

o que pode ser reescrito como

$$\underbrace{t e^{\lambda t} \lambda \vec{V}_2}_{*} + \overbrace{e^{\lambda t} (\vec{V}_2 + \lambda \vec{V}_1)}^{**} = \underbrace{t e^{\lambda t} A \vec{V}_2}_{*} + \overbrace{e^{\lambda t} A \vec{V}_1}^{**}$$

Se igualarmos as parcelas assinaladas com (*) dos dois lados, e também as parcelas marcadas com (**) em ambos os lados, então (18.3) será solução de $\vec{Y}' = A\vec{Y}$.

Ou seja, se \vec{V}_1 e \vec{V}_2 satisfizerem às equações

$$\begin{cases} A\vec{V}_1 = \lambda\vec{V}_1 + \vec{V}_2 \\ \lambda\vec{V}_2 = A\vec{V}_2 \end{cases}$$

Isto é,

$$(A - \lambda I) \vec{V}_2 = \vec{0} \quad (18.4)$$

$$(A - \lambda I) \vec{V}_1 = \vec{V}_2 \quad (18.5)$$

então (18.3) será solução de $\vec{Y}' = A\vec{Y}$.

A equação (18.4) nos diz que o vetor \vec{V}_2 tem de ser um autovetor de A associado ao autovalor λ .

A equação (18.4) nos diz que, uma vez determinado \vec{V}_2 , para calcular \vec{V}_1 devemos resolver a equação vetorial

$$(A - \lambda I) \vec{V}_1 = \vec{V}_2$$

Resumindo:

Considere um sistema autônomo $\vec{Y}' = A\vec{Y}$ cuja equação característica

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

possui uma raiz de multiplicidade dois

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda.$$

Então, se A tiver dois autovetores linearmente independentes, \vec{K}_1 e \vec{K}_2 associados a λ , a solução geral é

$$\vec{Y}(t) = c_1 \vec{K}_1 e^{\lambda t} + c_2 \vec{K}_2 e^{\lambda t}.$$

No caso de A possuir apenas um autovetor \vec{V}_2 , (a menos de múltiplos), associado a λ , a solução geral é

$$\vec{Y}(t) = c_1 \vec{V}_2 e^{\lambda t} + c_2 [t \vec{V}_2 + \vec{V}_1] e^{\lambda t},$$

onde \vec{V}_1 é um autovetor generalizado de peso 2, de A , determinado a partir de \vec{V}_2 por meio da equação matricial

$$(A - \lambda I) \vec{V}_1 = \vec{V}_2$$

Comentário: As justificativas para existência da segunda solução $\vec{Y}_2(t)$ serão apresentadas na próxima seção.

Antes de estudá-las, vamos completar a solução do exemplo 18.2, assumindo os resultados do resumo.

Exemplo 18.3

Queríamos calcular uma solução geral de

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{Y}$$

e obtivemos a equação característica $(\lambda - 2)^2 = 0$, sendo portanto $\lambda = 2$ o único autovalor de A , com multiplicidade dois. Associado a $\lambda = 2$ obtivemos o autovetor $\vec{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, que nos deu uma primeira solução $\vec{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$.

Uma segunda solução, linearmente independente de $\vec{Y}_1(t)$ é

$$\vec{Y}_2(t) = (t\vec{K} + \vec{V}_1)e^{2t},$$

onde $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ é solução da equação matricial $(2I - A)\vec{V}_1 = \vec{K}$, isto é

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Desta última equação obtemos a relação

$$-w_1 + w_2 = 1.$$

Podemos escolher para V_1 qualquer vetor $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ cujas coordenadas satisfaçam à relação $-w_1 + w_2 = 1$. Por exemplo $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Portanto } \vec{Y}_2(t) = \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2t}.$$

E uma solução geral de $\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{Y}$ é

$$\vec{Y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2t},$$

ou ainda

$$\vec{Y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Resultados teóricos - (para saber um pouco mais)

Esta seção apresenta definições e resultados que garantem que as equações (18.4) e (18.5) sempre têm soluções. Você pode fazer uma primeira leitura sem se preocupar demasiadamente com as demonstrações. Procure entender os porquês das definições e resultados. Posteriormente, já os tendo utilizado várias vezes, você pode voltar para “degustá-los” com toda a clama.

Definição 18.1

- Um *autovetor generalizado* de peso 2, da matriz A , associado ao autovalor λ é um vetor \vec{V} tal que

$$(A - \lambda I) \vec{V} \neq \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)^2 \vec{V} = \vec{0}$$

- Um *autovetor generalizado* de peso 1, de A , associado ao autovalor λ é um autovetor usual de A

Observação:

- Se \vec{V}_1 e \vec{V}_2 satisfazem às equações (18.4) e (18.5),

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)^2 \vec{V}_1 &= (A - \lambda I)[(A - \lambda I)\vec{V}_1] \\ &= (A - \lambda I)\vec{V}_2 \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Ou seja, \vec{V}_1 e \vec{V}_2 são autovetores generalizados de A

Proposição 18.1

Suponha que \vec{V}_1 e $\vec{V}_2 \in \mathbb{R}^2$ são tais $\vec{V}_2 \neq \vec{0}$ e

$$(A - \lambda I) \vec{V}_2 = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I) \vec{V}_1 = \vec{V}_2.$$

Então $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2\}$ é um conjunto linearmente independente em \mathbb{R}^2

Demonstração.

Sejam α e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha \vec{V}_1 + \beta \vec{V}_2 = \vec{0} \quad (18.6)$$

Então

$$(A - \lambda Id)[\alpha \vec{V}_1 + \beta \vec{V}_2] = (A - \lambda Id)\vec{0} = \vec{0}$$

isto é,

$$\alpha (A - \lambda Id)\vec{V}_1 + \beta (A - \lambda Id)\vec{V}_2 = \vec{0}.$$

Mas $(A - \lambda Id)\vec{V}_1 = \vec{V}_2$ e $(A - \lambda Id)\vec{V}_2 = \vec{0}$, de maneira que a equação (18.6) se reduz a

$$\alpha \vec{V}_2 = \vec{0}$$

E como $\vec{V}_2 \neq \vec{0}$, (na verdade \vec{V}_2 é um autovetor de A), então $\alpha = 0$.

Daí então (18.6) se reduz a $\beta \vec{V}_2 = \vec{0}$.

Novamente, isto implica que $\beta = 0$.

Assim

$$\alpha \vec{V}_1 + \beta \vec{V}_2 = \vec{0} \implies \alpha = \beta = 0,$$

o que prova que \vec{V}_1 e \vec{V}_2 são linearmente independentes.

E isso conclui a demonstração. ■

Conclusão Se \vec{V}_1 e \vec{V}_2 satisfazem às equações (18.4) e (18.5) então $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2\}$ é uma base de \mathbb{R}^2 .

Para terminar, temos de responder à pergunta fundamental:

As equações (18.4) e (18.5) sempre têm soluções?

Um dos teoremas importantes de Álgebra Linear, o Teorema de *Forma Canônica de Jordan*, assegura que, dada uma matriz de ordem dois, A , tal que A possui apenas um



C.Jordan

1838-1922

A forma canônica de Jordan foi publicada em 1870 no *Tratado sobre substituições e equações algébricas*. Este tratado foi de grande influência na divulgação das idéias de Galois, e no desenvolvimento e aplicações da Teoria dos Grupos.

autovalor λ , de multiplicidade dois, então existe uma base de \mathbb{R}^2 formada por autovetores generalizados de A , associados a λ . Mais ainda,

- Se A possui dois autovetores, \vec{V}_1 e \vec{V}_2 , linearmente independentes, associados a λ , então a matriz de A na base $\beta = \{\vec{V}_1, \vec{V}_2\}$ é

$$[A]_{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- Se A possui apenas um autovetor \vec{V}_2 associado a λ , então existe um autovetor generalizado \vec{V}_1 , de peso dois, associado a λ , tal que $\beta = \{\vec{V}_2, \vec{V}_1\}$ é uma base de \mathbb{R}^2 e

$$[A]_{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Conseqüências: Suponha que A tem apenas um autovetor \vec{V}_2 associado a λ . Isto é

$$A\vec{V}_2 = \lambda\vec{V}_2,$$

mostrando que a equação (18.4) tem sempre pelo menos uma solução. Segue do teorema de Jordan que

$$A\vec{V}_1 = A[0 \cdot \vec{V}_2 + 1 \cdot \vec{V}_1] = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{V}_2 + \lambda\vec{V}_1 = \lambda\vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

Isto é,

$$(A - \lambda I)\vec{V}_1 = \vec{V}_2$$

Assim fica assegurado que a equação (18.5) tem sempre uma solução \vec{V}_1 .

Atenção!: Não foi dito que em qualquer base de autovetores generalizados associados a λ a matriz A assume uma das formas $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Foi dito apenas que existem bases de autovetores generalizados com essa propriedade.

O que fizemos foi nos valer de que tais bases existem para garantir que as equações (18.4) e (18.5) sempre possuem soluções \vec{V}_2 e \vec{V}_1 .

Observação Você pode perguntar, com toda razão:

Se eu não souber calcular exatamente a (ou uma) base $\{\vec{V}_2, \vec{V}_1\}$ especificada no teorema de Jordan, como é que eu vou construir a solução geral da equação?

É uma pergunta interessante, e merece que nos alonguemos ainda um pouco, para respondê-la.

Vejam o caso em que a matriz A possui apenas um (a menos de múltiplos) autovetor V_2 associado ao autovalor λ de multiplicidade dois.

Na prática, podemos sempre substituir o autovetor \vec{V}_2 que ocorre na base $\{\vec{V}_2, \vec{V}_1\}$ do teorema de Jordan por um autovetor qualquer \vec{K} de A , e substituir o autovetor generalizado \vec{V}_1 determinado a partir de \vec{V}_2 por um autovetor generalizado determinado a partir de \vec{K} .

Isto se deve ao fato de \vec{K} e \vec{V}_2 serem linearmente dependentes. Então existe $r \in \mathbb{R}$ (necessariamente $r \neq 0$) tal que $\vec{K} = r\vec{V}_2$

Claramente $\{\vec{K}, \vec{V}_1\}$ é base de \mathbb{R}^2 formada por autovetores generalizados de A .

Note que qualquer vetor $\vec{W} = \alpha\vec{K} + r\vec{V}_1$, com $\alpha \neq 0$ é autovetor generalizado de A , de peso 2, associado a λ , determinado por \vec{K} .

Com efeito, para cada tal \vec{W} ,

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)\vec{W} &= (A - \lambda I)(\alpha\vec{K} + r\vec{V}_1) \\ &= \alpha(A - \lambda I)\vec{K} + r(A - \lambda I)\vec{V}_1 \\ &= \alpha \cdot \vec{0} + r \cdot \vec{V}_2 \\ &= \vec{K}\end{aligned}$$

A conta que acabamos de efetuar mostra que a equação $(A - \lambda I)\vec{u} = \vec{K}$ tem um número infinito de soluções.

(Dizendo de outro modo, o sistema $(A - \lambda I)\vec{u} = \vec{K}$ é possível e indeterminado)

Escolhamos uma solução \vec{W}_0 .

Temos $A\vec{W}_0 = \lambda\vec{W}_0 + \vec{K}$ pois $(A - \lambda I)\vec{W}_0 = \vec{K}$

Afirmamos agora que $\vec{Y}_2(t) = [t\vec{K} + \vec{W}_0]e^{\lambda t}$ é uma segunda solução de $\vec{Y}' = A\vec{Y}$, linearmente independente da primeira solução $\vec{Y}_1(t) = \vec{K}e^{\lambda t}$

Temos, por um lado, $\vec{Y}_2' = \vec{K}e^{\lambda t} + (t\vec{K} + \vec{W}_0)\lambda e^{\lambda t} =$

$$\vec{K}e^{\lambda t} + t\lambda e^{\lambda t}\vec{K} + \lambda e^{\lambda t}\vec{W}_0 \quad (18.7)$$

Por outro lado $A\vec{Y}_2 = A[t\vec{K}e^{\lambda t} + \vec{W}_0e^{\lambda t}] =$

$$te^{\lambda t}\lambda\vec{K} + e^{\lambda t}[\vec{K} + \lambda\vec{W}_0] \quad (18.8)$$

A igualdade das expressões (18.7) e (18.8) conclui a prova da afirmação. ■

Conclusão Não precisamos ficar amarrados estritamente aos autovetores generalizados cuja existência é garantida pelo Teorema de Jordan.

Mas tem uma coisa: A matriz de A na base $\{\vec{K}, \vec{W}\}$ já não é mais necessariamente

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Essa aí corresponde à base do Teorema de Jordan.

Tome nota, para não esquecer:

Se A possuir apenas um autovetor \vec{K} , (a menos de múltiplos), associado a λ , a solução geral de $\vec{Y}' = A\vec{Y}$ é

$$\vec{Y}(t) = c_1 \vec{K} e^{\lambda t} + c_2 [\vec{W} + t\vec{K}] e^{\lambda t}$$

onde \vec{W} é um autovetor generalizado de peso 2, de A , determinado a partir de \vec{K} por meio da equação matricial

$$(A - \lambda I) \vec{W} = \vec{K}$$

Atividades e Exemplos

Atividade 18.1

Consideremos a equação diferencial linear homogênea normal de segunda ordem e de coeficientes constantes

$$y'' + py' + qy = 0$$

Suponha que a equação característica associada tem uma raiz real dupla $r_1 = r_2 = r$. Naturalmente $r = -p/2$.

(a) Escreva no espaço abaixo, a matriz A do sistema autônomo equivalente à equação acima.

Resposta:

$$A = \begin{pmatrix} - & - \\ & - \end{pmatrix}$$

(b) Determine a equação dos autovalores de A , e compare com a equação característica associada a $y'' + py' + q = 0$

Resposta: _____

(c) Faça um círculo em redor da opção que torna a frase abaixo verdadeira:

Os autovalores de A são (=) / (≠) às raízes da equação característica da equação $y'' + py' + q = 0$.

(d) Sabemos que, para obter a solução geral do sistema autônomo pelo método dos autovalores e autovetores, a primeira coisa a fazer é calcular um autovetor \vec{K} associado ao autovalor $\lambda = r = -p/2$.

Lembrando das relações de Girard: $r_1 + r_2 = -p/2$, $r_1 \cdot r_2 = q$; e também que $r_1 = r_2 = r$, mostre que a equação matricial para o cálculo dos

autovetores de A é

$$\begin{pmatrix} r & -1 \\ r^2 & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(e) Diga se é verdadeiro ou falso:

O vetor $\vec{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}$ é um autovetor de A associado ao autovalor r .

Resposta: _____

(f) Complete:

(f_1): Utilizando o autovetor do item anterior, uma primeira solução do

sistema $\vec{Y}' = A\vec{Y}$ é $\vec{Y}_1(t) = \underline{\hspace{2cm}}$

(f_2): Uma segunda solução é $\vec{Y}_2(t) = \left[t \begin{pmatrix} \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right] e^{rt}$

onde $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ é uma solução da equação matricial

$$\begin{pmatrix} r & -1 \\ r^2 & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{pmatrix}$$

(g) Resolvendo a equação matricial do item (f_2), descobrimos que w_1 e w_2 estão relacionados pela expressão $rw_1 - w_2 = 1$. Daí então podemos afirmar que a escolha para $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ correspondente $w_1 = 0$ é

$$\begin{pmatrix} \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{pmatrix}$$

(h) Escreva no espaço abaixo a solução geral de $\vec{Y}' = A\vec{Y}$ correspondente aos dados obtidos nos itens anteriores

A solução geral é

$$\vec{Y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{pmatrix} e^{rt} + c_2 \begin{pmatrix} \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{pmatrix} e^{rt} \quad (18.9)$$

(i) Compare a primeira linha do vetor solução geral (18.9) com a solução geral da equação $y'' + py' + qy = 0$ obtida na Aula 14. O que você descobriu?

Resposta: _____

Exemplo 18.4

a) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = x - y \end{cases}, \quad x(0) = 1, y(0) = -1$$

b) Faça um esboço plano de fase do sistema do item (a), juntamente com a órbita que contém o vetor de dados iniciais.

Solução:

a) A forma matricial do sistema é

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{Y}, \quad \text{com} \quad \vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

A equação dos autovalores deste sistema é $\det(\lambda I - A) = 0$, i.é $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, cuja solução é o autovalor $\lambda = 1$, de multiplicidade dois.

Ao calcularmos autovetores da matriz do sistema associados a $\lambda = 1$, i.é, ao resolvermos a equação matricial

$$\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 4 \\ -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix}_{(\lambda=1)} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obtemos que v_1 e v_2 devem satisfazer à relação $-v_1 + 2v_2 = 0$. Podemos escolher, por exemplo, o autovetor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, o que nos dá a primeira solução

$$\vec{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

Uma segunda solução é da forma

$$\vec{Y}_2(t) = \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right] e^t,$$

onde $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ é solução da equação matricial

$$\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 4 \\ -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix}_{(\lambda=1)} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{(\lambda=1)} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ao resolver esta última equação encontramos que w_1 e w_2 devem satisfazer à relação $-w_1 + 2w_2 = 1$.

Escolhemos, por exemplo, o vetor $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e temos, como segunda solução

$$\vec{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} 2t - 1 \\ t \end{pmatrix} e^t.$$

Então a solução geral é

$$\vec{Y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t \end{pmatrix} e^t.$$

Impondo agora as condições iniciais $\vec{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^0 + c_2 \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^0.$$

de onde calculamos $c_1 = -1$ e $c_2 = -3$. Sendo assim, a solução do problema de valor inicial proposto é

$$\vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} 1-6t \\ -1-3t \end{pmatrix} e^t,$$

ou ainda

$$\begin{cases} x(t) = (1-6t)e^t \\ y(t) = (-1-3t)e^t \end{cases}$$

b) Um desenho do plano de fases dos sistema do item anterior, contendo a órbita que passa por $(1, -1)$ no ir
mputação algébrica) é

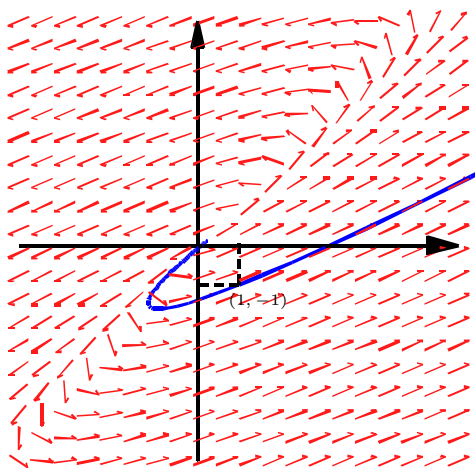


Figura 18.2

Comentário: Observemos o comportamento da órbita que passa por $(1, -1)$ quando $t = 0$ para valores muito grandes, ou muito pequenos de t .

Analisando a figura (18.2) as órbitas parecem “sair” do ponto $(0,0)$, seguindo uma direção próxima da direção da reta $y = x$, no sentido dos valores decrescentes de x (e y). Após um certo tempo ela dá meia volta e os valores de x e y começam a crescer sem parar, passando por $(1, -1)$ quando $t = 0$, com $x(t)$ e $y(t)$ disparando para $+\infty$ à medida que t tende a $+\infty$.

De fato, um cálculo com a regra de l'Hôpital nos mostra que

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (1 - 6t)e^t \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1 - 6t}{1/e^t} \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-6}{-1/e^t} \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} 6e^t \\ &= 0\end{aligned}$$

O cálculo acima nos mostra que quanto menor t mais próximo de 0 se encontra $x(t)$.

Cálculos análogos nos mostram que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} -(1 + 3t)e^t = 0$$

e também que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - 6t)e^t = +\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} -(1 + 3t)e^t$$

Os limites em $-\infty$ são interpretados dizendo-se que as soluções $x(t)$ e $y(t)$ estavam na origem, de onde saíram para percorrer a órbita desenhada na figura (18.2), seguindo rumo “ao infinito e além”.

Atividade 18.2

(a) Calcule a solução do sistema do do exemplo (18.4) que passa por $(-1, 2)$ quando $t = 0$. Estude o comportamento de $x(t)$ e $y(t)$ quando $t \rightarrow -\infty$ e quando $t \rightarrow +\infty$

Resposta: _____

(b): Qual das órbitas abaixo corresponde à solução do item (a)?

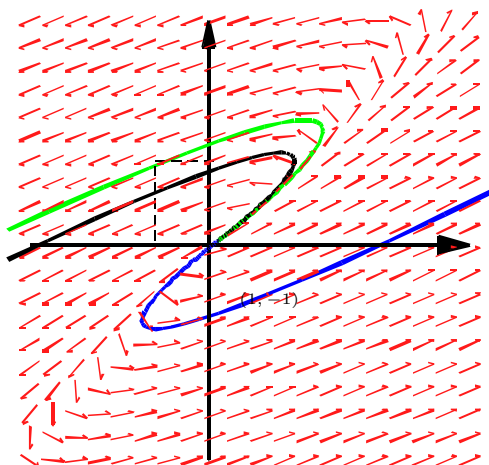


Figura 18.3

Resposta: _____

Exercícios

Exercício 18.1

Determine a solução geral de

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{Y}$$

Desenhe o plano de fases deste sistema e as trajetórias que possam respectivamente pelos pontos $(1, 1)$, $(-1, 2)$, $(-4, -3)$, e $(2, -4)$, quando $t = 0$.

Resposta :

A solução geral é $\vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^t$, e as órbitas pelos pontos indicados são as semi-retas partindo da origem, que contêm aqueles pontos.

Exercício 18.2

Determine as soluções gerais de

$$(a) \vec{Y}' = \begin{pmatrix} -3 & 5/2 \\ -5/2 & 2 \end{pmatrix} \vec{Y}.$$

$$(b) \vec{Y}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \vec{Y}$$

Em cada caso, descreva como as trajetórias que passam por $(-1, 1)$ quando $t = 0$ se comportam quando $t \rightarrow \pm\infty$.

Respostas:

$$(a) \vec{Y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t/2} + c_2 \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2/5 \end{pmatrix} \right] e^{-t/2}$$

$$(b) \vec{Y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] e^{-t}$$

Exercício 18.3

Resolva o problema de valor inicial e desenhe o gráfico da componente $y_1(t)$ do vetor

$$\text{solução } \vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$(a) \vec{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \vec{Y}, \quad \vec{Y}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \vec{Y}' = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ -3/2 & -1 \end{pmatrix} \vec{Y}, \quad \vec{Y}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Sistemas com autovalores reais repetidos

$$(c) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 6y \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 6$$

Respostas:

$$(a) \vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} 3 + 4t \\ 2 + 4t \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$(b) \vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{t/2} + 3/2t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t/2}$$

$$(c) x(t) = (26t - 1)e^{4t}, \quad y(t) = (13t + 6)e^{4t}$$

Resumo

Nesta aula você aprendeu a calcular as soluções de sistemas homogêneos de coeficientes constantes, cujas matrizes possuem autovalores de multiplicidade dois, que podem ser de dois tipos distintos:

- $\vec{Y}(t) = c_1 \vec{K}_1 e^{\lambda t} + c_2 \vec{K}_2 e^{\lambda t}$, no caso de existirem dois autovetores \vec{K}_1 e \vec{K}_2 , linearmente independentes, associados ao autovalor λ .

- $\vec{Y}(t) = c_1 \vec{K} e^{\lambda t} + c_2 [t\vec{K} + \vec{W}] e^{\lambda t}$, a matriz do sistema possui apenas um autovetor \vec{K} (a menos de múltiplos) associado ao autovalor λ . Neste caso \vec{W} é um autovetor generalizado, de A , de peso dois, que pode ser calculado resolvendo-se a equação matricial $(A - \lambda I)\vec{W} = \vec{K}$

Avaliação

Apesar de um certo grau de sofisticação introduzido na seção de justificativas, esta aula foi de natureza complementar; introduzindo uma técnica para calcular soluções de sistemas homogêneos de equações lineares de primeira ordem, com coeficientes constantes, no caso que faltava ser analisado, a saber: quando a matriz A possui apenas um autovalor real, com multiplicidade dois.

Reverendo os exemplos e exercícios, observe mais uma vez como não é suficiente obter apenas as expressões algébrica/analíticas das soluções. É importante analisá-las, seja com a ajuda de sistemas gráficos, seja estudando, com os recursos do Cálculo, o comportamento das soluções, ou usando os dois recursos combinados. Em se tratando de sistemas, o processo é sempre um tanto trabalhoso. Não se deixe abater. É assim mesmo.

Na próxima aula vamos estudar o método de variação de parâmetros para sistemas não-homogêneos de duas equações lineares de coeficientes constantes, encerrando o ciclo de cálculos explícitos de soluções de sistemas de duas equações lineares de primeira ordem com coeficientes constantes.

A partir deste ponto, vários caminhos se abrem para nós. Podemos explorar as generalizações dos resultados vistos aos sistemas de três ou mais equações, ou investigar

como as soluções se modificam quando modificamos os coeficientes das matrizes, ou ainda os sistemas de coeficientes variáveis, teoria qualitativa das equações, e muitos outros temas interessantes e atuais. Lamentavelmente, estes assuntos não fazem parte deste nosso primeiro contato com as equações diferenciais. Pelo menos já começamos a aplainar o terreno.

Aula 19 – Sistemas não-homogêneos

Objetivos

Ao final desta aula você estará apto a calcular soluções de sistemas não-homogêneos

$$\vec{Y}' = A(t)\vec{Y} + \vec{H}(t),$$

onde $\vec{H}(t)$ é o vetor de termos independentes.

Variação dos Parâmetros

Desejamos calcular a solução geral de

$$\vec{Y}' = A(t)\vec{Y} + \vec{H}(t) \quad (19.1)$$

onde $\vec{H}(t)$ é um vetor de termos independentes $\begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}$, $h_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ e as funções componentes da matriz $A(t)$ são contínuas em um intervalo I .

Consideremos o sistema homogêneo associado

$$\vec{Y}' = A(t)\vec{Y} \quad (19.2)$$

Atividade 19.1

Mostre que se $\vec{Y}(t)$ e $\vec{Z}(t)$ são soluções de (19.1) então $\vec{Y}(t) - \vec{Z}(t)$ é solução de (19.2)

Solução: _____

Repetindo o argumento usado no estudo de equações lineares, normais, não-homogêneas, de ordem n (veja a Aula 15), você pode concluir que se calcularmos uma solução particular de (19.1) e também a solução geral de (19.2) então a solução geral de (19.1) será a soma das duas.

Também no contexto dos sistemas de equações lineares gerais, o método de variação dos parâmetros é um método que permite calcular uma solução particular de (19.1) a partir da solução geral de (19.2).

Começamos determinando uma solução geral de (19.2):

Seja t_0 um ponto arbitrário de I , e sejam $\vec{Y}_1(t)$ e $\vec{Y}_2(t)$ duas soluções linearmente independentes de (19.2)

Uma solução geral de $\vec{Y}' = A(t)\vec{Y}$ é

$$\vec{Y}_H(t) = c_1 \vec{Y}_1(t) + c_2 \vec{Y}_2(t) \quad (19.3)$$

Procuramos uma solução particular da forma

$$\vec{Y}_P(t) = u(t) \vec{Y}_1(t) + v(t) \vec{Y}_2(t) \quad (19.4)$$

onde fazemos a exigência de que

$$\vec{Y}_P(t_0) = \vec{Y}_H(t_0).$$

$$\vec{Y}_P(t_0) = u(t_0) \vec{Y}_1(t_0) + v(t_0) \vec{Y}_2(t_0)$$

e

$$\vec{Y}_H(t_0) = c_1 \vec{Y}_1(t_0) + c_2 \vec{Y}_2(t_0)$$

De onde

$$\vec{0} = \vec{Y}_P(t_0) - \vec{Y}_H(t_0) = [u(t_0) - c_1] \vec{Y}_1(t_0) + [v(t_0) - c_2] \vec{Y}_2(t_0)$$

Daí, por independência linear

$$u(t_0) = c_1 \quad \text{e} \quad v(t_0) = c_2 \quad (19.5)$$

Agora, como $\vec{Y}_H(t)$ é solução de (19.2) então, no ponto $t = t_0$,

$$c_1 \vec{Y}_1'(t_0) + c_2 \vec{Y}_2'(t_0) = c_1 A(t_0) \vec{Y}_1(t_0) + c_2 A(t_0) \vec{Y}_2(t_0) \quad (19.6)$$

Como queremos que $\vec{Y}_P(t) = u(t) \vec{Y}_1(t) + v(t) \vec{Y}_2(t)$ seja solução de (19.1) devemos ter

$$u'(t) \vec{Y}_1(t) + u(t) \vec{Y}_1'(t) + v'(t) \vec{Y}_2(t) + v(t) \vec{Y}_2'(t) = u(t) A(t) \vec{Y}_1(t) + v(t) A(t) \vec{Y}_2(t) + \vec{H}(t)$$

Calculando em $t = t_0$

$$u'(t_0) \vec{Y}_1(t_0) + u(t_0) \vec{Y}_1'(t_0) + v'(t_0) \vec{Y}_2(t_0) + v(t_0) \vec{Y}_2'(t_0) =$$

$$= u(t_0) A(t_0) \vec{Y}_1(t_0) + v(t_0) A(t_0) \vec{Y}_2(t_0) + \vec{H}(t_0)$$

Usando (19.5) podemos substituir $u(t_0)$ por c_1 e $v(t_0)$ por c_2 , o que nos dá

$$u'(t_0) \vec{Y}_1(t_0) + c_1 \vec{Y}_1'(t_0) + v'(t_0) \vec{Y}_2(t_0) + c_2 \vec{Y}_2'(t_0) = c_1 A(t_0) \vec{Y}_1(t_0) + c_2 A(t_0) \vec{Y}_2(t_0) + \vec{H}(t_0)$$

ou ainda

$$c_1 \vec{Y}_1'(t_0) + c_2 \vec{Y}_2'(t_0) + u'(t_0) \vec{Y}_1(t_0) + v'(t_0) \vec{Y}_2(t_0) = c_1 A(t_0) \vec{Y}_1(t_0) + c_2 A(t_0) \vec{Y}_2(t_0) + \vec{H}(t_0)$$

Usando (19.6) esta última igualdade se simplifica, restando apenas

$$u'(t_0) \vec{Y}_1(t_0) + v'(t_0) \vec{Y}_2(t_0) = \vec{H}(t_0) \quad (19.7)$$

Para concluir, observe que (19.7) é um sistema de duas equações nas incógnitas $u'(t_0)$ e $v'(t_0)$.

Com efeito, se escrevemos as componentes de $\vec{Y}_1(t_0)$ e $\vec{Y}_2(t_0)$ obtemos

$$\vec{Y}_1(t_0) = \begin{pmatrix} y_{11}(t_0) \\ y_{21}(t_0) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{Y}_2(t_0) = \begin{pmatrix} y_{12}(t_0) \\ y_{22}(t_0) \end{pmatrix}$$

Então (19.7) se reescreve como

$$\begin{cases} y_{11}(t_0) u'(t_0) + y_{12}(t_0) v'(t_0) = h_1(t_0) \\ y_{21}(t_0) u'(t_0) + y_{22}(t_0) v'(t_0) = h_2(t_0) \end{cases} \quad (19.8)$$

Atenção!!! Os números $y_{11}(t_0), y_{12}(t_0), y_{21}(t_0), y_{22}(t_0), h_1(t_0), h_2(t_0)$ são conhecidos.

As incógnitas são $u'(t_0)$ e $v'(t_0)$.

Além disso, o determinante principal do sistema (19.8) é

$$\det \text{col}[\vec{Y}_1(t_0) \vec{Y}_2(t_0)],$$

que é diferente de zero, já que $\vec{Y}_1(t)$ e $\vec{Y}_2(t)$ são soluções linearmente independentes de (19.2)

Resolvendo o sistema (19.8) pela regra de Cramer, obtemos

$$u'(t_0) = \frac{\det \begin{pmatrix} h_1(t_0) & y_{12}(t_0) \\ h_2(t_0) & y_{22}(t_0) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} y_{11}(t_0) & y_{12}(t_0) \\ y_{21}(t_0) & y_{22}(t_0) \end{pmatrix}}$$

e

$$v'(t_0) = \frac{\det \begin{pmatrix} y_{11}(t_0) & h_1(t_0) \\ y_{21}(t_0) & h_2(t_0) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} y_{11}(t_0) & y_{12}(t_0) \\ y_{21}(t_0) & y_{22}(t_0) \end{pmatrix}}$$

O ponto t_0 foi escolhido de modo completamente arbitrário no intervalo I .

Então podemos dizer que para todo $t \in I$,

$$u'(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} h_1(t) & y_{12}(t) \\ h_2(t) & y_{22}(t) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} y_{11}(t_0) & y_{12}(t_0) \\ y_{21}(t_0) & y_{22}(t_0) \end{pmatrix}} \quad (19.9)$$

e

$$v'(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} y_{11}(t) & h_1(t) \\ y_{21}(t) & h_2(t) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) \end{pmatrix}} \quad (19.10)$$

Integrando as equações diferenciais (19.9) e (19.10) calcula-se as funções u e v .

Comentário: Analisando com cuidado a dedução da fórmula de variação dos parâmetros, você percebe que existem alguns pontos que merecem ser esclarecidos. Por exemplo - e isso foi importante na dedução da fórmula - por que razão exigimos que $\vec{Y}_P(t_0)$ fosse igual a $\vec{Y}_H(t_0)$? Será que foi apenas uma escolha feliz, feita de modo que “tudo funcionasse direitinho”? Ou será que existe uma explicação mais concreta para isso?

Aliás, porque razão procurar uma solução particular substituindo as constantes c_1 e c_2 da solução geral de (19.2) por funções $u(t)$ e $v(t)$? As respostas a essas questões estão nos trabalhos originais de Lagrange. Existem boas razões para essas escolhas. Infelizmente reproduzi-las aqui seria um desvio muito longo, e vamos omiti-las.

A nota histórica a seguir, nos dá uma indicação do contexto em que o método da variação dos parâmetros foi desenvolvido

Nota Histórica

Na segunda metade do século XVIII, Laplace tinha apresentado uma demonstração de que um planeta ao se movimentar ao redor do Sol, numa trajetória elíptica, não corria o risco de ter os eixos da sua órbita irem ficando cada vez maiores, de modo que pudesse eventualmente desgarrar do sistema solar, ou então que os eixos fossem ficando cada vez menores e o planeta fosse espiralando em direção ao Sol. Em ambos os casos as consequências seriam desastrosas. Laplace pretendeu mostrar que o semi-eixo maior da órbita de um planeta atraído pelo sol, de acordo com a lei da gravitação universal de Newton permanecia estável (poderia até sofrer variações, mas permaneceria sempre dentro de uma faixa de segurança que o impediria de desgarrar-se do sistema ou vir a colidir com o centro de atração).

A demonstração de Laplace não foi considerada satisfatória por muitos matemáticos e físicos. Uma das razões é que a trajetória real de um planeta sofre a influência de outros planetas e corpos celestes, os quais não podem ser ignorados.

Este famoso problema tem o nome de “Problema da Estabilidade Secular do Semi-eixo maior das Trajetórias”. Na verdade ele não foi resolvido satisfatoriamente até hoje.

Mas um dos primeiros a tentar corrigir a demonstração de Laplace foi Lagrange. Apesar de sua demonstração também vir a ser considerada incompleta, no decurso de suas investigações a respeito do tema, Lagrange introduziu os primeiros elementos do que viria a ser, no século XX, uma nova geometria, a Geometria Simplética.

Daqueles trabalhos surgiram também o método da variação dos parâmetros.

No dia 22 de agosto de 1808, Lagrange submeteu ao Institut de France (uma espécie de Academia de Ciências Francesa) um trabalho intitulado *Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes*. Era um trabalho sobre astronomia, e nele Lagrange se propunha a calcular a trajetória de um planeta atraído não só pelo Sol, mas perturbado pela atração de vários outros corpos celestes (planetas, satélites dos planetas, etc.). Se um planeta sofresse apenas a atração de um centro fixado, sua trajetória seria uma curva cônica determinada por seis constantes. Ao estudar o movimento real do planeta, submetido às atrações de outros corpos Lagrange se ocupou em determinar a equação da trajetória, e eventualmente extrair informações sobre a mesma. O trabalho supracitado foi seguido de um outro *Sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires*, apresentado em 13 de março de 1809, onde ele generalizou o método de variação das constantes usado no trabalho anterior a todas os problemas de mecânica (i.é, a todos os movimentos de partículas, os quais, como sabemos, são governados por equações diferenciais de segunda ordem, quer sejam de planetas no sistema solar, ou objetos na superfície da Terra, ou em outras galáxias).

Posteriormente, em 19 de fevereiro de 1810, ele apresentou ainda uma nova versão, bastante simplificada e definitiva de seu método de variação das constantes (ou parâmetros).

Retomemos nossos cálculos. O próximo quadro resume o método de variação dos parâmetros para sistemas:

O Método de Variação dos Parâmetros:

Para calcular uma solução particular de

$$\vec{Y}' = A(t)\vec{Y} + \vec{H}(t), \quad \vec{H}(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}$$

pelo método de variação dos parâmetros, precisamos conhecer/ calcular a solução geral da equação homogênea associada,

$$\vec{Y}' = A(t)\vec{Y}$$

que é da forma

$$\vec{Y}_H(t) = c_1 \vec{Y}_1(t) + c_2 \vec{Y}_2(t),$$

sendo

$$\vec{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ y_{21}(t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} y_{12}(t) \\ y_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Então uma solução particular é obtida através da fórmula

$$\vec{Y}_P(t) = \left[\int \frac{\det \begin{pmatrix} h_1(t) & y_{12}(t) \\ h_2(t) & y_{22}(t) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) \end{pmatrix}} dt \right] \vec{Y}_1(t) + \left[\int \frac{\det \begin{pmatrix} y_{11}(t) & h_1(t) \\ y_{21}(t) & h_2(t) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) \end{pmatrix}} dt \right] \vec{Y}_2(t)$$

e a solução geral de $\vec{Y}' = A(t)\vec{Y} + \vec{H}(t)$ é

$$\vec{Y}(t) = \vec{Y}_H(t) + \vec{Y}_P(t)$$

Exemplo 19.1

Determine a solução geral do sistema não-homogêneo

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}$$

Solução: O sistema é de coeficientes constantes. Portanto sabemos calcular a solução geral do sistema homogêneo associado.

Deixamos a seu cargo verificar que os autovalores da matriz do sistema são $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -1$ e que, por exemplo, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ são autovetores associados respectivamente a $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -1$.

Portanto a solução geral do sistema homogêneo associado é

$$\vec{Y}_H(t) = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{pmatrix}}_{\vec{Y}_1(t)} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}}_{\vec{Y}_2(t)}$$

O determinante da matriz cujas colunas são $\vec{Y}_1(t)$ e $\vec{Y}_2(t)$ é

$$\det(\text{col}[\vec{Y}_1(t) \vec{Y}_2(t)]) = \det \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix} = 2e^{-4t}$$

As fórmulas (19.9) e (19.10) nos dão diretamente

$$u'(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} 2e^{-t} & e^{-t} \\ 3t & e^{-t} \end{pmatrix}}{2e^{-4t}} \quad \text{e} \quad v'(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} e^{-3t} & 2e^{-t} \\ -e^{-3t} & 3t \end{pmatrix}}{2e^{-4t}}$$

Isto é

$$u'(t) = e^{2t} - \frac{3}{2}te^{3t} \quad \text{e} \quad v'(t) = 1 + \frac{3}{2}te^t$$

Portanto

$$u(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}te^{3t} + \frac{1}{6}e^{3t} \quad \text{e} \quad v(t) = t + \frac{3}{2}te^t - \frac{3}{2}e^t,$$

e uma solução particular do sistema dado é

$$\begin{aligned} \vec{Y}_P(t) &= \left(\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}te^{3t} + \frac{1}{6}e^{3t}\right)\vec{Y}_1(t) + \left(t + \frac{3}{2}te^t - \frac{3}{2}e^t\right)\vec{Y}_2(t) \\ &= \begin{pmatrix} (t + \frac{1}{2})e^{-t} + t - \frac{4}{3} \\ (t - 2)e^{-t} + 2t - \frac{5}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, a solução geral do sistema não-homogêneo é

$$\vec{Y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} (t + \frac{1}{2})e^{-t} + t - \frac{4}{3} \\ (t - 2)e^{-t} + 2t - \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Atividade 19.2

Sistemas não homogêneos provenientes de equações normais de segunda ordem, não-homogêneas.

Considere uma equação diferencial linear de segunda ordem, normal, não-homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = h(t), \quad (19.11)$$

com coeficientes e termo independente $h(t)$ contínuos em um intervalo.

Complete as lacunas, formando o sistema de duas equações de primeira ordem equivalente a (19.11)

$$\begin{cases} y'_1 = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} \\ y'_2 = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \quad (19.12)$$

A forma matricial do sistema (19.12) é

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{pmatrix} \vec{Y} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}}_{\vec{H}(t)} \quad (19.13)$$

Sejam $\vec{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}$ e $\vec{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}$ as soluções do sistema homogêneo associado a (19.13).

Complete: Para calcular uma solução particular de (19.13) pelo método da variação dos parâmetros precisamos determinar $u(t)$ e $v(t)$ pelas fórmulas

$$u'(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} \text{---} & y_2 \\ \text{---} & y_2' \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}} \quad \text{e} \quad v'(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} y_1 & \text{---} \\ y_1' & \text{---} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}$$

Observe que $\det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = W[y_1(t), y_2(t)]$, o wronskiano das soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ da equação homogênea associada a (19.11).

Para terminar, escreva abaixo as expressões de $u(t)$ e $v(t)$

$$u(t) = - \int \frac{\text{---}}{W[y_1(t), y_2(t)]} dt \quad \text{e} \quad v(t) = \int \frac{\text{---}}{W[y_1(t), y_2(t)]} dt$$

Escreva agora a solução particular do sistema (19.13)

$$\vec{Y}_P(t) = \text{---} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} + \text{---} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix} \quad (19.14)$$

Observe que a primeira linha da solução vetorial (19.14) (do sistema não-homogêneo (19.13)) coincide com a solução particular da equação de segunda ordem (19.11) como foi calculada na Aula 15.

Exemplo 19.2

Exemplo 19.3

O Método dos Coeficientes a Determinar

Algumas vezes, quando a matriz do sistema não-homogêneo

$$\vec{Y}' = A\vec{Y} + \vec{H}(t),$$

é constante e os elementos do vetor de termos independentes $\vec{H}(t)$ são constantes, ou polinômios, funções exponenciais, cossenos ou senos, ou combinações lineares dessas funções, é possível encontrar uma solução particular pelo **método dos coeficientes a determinar**.

Trata-se da generalização do método que aplicamos às equações de segunda ordem, na aula 14.

Vejamos um par de exemplos:

Exemplo 19.4

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Solução:

Os coeficientes de $\vec{H}(t)$ são constantes. Procuremos uma solução particular $\vec{Y}_p = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, a_1 e a_2 constantes. Substituindo na equação, temos

$$\vec{Y}_p' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix},$$

o que nos dá o sistema de duas equações

$$\begin{cases} 2a_1 + 3a_2 = -7 \\ -a_1 - 2a_2 = 5 \end{cases}$$

As soluções deste sistema são $a_1 = 1$ e $a_2 = -3$. Portanto

$$\vec{Y}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 19.5

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} 6t \\ -10t + 4 \end{pmatrix}$$

Solução:

Os coeficientes de $\vec{H}(t)$ são polinômios de primeiro grau. Procuremos uma solução particular $\vec{Y}_p = \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix}$. Substituindo na equação,

$$\vec{Y}_p' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6t \\ -10t + 4 \end{pmatrix}.$$

Daí deduzimos

$$\begin{cases} 6(a_1 t + b_1) + a_2 t + b_2 + 6t = a_1 \\ 4(a_1 t + b_1) + 3(a_2 t + b_2) - 10t + 4 = a_2 \end{cases}$$

Efetuada os cálculos do lado esquerdo do sinal “=” em cada linha, e igualando os coeficientes das potências de t nas expressões obtidas aos respectivos coeficientes das potências de t nas linhas do vetor $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 6a_1 + a_2 + 6 = 0 \\ 6b_1 + b_2 = a_1 \\ 4a_1 + 3a_2 + 10 = 0 \\ 4b_1 + 3b_2 + 4 = a_2 \end{cases}$$

Ou ainda

$$\begin{cases} 6a_1 + a_2 = -6 \\ -a_1 + 6b_1 + b_2 = 0 \\ 4a_1 + 3a_2 = -10 \\ -a_2 + 4b_1 + 3b_2 = -4 \end{cases}$$

As soluções deste sistema são $a_1 = -4/7$, $a_2 = -18/7$, $b_1 = 17/49$ e $b_2 = -130/49$.

Assim,

$$\vec{Y}_p = \begin{pmatrix} (-4/7)t + 17/49 \\ (-18/7)t - 130/49 \end{pmatrix}.$$

Exercícios

Exercício 19.1

Use o método de variação de parâmetros para obter as soluções gerais dos sistemas

$$1. \vec{Y}' = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 3/4 & -1 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} e^{t/2} \\ -e^{t/2} \end{pmatrix}$$

$$2. \vec{Y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} e^{2t} \operatorname{sen}(2t) \\ 2e^{2t} \cos(2t) \end{pmatrix}$$

$$3. \vec{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} \quad 4. \vec{Y}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$5. \vec{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} 2 \\ e^{-3t} \end{pmatrix} \quad 6. \vec{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}$$

$$7. \vec{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} 12t \\ 12t \end{pmatrix} \quad 8. \vec{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} \sec(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercício 19.2

Resolva os sistemas, obtendo uma solução particular pelo método dos coeficientes a determinar

$$1. \vec{Y}' = \begin{pmatrix} 4 & 1/3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} -3e^t \\ 10e^t \end{pmatrix}$$

$$2. \vec{Y}' = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ -2\cos(t) \end{pmatrix}$$

Resumo

Avaliação

ISBN 978-85-7648-670-1



9 788576 486701



UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense



Universidade Federal Fluminense

uff



UNIRIO



Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro



**GOVERNO DO
Rio de Janeiro**

SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA



**Ministério
da Educação**



BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL