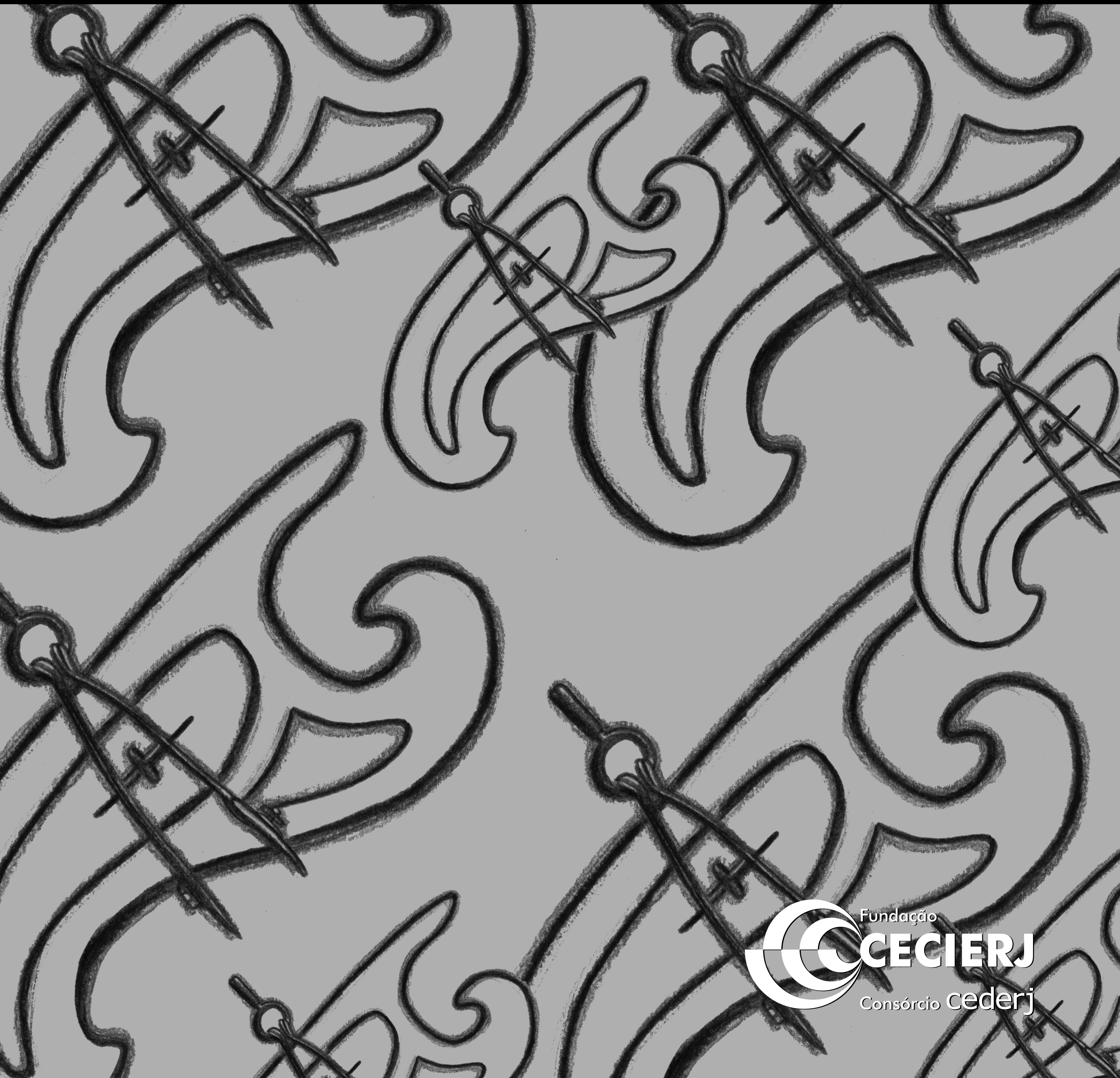
Módulo 2

Edson Luiz Cataldo Ferreira
F. X. Fontenele Neto
Isabel Lugão Rios

Volume 2
3ª edição

Geometria Básica



Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Geometria Básica

Volume 2 - Módulo 2
3ª edição

Edson Luiz Cataldo Ferreira
F. X. Fontenele Neto
Isabel Lugão Rios

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 - Mangueira - Rio de Janeiro, RJ - CEP 20943-001
Tel.: (21) 2299-4565 Fax: (21) 2568-0725

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Edson Luiz Cataldo Ferreira
F. X. Fontenele Neto
Isabel Lugão Rios

EDITORIA
Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Jane Castellani

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL
Cristine Costa Barreto

COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM
Maria Angélica Alves

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO
Alexandre Rodrigues Alves
Nilce Rangel Del Rio

COORDENAÇÃO GRÁFICA
Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Marcelo Freitas

COORDENAÇÃO DE ILUSTRAÇÃO
Eduardo Bordoni

CAPA
Eduardo Bordoni
Fabio Muniz

PRODUÇÃO GRÁFICA
Andréa Dias Fiães
Fábio Rapello Alencar

F383g

Ferreira, Edson Luiz Cataldo
Geometria básica. v.2 / Edson Luiz Cataldo Ferreira. – 3.ed. rev. atual. – Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2007.
220p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-7648-022-0

1. Trigonometria. 2. Funções trigonométricas. 3. Figuras geométricas. I. Fontenele Neto, Francisco X. II. Rios, Isabel Lugão. III. Título.

CDD: 516

2007/1

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Raimundo Braz Filho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Nival Nunes de Almeida

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Cícero Mauro Fialho Rodrigues

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

SUMÁRIO

Aula 14 – Área do círculo

Objetivo

- Determinar a área de um círculo.

Pré-requisitos

- Conceito de área.
- Polígonos regulares e suas propriedades.
- Círculos e suas propriedades.
- Semelhança de triângulos.

Introdução

Nesta aula vamos determinar a área de um círculo. Para isso, vamos aproximar o círculo por polígonos regulares inscritos e circunscritos.

Observe na **Figura 14.1** alguns polígonos regulares inscritos em círculos. Note que quanto maior é o número de lados do polígono regular, maior é a região de dentro do círculo coberta por ele.

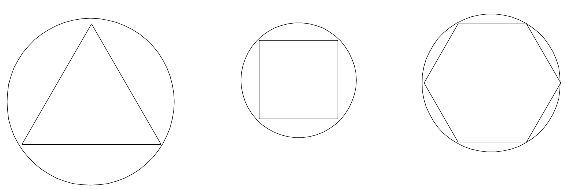


Figura 14.1: Polígonos inscritos.

Do mesmo modo, observe na **Figura 14.2** alguns polígonos regulares circunscritos a uma círculo. Note que, neste caso, quanto maior o número de lados do polígono regular, menor é a região coberta por ele e não coberta pelo círculo.

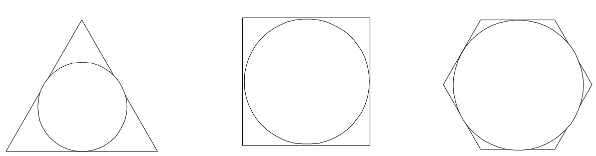


Figura 14.2: Polígonos circunscritos.

Vamos designar por Γ_r um círculo de raio r, por P_n um polígono regular inscrito de n lados e por Q_n um polígono regular circunscrito de n lados. Por simplicidade, denotaremos por $A(F)$ a área de uma figura F. Como P_n

Curiosidade

O problema de calcular a área de uma figura plana cuja fronteira não é formada por segmentos de reta é algo mais complicado. Esse problema ocupou parte da mente de vários matemáticos gregos; entre eles, podemos citar Eudoxio e Arquimedes. Ambos construíram um método para calcular áreas de figuras planas, que consiste na aproximação por polígonos. A idéia de aproximação não fornece um valor exato, a menos que usemos uma "seqüência infinita de aproximações". Essa é a primeira idéia do chamado "Cálculo integral".

está propriamente contido em Γ_r e Γ_r está propriamente contido em Q_n, segue que

$$A(P_n) < A(\Gamma_r) < A(Q_n), \tag{1}$$

para todo inteiro positivo n. A próxima proposição diz que $A(P_n)$ e $A(Q_n)$ podem ficar tão próximas quanto desejarmos. Como conseqüência, a área de um círculo pode ser obtida por aproximação tanto por áreas de polígonos regulares inscritos como por áreas de polígonos regulares circunscritos.

Proposição 1

$A(Q_n) - A(P_n)$ pode tornar-se tão pequeno quanto se queira. Mais precisamente, dado qualquer número real positivo α, existe um inteiro positivo n tal que $A(Q_n) - A(P_n) < \alpha$.

Prova:

Sejam $P_n = A_1 \ldots A_n$ e $Q_n = B_1 \ldots B_n$. Podemos supor que P_n e Q_n estão dispostos de modo que B_1, A_1 e O (o centro de Γ_r) sejam colineares e A_1 esteja entre B_1 e O. Assim, os outros vértices de P_n e Q_n estarão também alinhados, como representado na **Figura 14.3**.

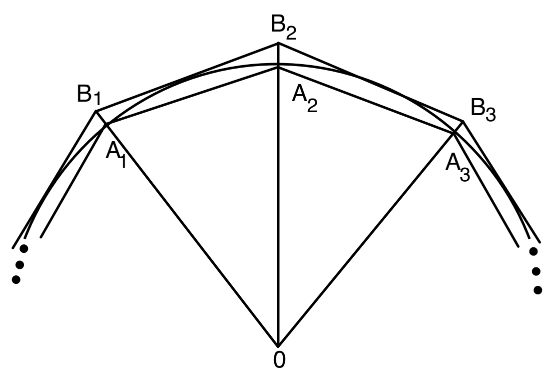


Figura 14.3: Polígonos P_n e Q_n.

Como os triângulos OA_1A_2, OA_2A_3, ..., OA_nA_1 são congruentes dois a dois, segue que

$$A(P_n) = nA(OA_1A_2). \tag{2}$$

Da mesma forma, como os triângulos OB_1B_2, OB_2B_3, ..., OB_nB_1 são congruentes dois a dois, segue que

$$A(Q_n) = nA(OB_1B_2). \tag{3}$$

Desse modo, basta descobrir a relação que existe entre as áreas dos triângulos OA_1A_2 e OB_1B_2 para comparar as áreas dos polígonos P_n e Q_n.

Para estudar essa relação, tracemos a bissetriz do ângulo $A_1\hat{O}A_2$. Sejam M e N os pontos em que essa bissetriz corta, respectivamente, os segmentos A_1A_2 e B_1B_2, como na **Figura 14.4**.

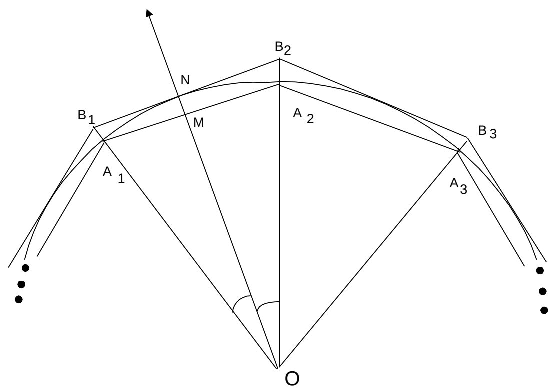


Figura 14.4: Proposição 1 .

Os triângulos OMA_2 e ONB_2 são semelhantes (por quê?) e, assim,

$$\frac{m(OM)}{m(ON)} = \frac{m(MA_2)}{m(NB_2)} \ .$$

Como $m(MA_2) = m(A_1A_2)/2$, $m(NB_2) = m(B_1B_2)/2$ e $m(ON) = r$, obtemos

$$\frac{m(OM)}{r} = \frac{m(A_1A_2)}{m(B_1B_2)} \ . \tag{4}$$

De (3), tem-se

$$A(Q_n) = \frac{nm(B_1B_2)m(ON)}{2} = \frac{nrm(B_1B_2)}{2} \ . \tag{5}$$

De (2) e (4), tem-se

$$\begin{aligned} A(P_n) &= \frac{(nmA_1A_2)m(OM)}{2} \\ &= \frac{nm(OM)}{2}\frac{m(OM)m(B_1B_2)}{r} \\ &= \frac{nm(B_1B_2)}{2}\frac{m(OM)^2}{r} \end{aligned} \tag{6}$$

Subtraindo membro a membro as expressões (5) e (6), segue que

$$\begin{aligned} A(Q_n) - A(P_n) &= \frac{nm(B_1B_2)}{2}\left[r - \frac{m(OM)^2}{r}\right] \\ &= \frac{nm(B_1B_2)}{2r}\left[r^2 - m(OM)^2\right] \\ &= \frac{nm(B_1B_2)}{2r}\left[r + m(OM)\right]\left[r - m(OM)\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

Mas $m(OM) < m(ON) = r$ e $r - m(OM) = m(OA_2) - m(OM) < m(MA_2)$, pela desigualdade triangular.

Substituindo em (7), concluímos que

$$A(Q_n) - A(P_n) < nm(B_1B_2)m(MA_2) = \frac{n}{2}m(B_1B_2)m(A_1A_2)\ .$$

Eudoxio de Cnido.
408 - 355 a.C.
Eudoxio viajou para Tarento (agora na Itália) onde ele estudou com Architas, um seguidor de Pitágoras. A duplicação do cubo foi um dos problemas de interesse de Architas e, também, de Eudoxio. Ele também foi ensinado por Architas sobre teoria dos números e teoria da música. Eudoxio estudou Medicina e Astronomia. Eudoxio teve uma contribuição importante na teoria das proporções, onde ele criou uma definição permitindo a comparação entre segmentos de comprimentos irracionais de uma forma similar a que tratamos hoje em dia ("multiplicação em cruz"). Consulte: `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Heron.html`

Observando que $nm(B_1B_2)$ é igual ao perímetro de (Q_n), tem-se então que

$$A(Q_n) - A(P_n) < \frac{m(A_1A_2)}{2}\text{perímetro}(Q_n) \qquad (8)$$

para todo inteiro positivo n. O exercício 15 desta aula tem como objetivo a prova de que o perímetro de qualquer polígono regular circunscrito a um círculo de raio r é menor que $8r$. Logo,

$$A(Q_n) - A(P_n) < 4rm(A_1A_2),$$

para todo inteiro positivo n. Como $m(A_1A_2)$ se torna tão pequeno quanto se queira, bastando para isso tornar n bastante grande, então o mesmo ocorre para a diferença $A(Q_n) - A(P_n)$.

Q.E.D.

Como em (8), $A(\Gamma_n) - A(P_n) < A(Q_n) - A(P_n)$ e $A(Q_n) - A(\Gamma_n) < A(Q_n) - A(P_n)$, segue da proposição 1 que $A(P_n)$ e $A(Q_n)$ podem ficar tão próximas de $A(\Gamma_n)$ quanto desejarmos.

Consideremos agora dois círculos concêntricos, Γ e Γ', com raios r e r', respectivamente. Como vimos na aula 14, se P é um polígono regular inscrito (ou circunscrito) em Γ e P' é sua projeção radial em Γ', vale a seguinte relação entre suas áreas:

$$A(P') = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 A(P)$$

Como as áreas de Γ e Γ' podem ser aproximadas pela área de polígonos regulares inscritos em Γ e Γ', respectivamente, é natural esperar que exista uma fórmula parecida para as áreas dos círculos Γ e Γ'. Esse é o conteúdo da próxima proposição.

Proposição 2

As áreas de dois círculos Γ e Γ', com raios r e r', respectivamente, satisfazem à fórmula

$$A(\Gamma') = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 A(\Gamma).$$

Prova:

Como círculos de mesmo raio são congruentes, tendo portanto a mesma área, vamos fazer a prova para o caso em que Γ e Γ' são concêntricos. Seja P um polígono regular inscrito em Γ e Q um polígono regular circunscrito a Γ. Sejam P' e Q' as projeções radiais de P e Q, respectivamente, em Γ'. Sabemos que

$$A(P') = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 A(P)$$

e

$$A(Q') = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 A(Q)$$

Como $A(P') < A(\Gamma') < A(Q')$, segue que

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^2 A(P) < A(\Gamma') < \left(\frac{r'}{r}\right)^2 A(Q)$$

e, então,

$$A(P) < \left(\frac{r}{r'}\right)^2 A(\Gamma') < A(Q).$$

Provamos assim que o número real $\left(\frac{r}{r'}\right)^2 A(\Gamma')$ é maior que a área de qualquer polígono regular inscrito em Γ e menor que a área de qualquer polígono regular circunscrito a Γ. Em particular, tem-se que

$$A(P_n) < \left(\frac{r}{r'}\right)^2 A(\Gamma') < A(Q_n)$$

para todo inteiro positivo n, onde P_n e Q_n são os polígonos regulares de n lados respectivamente inscrito e circunscrito em Γ. Mas (8) diz que o número $A(\Gamma)$ é também maior que $A(P_n)$ e menor que $A(Q_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\mid A(\Gamma) - \left(\frac{r}{r'}\right)^2 A(\Gamma') \mid < A(Q_n) - A(P_n) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $A(Q_n) - A(P_n)$ pode tornar-se tão pequeno quanto se queira pela proposição 1, conclui-se que $\mid A(\Gamma) - \left(\frac{r}{r'}\right)^2 A(\Gamma') \mid = 0$.

Portanto

$$A(\Gamma') = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 A(\Gamma).$$

Q.E.D. Em vista da última proposição, podemos estimar a área de qualquer círculo tomando como base um círculo de mesmo centro com raio igual a 1. Assim, se o raio de Γ é r, a proposição nos diz que a área de Γ

Matemático e inventor grego, que escreveu importantes obras sobre Geometria plana e espacial, Aritmética e Mecânica. Enunciou a Lei da Hidrostática, o Princípio de Arquimedes.
Nasceu em Siracusa, Sicília, e se educou em Alexandria, Egito. No campo da Matemática pura, antecipou-se a muitos dos descobrimentos da Ciência Moderna, como o cálculo integral, com seus estudos de áreas de figuras planas.
Entre os trabalhos mais famosos de Arquimedes se encontra *A medida do círculo*, no qual encontra-se o cálculo do valor exato da medida do círculo (o método consiste em inscrever e circunscrever círculos em polígonos regulares).
Consulte:
`http://www.aldeaeducativa.com/`
`http://www.nethistoria.com/bios/100/bios36.shtml`

vale r^2 vezes a área de um círculo de raio 1. Ora, todos os círculos de raio 1 têm a mesma área, que é um número real que chamaremos pela letra grega π (lê-se *pi*). Obtemos assim a fórmula da área de um círculo Γ_r de raio r:

$$A(\Gamma_r) = \pi r^2$$

Veremos na próxima aula que o número π também representa a razão entre o comprimento do círculo e o dobro de seu raio.

O número π é um dos números reais mais importantes da Matemática. Ele é um número irracional e portanto tem expansão decimal infinita não periódica. Um valor aproximado de π é 3,14159265.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- Como a fórmula para o cálculo da área do círculo pode ser obtida, usando aproximações por polígonos regulares.
- Que a área do círculo de raio r é πr^2.

Exercícios

1. A **Figura 14.5** mostra um círculo de raio R e centro O.

A fórmula para o cálculo da área de um setor circular pode ser obtida por aproximações, da mesma forma como foi provada a fórmula da área do círculo. Prova-se que, a área do setor circular é proporcional à medida do ângulo central que o determina.

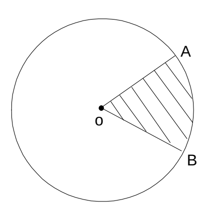


Figura 14.5: Exercício 1.

Sabendo que o ângulo $A\hat{O}B$ mede 60^o, calcule a área da região hachurada (chamada de *setor circular*).

2. Na **Figura 14.6**, a corda AB do círculo maior é tangente ao círculo menor.

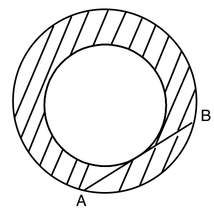


Figura 14.6: Exercício 2.

Se $m(AB) = 40\,cm$, determine a área da região hachurada (chamada *coroa circular*).

3. Determine a área da região hachurada na **Figura 14.7**, chamada *segmento circular*.

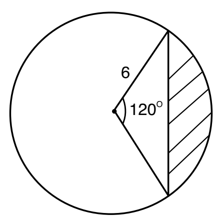


Figura 14.7: Exercício 3.

4. Na **Figura 14.8**, um quadrado de $12\,cm$ de lado está inscrito em um círculo.

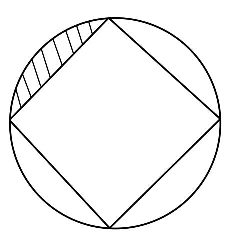


Figura 14.8: Exercício 4.

Determine a área do segmento circular hachurado.

5. Na **Figura 14.9**, um hexágono regular de $8\,cm$ de lado está inscrito em um círculo.

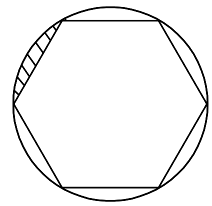


Figura 14.9: Exercício 5.

Determine a área do segmento circular hachurado..

6. Na **Figura 14.10**, $ABCD$ é um quadrado de $16\,cm$ de lado.

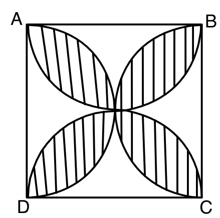


Figura 14.10: Exercício 6.

Determine a área da região hachurada.

7. Na **Figura 14.11**, o círculo tem $6\,cm$ de raio, AB é lado de um triângulo equilátero inscrito e CD é lado de um hexágono regular inscrito.

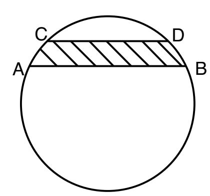


Figura 14.11: Exercício 7.

Sabendo que $\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{CD}$, determine a área da região hachurada.

8. (UFF, 2001) Para a encenação de uma peça teatral, os patrocinadores financiaram a construção de uma arena circular com $10\,m$ de raio. O palco ocupará a região representada pela parte hachurada na **Figura 14.12**.

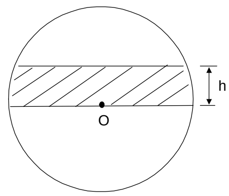


Figura 14.12: Exercício 8.

Se O indica o centro da arena e se h mede $5\,m$, então, a área do palco, em m^2, vale:

(a) $\dfrac{75\sqrt{3}+50\pi}{3}$ (b) $\dfrac{25\sqrt{3}\pi}{2}$ (c) $\dfrac{50\sqrt{2}+\pi}{2}$

(d) $\dfrac{5\sqrt{2}+10\pi}{3}$ (e) 100π

9. Na **Figura 14.13**, o círculo está centrado em O e seu raio é igual a $2\,cm$.

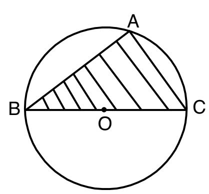


Figura 14.13: Exercício 9.

Sabendo que $A\hat{B}C = 30^o$, determine a área da região hachurada.

10. Determine a área da região hachurada na **Figura 14.14**, sabendo que ABC é um triângulo retângulo, cuja hipotenusa AC mede $12\,cm$ e que $\overset{\frown}{ED}$ e $\overset{\frown}{BD}$ são arcos de círculo com centros em A e C, respectivamente.

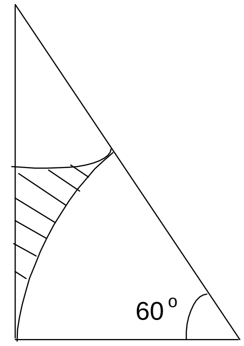


Figura 14.14: Exercício 10.

11. (F.C.M. STA. CASA - 1980)

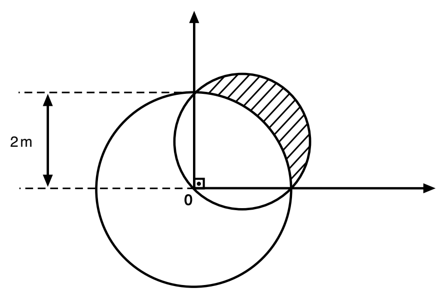


Figura 14.15: Exercício 11.

A área da região hachurada na **Figura 14.15** é:

(a) $2\pi\, m^2$ (b) $4\, m^2$ (c) $2\, m^2$ (d) $\pi\, m^2$ (e) N.R.A.

12. (F.C.M. STA. CASA - 1981) Na **Figura 14.16**, temos um triângulo retângulo cujos lados medem $5\, cm$, $12\, cm$ e $13\, cm$ e a circunferência nele inscrita.

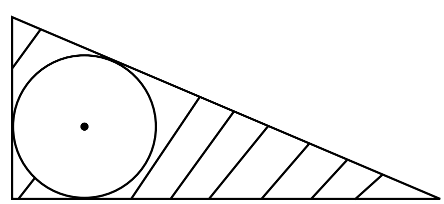


Figura 14.16: Exercício 12.

A área da região sombreada é, em cm^2:

(a) $30(1-\pi)$ (b) $5(6-1,25\pi)$ (c) $3(10-3\pi)$ (d) $2(15-8\pi)$ (e) $2(15-2\pi)$

13. (U. FORTALEZA - 1982) Considere um triângulo ABC e a circunferência nele inscrita, como na **Figura 14.17**.

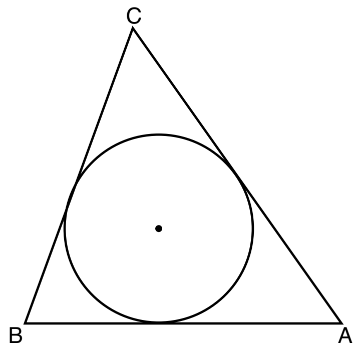


Figura 14.17: Exercício 13.

Se o raio do círculo é $6\,cm$ e o perímetro do triângulo é $p\,cm$, então a área do triângulo, em cm^2, é:

(a) p (b) $2p$ (c) $3p$ (d) $4p$

14. (UFF) A área da coroa circular definida por dois círculos concêntricos de raios r e R, $r < R$, é igual à área do círculo menor. A razão $\dfrac{R}{r}$ é igual a:

(a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (b) 1 (c) $\sqrt{2}$ (d) 2 (e) $2\sqrt{2}$

15. (UFF) Os raios, em cm, dos três círculos concêntricos da figura são números naturais e consecutivos.

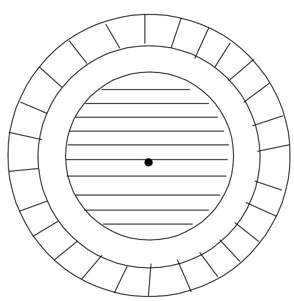


Figura 14.18: Exercício 15.

Sabendo que as áreas assinaldas são iguais, pode-se afirmar que a soma dos três raios é:

(a) $6\,cm$ (b) $9\,cm$ (c) $12\,cm$ (d) $15\,cm$ (e) $18\,cm$

16. Seja ABC um triângulo tal que $AB < AC$ e seja M o ponto médio de BC. Prove que $B\hat{A}M > C\hat{A}M$.

17. Seja ABC um triângulo retângulo de hipotenusa AC, e B_1 e B_2 pontos que dividem BC em três partes iguais (**Figura 14.19**).

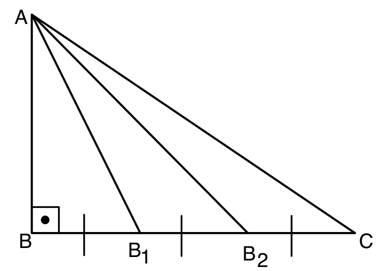


Figura 14.19: Exercício 17.

Prove que $B\hat{A}B_1 > \dfrac{1}{3}B\hat{A}C$.

18. Sejam ABC um triângulo retângulo de hipotenusa AC e n um número natural maior que 4. Divida o segmento BC em n partes iguais através dos pontos $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ (veja a **Figura 14.20**).

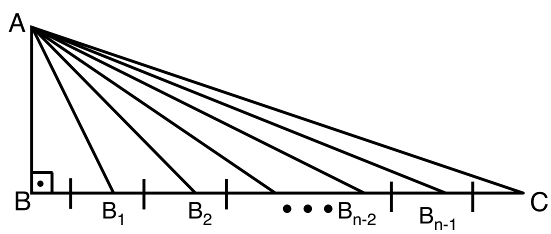


Figura 14.20: Exercício 18.

Prove que $B\hat{A}B_1 + B_1\hat{A}B_2 + B_2\hat{A}B_3 + B_3\hat{A}B_4 > \dfrac{4}{n}B\hat{A}C$

19. Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos retângulos de hipotenusas AC e $A'C'$, respectivamente, e suponha que $AB \equiv A'B'$ e $B'\hat{A}'C' = \dfrac{4}{n}B\hat{A}C$ (veja **Figura 14.21**).

Prove que $m(B'C') < \dfrac{4}{n}m(BC)$.

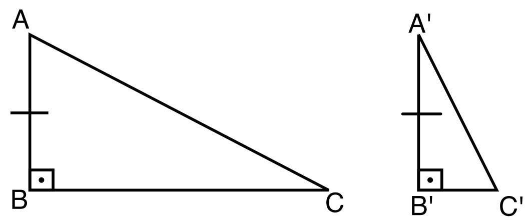


Figura 14.21: Exercício 19.

20. O objetivo deste exercício é provar que o perímetro de qualquer polígono regular com mais de quatro lados, circunscrito a um círculo de raio R, é menor que $8\,R$. Considere um polígono regular $B_1B_2\ldots B_n$, com $n > 4$, circunscrito em um círculo de raio R, e seja $A_1A_2A_3A_4$ um quadrado circunscrito em um círculo de mesmo raio.

    Sejam A' e B' os pontos de tangência entre os círculos e A_1A_2 e B_1B_2, respectivamente (**Figura 14.22**).

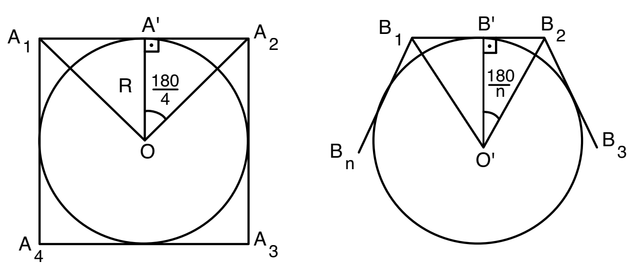


Figura 14.22: Exercício 20.

Prove que $B'\widehat{O'}B_2 = \dfrac{4}{n}A'\widehat{O}A_2$. Use o exercício 19 para concluir que $m(B'B_2) < \dfrac{4}{n}m(A'A_2)$. Agora prove que o perímetro de $B_1B_2\ldots B_n$ é menor que o perímetro de $A_1A_2A_3A_4$.

Informação sobre a próxima aula

Na próxima aula, calcularemos o comprimento do círculo.

Aula 15 – Comprimento do círculo

Objetivos

- Definir e determinar o comprimento do círculo.

Pré-requisitos

- Círculos e suas propriedades.
- Polígonos regulares inscritos e circunscritos a círculos.

Introdução

O cálculo do comprimento do círculo foi um dos problemas que mais intrigaram os matemáticos da Antigüidade. Alguns deles dedicaram toda a vida a produzir estimativas para o valor de π, que está, como veremos, intimamente relacionado ao problema.

Nosso objetivo nesta aula é definir e calcular o comprimento do círculo. Note que é preciso definir o que seja comprimento para um círculo, uma vez que só temos definido comprimento para segmentos de reta (através de comparação com um segmento padrão). A idéia intuitiva é que o comprimento do círculo é o do segmento que obteríamos se pudéssemos "cortar" o círculo num ponto qualquer e "desentortá-lo". Nosso método, porém, será outro. Vamos seguir um caminho parecido com o da última aula, tentando aproximar o comprimento do círculo pelo perímetro de polígonos regulares inscritos e circunscritos a ele. Para isso, vamos começar por provar a proposição a seguir, que relaciona o perímetro de polígonos inscritos e circunscritos ao mesmo círculo.

Proposição 1
O perímetro de qualquer polígono inscrito em um círculo Γ é menor que o perímetro de qualquer polígono circunscrito a Γ.

Prova:

Sejam P um polígono inscrito e Q um polígono circunscrito ao círculo Γ. Nosso objetivo é provar que $l(P) < l(Q)$, onde $l(P)$ e $l(Q)$ são os perímetros de P e Q, respectivamente. Note que os polígonos P e Q não são supostos regulares, ou seja, devemos considerar que seus lados e ângulos podem não ser todos congruentes. Em particular, não podemos assumir que o centro O de Γ seja um ponto do interior de P. Porém, basta provar a proposição no caso em que O é um ponto interior de P.

De fato, se O não for um ponto interior de P, tomamos o polígono inscrito P_1 obtido de P acrescentando um novo vértice, como na **Figura 15.1**.

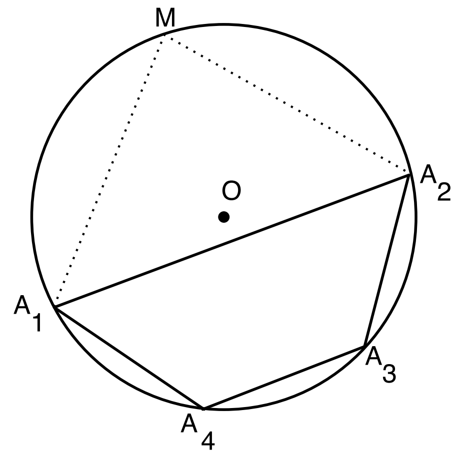


Figura 15.1: O polígono $A_1A_2A_3A_4$ tem perímetro maior que P.

Na **Figura 15.1**, o lado A_1A_2 do polígono P é substituído por A_1M e MA_2. Como $m(A_1A_2) < m(A_1M) + m(MA_2)$, segue que o perímetro de P_1 é maior que o de P. Daí, se fizermos a prova de que $l(P_1) < l(Q)$, fica provado também que $l(P) < l(Q)$.

Levando em conta esse fato, podemos assumir que O é um ponto interior de P (para evitar usar o nome P_1).

Seja AB um lado qualquer de P e sejam $A' = \overrightarrow{OA} \cap Q$ e $B' = \overrightarrow{OB} \cap Q$, como na **Figura 15.2**.

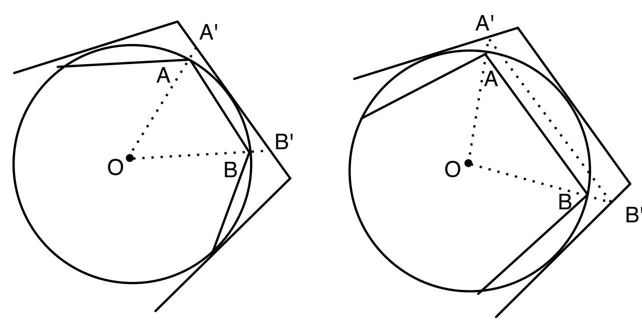


Figura 15.2: Proposição 1.

Como $m(AB) \leq m(A'B')$ e $m(A'B')$ é menor ou igual que o trecho do polígono Q contido no ângulo $A\hat{O}B$, segue que $m(AB)$ é menor ou igual que o trecho de Q contido em $A\hat{O}B$.

De fato, pode-se provar que $m(AB)$ é menor que o trcho de Q contido em $A\hat{O}B$ (veja o exercício 7). Fazendo isso com cada lado de P, concluímos que $l(P) < l(Q)$.

Q.E.D.

Na prova da Proposição 1, vimos que o perímetro de um polígono inscrito aumenta quando acrescentamos a ele novos vértices. Para polígonos circunscritos, ocorre o contrário: ao acrescentarmos novos vértices a um polígono circunscrito, seu perímetro diminui. Para provar essa afirmação, seja Q um polígono circunscrito a um círculo Γ e sejam AB e BC lados consecutivos de Q.

Sejam $R = AB \cap \Gamma$ e $S = BC \cap \Gamma$. Tracemos uma tangente a Γ em um ponto X qualquer do **arco** RS, no semiplano relativo a $\overleftrightarrow{RS}$ que contém B. Sejam Y e Z os pontos em que essa tangente intersecta respectivamente AB e BC, como na **Figura 15.3**.

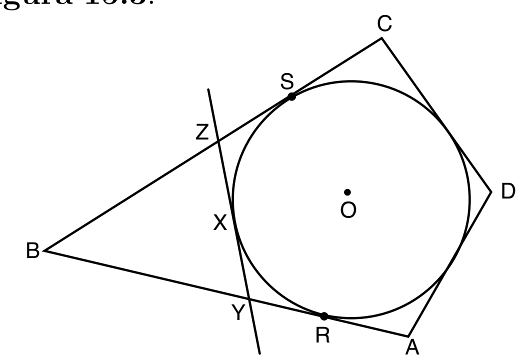


Figura 15.3: Acrescentando vértices ao polígono Q.

Como $m(YZ) < m(YB) + m(BZ)$, vemos que o perímetro do polígono circunscrito obtido a partir de Q trocando-se os lados AB e BC por AY, YZ e ZC é menor que o perímetro de Q.

Definindo o comprimento de um círculo

Nos cursos de Cálculo, aprendemos a definir e a calcular o comprimento de curvas. No caso particular em que a curva é um círculo, podemos definir e calcular o comprimento de modo intuitivo, que descreveremos a seguir.

Seja Γ um círculo e sejam P e Q polígonos respectivamente inscrito e circunscrito em Γ. Se AB é um lado qualquer de P, nossa intuição diz que $m(AB)$ é menor que o comprimento do **arco** AB (**Figura 15.4**).

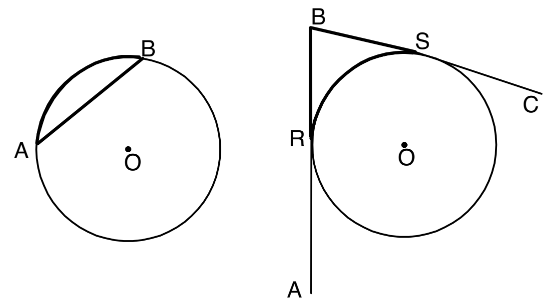


Figura 15.4:

Assim, intuitivamente, $l(P) < l(\Gamma)$. Ainda intuitivamente, se R e S são pontos consecutivos de tangência entre Q e Γ, temos que $m(RB) + m(BS)$ é maior que o comprimento do **arco** RS, donde $l(Q) > l(\Gamma)$. Juntando esses dois fatos podemos dizer que, intuitivamente,

$$l(P) < l(\Gamma) < l(Q), \tag{1}$$

para qualquer polígono P inscrito em Γ, e para qualquer polígono Q circunscrito a Γ. Mostraremos a seguir que a diferença entre o perímetro de um polígono circunscrito e o perímetro de um polígono inscrito em Γ pode ser muito pequena, tão pequena quanto se deseje, bastando para isso tomar polígonos com o número de lados bastante grande. Como conseqüência disso, existe um único número real que é maior que o perímetro de qualquer polígono inscrito e menor que o perímetro de qualquer polígono circunscrito a Γ (a prova desse fato foge do objetivo desse curso). Esse número é definido como o comprimento de Γ. Vamos fazer essa prova usando polígonos regulares inscritos e circunscritos.

Proposição 2

Sejam P_n e Q_n polígonos regulares de n lados, respectivamente inscrito e circunscrito ao círculo Γ de raio r e centro O. Então, à medida que n aumenta, a diferença entre os perímetros de Q_n e P_n diminui, podendo tornar-se tão pequena quanto se deseje.

Prova:

Sejam $P_n = A_1A_2 \ldots A_n$ e $Q_n = B_1B_2 \ldots B_n$. Sabemos que $l(Q_n) = nm(B_1B_2)$ e $l(P_n) = nm(A_1A_2)$. De acordo com a equação 4 da Aula 15, também sabemos que $m(A_1A_2) = \dfrac{m(OM)m(B_1B_2)}{r}$, onde M é o ponto médio de A_1A_2. Dessas igualdades concluímos que

$$\begin{aligned} l(Q_n) - l(P_n) &= nm(B_1B_2)\left[1 - \frac{m(OM)}{r}\right] \\ &= nm(B_1B_2)\frac{r - m(OM)}{r} < nm(B_1B_2)\frac{m(MA_2)}{r} \\ &= \frac{l(Q_n)}{2r}m(A_1A_2). \end{aligned}$$

Como o perímetro de Q_n é menor que $8r$ (veja último exercício da aula anterior), segue que

$$l(Q_n) - l(P_n) < \frac{8r}{2r}m(A_1A_2) = 4m(A_1A_2).$$

Note que a medida do lado A_1A_2 do polígono inscrito P_n é tão menor quanto maior for o número n de lados de P_n. Tomando n bastante grande, a medida de A_1A_2 (e dos outros lados de P_n) pode tornar-se tão pequena quanto se deseje. O mesmo ocorre, então, para a diferença $l(Q_n) - l(P_n)$, como queríamos demonstrar.

Q.E.D.

De acordo com a proposição acima, vemos que o comprimento de um círculo pode ser aproximado tanto pelo perímetro de polígonos regulares P_n nele inscritos como pelo perímetro de polígonos regulares Q_n a ele circunscritos. De fato, como $l(P_n) < l(\Gamma) < l(Q_n)$, tem-se $l(\Gamma) - l(P_n) < l(Q_n) - l(P_n)$ e $l(Q_n) - l(\Gamma) < l(Q_n) - l(P_n)$. Logo, $l(\Gamma) - l(P_n)$ e $l(Q_n) - l(\Gamma)$ (que são números positivos) podem se tornar tão pequenos quanto se deseje.

Até aqui estivemos *definindo* o que vem a ser o comprimento de um círculo. Note que da forma que tínhamos definido comprimento, por comparação com um segmento padrão, podíamos apenas calculá-lo para segmentos de reta. O processo de "cortar" o círculo e "desentortá-lo" para transformá-lo em um segmento passível de medição não funciona bem no mundo das idéias... Seguindo o raciocínio anterior, porém, seremos capazes de calcular o comprimento do círculo, que é dado na proposição a seguir.

Proposição 3

O comprimento de um círculo de raio r é $2\pi r$.

Prova:

Queremos mostrar que $l(\Gamma) = 2\pi r$. Suponha que $l(\Gamma) < 2\pi r$. Mostraremos que isso nos leva a uma contradição. De $l(\Gamma) < 2\pi r$ temos

$$\frac{l(\Gamma)r}{2} < \pi r^2.$$

Mas a proposição 7 da aula 15 implica que a área de um círculo pode ser aproximada pela área de polígonos regulares inscritos, ou seja, existe um polígono regular P inscrito em Γ tal que

$$A(P) > \frac{l(\Gamma)r}{2}.$$

A proposição 6 da Aula 14 diz que a área de P é dada por $A(P) = \dfrac{l(P)a}{2}$, onde a é o apótema de P. Substituindo na desigualdade acima, temos

$$\frac{l(P)a}{2} > \frac{l(\Gamma)r}{2}.$$

Como o apótema de um polígono regular inscrito é menor que o raio r, conclui-se que $l(P) > l(\Gamma)$, o que contradiz a desigualdade (1). Da mesma forma, supondo $l(\Gamma) > 2\pi r$, poderíamos escolher um polígono regular Q circunscrito a Γ tal que

$$\frac{l(Q)a}{2} < \frac{l(\Gamma)r}{2}.$$

Mas o apótema a de Q é igual a r. Então $l(Q) < l(\Gamma)$, o que contradiz a definição de comprimento de círculo. Como não podemos ter $l(\Gamma) < 2\pi r$ nem $l(\Gamma) > 2\pi r$, então $l(\Gamma) = 2\pi r$.

Q.E.D.

Segue da proposição acima o seguinte resultado:

$l(\Gamma)/2r = \pi$, ou seja, o comprimento de um círculo dividido pelo seu diâmetro não depende do círculo, e esse valor constante é precisamente a área de um círculo de raio 1.

Vamos obter uma estimativa para o valor de π, usando um quadrado inscrito e um quadrado circunscrito a um círculo Γ de raio 1. Provaremos que $2 < \pi < 4$.

Com efeito, seja Γ um círculo de raio 1. Por definição, $\pi = A(\Gamma)$. Considere os quadrados inscrito e circunscrito como na **Figura 15.5**.

O quadrado inscrito tem lado medindo $\sqrt{2}$, pelo teorema de Pitágoras. Então sua área vale 2. O quadrado circunscrito tem lado medindo 2, portanto sua área vale 4. Como a área de Γ é maior que a área do quadrado inscrito e menor que a área do quadrado circunscrito, conclui-se que $2 < \pi < 4$.

Podemos obter estimativas melhores para π utilizando outros polígonos regulares. Por exemplo, usando aproximações por hexágonos regulares inscrito e circunscrito, pode-se provar que

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} < \pi < 2\sqrt{3}$$

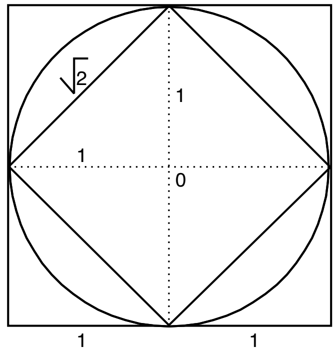


Figura 15.5: Proposição 3.

(veja exercício 8 desta aula).

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- O que significa comprimento de um círculo.
- Que o comprimento de um círculo de raio r é $2\pi r$.

Exercícios

1. A **Figura 15.6** mostra duas roldanas e uma correia que transmite o movimento de rotação de uma roldana para a outra.

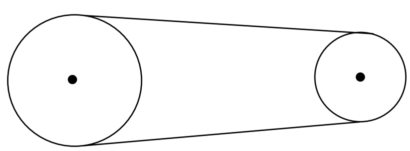


Figura 15.6: Exercício 1.

Se os raios das roldanas valem $30\,cm$ e $8\,cm$ e a distância entre seus centros é igual a $44\,cm$, determine o comprimento da correia.

2. A **Figura 15.7** mostra dois círculos com centro em O.

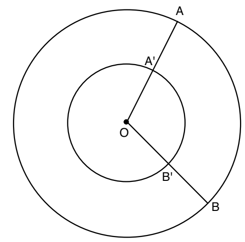


Figura 15.7: Exercício 2.

Se $m(AA') = 12\,cm$ e os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$ medem, respectivamente, $10\pi\,cm$ e $6\pi\,cm$, determine a medida do ângulo $A\hat{O}B$.

3. Na **Figura 15.8**, AB é lado do hexágono regular inscrito, CD é lado do triângulo equilátero inscrito e $AB//CD$.

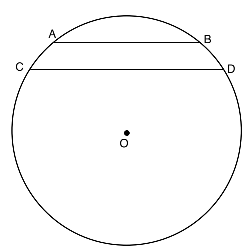


Figura 15.8: Exercício 3.

Se o raio do círculo é $6\,cm$, determine o comprimento do menor arco determinado pelos pontos B e D.

4. (V. UNIF. RS - 1980) A razão entre os comprimentos das círculos circunscrito e inscrito a um quadrado é:

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) $2\sqrt{2}$ (e) 2

5. (FATEC-1988) Um hexágono regular, de lado $3\,cm$, está inscrito em um círculo. Nesse círculo, um arco de medida 100^o tem comprimento:

(a) $\frac{3}{5}\pi\,cm$ (b) $\frac{5}{6}\pi\,cm$ (c) $\pi\,cm$ (d) $\frac{5}{3}\pi\,cm$ (e) $\frac{10}{3}\pi\,cm$

6. (U.C.PR - 1982) Quando o comprimento de um círculo aumenta de $10\,m$ para $15\,m$, o raio aumenta:

(a) $\frac{5}{2\pi}\,m$ (b) $2,5\,m$ (c) $5\,m$ (d) $\frac{\pi}{5}\,m$ (e) $5\pi\,m$

7. Seja Γ um círculo centrado em O e sejam P e Q polígonos inscrito e circunscrito, respectivamente. Se A e B são vértices consecutivos de P, prove que $m(AB)$ é menor que o pedaço de Q contido no ângulo $A\hat{O}B$.

8. Aproximando a área de um círculo por hexágonos regulares inscrito e circunscrito, prove que $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} < \pi < 2\sqrt{3}$.

9. Prove que $\pi > 3$.

10. Na **Figura 15.9**, $ABCD$ é um quadrado de $20\,cm$ de lado e os arcos estão centrados nos pontos A, B, C e D. Calcule o comprimento da fronteira da região hachurada.

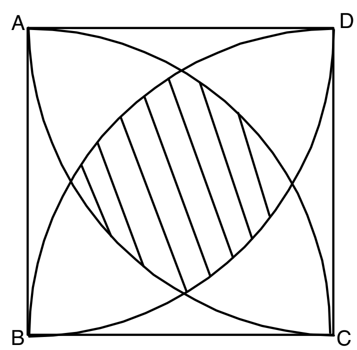


Figura 15.9: Exercício 10.

11. (UFF, 1997) A **Figura 15.10** representa dois círculos C e C' de mesmo raio r.

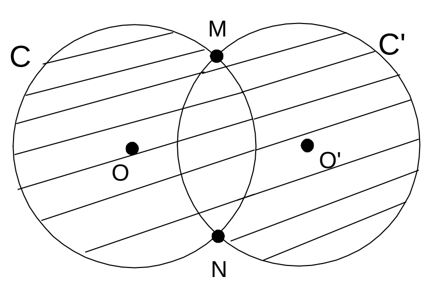


Figura 15.10: Exercício 11.

Se MN é o lado comum de hexágonos regulares inscritos em C e C', então o perímetro da região sombreada é:

(a) $\dfrac{10\pi r}{3}$ (b) $\dfrac{\pi r}{3}$ (c) $\dfrac{2\pi r}{3}$ (d) $4\pi r$ (e) $2\pi r$

Informações sobre a próxima aula

Na próxima aula, começaremos o estudo do ramo da Matemática que trata das relações entre os lados e ângulos de um triângulo: a Trigonometria.

Aula 16 – Introdução à trigonometria

Objetivos

- Introduzir os conceitos básicos de trigonometria.
- Apresentar as principais relações trigonométricas.

Pré-requisitos

- Ângulos.
- Círculos.
- Semelhança de triângulos.

Introdução

Trigonometria é o ramo da Matemática que trata das relações entre os lados e ângulos de um triângulo. A Trigonometria plana lida com figuras geométricas pertencentes a um único plano, e a Trigonometria esférica trata dos triângulos que são uma seção da superfície de uma esfera. A Trigonometria começou como uma Matemática eminentemente prática, para determinar distâncias que não podiam ser medidas diretamente. Serviu à navegação, à agrimensura e à astronomia. Ao lidar com a determinação de pontos e distâncias em três dimensões, a Trigonometria esférica ampliou sua aplicação à Física, à Química e a quase todos os ramos da Engenharia, em especial ao estudo de fenômenos periódicos como a vibração do som e o fluxo de corrente alternada. A Trigonometria começou com as civilizações babilônica e egípcia e desenvolveu-se na Antiguidade graças aos gregos e indianos. A partir do século VIII d.C., astronômos islâmicos aperfeiçoaram as descobertas gregas e indianas, notadamente em relação às funções trigonométricas. A Trigonometria moderna começou com o trabalho de matemáticos no Ocidente a partir do século XV. A invenção dos logaritmos pelo escocês John Napier e do cálculo diferencial e integral por Isaac Newton e Leibniz auxiliou os cálculos trigonométricos.

Consulte:
`http://educar.sc.usp.br/licenciatura/1999`

Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo

Consideremos um ângulo agudo $A\hat{O}B$, como na figura **16.1**.

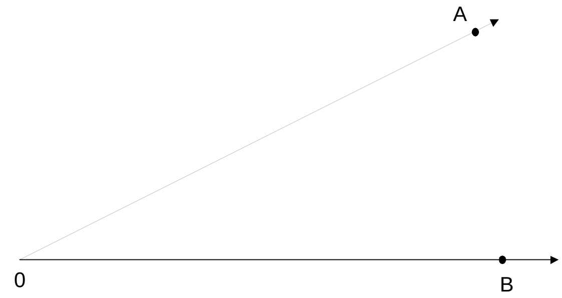


Figura 16.1: Ângulo $A\hat{O}B$.

> **A idéia genial de Hipparchos**
>
> Os problemas de triângulos mais comuns e importantes são aqueles em que, a partir de alguns lados e ângulos conhecidos, queremos achar os demais lados e ângulos. Esses problemas trazem o inconveniente de que as relações entre esses elementos usualmente não são algébricas. Por exemplo, no caso de um triângulo qualquer a relação entre os lados do mesmo não é algébrica, a não ser no caso especial de triângulos retângulos (para os quais vale o Teorema de Pitágoras). Contudo, introduzindo a função trigonométrica cosseno, podemos facilmente achar relações algébricas entre os lados e os senos dos ângulos do triângulo, conforme nos diz a lei dos cossenos. Com a introdução de funções trigonométricas, Hipparchos não só viabilizou achar relações entre lados e ângulos de triângulos, mas tornou algébricas essas relações. Esse artifício de cálculo tem um preço: é preciso construir tabelas das funções trigonométricas.
>
> Consulte: `http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm26/indice.htm`

Escolhamos na semi-reta $\overrightarrow{OB}$ pontos B_1 e B_2. Sejam A_1 e A_2 pontos da semi-reta $\overrightarrow{OA}$ de forma que os triângulos OB_1A_1 e OB_2A_2 sejam retângulos, com ângulos retos em B_1 e B_2, como na **Figura 16.2**.

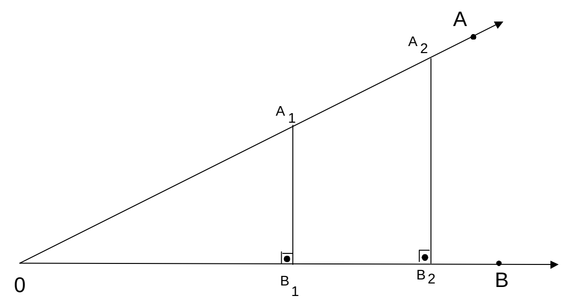


Figura 16.2: Triângulos OB_1A_1, OB_2A_2 e OB_3A_3.

Como por construção OA_1B_1 e OA_2B_2 são triângulos semelhantes, podemos deduzir que

$$\frac{m(A_1B_1)}{m(OA_1)} = \frac{m(A_2B_2)}{m(OA_2)}.$$

Escolhendo qualquer outro par de pontos A_3 e B_3 pelo mesmo processo, é possível verificar que

$$\frac{m(A_1B_1)}{m(OA_1)} = \frac{m(A_2B_2)}{m(OA_2)} = \frac{m(A_3B_3)}{m(OA_3)}.$$

De fato, a razão entre essas medidas depende apenas do ângulo $A\hat{O}B$, e do fato de que OA_1B_1, OA_2B_2 e OA_3B_3 são triângulos semelhantes.

Chamamos *seno do ângulo* $A\hat{O}B$ (indicado por $sen\, A\hat{O}B$) à razão $\dfrac{m(A_1B_1)}{m(OA_1)}$. Também definimos o *cosseno do ângulo* $A\hat{O}B$ (indicado por $cos\, A\hat{O}B$) e a *tangente do ângulo* $A\hat{O}B$ (indicado por $tg\, A\hat{O}B$) como segue:

$$cos\, A\hat{O}B = \frac{m(OB_1)}{m(OA_1)} \left(= \frac{m(OB_2)}{m(OA_2)} = \frac{m(OB_3)}{m(OA_3)} \right).$$

$$tg\, A\hat{O}B = \frac{m(A_1B_1)}{m(OB_1)} \left(= \frac{m(A_2B_2)}{m(OB_2)} = \frac{m(A_3B_3)}{m(OB_3)} \right).$$

Em geral, em um triângulo retângulo ABC com ângulo reto no vértice B, cada um dos ângulos restantes (agudos) tem seno igual à razão entre o cateto oposto a ele e a hipotenusa, o cosseno igual à razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa, e a tangente igual à razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente. Veja a **Figura 16.3**.

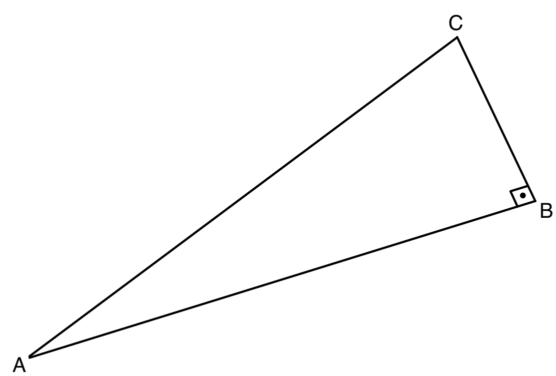


Figura 16.3: $sen\hat{A} = \dfrac{m(BC)}{m(AC)}$, $cos\hat{A} = \dfrac{m(AB)}{m(AC)}$ e $tg\hat{A} = \dfrac{m(BC)}{m(AB)}$.

Note que dois ângulos congruentes têm o mesmo seno, o mesmo cosseno e a mesma tangente (verifique!). Em vista disso, como ângulos congruentes têm a mesma medida, a cada medida de um ãngulo, associamos um valor para o seno, um valor para o cosseno e um valor para a tangente.

O seno, o cosseno e a tangente assim definidos são conhecidos pelos gregos desde alguns séculos antes de Cristo e são chamados *funções trigonométricas do ângulo agudo*. Através dessas funções, é possível realizar medições de distâncias imensas, como o diâmetro da Terra, ou a distância entre a Terra e a Lua. Por exemplo, vamos descrever um processo conhecido desde os gregos de antes de Cristo para medir o raio R da Terra usando o conceito de seno.

Imaginemos que o centro da Terra é um ponto que chamaremos de O. Do ponto B no alto de uma torre de altura h conhecida, mede-se o ângulo

θ que a semi-reta vertical $\overrightarrow{BO}$ faz com a semi-reta $\overrightarrow{BC}$, onde C é um ponto na linha do horizonte. Se a região onde se encontra a torre for uma planície, sem montanhas no horizonte, então qualquer ponto C assim descrito levará ao mesmo resultado. Note que, por C estar na linha do horizonte, a semi-reta $\overrightarrow{BC}$ é tangente à terra, e podemos traçar um esquema como na **Figura 16.4**.

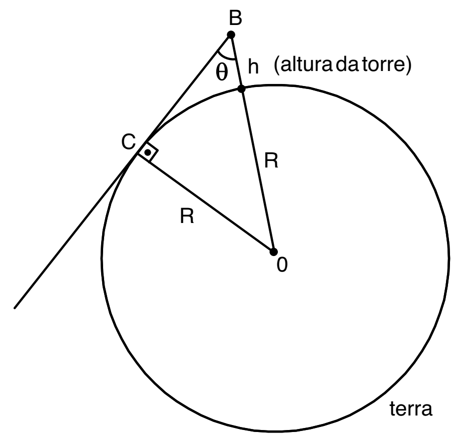
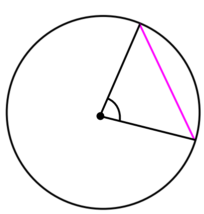


Figura 16.4: Cálculo do raio da Terra.

Hipparchos introduziu, na verdade, uma única função trigonométrica: a função corda. Dado um círculo de raio R, a função corda associa a cada ângulo α de vértice no centro do círculo o valor da medida da respectiva corda geométrica:



Podemos observar que essa função é muito parecida com a função seno. Com efeito, é imediato vermos que: $\text{corda}(\alpha) = 2R\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ Consulte: `http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm26/indice.htm`

Como vemos na **Figura 16.4**, OC é também um raio, e é, portanto, perpendicular à semi-reta $\overrightarrow{BC}$. Temos então que o triângulo BOC assim construído é retângulo, com ângulo reto no vértice C. Daí,

$$sen\theta = \frac{R}{R+h},$$

donde concluímos que $Rsen\theta + hsen\theta = R$, ou seja, que

$$R = \frac{hsen\theta}{1 - sen\theta}.$$

Ora, a altura h da torre é conhecida, e o seno do ângulo θ pode ser calculado utilizando-se um triângulo retângulo qualquer com um dos ângulos igual a θ (lembre-se de que o valor de $sen\theta$ não depende das medidas dos lados do triângulo retângulo, mas apenas da razão entre elas). Construindo um triângulo assim, com lados menores e passíveis de serem medidos, obtemos uma estimativa do raio da Terra. É claro que essas medições envolvem erros, e os valores obtidos são apenas aproximados, mas o método é simples de ser executado.

Veremos na seção de exercícios algumas outras aplicações das funções trigonométricas dos ângulos agudos.

Relações entre as funções trigonométricas dos ângulos agudos

A partir das definições dadas na seção anterior, podemos obter facilmente relações envolvendo as funções trigonométricas, assim como determinar os seus valores para alguns ângulos. Para determinar algumas relações, considere um triângulo retângulo ABC, com ângulo reto em B, cujas medidas estão indicadas na **Figura 16.5**.

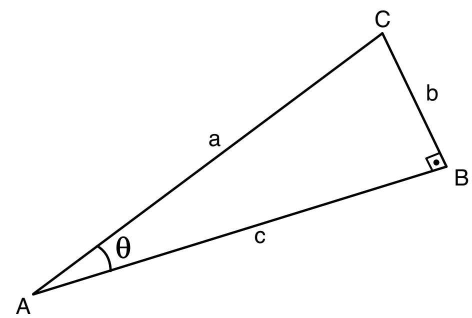


Figura 16.5: Relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Nesse caso, podemos observar que

$$\frac{sen\theta}{cos\theta} = \frac{b/a}{c/a} = \frac{b}{c} = tg\theta$$

e

$$sen^2\theta + cos^2\theta = (b/a)^2 + (c/a)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

onde usamos o Teorema de Pitágoras para concluir que $a^2 = b^2 + c^2$.

Daí tiramos duas relações muito importantes entre as funções seno, cosseno e tangente:

$$tg\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$$

e

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

Esta última é chamada *relação fundamental da Trigonometria*.

Como o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo são números positivos, as duas equações acima nos dizem que se um desses valores for conhecido para um ângulo θ, podemos determinar os outros dois sem precisar para isso saber exatamente o valor do ângulo θ. Por exemplo, se tivermos $sen\theta = 1/2$, a segunda equação (a relação fundamental) nos dá que $cos^2\theta = 3/4$, e, pelo fato de que $cos\theta > 0$, temos $cos\theta = \sqrt{3}/2$. Da primeira relação, obtemos $tg\theta = 1/\sqrt{3}$.

Decorre da definição de seno e cosseno que, se um dado triângulo retângulo tem um ângulo agudo θ e sua hipotenusa mede a, então o cateto oposto a θ mede $asen\theta$ e o cateto adjacente a θ mede $acos\theta$. Veja a **Figura 16.6**.

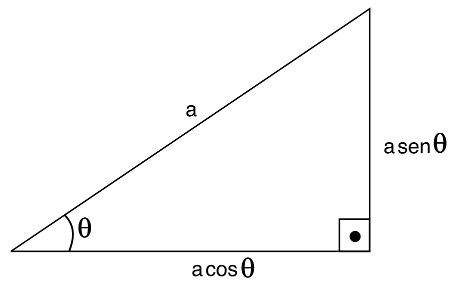


Figura 16.6: Determinação dos catetos, dados um ângulo agudo e a hipotenusa.

Como Hipparchos construiu uma tabela de valores da função corda? Sua tabela fornecia valores para a corda, variando de $7,5^o$ em $7,5^o$, desde zero graus até 180 graus. Para conseguir isso, ele baseou-se em resultados equivalentes às fórmulas do seno de meio ângulo e do seno da soma de dois ângulos. Com isso ele calculou sucessivamente $corda(60^o)$, $corda(30^o)$, $corda(15^o)$, $corda(7,5^o)$ e assim por diante, até criar a tabela inteira. Consulte: `http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm26/indice.htm`

Se chamarmos α ao outro ângulo agudo do triângulo, teremos que $\alpha + \theta = 90^o$, o cateto oposto a α (que é adjacente a θ) mede $asen\alpha$ e o cateto adjacente a α (que é oposto a θ) mede $acos\alpha$. Daí tiramos as relações $cos\alpha = sen\theta$ e $sen\alpha = cos\theta$. Chamemos de *complementares* dois ângulos agudos cuja soma é 90^o. Enunciamos então a seguinte proposição, que contém esses fatos:

Proposição 1

Se dois ângulos α e θ são complementares, então $sen\alpha = cos\theta$ e vice-versa.

Passaremos agora ao cálculo do seno, cosseno e tangente para alguns ângulos. Faremos em primeiro lugar o caso do ângulo de 45^o.

Considere um triângulo retângulo ABC, isósceles, de catetos AB e AC, ambos com medida 1, como na **Figura 16.7**.

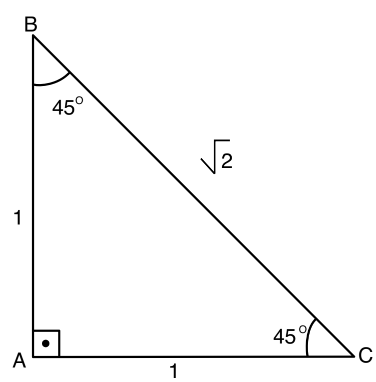


Figura 16.7: Seno, cosseno e tangente do ângulo de 45^o.

Como ABC é isósceles e $\hat{A}$ é reto, temos que $\hat{B} = \hat{C} = 45^o$. Além disso, pelo Teorema de Pitágoras, $m(BC) = \sqrt{2}$. Daí concluímos que

$$sen 45^o = cos 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad e \quad tg 45^o = 1.$$

Passamos agora ao caso dos ângulos de 30^o e 60^o: para isso considere um triângulo equilátero ABC com medidas dos lados iguais a 1. Como ABC também é equiângulo, temos que seus ângulos internos têm medida igual a 60^o. Como na **Figura 16.8**, tracemos a altura AD (que também é mediana, e também divide ao meio o ângulo $\hat{A}$, pois ABC é equilátero).

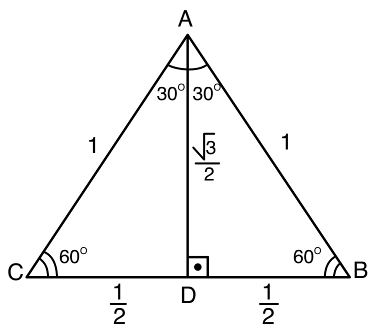


Figura 16.8: Seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30^o e 60^o.

Temos $m(BD) = m(CD) = 1/2$. Pelo Teorema de Pitágoras, $m(AD) = \sqrt{3}/2$. Daí, obtemos

$$sen 30^o = 1/2, \quad cos 30^o = \sqrt{3}/2 \quad e \quad tg 30^o = \sqrt{3}/3$$

e

$$sen 60^o = \sqrt{3}/2, \quad cos 60^o = 1/2 \quad e \quad tg 60^o = \sqrt{3}.$$

Lei dos Senos e Lei do Cosseno

Enunciaremos e provaremos nesta seção dois importantes resultados, muito úteis em Geometria. São teoremas que falam das relações entre as medidas dos ângulos e dos lados de um triângulo qualquer. Veremos por enquanto a Lei dos Senos apenas para o caso dos triângulos acutângulos e a Lei do Cosseno para um ângulo agudo. Faremos depois a generalização para triângulos quaisquer (ver exercícios da Aula 17).

Proposição 2

(Lei dos Senos) Seja ABC um triângulo acutângulo, com $m(AC) = b$, $m(AB) = c$ e $m(BC) = a$. Então tem-se

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$$

Prova:

Consideremos um triângulo acutângulo ABC como no enunciado, e seja Γ o círculo que contém os seus vértices, cujos centro e raio chamaremos de O e r, respectivamente. Como na **Figura 16.9**, tracemos os segmentos OB e OC, formando o triângulo BOC. Note que BOC é isósceles de base BC, e que $B\hat{O}C = 2B\hat{A}C$, pois $B\hat{O}C$ é central, $B\hat{A}C$ é inscrito, e ambos subentendem o mesmo arco. Tracemos também a altura OD relativa ao lado BC do triângulo BOC.

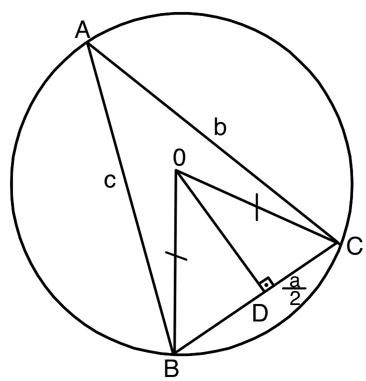


Figura 16.9: Lei dos Senos.

Como BOC é isósceles, $BD \equiv CD$, e $B\hat{O}D = B\hat{O}C/2 = B\hat{A}C$. Temos, $rsenB\hat{O}D = m(BC)/2 = a/2$, ou seja, $\dfrac{a}{sen\hat{A}} = 2r$.

Usando os triângulos BOA e AOC, da mesma maneira concluímos que $\dfrac{b}{sen\hat{B}} = 2r$ e $\dfrac{c}{sen\hat{C}} = 2r$, e, portanto, as três razões são iguais.

Q.E.D.

Proposição 3

(Lei do Cosseno) Seja ABC um triângulo onde $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são agudos, com $m(AC) = b$, $m(AB) = c$ e $m(BC) = a$. Então tem-se

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\hat{A}$$

Você sabia que...

Claudius Ptolemaios
85-165 d.C.

Um dos mais influentes astrônomos e geógrafos gregos do seu tempo, Ptolemaios propôs a teoria geocêntrica na forma que prevaleceu por 1400 anos. Ptolomaios (ou Ptolomeu) usou modelos geométricos para prever as posições do sol, da lua, dos planetas, usando combinações de movimentos circulares conhecidos como epiciclos. Ele introduziu métodos trigonométricos baseados na função corda Crd e, usando fórmulas análogas às fórmulas para o seno da soma, seno da diferença e seno da metade do ângulo, criou uma tabela para função corda em intervalos de 1/2 grau. Consulte: `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Ptolemy.html`

Prova:

Consideremos um triângulo ABC como no enunciado. Tracemos BD, a altura relativa ao lado AC, e suponhamos que sua medida seja h. Veja a **Figura 16.10**.

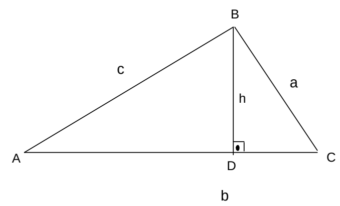


Figura 16.10: Lei do Cosseno.

Observe, com o auxílio da figura, que valem as seguintes igualdades: $h = c sen\hat{A}$, $m(AD) = c\, cos\hat{A}$ e $m(CD) = b - c\, cos\hat{A}$. Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo DBC, obtemos

$$a^2 = (b - c\, cos\hat{A})^2 + h^2 = b^2 - 2bc\, cos\hat{A} + c^2 c\, os^2\hat{A} + c^2\, sen^2\hat{A} = b^2 + c^2 - 2bc\, cos\hat{A}$$

onde a última igualdade veio do fato de que

$$c^2\, cos^2\hat{A} + c^2 sen^2\hat{A} = c^2(sen^2\hat{A} + cos^2\hat{A}) = c^2 \ ,$$

pela relação fundamental.

Q.E.D.

A tabela mais exata de Ptolemaios C., 150 d.C. Essa tabela mostra os valores da corda (dada por Hipparchos) de meio em meio grau, desde zero até 180 graus. Sua estratégia de cálculo é, também, um aperfeiçoamento da de Hipparchos: usando o hexágono e o pentágono, Ptolemaios C. obteve a corda de 60 e 72 graus. Usando a expressão da corda da diferença, obteve a corda de $72^o - 60^o = 12^o$ e, trabalhando como Hipparchos, obteve sucessivamente: $corda(6^o), corda(3^o), corda(1,5^o)$ e $corda(0,75^o)$. Consulte: `http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm26/indice.htm`

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- As definições de seno, cosseno e tangente para ângulos agudos.
- A relação fundamental da Trigonometria.
- A Lei do Cosseno para um ângulo agudo.
- A Lei dos Senos para triângulos acutângulos.

Exercícios

1. Sabendo que θ é um ângulo agudo que satisfaz $sen\theta = \dfrac{3}{5}$, calcule $cos\theta$ e $tg\theta$.

2. Sabendo que θ é um ângulo agudo tal que $tg\theta = 5$, calcule $sen\theta$ e $cos\theta$.

3. O objetivo deste exercício é calcular as funções trigonométricas do ângulo de 18^o e de 54^o (e, portanto, dos ângulos de 72^o e de 36^o).

   a) Considere um triângulo isósceles ABC de base BC, com $\hat{A} = 36^o$, $m(AC) = m(AB) = 1$. Sejam $m(BC) = x$ e D o ponto de interseção entre a bissetriz do ângulo $\hat{C}$ e o lado AB (veja **Figura 16.11**.

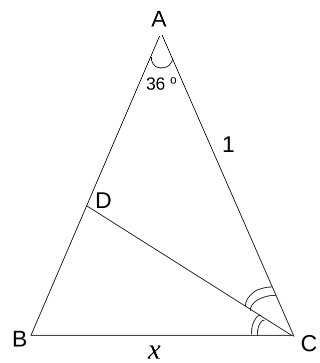


Figura 16.11: Relações trigonométricas no triângulo retângulo.

   Calcule todos os ângulos e escreva os segmentos restantes em função de x.

   b) Observe que os triângulos ADC e DCB são isósceles e que BAC e DCB são semelhantes. Use esse fato para mostrar que

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}.$$

   Use essa equação para calcular o valor de x.

   c) Trace a altura do triângulo ABC relativa à base BC e calcule $sen 18^o$. Use a relação fundamental para calcular $cos 18^o$ e, com esses valores, calcule $tg 18^o$.

   d) Trace a altura do triângulo DAC relativa ao lado AC, para determinar $sen(54^o)$. Em seguida, determine $cos(54^o)$ e $tg(54^o)$.

4. Um homem de $1,80m$ de altura de pé em uma calçada nota que sua sombra mede $1,00m$. No mesmo momento a sombra do prédio em frente a ele mede $10,00m$. Qual é a altura do prédio? Esboce uma figura da situação e justifique a solução desse problema usando as ferramentas da Trigonometria.

5. (VUNESP-SP) Na **Figura 16.12**, os pontos C, D e B são colineares e os triângulos ABD e ABC são retângulos em B.

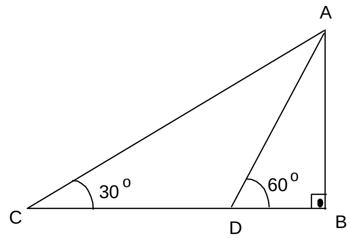


Figura 16.12: Exercício 5.

Se a medida do ângulo $A\hat{D}B$ é 60^o e a medida do ângulo $A\hat{C}B$ é 30^o, prove que $AD = DC = 2DB$.

6. (UFSC) Dois pescadores, P_1 e P_2, estão na beira de um rio de margens paralelas e conseguem ver um bote B na outra margem. Sabendo que $P_1P_2 = 63\,m$, os ângulos $B\hat{P}_1P_2 = \alpha$ e $B\hat{P}_2P_1 = \beta$ e que $tg\,\alpha = 2$ e $tg\,\beta = 4$, determine a distância, em metro, entre as margens.

7. Considere um triângulo retângulo ABC com ângulo reto $\hat{A}$. Calcule o seno de seu menor ângulo, sabendo que seus lados estão em progressão aritmética.

8. (UECE) Na **Figura 16.13**, MNPQ é um trapézio isósceles, $m(MN) = 20\,cm$, $m(QP) = 10\,cm$ e $\theta = 60^o$.

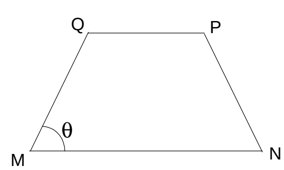


Figura 16.13: Exercício 8.

Então, a área desse trapézio, em cm^2, é:

(a) $55\sqrt{3}$ (b) $65\sqrt{3}$ (c) $75\sqrt{3}$ (d) $85\sqrt{3}$

9. Determine a medida do lado do decágono regular e do lado do pentágono regular inscritos em um círculo de raio R. **Sugestão:** Use o exercício 3.

10. (**Construção do pentágono regular e do decágono regular.**) Seja Γ um círculo de centro O e raio R e sejam AB e CD diâmetros perpendiculares. Considere o ponto médio M de AO e, na semi-reta $\overrightarrow{MB}$, marque o ponto E tal que $ME \equiv MC$.

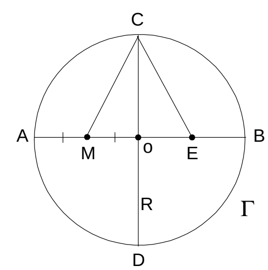


Figura 16.14: Exercício 10.

Prove que OE é lado do decágono regular inscrito e CE é lado do pentágono regular inscrito.

11. (UERJ) Um triângulo tem lados 3, 7 e 8. Um de seus ângulos é igual a:

(a) 30^o (b) 45^o (c) 60^o (d) 90^o

12. Considere um círculo Γ de centro O e raio 2 e um ponto P cuja distância ao círculo é 3. Seja r uma reta tangente a Γ em B, passando por P. Calcule o seno, o cosseno e a tangente do ângulo $B\hat{P}O$.

13. Determine o raio do círculo inscrito em um setor circular de 60^o e raio R.

14. (FUVEST,1987) Em um plano têm-se um quadrado de bordo a, uma reta r paralela a um lado do quadrado e uma reta t que forma com r um ângulo agudo θ. Projeta-se o quadrado sobre r paralelamente a t e obtém-se um segmento de comprimento $3a$. Determine $tg\,\theta$.

15. (UFMG) Na **Figura 16.15**, tem-se $m(AB) = m(AC) = 6$, $m(BC) = m(BD) = 4$ e $C\hat{B}Q = Q\hat{B}D$.

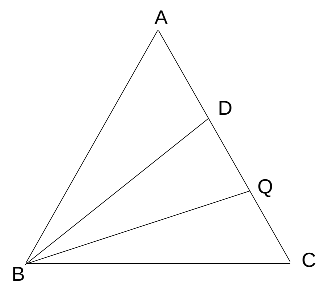


Figura 16.15: Exercício 15.

A tangente do ângulo $C\hat{B}Q$ é:

(a) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ (d) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

16. Na **Figura 16.16**, $ABCD$ é um quadrado e E é o ponto médio de AD.

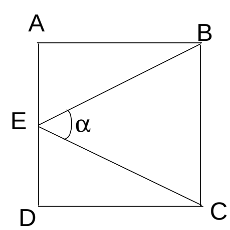


Figura 16.16: Exercício 16.

Determine $tg\alpha$.

17. (PUC-SP,1982) A diagonal de um paralelogramo divide um dos ângulos internos em dois outros, um de 60^o e outro de 45^o. A razão entre os lados menor e maior do paralelogramo é:

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ (b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ (d) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (e) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

18. (UFMG) Uma porta retangular de $2\,m$ de altura por $1\,m$ de largura gira 30^o, conforme a **Figura 16.17**.

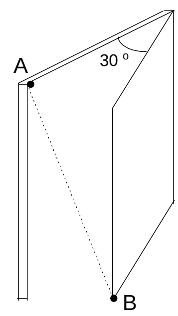


Figura 16.17: Exercício 18.

A distância entre os pontos A e B, em metro, é:

(a) $\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{4+\sqrt{3}}$ (e) $\sqrt{6-\sqrt{3}}$

19. Na **Figura 16.18**, $m(AB)$ é igual ao raio do círculo e $m(BC) = 4\,cm$.

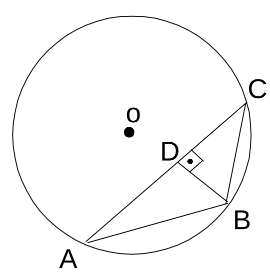


Figura 16.18: Exercício 19.

Determine $m(DC)$.

20. Na **Figura 16.19**, AD é bissetriz de $B\hat{A}C$.

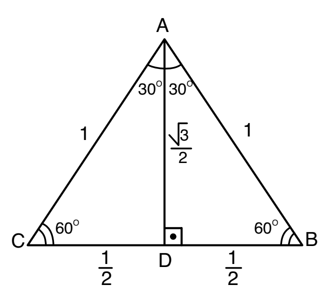


Figura 16.19: Exercício 20.

Determine $\dfrac{m(BD)}{m(DC)}$.

21. (ITA,1992) Num triângulo ABC com ângulo reto em A, temos $\hat{B} = 60^o$. As bissetrizes de $\hat{A}$ e $\hat{B}$ encontram-se em um ponto D. Se $m(BD) = 1\,cm$, então a hipotenusa mede:

    (a) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\,cm$ (b) $1+\sqrt{3}\,cm$ (c) $2+\sqrt{3}\,cm$
    (d) $1+2\sqrt{2}\,cm$ (e) N.R.A.

22. (CESGRANRIO,1989) Se $4\,cm$, $5\,cm$ e $6\,cm$ são as medidas dos lados de um triângulo, então o cosseno do seu menor ângulo vale:

    (a) $\dfrac{5}{6}$ (b) $\dfrac{4}{3}$ (c) $\dfrac{3}{4}$ (d) $\dfrac{2}{3}$ (e) $\dfrac{1}{2}$

23. (UFF,1995) O trapézio $MNPQ$ da **Figura 16.9** está inscrito em um círculo de raio 1 e MQ contém o centro O.

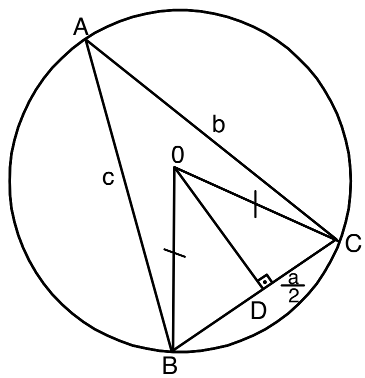


Figura 16.20: Exercício 23.

A sua área vale:

(a) $2\,sen\alpha$ (b) $sen\,2\alpha$ (c) $sen\alpha\,(1 + cos\,\alpha)$ (d) $cos\,2\alpha$
(e) $cos\,\alpha(1 + sen\,\alpha)$

Informações sobre a próxima aula

Na próxima aula definiremos as extensões das funções trigonométricas para outros tipos de ângulo, como o reto e o obtuso. As Leis dos Senos e do Cosseno poderão ser então estendidas para quaisquer triângulos. Veremos também uma outra unidade de medida de arcos e ângulos: o radiano.

Aula 17 – Funções trigonométricas

Objetivos

- Definir o radiano.
- Estender as funções trigonométricas para ângulos obtusos

Pré-requisitos

- Definições das funções trigonométricas usando o triângulo retângulo.
- Teorema de Pitágoras.

Introdução

Na Aula 15, vimos que o comprimento de um círculo de raio r é $2\pi r$, onde π é aproximadamente $3,14159265$. Intuitivamente isso significa que, se quiséssemos medir o comprimento do círculo usando como unidade de medida seu raio, obteríamos 2π como resultado da medida. Essa interpretação leva à idéia natural de medir arcos de círculo usando como unidade de medida seus raios. Por exemplo, um arco de círculo subentendido por um ângulo central raso (um semicírculo) mede π vezes seu raio, enquanto um arco subentendido por um ângulo central reto mede $\pi/2$ vezes seu raio, pois representa um quarto do total. Motivados por essas observações, vamos definir uma unidade de medida de arcos e ângulos que será bastante utilizada: o *radiano*.

O radiano

Considere um círculo de centro O e raio r. Seja $A\hat{O}B$ um ângulo central que subentende o arco $\overset{\frown}{AB}$, como mostra a **Figura 17.1**.

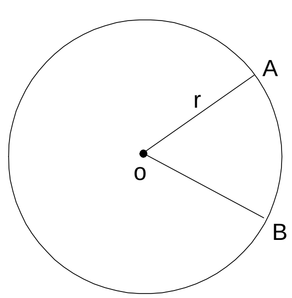


Figura 17.1: $A\hat{O}B$ é um ângulo central.

Dizemos que o ângulo $A\hat{O}B$ mede 1 radiano (indicado por $1\, rad$) quando o comprimento do arco $A\hat{O}B$ é igual ao raio, isto é, a razão entre o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ e o comprimento do círculo é 1.

Observe que ao considerarmos um outro círculo, também de centro O, e raio r' (veja **Figura 17.2**), podemos provar que a razão entre o comprimento do arco $\overset{\frown}{A'B'}$ e r' é igual à razão entre o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ e r e, portanto, igual a 1.

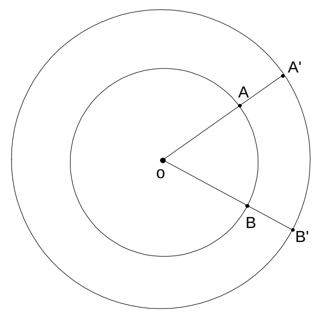


Figura 17.2: $\dfrac{m(A'B')}{r'} = \dfrac{m(AB)}{r} = 1.$

Isso mostra que a definição de radiano não depende do raio do círculo considerado.

Dizemos também que o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 1 rad.

Para transformar em graus, uma medida dada em radianos, ou vice-versa, construímos a seguinte regra de três:

$$\begin{array}{ccc} \text{Medida do arco em} & & \text{Medida do arco em} \\ rad & & graus \\ \pi & \longleftrightarrow & 180 \\ x & \longleftrightarrow & \theta \end{array}$$

Exemplos:

1) Transforme $\dfrac{\pi}{3}\, rad$ em graus

Solução:

Construímos a regra de três:

$$\begin{array}{ccc} \text{Medida do arco em} & & \text{Medida do arco em} \\ rad & & graus \\ \pi & \longleftrightarrow & 180 \\ \dfrac{\pi}{3} & \longleftrightarrow & \theta \end{array}$$

Logo, $\theta = \dfrac{180 \times \dfrac{\pi}{3}}{\pi} = 60\, graus.$

2) Transforme $45\, graus$ em radianos

Solução:

Construímos a regra de três:

Medida do arco em rad		Medida do arco em $graus$
π	$\longleftrightarrow$	180
x	$\longleftrightarrow$	45

Logo, $x = \dfrac{45 \times \pi}{180} = \dfrac{\pi}{4}\, rad.$

3) Transforme $1\, rad$ em graus

Solução:

Construímos a regra de três:

Medida do arco em rad		Medida do arco em $graus$
π	$\longleftrightarrow$	180
1	$\longleftrightarrow$	θ

Logo, $\theta = \dfrac{180}{\pi} \simeq 57^o\, graus.$

Na Bíblia, em I Reis 7:23, temos o seguinte versículo: "Fez também o mar de fundição, redondo, de dez côvados de uma borda até a outra borda, e de cinco de altura; e um fio de trinta côvados era a medida de sua circunferência."
O mesmo versículo pode ser encontrado em II Crônicas 4:2. Eles se referem a uma das especificações do templo de Salomão, construído por volta do ano 950 a.C. Podemos observar nesses versos que o valor de π foi considerado igual a 3. Esse valor está longe do valor que temos hoje em dia. Para os egípcios e mesopotâmios, o valor de π era algo próximo de $25/8 = 3{,}125$.
O primeiro cálculo teórico parece ter sido feito por Arquimedes. Ele obteve a aproximação
$223/71 < \pi < 22/7$.
`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics`

Extensões das funções trigonométricas

Como foram definidas na Aula 16, as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente são calculadas para ângulos agudos, ou seja, com medida entre 0^o e 90^o. Considerando os ângulos medidos em radianos, podemos dizer que a cada medida de ângulo entre 0 e $\pi/2$ corresponde um valor de seno, um valor de cosseno e um valor de tangente. Nesta seção, vamos estender essas funções para ângulos entre 0 e π radianos, pois, queremos aplicar a Trigonometria para resolver problemas envolvendo também ângulos obtusos.

Considere um semicírculo de centro O e diâmetro AB. A cada ponto C do semicírculo corresponde o ângulo $A\hat{O}C$, cuja medida varia entre O e $\pi\, rad$. COnsidere no mesmo semiplano que contém o semicírculo, a semi-reta $\overrightarrow{OD}$ perpendicular a AB (veja **Figura 17.3**).

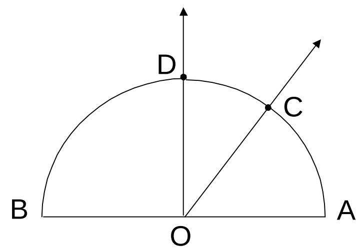


Figura 17.3: A cada ponto C corresponde o ângulo $A\hat{O}C$.

Sejam E e F os pés das perpendiculares baixadas de C às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{OD}$, respectivamente (veja **Figura 17.4**).

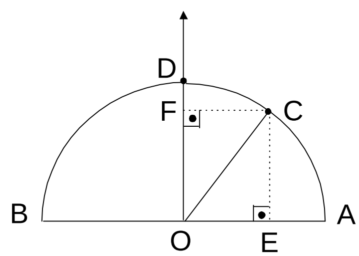


Figura 17.4: E e F são os pés das perpendiculares baixadas de C.

Quando $A\hat{O}C$ é agudo,

$$sen\,A\hat{O}C = \frac{m(CE)}{m(OC)} \quad \text{e} \quad cos\,A\hat{O}C = \frac{m(OE)}{m(OC)} \qquad (I)$$

Quando $A\hat{O}C$ é obtuso, o ponto E está entre O e B (veja **Figura 17.5**).

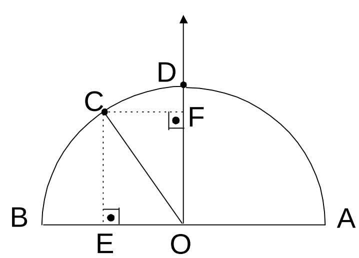


Figura 17.5: Seno e cosseno de ângulo obtuso.

Nesse caso, definimos

$$sen\,A\hat{O}C = \frac{m(CE)}{m(OC)} \quad \text{e} \quad cos\,A\hat{O}C = -\frac{m(OE)}{m(OC)} \qquad (II)$$

No caso em que a medida de $A\hat{O}C$ é zero ou $\frac{\pi}{2}\,rad(90^o)$, a fórmula (I) pode ser usada para definir $sen\,A\hat{O}C$ e $cos\,A\hat{O}C$.

Obtemos,

$$sen\,0 = \frac{m(CE)}{m(OC)} = \frac{0}{m(OA)} = 0$$

$$cos\,0 = \frac{m(OE)}{m(OC)} = \frac{m(OA)}{m(OA)} = 1$$

$$sen\left(\frac{\pi}{2}\,rad\right) = \frac{m(CE)}{m(OC)} = \frac{m(OD)}{m(OD)} = 1$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2}\,rad\right) = \frac{m(OE)}{m(OC)} = \frac{0}{m(OD)} = 0.$$

Quando a medida de $A\hat{O}C$ é $\pi\,rad(180^o)$, a fórmula (II) pode ser usada para definir $sen\,A\hat{O}C$ e $cos\,A\hat{O}C$. Obtemos,

$$sen(\pi\,rad) = \frac{m(CE)}{m(OC)} = \frac{0}{m(OB)} = 0$$

$$cos(\pi\,rad) = -\frac{m(OE)}{m(OC)} = -\frac{m(OB)}{m(OB)} = -1$$

Definimos

$$tg\,A\hat{O}C = \frac{sen\,A\hat{O}C}{cos\,A\hat{O}C}\,.$$

Note que $tg\,A\hat{O}C$ não está definida quando $A\hat{O}C$ é reto, pois, nesse caso, $cos\,A\hat{O}C = 0$.

Observe que essas definições não dependem da medida do raio do semicírculo considerado. Além disso, como dois ângulos congruentes têm a mesma medida, e o valor de cada função trigonométrica é o mesmo para os dois (verifique!) usamos a notação $sen(\,\theta\,rad)$, $cos(\,\theta\,rad)$ e $tg(\,\theta\,rad)$ quando nos referirmos ao seno, cosseno e tangete de um ângulo cuja medida é $\theta\,rad$. Por exemplo, se $A\hat{O}C$ mede $\frac{\pi}{3}\,rad\,(60^o)$, temos que $sen\left(\frac{\pi}{3}\,rad\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pois $sen\,A\hat{O}C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ como vimos na aula 16.

A relação fundamental

$$sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1$$

foi provada no caso em que θ é agudo (veja aula 16). Essa relação também é válida quando θ é obtuso (verifique!).

Seno, cosseno e tangente do ângulo suplementar

Nesta seção obteremos a relação entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo e o seno, o cosseno e a tangente de seu suplementar. Para isso, considere um ângulo agudo $A\hat{O}C$ de medida α, como na **Figura 17.6**.

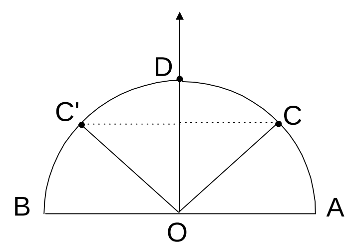


Figura 17.6: $A\hat{O}C$ é agudo e $A\hat{O}C'$ é obtuso.

Seja C' o ponto do semicírculo de modo que $\overleftrightarrow{C'C}$ seja paralela a $\overleftrightarrow{BA}$. Os ângulos $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C'$ são congruentes (verifique!). Logo, a medida de $A\hat{O}C1$ em radianos é $\pi - \alpha$. Seja F a interseção entre CC' e $\overrightarrow{OD}$ e sejam E e E' os pés das perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$ baixadas de C e C', respectivamente (veja **Figura 17.7**).

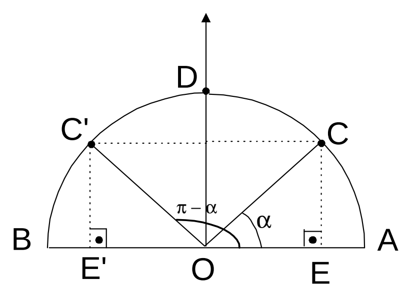


Figura 17.7: $A\hat{O}C$ é agudo e $B\hat{O}C'$ são congruentes.

Como $OCE \equiv OC'E'$, temos

$$sen(\pi - \alpha) = \frac{m(C'E')}{m(OC')} = \frac{m(CE)}{m(OC)} = sen\alpha.$$

Temos, também,

$$cos(\pi - \alpha) = -\frac{m(OE')}{m(OC')} = -\frac{m(OE)}{m(OC)} = -cos\alpha.$$

Segue que

$$tg(\pi - \alpha) = \frac{sen(\pi - \alpha)}{cos(\pi - \alpha)} = -tg\alpha.$$

Relação entre Música e Trigonometria

Se tomarmos uma corda de violão, de 60 cm de comprimento, distendida ao máximo, e a deslocarmos de sua posição inicial, um som, num determinado tom, será emitido.

O tom é a medida do grau de elevação ou abaixamento do som de um instrumento.

Suponhamos, agora, que só a metade da corda (30 cm) vibre. Um novo tom será ouvido uma oitava harmônica acima do primeiro. Quando só 2/3 da corda vibrarem (isto é, 40 cm), o tom será uma quinta harmônica acima do primeiro. (O nome quinta harmônica é devido ao fato de que a nota representativa desse tom se acha a 2 espaços e três linhas acima, na pauta musical, do tom inicial, perfazendo um total de cinco espaços-linhas. No caso da oitava acima, temos que a sua nota representativa se encontra a 8 espaços-linhas da nota original.)

Se tomarmos uma corda cujo comprimento é o dobro da primeira (isto é, 120 cm) e a fizermos vibrar, o tom emitido será uma oitava harmônica abaixo do inicial.

Embora, certamente, não tenham sido os pitagóricos os primeiros a observar que a vibração de uma corda tensionada é capaz de produzir variados sons, a eles devemos a primeira teoria sobre o relacionamento entre a Música e a Matemática.

A descoberta do fato de que é possível abaixar ou aumentar um tom inicial, aumentando ou diminuindo o comprimento da corda vibrante, é devida a Pitágoras.

A importância desses fatos, para Pitágoras, residia em que os novos tons eram relacionados com o original por meio de frações, confirmando-se, assim, a sua teoria de que tudo no Universo estaria relacionado com os números naturais.

Pitágoras elaborou sua teoria musical indicando as notas por meio dessas relações. Assim, para os pitagóricos, a fração 1/2 indicava um tom uma oitava acima do primeiro. Se o tom inicial é dó, a nota indicada por 2/3 será sol, ou seja, a quinta nota acima do dó na escala musical. Do mesmo modo, 6/5 de uma corda que produza o dó produzirá a nota lá (uma oitava abaixo).

Sabemos, atualmente, que tais razões são relações entre freqüências.

A freqüência de uma corda vibrante corresponde ao número de vibrações que ela emite por segundo, medidas em Hertz.

O tom mais baixo perceptível pelo ouvido humano é de 16 oscilações por segundo, isto é, tem uma freqüência de 16 Hz. Os mais altos variam entre 14000 e 16000 Hz.

Hoje sabemos que a freqüência de um som fundamental é inversamente proporcional ao comprimento da corda vibrante. Essa lei, chamada de lei fundamental das cordas vibrantes, foi estabelecida por Galileu Galilei e Marin Mersenne, no início do século XVII.

Vimos, então, que quando uma corda vibra emite um som cuja freqüência (tom) depende do comprimento da corda. Mas, como é possível explicar a diferença na qualidade do som existente entre a mesma nota emitida por instrumentos distintos?

No início do século XVIII, o geômetra e físico francês Joseph Sauver (1653-1716) notou que uma corda, quando vibra, emite não apenas o som fundamental, mas também toda uma série de harmônicos.

Chamam-se harmônicos de um determinado som àqueles cujas freqüências são múltiplas desse som. Por exemplo, se considerarmos como som fundamental o dó (261 Hz), seus harmônicos terão as seguintes freqüências: 522, 783, 1044 etc.

A introdução dos harmônicos tornou possível explicar a qualidade do som, denominada timbre. O timbre é devido aos harmônicos do som fundamental.

No caso de um instrumento que emite uma nota, obtém-se, geralmente, um som melodioso quando o fundamental é suficientemente intenso para destacá-la e os harmônicos, fracos.

Quando os harmônicos são suficientemente intensos, podem mascarar o efeito do som fundamental: é o que denominamos de som metálico (o de uma clarineta, por exemplo).

Podemos obter a imagem de um som usando um aparelho denominado osciloscópio de raios catódicos. Esse aparelho converte as ondas de compressão produzidas no ar pelo som em impulsos elétricos que são ampliados e transformados em pontos luminosos projetados numa tela. O conjunto desses pontos constituem a imagem da onda.

Um som fundamental puro é emitido por diapasão e corresponde a uma onda senoidal não perturbada. O som acompanhado de seus harmônicos corresponde a uma onda perturbada.

Os sons puros correspondem, graficamente, a $sen(x), sen(2x)$, $sen(3x), \ldots$. Os sons compostos (o som puro acompanhado de seus harmônicos) correspondem à soma de várias dessas funções senoidais multiplicadas por fatores de amplitude, que determinam a audibilidade dos vários componentes puros, que ocorrem quando um som composto é emitido. Assim, uma expressão do tipo

$$a_1 sen(x) + a_2 sen(2x) + a_3 sen(3x) + \ldots$$

corresponde a um som composto.

A diferença entre o som correspondente a um dó central emitido por um piano e por um órgão, por exemplo, é devida à diferença entre os coeficientes $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Considere a expressão $y = 4sen(3x) + 0{,}2sen(5x)$. Essa função corresponde a um som puro ou composto?

Consulte http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/precalculo/TRIG1.HTM

Na prática, quando um determinado som é emitido, harmônicos de alta freqüência tendem a ocorrer com pequeno fator de amplitude (portanto, a sua audibilidade é pequena) e, como já vimos, harmônicos com freqüências muito altas estão fora da faixa de audição dos seres humanos.

No entanto não há nada que, matematicamente, nos impeça de considerar um som composto representado por uma soma infinita de senos. Na verdade, mais do que fazer sentido matemático, essas somas infinitas de senos desempenham um papel importantíssimo em vários ramos da Física e da Engenharia.

De fato, elas foram usadas pela primeira vez, não no estudo das cordas vibrantes, mas para descrever, matematicamente, o fluxo de calor através de uma barra uniforme de metal. O responsável por esse trabalho pioneiro foi o matemático francês Joseph Fourier (1768-1830) e, por essa razão, séries (somas infinitas) de senos e cossenos são geralmente chamadas de séries de Fourier.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- A definição de radiano.
- As definições de seno, cosseno e tangente para ângulos entre 0 e π radianos.

Você sabia que...

Jean Joseph Baptiste Fourier
1768-1830, França.

Fourier foi o nono filho do segundo casamento de seu pai. A mãe de Joseph morreu quando ele tinha apenas nove anos e seu pai morreu no ano seguinte. Fourier esteve durante um tempo em Grenoble e foi lá que ele escreveu seu maior trabalho em Matemática sobre teoria do calor. Seu trabalho sobre esse tópico foi de 1804 até 1807, quando ele completou o trabalho "Sobre a propagação de calor em corpos sólidos".
Nesse trabalho Fourier destaca, entre outros importantes tópicos, a expansão de funções em séries de senos e cossenos, o que chamamos de Série de Fourier.

Consulte:
`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fourier.html`

Exercícios

1. Transforme em graus as medidas dos seguintes ângulos:

   a) $\frac{\pi}{5}\, rad$

   b) $\frac{3\pi}{4}\, rad$

   c) $2\, rad$

2. Transforme em radianos as medidas dos seguintes ângulos:

   a) $70\, graus$

   b) $150\, graus$

   c) $\pi\, graus$

3. Prove a lei do cosseno para um ângulo obtuso, tomando como base a **Figura 17.8**, e fazendo um procedimento análogo ao da demonstração da lei para um ângulo agudo (Aula 17). Enuncie a lei do cosseno para o caso do ângulo reto, e compare com o teorema de Pitágoras.

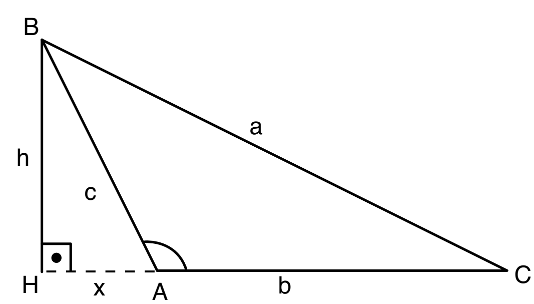


Figura 17.8: Exercício 3.

4. Prove que a área de um triângulo ABC com $m(AB) = c$, $m(BC) = a$ e $m(AC) = b$ é dada por $A_{ABC} = \frac{bc sen\hat{A}}{2}$. Sugestão: considere os casos em que $\hat{A}$ é agudo, reto e obtuso, e mostre que a fórmula vale nas três situações.

5. Considere um triângulo ABC como no exercício anterior e mostre que $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{abc}{2A_{ABC}}$. Encontre de maneira análoga fórmulas para $\frac{b}{sen\hat{B}}$ e $\frac{c}{sen\hat{C}}$ e demonstre a lei dos senos para um triângulo qualquer.

6. Para $0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$ rad, prove que

$$cos(2\,\alpha) = 1 - 2\,sen^2\,\alpha \quad \text{ e } \quad sen\,(2\alpha) = 2\,sen\alpha cos\,\alpha\ .$$

Sugestão: As duas fórmulas são facilmente verificadas para $\alpha = 0$ ou $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ rad. Para $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ rad, considere um triângulo ABC com $m(AB) = m(AC) = 1$ e $m(\hat{A}) = 2\alpha$. Trace as alturas AE e BD (veja **Figura 17.9**).

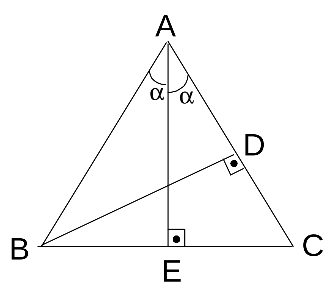


Figura 17.9: Exercício 6.

Prove que $m(BD) = sen\,2\alpha$, $m(DC) = 1 - cos\,(2\alpha)$ e $m(BC) = 2\,sen\alpha$ (você deve considerar três casos: $2\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ rad, $2\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ rad e $2\alpha > \dfrac{\pi}{2}$ rad). Use o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo BDC para obter $cos\,(2\alpha)$. Use a relação fundamental para obter $sen\,(2\alpha)$.

7. Use o exercício anteior para obter $sen\,15^o$, $cos\,15^o$, $tg\,15^o$, $sen\,22,5^o$, $cos\,22,5^o$ e $tg\,22,5^o$.

8. (UFF, 1995) O valor de $(sen\,22,5^o + cos\,22,5^o)^2$ é:

   (a) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ (b) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ (c) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ (d) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ (e) 1

9. Os lados de um triângulo medem x, $x+1$ e $x+2$ e o maior ângulo mede 120^o. Calcule o perímetro desse triângulo.

10. Sobre os lados de um triângulo ABC de lados medindo $6\,cm$, $6\sqrt{3}\,cm$ e $12\,cm$ construímos três quadrados. Calcule as medidas dos lados do triângulo determinado pelos centros desses quadrados.

11. Na **Figura 17.10**, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são tangentes ao círculo de centro O e raio r.

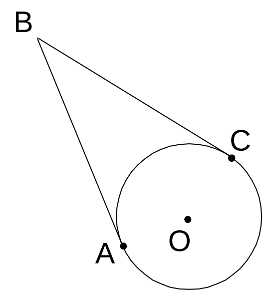


Figura 17.10: Exercício 11.

Se $m(AB) = 3r$, determine a distância de C à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

12. Na **Figura 17.11**, $ABCD$ é um paralelogramo e $m(DC) = 6\,cm$.

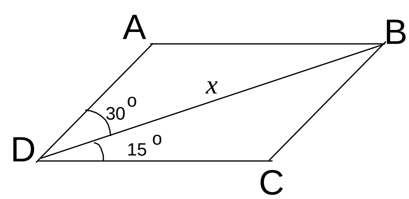


Figura 17.11: Exercício 12.

Determine x.

13. Determine a medida da mediana relativa ao maior lado de um triângulo, cujas medidas são 3, 4 e 6.

14. Calcule as medidas das medianas de um triângulo em função dos lados.

15. Determine a medida da bissetriz interna relativa ao maior lado de um triângulo cujas medidas são 3, 4 e 6.

16. Determine as medidas das bissetrizes internas de um triângulo em função de seus lados.

17. Na **Figura 17.12**, Γ é um círculo e o quadrilátero inscrito $ABCD$ tem medidas $m(AB) = m(BC) = 10\,cm$, $m(CD) = 16\,cm$ e $m(AD) = 6\,cm$.

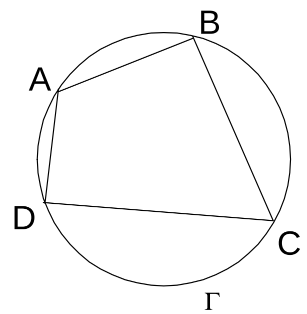


Figura 17.12: Exercício 17.

Determine $m(BD)$.

18. Determine $sen(22,5^o)$, $cos(22,5^o)$ e $tg(22,5^o)$.

19. Determine a área de um octógono regular de lado ℓ.

20. (U.F.GO, 1980) Na **Figura 17.13**, os valores de x e y, nesta ordem, são:

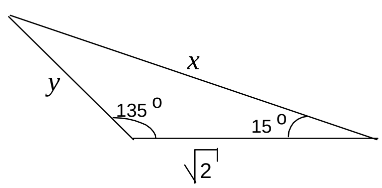


Figura 17.13: Exercício 20.

(a) 2 e $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{3}-1$ e 2 (c) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ e $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3}$

(d) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3}$ e $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (e) 3 e $\sqrt{3}-1$

21. Na **Figura 17.14**, ABC é um triângulo e D é um ponto qualquer de AB.

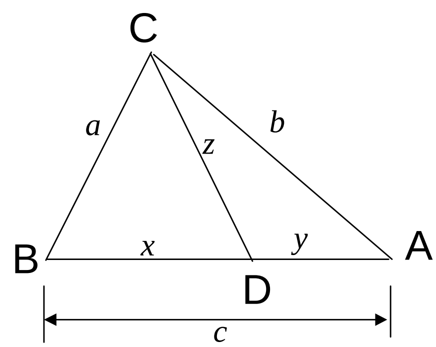


Figura 17.14: Exercício 21.

Prove a relação de Stewart: $a^2y + b^2x - z^2c = cxy$.

22. Na **Figura 17.15**, AD é bissetriz de $B\hat{A}C$.

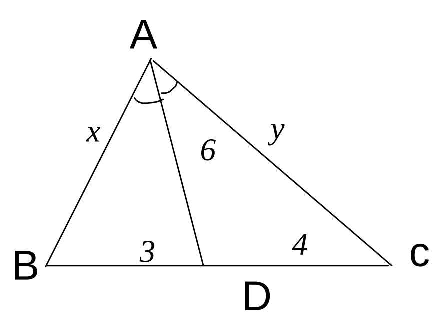


Figura 17.15: Exercício 22.

Determine x e y.

23. (U. MACK, 1982) O círculo da **Figura 17.16** tem centro O e raio 6.

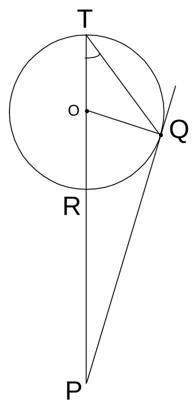


Figura 17.16: Exercício 23.

Se $m(PQ) = 8$, então $tg\,\alpha$ é igual a:

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (b) 1 (c) $\dfrac{1}{2}$

(d) $\sqrt{3}$ (e) $\dfrac{1}{4}$

Informações sobre a próxima aula

Na próxima aula começaremos um novo módulo, que tratará de Geometria Espacial.

Aula 18 – Paralelismo no espaço

Objetivos

- Identificar paralelismo entre retas.
- Identificar paralelismo entre reta e plano.

Introdução

Neste módulo iniciaremos o estudo da Geometria Espacial. O que fizemos até aqui foi estudar as propriedades das figuras que estão contidas em um plano: triângulos, círculos etc. Vimos também como se relacionam as retas, as semi-retas e os segmentos de reta quando estão contidos em um mesmo plano. A partir de agora, veremos como as retas, semi-retas e segmentos podem estar dispostos no espaço. Veremos também os sólidos geométricos, que são as "figuras" espaciais, e algumas de suas propriedades.

Compare os axiomas do quadro com os axiomas de incidência da aula 1.

No início do nosso estudo de Geometria Plana, partimos de um conjunto de afirmações elementares - os axiomas - e a partir deles provamos outras propriedades menos elementares - as proposições e os teoremas. Aqueles axiomas das aulas iniciais também serão utilizados no estudo da Geometria Espacial que faremos aqui. Além deles, utilizaremos quatro outros, que são:

- Por três pontos não colineares passa um único plano.
- Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a interseção entre eles é uma reta.
- Qualquer que seja o plano, existem infinitos pontos nesse plano e infinitos pontos fora dele.
- Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, então essa reta está contida nesse plano.

Por que às vezes temos que colocar calços em mesas de quatro pernas, e isso nunca é necessário em mesas de três pernas?

Para melhor entender as idéias expressas nesses axiomas, você pode utilizar materiais como capas de caderno ou folhas de isopor, representando planos, e lápis ou palitos de churrasco, representando retas. O desenho, que já não servia antes para tirar conclusões, agora tem uma dificuldade adicional: para desenhar objetos que não são planos, temos que recorrer a técnicas mais refinadas de desenho, para dar a idéia da posição dos elementos do desenho no espaço. A utilização de objetos como os citados poderá ser mais útil nesse primeiro momento.

Observe que um plano pode estar posicionado no espaço de várias maneiras. Por exemplo, imagine uma tábua representando um pedaço de plano. Você pode colocá-la deitada no chão, em pé, inclinada de várias maneiras, pode também arrastá-la para outros lugares... Isso dá a idéia de que há infinitos planos no espaço (como há infinitas retas em um plano). Quando destacamos algum deles é porque estamos interessados em alguma propriedade especial.

Como uma primeira conseqüência dos novos axiomas, mostraremos que por duas retas concorrentes passa um único plano. Sejam r e s retas concorrentes e seja A o seu ponto de interseção. Tome um ponto $B \neq A$ em r e um ponto $C \neq A$ em s (veja a **Figura 18.1**).

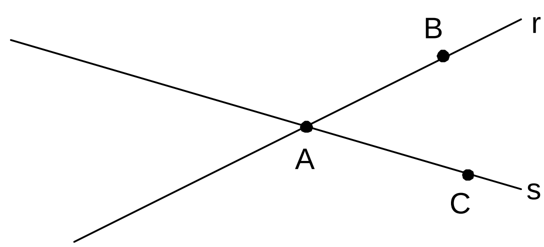


Figura 18.1: Retas concorrentes.

Os pontos A, B e C são não colineares, e, portanto, existe um único plano que os contém. Chamemos esse plano de α. Como α contém dois pontos distintos de r (A e B), então a reta r está contida no plano α. Da mesma forma, como A e C pertencem a α, tem-se $s \subset \alpha$. Se houvesse um outro plano contendo as retas r e s, ele também conteria os pontos A, B e C, mas só existe um plano contendo esses três pontos, que é α (veja a **Figura 18.2**). Provamos assim que:

Proposição 1

Por duas retas concorrentes passa um único plano.

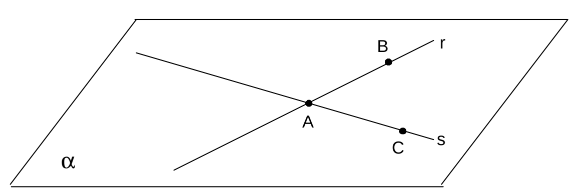


Figura 18.2: Plano contendo r e s.

Quando uma coleção de retas, de pontos, de retas e pontos, etc. está contida em um mesmo plano, dizemos que os objetos da coleção são *coplanares*. Por exemplo, duas retas concorrentes são coplanares (como acabamos de ver) e, de acordo com o primeiro axioma desta aula, três pontos são coplanares. Observe que três pontos são coplanares, mesmo que sejam colineares. Nesse caso existem infinitos planos que os contêm. Veremos, também, no exercício 3, que uma reta e um ponto são sempre coplanares.

Paralelismo entre retas no espaço

A noção de retas paralelas no espaço é um pouco mais elaborada que no plano. Se duas retas estão no mesmo plano, basta que não se intersectem para que sejam paralelas. Já no espaço, se duas retas não se encontram, elas podem estar em posições que não concordam com a idéia intuitiva que nós temos de paralelismo. Por exemplo, imagine uma mesa de estudo. Suponha que a reta r está posicionada como a beirada da frente do tampo superior da mesa, e a reta s está posicionada como a perna de trás da mesa. Então as retas r e s não se intersectam (a não ser que a mesa que você imaginou seja muito esquisita...), mas não são o que gostaríamos de chamar de retas paralelas (veremos esse caso mais à frente). Por isso temos a seguinte definição:

Definição 1
Duas retas são chamadas paralelas se elas não se intersectam e se existe um plano que as contém (veja a **Figura 18.3**).

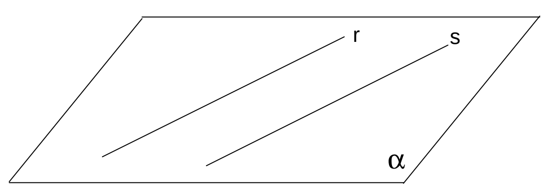


Figura 18.3: Retas paralelas.

Pode-se mostrar que, dadas duas retas paralelas, existe somente um plano que as contém (veja exercício 8 desta aula).

Considere uma reta r e um ponto $P \notin r$. Pode-se mostrar (veja exercício 3 desta aula) que existe um único plano que contém r e P. Chamemos esse plano de α. O quinto postulado de Euclides, que enunciamos no plano, garante que existe uma única reta $s \subset \alpha$ passando por P que não intersecta r (**Figura 18.4**).

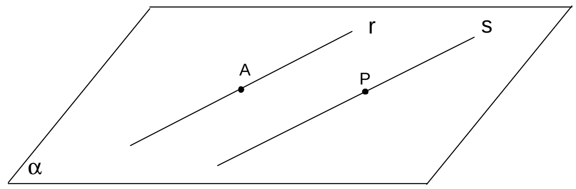


Figura 18.4: r e s são paralelas.

As retas r e s, por definição, são paralelas. Mostramos então que existe uma reta passando por P paralela a r quando esses objetos são considerados no espaço. Será que existe no espaço outra reta com essa propriedade? Sabemos que, no plano α, uma tal reta não existe, pois o quinto postulado garante a unicidade de tal reta no plano. Mostraremos que não existe, também fora do plano, outra reta paralela a r passando por P, ou seja, que o quinto postulado também vale no espaço.

Para isso, considere uma reta u paralela a r passando por P. Por definição de retas paralelas, existe um plano β que contém r e u. Logo, β contém r e P. Como só existe um plano que contém r e P, e α contém r e P, segue que $\beta = \alpha$ e, portanto, $u \subset \alpha$. Mas a única reta paralela a r passando por P dentro do plano α é a reta s e, portanto, $u = s$. Está assim provada a proposição a seguir.

Proposição 2
Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela à reta dada.

Vamos voltar mais uma vez ao exemplo da mesa. Podemos colocá-lo matematicamente da seguinte maneira: considere o plano α contendo uma reta r e um ponto P (fora de r). Também considere um ponto Q fora de α, como na **Figura 18.5**. Ora, a interseção de $\overleftrightarrow{PQ}$ com o plano α contém apenas o ponto P. Como $r \subset \alpha$e $P \notin r$, temos que as retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e r não se intersectam. Veremos no exercício 19 desta aula, que essas retas também não são paralelas, porque não existe nenhum plano que contenha as duas. Retas assim são chamadas *reversas.*

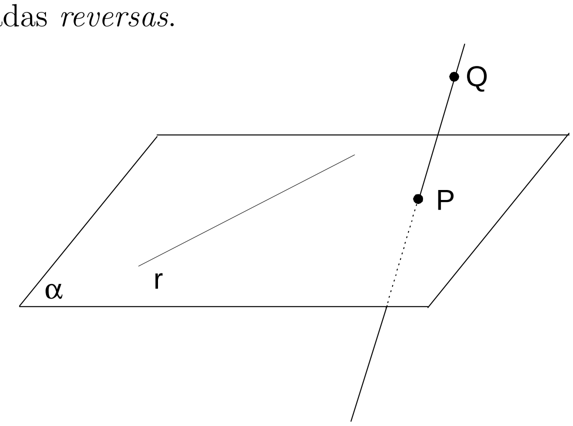


Figura 18.5: Retas reversas.

Definição 2

Duas retas são reversas se não existe nenhum plano que contenha as duas.

A próxima proposição trata de paralelismo de retas.

Proposição 3

Se duas retas distintas são paralelas a uma terceira, então elas são paralelas entre si.

Prova:

Suponha que r e s são duas retas distintas, ambas paralelas a uma reta t. Queremos mostrar que r e s não se intersectam, e que existe um plano que contém as duas (essas duas condições significam que r e s são paralelas). Vejamos primeiro porque r e s não se intersectam.

Se existisse interseção entre as retas r e s, teria que ser apenas em um ponto, porque elas são distintas. Vamos chamar tal ponto de P. Sabemos que P não pertence a t (pois $P \in r$ e r é paralela a t). Temos então duas retas distintas paralelas a t e passando por P! Veja a **Figura 18.6**. Como mostramos anteriormente, isso é absurdo: por um ponto fora de t passa apenas uma paralela a t.

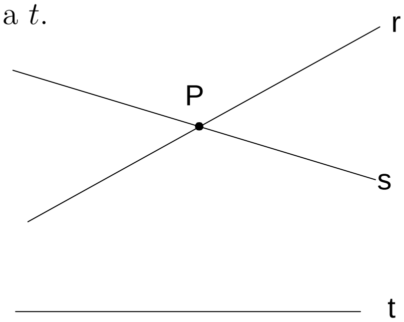


Figura 18.6: Prova da proposição 3.

Falta apenas mostrar que r e s são coplanares, ou seja, que existe um plano contendo as duas. Seja α o plano que contém as paralelas r e t, e β o plano que contém as paralelas s e t. Seja B um ponto da reta s. Existe um único plano, que chamaremos γ, que contém a reta r e o ponto B. Mostraremos que γ contém toda a reta s. Veja a **Figura 18.7**.

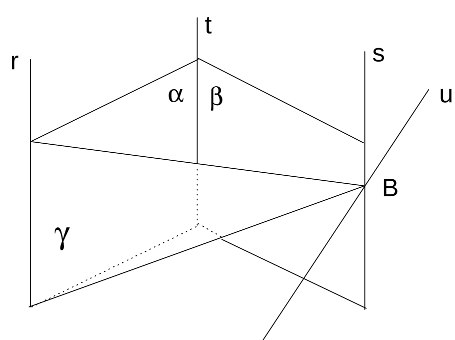


Figura 18.7: Prova da proposição 3.

Note que os planos β e γ são distintos e têm o ponto B em comum. Dois planos assim se intersectam em uma reta. Gostaríamos de afirmar que essa reta é s, mas ainda não sabemos. Por enquanto vamos chamá-la de u: a reta u está nos planos β e γ e contém o ponto B.

Os planos α e γ são distintos e têm a reta r em comum (ou seja, r contém os únicos pontos de interseção entre α e γ). Como r e t são paralelas, e t está contida em α, temos $t \cap \gamma = \emptyset$. Como $u \subset \gamma$, temos $u \cap t \subset \gamma \cap t = \emptyset$. Como u e t estão em β e não se encontram, u e t são retas paralelas.

Observe onde chegamos: a reta u é paralela à reta t e passa pelo ponto B. Mas s também passa por B e é paralela a t. Pela unicidade da paralela, obtemos $u = s$ (observe a **Figura 18.8**). Temos então que o plano γ contém as retas r e s (pois contém $u = s$). Como já provamos que r não intersecta s, concluimos que r e s são paralelas.

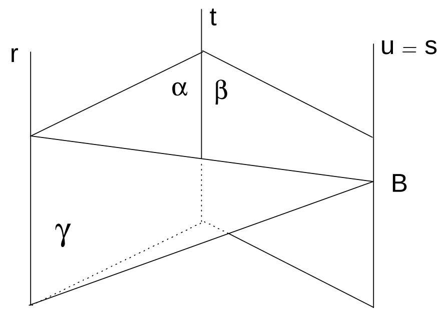


Figura 18.8: Prova da proposição 3.

Q.E.D.

Paralelismo entre reta e plano

Dizemos que uma reta e um plano são paralelos se eles não têm nenhum ponto em comum. Nesse caso dizemos também que a reta é paralela ao plano, e que o plano é paralelo à reta.

Uma calçada e um fio elétrico bem esticado estendido entre dois postes de mesma altura dão uma idéia de paralelismo entre reta e plano.

Suponhamos que uma reta r seja paralela a um plano α, e tomemos um ponto A qualquer de α. Vamos chamar de β o plano que contém r e A. Seja $s = \beta \cap \alpha$, como na **Figura 18.9**.

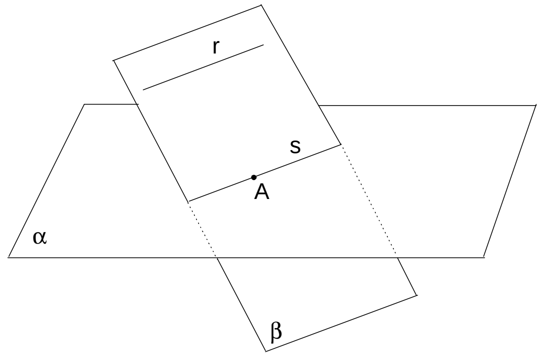


Figura 18.9: Retas paralelas r e s.

As retas r e s não se intersectam, pois $r \cap \alpha = \emptyset$. Como r e s estão contidas em β, segue que r e s são paralelas. Assim, provamos a proposição a seguir.

Proposição 4

Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a uma reta contida nesse plano.

Observe que obtivemos a reta s da **Figura 18.9** a partir de um ponto $A \in \alpha$. Variando o ponto A, obteremos outras retas paralelas a r, contidas no plano α. Na verdade, existem infinitas dessas retas. Veja a **Figura 18.10**.

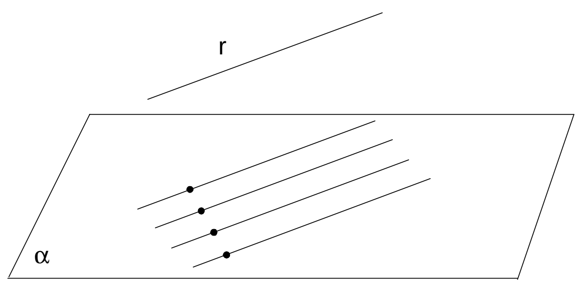


Figura 18.10: Prova da proposição 5.

O seguinte resultado é bastante utilizado para verificar se uma reta é paralela a um determinado plano:

Proposição 5

Se uma reta não está contida em um plano e é paralela a uma reta desse plano, então ela é paralela ao plano.

Prova:

Seja r uma reta não contida em um plano α, e suponha que exista uma reta $s \subset \alpha$ paralela a r, como no enunciado da proposição. Queremos mostrar que r é paralela a α, ou seja, que $r \cap \alpha = \emptyset$.

Seja β o plano que contém as paralelas r e s. Como r não está em α, os planos α e β são distintos, e, conseqüentemente, $\alpha \cap \beta = s$ (veja a **Figura 18.11**).

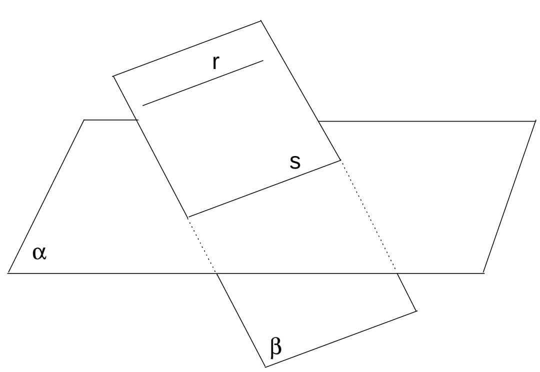


Figura 18.11: Planos α e β .

Se r cortasse α em um ponto A, esse ponto teria que estar na interseção de β e α, pois r está em β. Daí teríamos $A \in s$, o que não pode acontecer, pois r e s são paralelas. Logo r e α não se intersectam. Q.E.D.

Dizemos que dois planos são secantes quando eles se intersectam em uma reta. A prova da proposição a seguir será deixada como exercício.

Proposição 6

Se uma reta r é paralela a dois planos secantes α e β, então r é paralela à reta de interseção entre α e β (veja a **Figura 18.12**).

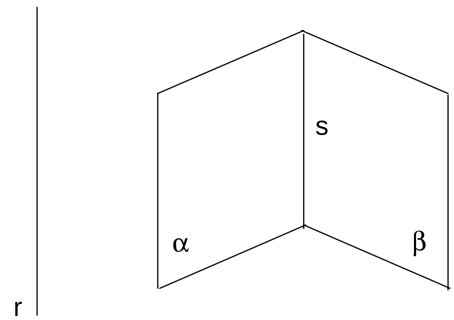


Figura 18.12: α e β paralelos a r.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- O significado de paralelismo entre retas no espaço.
- O que são retas reversas.
- O significado de paralelismo entre reta e plano.
- Alguns resultados relacionando o paralelismo entre retas com o paralelismo entre reta e plano.

Exercícios

1. Considere três pontos A, B e C, distintos dois a dois. Qual é o maior número de retas que eles podem determinar?

2. Considere quatro pontos A, B, C e D, distintos dois a dois. Qual é o maior número de retas que eles podem determinar?

3. Prove que, dados uma reta r e um ponto $P \notin r$,

   a) existe um único plano contendo r e P.

   b) todas as retas que passam por P e cortam r estão em um mesmo plano.

4. Se três retas são duas a duas concorrentes e não passam pelo mesmo ponto, prove que elas são coplanares.

5. Construa quatro pontos não coplanares.

6. Dada uma reta r, mostre que existem infinitos planos contendo r.

7. Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa:

   a) Por três pontos distintos passa um único plano;

   b) Se três retas passam pelo mesmo ponto, então essas retas são coplanares;

   c) Por dois pontos distintos passam infinitos planos;

   d) Quatro pontos não coplanares determinam quatro planos.

8. Prove que existe um único plano contendo duas retas paralelas.

9. Construa três retas, duas a duas reversas.

10. Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa:

    a) três retas, duas a duas paralelas, determinam três planos;

    b) se uma reta corta uma de duas retas paralelas, então corta também a outra;

    c) se r e s são reversas com t, então r e s são reversas entre si;

    d) se uma reta é reversa com uma de duas retas paralelas, então é reversa também com a outra.

11. Sejam r e s retas reversas e P um ponto que não pertence a r nem a s. Prove que existe no máximo uma reta que passa por P e corta r e s. Pode-se garantir que sempre existe uma? Justifique.

12. Considere duas retas reversas r e s e pontos $A \in r$ e $B \in s$. Seja α o plano que contém r e B, e seja β o plano que contém s e A. Determine $\alpha \cap \beta$.

13. Dada uma reta r, mostre como obter um plano α paralelo a r.

14. Sejam r e s retas reversas. Prove que existe um único plano contendo r e paralelo a s.

15. A **Figura 18.13** mostra um quadrilátero $ABCD$ em que os vértices A , B, C e D são não coplanares. Chamamos um tal quadrilátero de reverso. Prove que o quadrilátero determinado pelos pontos médios dos lados de $ABCD$ é um paralelogramo.

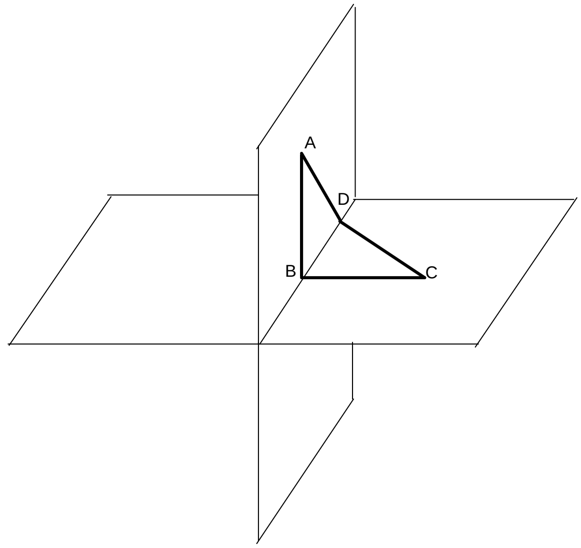


Figura 18.13: Exercício 15 .

16. Sejam r e s retas reversas e P um ponto que não pertence a r nem a s. Prove que existe no máximo um plano contendo P e paralelo às retas r e s. Pode-se garantir que sempre existe um? Justifique.

17. Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa:

    a) Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a qualquer reta do plano;

    b) Se uma reta corta um plano, corta qualquer reta do plano;

    c) Se duas retas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si;

    d) Por um ponto fora de um plano passa uma única reta paralela ao plano;

    e) Por um ponto fora de uma reta passam infinitos planos paralelos à reta;

    f) Dados um ponto P e retas reversas r e s, sempre existe uma reta que passa por P e corta r e s.

18. O objetivo deste exercício é provar a proposição 6: "Se uma reta r é paralela a dois planos secantes α e β, então r é paralela à reta de interseção entre α e β". Isso será feito da seguinte forma: faremos uma série de afirmações, e caberá a você justificá-las. Seja $s = \alpha \cap \beta$ e tome um ponto $A \in s$. Seja γ o plano contendo r e o ponto A.

    - A interseção entre γ e α é uma reta, que chamaremos t_1;
    - A interseção entre γ e β é uma reta, que chamaremos t_2;
    - Temos $r // t_1$ e $r // t_2$;
    - $t_1 = t_2 = \alpha \cap \beta$;
    - $r // (\alpha \cap \beta)$.

19. Suponha que uma reta r esteja contida em um plano α. Se uma reta s corta α em um ponto $P \notin r$, prove que não existe um plano que contém r e s.

Aula 19 – Paralelismo entre planos

Objetivo

- Identificar paralelismo entre planos.

Introdução

Na aula anterior vimos os conceitos de paralelismo entre retas e paralelismo entre reta e plano no espaço. Nesta aula veremos o conceito de paralelismo entre planos.

Definição 1
Dois planos são chamados paralelos se eles não se intersectam.

Em geral, o forro do teto e o piso de um quarto dão uma boa idéia do paralelismo entre planos (mas não em algumas casas que têm o forro "inclinado"). Duas paredes opostas de um quarto também costumam dar uma idéia de planos paralelos (a não ser quando são "tortas" ou "convergentes" como alguns chamam). Podemos imaginar o prolongamento dessas paredes infinitamente, em todas as direções, para nos convencer de que elas não devem se encontrar em nenhum ponto.

A seguinte proposição fornece um critério para o paralelismo entre planos:

Proposição 1
Se um plano é paralelo a duas retas concorrentes de outro plano, então esses planos são paralelos.

Prova:

Suponha que o plano α seja paralelo às retas concorrentes r e s contidas no plano β. Queremos provar que α e β são paralelos. Vamos provar isso por contradição.

Suponha que α e β não sejam paralelos. Como α e β são distintos (por quê?), a interseção entre α e β é uma reta, que chamaremos t (veja a **Figura 19.1**). Como r e s são paralelas a α, e $t \subset \alpha$, temos que $r \cap t = \emptyset$ e $s \cap t = \emptyset$. Como r, s e t estão em β, segue que r e s são paralelas a t.

Como r e s têm um ponto em comum (pois são concorrentes), há duas retas paralelas a t passando por um mesmo ponto, o que é um absurdo. Portanto α e β são paralelos.

Q.E.D.

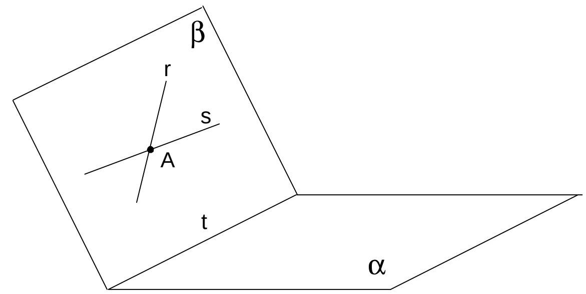


Figura 19.1: Prova da proposição 7.

Observe que a proposição que acabamos de provar não seria verdadeira sem a palavra "concorrentes" em seu enunciado. Um plano pode ser paralelo a duas retas não concorrentes de outro plano e não ser paralelo a esse plano. Veja um exemplo na **Figura 19.2**.

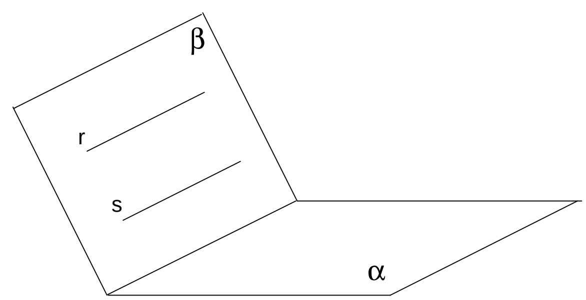


Figura 19.2: r e s paralelas a α.

Usaremos o símbolo // para indicar o paralelismo entre retas, entre reta e plano e entre planos no espaço. Por exemplo, para indicar que as retas r e s são paralelas, a reta r é paralela ao plano α e os planos α e β são paralelos, escreveremos simplesmente $r//s$, $r//\alpha$ e $\alpha//\beta$.

O quinto postulado de Euclides afirma que, por um ponto fora de uma reta, passa uma única reta paralela à reta dada. Vamos ver agora uma versão para planos desse enunciado, que é o conteúdo da proposição a seguir.

Proposição 2

Por um ponto fora de um plano passa um único plano paralelo ao plano dado.

Prova:

Primeiro vamos mostrar que existe um tal plano, e depois mostraremos que é o único.

Considere um plano α e um ponto P fora dele. Tome duas retas concorrentes r e s em α. Já sabemos que existe uma única reta r' paralela a r passando por P e uma única reta s' paralela a s passando por P. As retas r' e s' são concorrentes no ponto P. Seja β o plano que contém r' e s' (veja a **Figura 19.3**).

A proposição 8 pode ser vista como uma "versão para planos" do quinto postulado de Euclides, porém não é necessário colocá-la como axioma, pois ela pode ser provada usando os resultados anteriores.

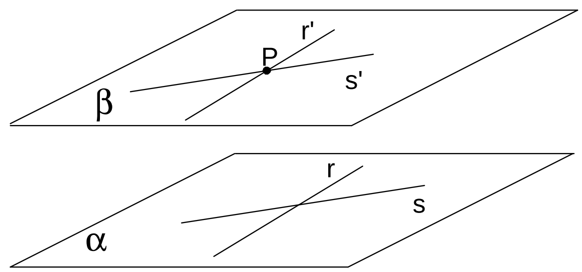


Figura 19.3: Prova da proposição 8.

A reta r' é paralela a $r \subset \alpha$, logo $r'//\alpha$. Do mesmo modo, $s'//\alpha$. Pela última proposição que provamos, podemos concluir que $\alpha//\beta$.

Resta agora provar que não existem outros planos paralelos a α passando por P. Vamos fazer a prova disso por contradição. Suponhamos que exista outro plano β' paralelo a α, passando por P. Como β e β' são distintos e têm o ponto P em comum, a interseção entre os dois é uma reta, que chamaremos de t.

Considere no plano α uma reta c que não seja paralela a t, e seja γ o único plano contendo c e P, como na **Figura 19.4**.

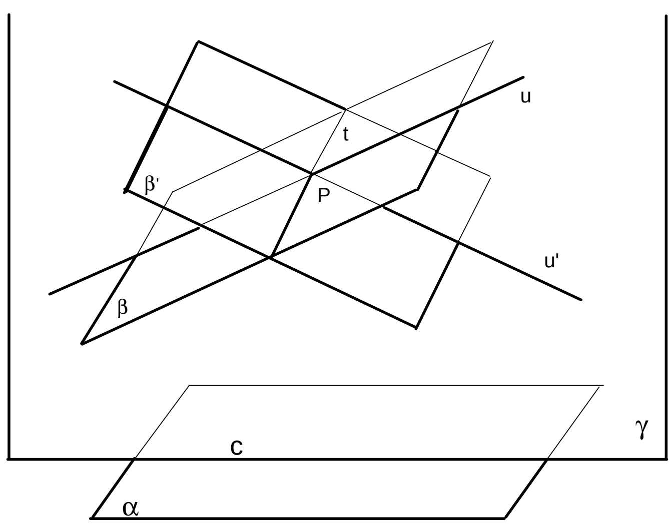


Figura 19.4: Prova da unicidade do plano paralelo.

Sejam $u = \gamma \cap \beta$ e $u' = \gamma \cap \beta'$. Temos que as retas u e u' não intersectam o plano α, pois estão contidas em planos paralelos a α. Logo u e u' também não intersectam c, porque $c \subset \alpha$. Como u e c estão no plano γ e não se intersectam, temos $u//c$. Do mesmo modo, $u'//c$, e, como u e u' passam por P, temos duas retas distintas paralelas a c passando pelo ponto P, o que é um absurdo. Então não podem existir dois planos paralelos a α passando por P.

Q.E.D.

Como conseqüência da proposição anterior, vamos provar o fato intuitivo de que, se uma reta corta um de dois planos paralelos, então também corta o outro. De fato, suponhamos que α e β são dois planos paralelos, e a reta r corta α no ponto A. Vamos escolher uma outra reta, s, em α, passando por A. Seja γ o plano que contém r e s, como na **Figura 19.5**.

Se uma reta corta uma de duas retas paralelas no espaço, podemos afirmar que também corta a outra?

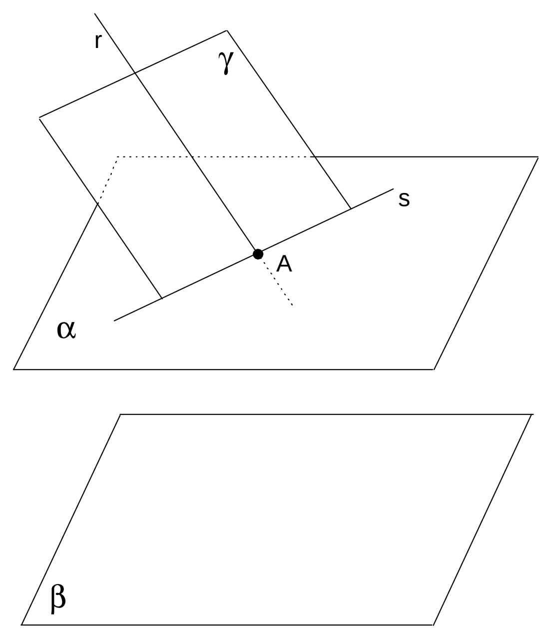


Figura 19.5: $\alpha//\beta$, r corta α.

A reta s é paralela a β, pois está em α. Se a reta r não cortasse β, seria paralela a β, e o plano γ, que contém r e s, pela primeira proposição desta aula, seria também paralelo a β. Teríamos então dois planos, α e γ, paralelos a β, passando pelo ponto A. Isso não é possível. Logo r corta β. Acabamos de provar a seguinte proposição:

Proposição 3
Se uma reta corta um de dois planos paralelos, então também corta o outro.

A proposição a seguir também é conseqüência dos resultados anteriores, e sua prova será deixada como exercício.

Proposição 4
Se um plano corta uma de duas retas paralelas, então também corta a outra.

Nosso objetivo agora é mostrar que duas retas reversas estão contidas em planos paralelos.

Proposição 5
Se r e s são retas reversas, existem planos paralelos α e β tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$.

Prova:

Sejam r e s retas reversas e escolha quaisquer pontos $A \in r$ e $B \in s$. Seja r' a reta que passa por A e é paralela a s, e seja s' a reta que passa por B e é paralela a r. Chame de α o plano contendo r e r', e de β o plano contendo s e s' (**Figura 19.6**).

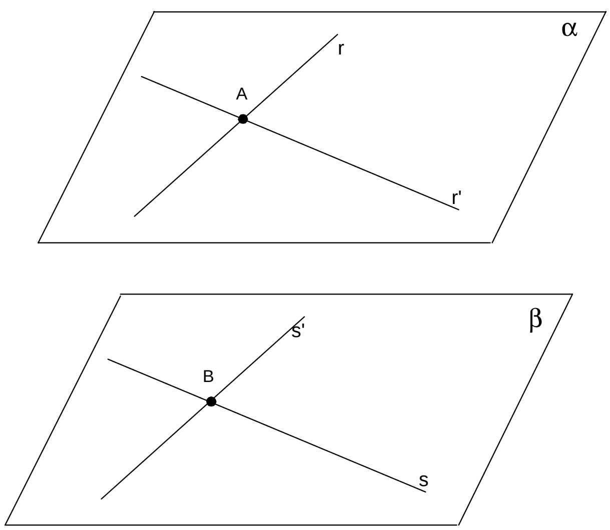


Figura 19.6: Planos contendo as retas reversas r e s.

Como r é paralela à reta s' do plano β e r não está contida em β, pois r e s são reversas, tem-se $r//\beta$. Em particular, tem-se que $A \notin \beta$ e que r' não está contida em β. Como r' é paralela à reta s do plano β, tem-se $r'//\beta$. Assim, β é paralelo às retas concorrentes r e r', contidas em α, de onde se conclui que α e β são paralelos.

Q.E.D.

Considere agora dois planos paralelos α e β, e uma reta r que os corta. Tome dois pontos quaisquer A e B em α, e trace por eles retas paralelas a r. Chame de A' e B' os pontos em que essas retas cortam β, e trace os segmentos AB e $A'B'$, como na **Figura 19.7**.

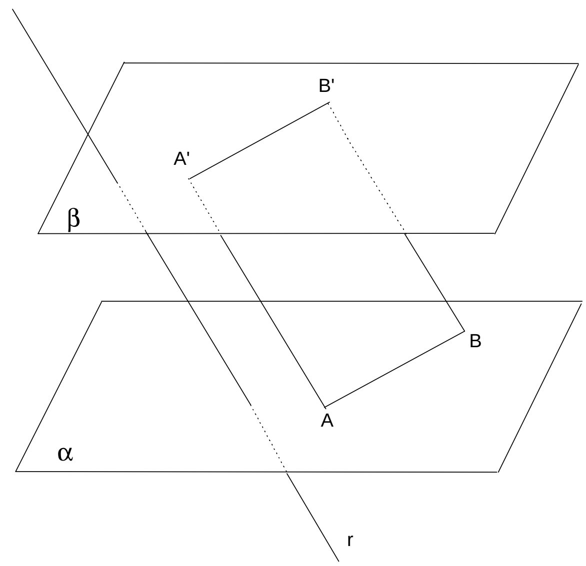


Figura 19.7: Planos paralelos cortados por uma reta.

Como $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$ são paralelos por construção, o quadrilátero $ABB'A'$ é plano. Como $\alpha \cap \beta = \emptyset$, tem-se que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$ são paralelas (estão contidas no plano do quadrilátero e não se intersectam). Temos então que os lados opostos do quadrilátero $ABB'A'$ são paralelos, ou seja, $ABB'A'$ é um paralelogramo. Em conseqüência disso, seus lados opostos são congruentes, o que nos dá $AA' \equiv BB'$. Está provada então a seguinte proposição:

Proposição 6

Os segmentos de retas paralelas localizados entre planos paralelos são congruentes.

Note que provamos também que $A'B' \equiv AB$, ou seja, a distância entre dois pontos de α é igual à distância entre os pontos correspondentes em β. Essa propriedade é muito importante e pode ser utilizada para mostrar que uma figura contida em α é congruente à figura correspondente de β. Em termos mais precisos, temos as seguintes proposições:

Proposição 7

Sejam α e β planos paralelos e r uma reta que os corta. Seja $P = A_1A_2\dots A_n$ um polígono convexo contido em α, e sejam $A_1', A_2', \dots, A_n'$ os pontos em que as retas paralelas a r passando, respectivamente, pelos pontos A_1, A_2, ..., A_n cortam β. Então $P' = A_1'A_2'\dots A_n'$ é congruente a $P = A_1A_2\dots A_n$.

A **Figura 19.8** ilustra um caso em que P é um pentágono.

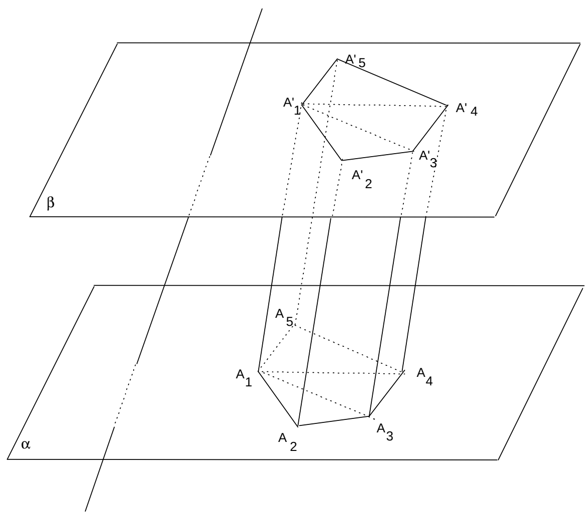


Figura 19.8: Prova da proposição 21.

Prova:

Para facilitar o entendimento, faremos a prova para o caso particular em que P é um pentágono (ilustrado na **Figura 19.8**). O caso geral é análogo. Trace as diagonais A_1A_3, A_1A_4, $A_1'A_3'$ e $A_1'A_4'$, dividindo cada pentágono em triângulos. Como a distância entre dois pontos de α é igual à distância entre os pontos correspondentes em β, temos que $A_1A_2 \equiv A_1'A_2'$, $A_2A_3 \equiv A_2'A_3'$ e $A_1A_3 \equiv A_1'A_3'$. Segue que os triângulos $A_1A_2A_3$ e $A_1'A_2'A_3'$ são congruentes (caso L.L.L.). Da mesma forma, prova-se que $A_1A_3A_4 \equiv A_1'A_3'A_4'$ e $A_1A_4A_5 \equiv A_1'A_4'A_5'$. Conseqüentemente, os lados e ângulos internos de P são congruentes aos lados e ângulos internos correspondentes de P'. Logo, P e P' são congruentes.

Q.E.D.

Deixaremos como exercício a prova da seguinte proposição:

Proposição 8

Sejam α e β planos paralelos e r uma reta que os corta. Seja Γ um círculo contido em α. Por cada ponto $A \in \Gamma$ passe uma reta paralela a r, e seja A' o ponto em que essa reta corta β. Chamemos de Γ' o conjunto de todos os pontos determinados dessa forma. Tem-se que Γ' é um círculo de mesmo raio que Γ (veja a **Figura 19.9**).

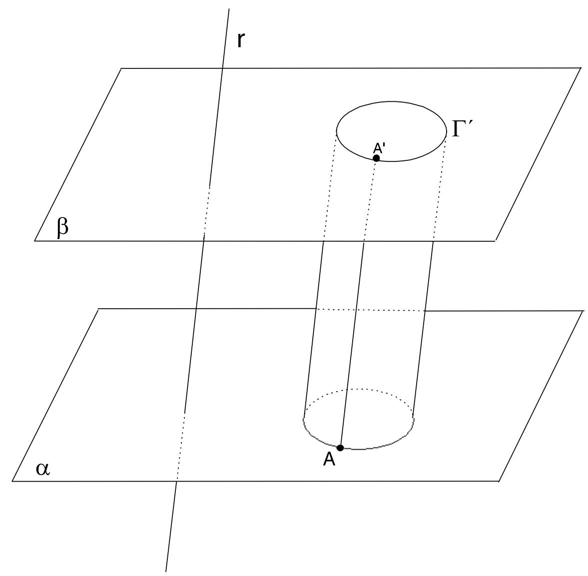


Figura 19.9: Γ' é a figura de β correspondente a Γ.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- Critérios para identificar se dois planos são paralelos.
- Resultados envolvendo paralelismo entre planos.

Exercícios

1. Prove que se dois planos são paralelos então todo plano que corta um deles corta também o outro.
2. Sejam α e β planos paralelos e r uma reta paralela a α. Prove que $r \subset \beta$ ou $r // \beta$.
3. **(Transitividade do paralelismo de planos)** Prove que se dois planos distintos são paralelos a um terceiro então eles são paralelos entre si.

4. Seja r uma reta que corta um plano α e seja P um ponto que não pertence a α nem a r. Quantas retas paralelas ao plano α passam por P e intersectam r? Justifique sua resposta.

5. Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa.

   - Se dois planos são paralelos, existe uma reta de um deles que é paralela a qualquer reta do outro.
   - Se dois planos são paralelos, existe uma reta de um deles que não é paralela a nenhuma reta do outro.
   - Se r e s são reversas e P é um ponto que não pertence a r nem a s, então existe um único plano que passa por P e é paralelo a r e a s.
   - Se uma reta é paralela a dois planos distintos, então esses planos são paralelos.
   - Se duas retas de um plano são, respectivamente, paralelas a duas retas concorrentes de outro plano, então esses planos são paralelos.

6. Sejam α_1, α_2 e α_3 três planos paralelos e r e s retas que os cortam. Chame de R_1, R_2 e R_3 os pontos em que r corta α_1, α_2 e α_3, respectivamente, e de S_1, S_2 e S_3 os pontos em que s corta α_1, α_2 e α_3, respectivamente. Prove que

$$\frac{m(R_1R_2)}{m(S_1S_2)} = \frac{m(R_1R_3)}{m(S_1S_3)} = \frac{m(R_2R_3)}{m(S_2S_3)}$$

7. Sejam r e s retas reversas. Prove que o conjunto dos pontos médios de todos os segmentos que têm um extremo em r e o outro em s é um plano.

8. Prove a proposição 4: " Se um plano corta uma de duas retas paralelas então corta também a outra."

9. Prove a proposição 8: "Sejam α e β planos paralelos e r uma reta que os corta. Seja Γ um círculo contido em α. Por cada ponto $A \in \Gamma$ passe uma reta paralela a r, e seja A' o ponto em que essa reta corta β. Chamemos de Γ' o conjunto de todos os pontos determinados dessa forma. Tem-se que Γ' é um círculo de mesmo raio que Γ."

Aula 20 – Ângulos no espaço - parte I

Objetivos

- Entender o significado de ângulo entre duas retas no espaço.
- Identificar quando duas retas são perpendiculares no espaço.
- Identificar quando uma reta é perpendicular a um plano.

Introdução

Nesta aula veremos o conceito de ângulo entre duas retas, para retas no espaço (concorrentes, paralelas ou reversas). Veremos também o conceito de perpendicularismo entre reta e plano. Na próxima aula, continuaremos nossa abordagem do conceito de ângulos no espaço estudando o ângulo entre planos, o perpendicularismo entre planos e o ângulo entre reta e plano. Dedicaremos duas aulas a esse assunto porque a idéia de ângulo entre objetos no espaço é um pouco mais elaborada que no plano.

Ângulo e perpendicularismo entre retas

Como duas retas concorrentes estão sempre num mesmo plano, definimos o *ângulo* entre as retas concorrentes r e s como a medida do menor ângulo entre os quatro determinados por r e s. Se todos os ângulos determinados por r e s forem congruentes, dizemos que r e s são perpendiculares, e que o ângulo entre elas é 90^o. Veja as duas situações na **Figura 20.1**.

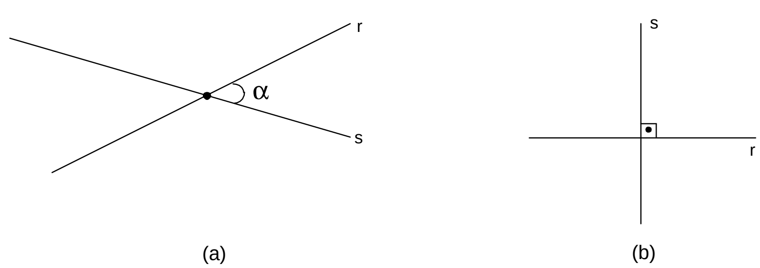


Figura 20.1: (a) α é o ângulo entre as retas concorrentes. (b) Retas perpendiculares.

Caso r e s sejam paralelas, dizemos que o ângulo entre elas é de 0^o.

Para definir o ângulo entre retas reversas, precisamos recorrer a uma pequena construção.

Sejam r e s retas reversas, e P um ponto qualquer. Por P trace as retas r' e s' paralelas a r e s, respectivamente. O ângulo entre r e s é definido como o ângulo entre as retas concorrentes r' e s' (veja a **Figura 20.2**).

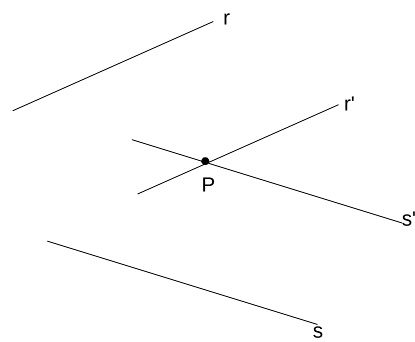


Figura 20.2: Ângulo entre retas.

Prova-se (veja exercício 12 desta aula) que o ângulo encontrado é sempre o mesmo, não dependendo do ponto P escolhido na construção. Poderíamos inclusive escolher P em r (ou em s), tomando nesse caso $r' = r$ (respectivamente $s' = s$).

Dizemos que duas retas (concorrentes ou reversas) são perpendiculares se o ângulo entre elas for 90^o.

Proposição 1

Se r é perpendicular a s, e s é paralela a t, então r é perpendicular a t.

Prova:

Tome um ponto qualquer $A \in t$ e, por ele, trace a reta r' paralela a r (**Figura 20.3**).

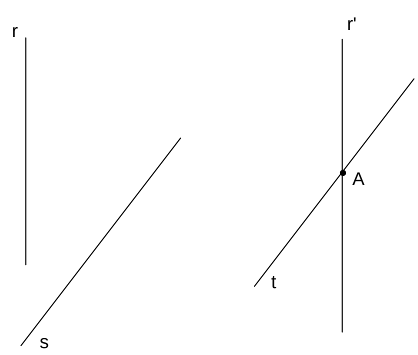


Figura 20.3: r' paralela a r.

Como r e s são perpendiculares, segue da definição de ângulo entre retas que r' é perpendicular a t. Novamente pela definição de ângulo entre retas, tem-se que o ângulo entre r e t é igual ao ângulo entre r' e t. Logo, r é perpendicular a t. Q.E.D.

Perpendicularismo entre reta e plano

Dizemos que uma reta é *perpendicular a um plano se ela for perpendicular a todas as retas contidas nesse plano. Caso contrário, dizemos que ela é* oblíqua ao plano. Na **Figura 20.4**, r é perpendicular a α e s é oblíqua a α. Usaremos o símbolo $\perp$ para indicar o perpendicularismo entre retas, entre reta e plano e, mais à frente, entre planos. Por exemplo, na **Figura 20.4**, temos $r \perp \alpha$.

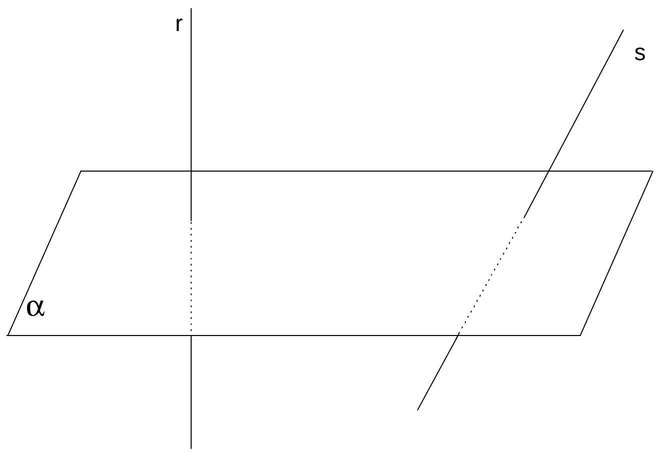


Figura 20.4: Reta perpendicular e reta oblíqua a α.

O seguinte resultado é bastante usado para se provar que uma reta é perpendicular a um plano.

Proposição 2
Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

Prova:

Suponha que uma reta r seja perpendicular a duas retas concorrentes s e t contidas em um plano α. Queremos provar que $r \perp \alpha$, ou seja, que r é perpendicular a qualquer reta de α. Seja A o ponto de encontro entre s e t. Temos dois casos a considerar: quando r contém o ponto A, e quando r não contém o ponto A.

1^o *caso* - A reta r contém o ponto A.

Nesse caso, considere dois pontos B e C sobre r, em lados opostos de A, tais que $AB \equiv AC$. Tome um ponto $D \neq A$ em s e pontos E e F em t, localizados em lados opostos de A (**Figura 20.5**).

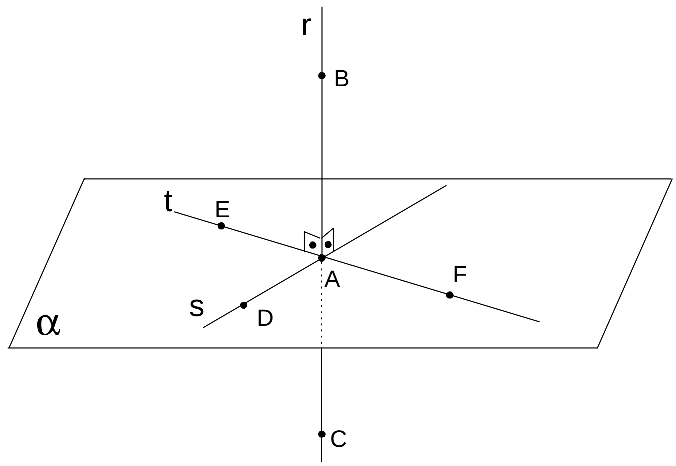


Figura 20.5: Prova de que r é perpendicular a α.

Seja u uma reta de α passando por A, distinta de s e t. Temos que u intersecta ED ou u intersecta DF. Consideraremos essa última opção, sendo que no outro caso a prova é análoga. Devemos agora mostrar que a reta r é perpendicular à reta u.

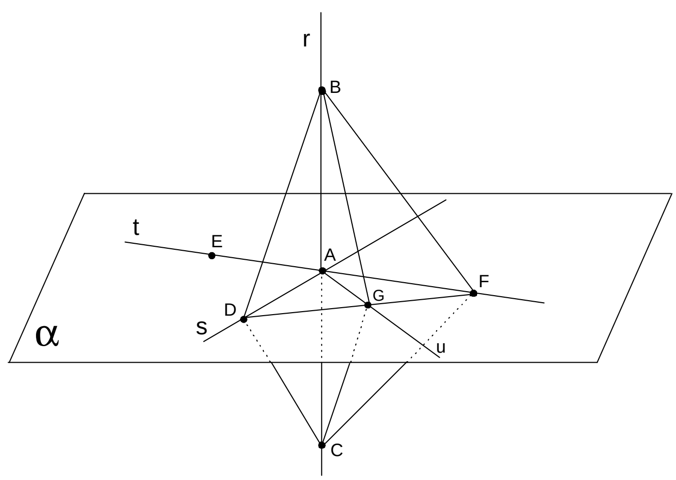


Figura 20.6: Construção do triângulo BGC.

Trace os segmentos BD, BF, CD, CF e DF. Seja $G = u \cap DF$. Trace BG e CG (**Figura 20.6**).

Vamos mostrar que o triângulo BGC é isósceles. Como $AB \equiv AC$ e $B\hat{A}D$ é reto (pois $r \perp s$), tem-se que $BD \equiv CD$. Da mesma forma, prova-se que $BF \equiv CF$. Segue de L.L.L. que $BDF \equiv CDF$, de onde se obtém que $B\hat{D}G \equiv C\hat{D}G$. Usando o caso de congruência L.A.L., conclui-se que $BG \equiv CG$, ou seja, o triângulo BCG é isósceles com base BC. Como GA é a mediana relativa a BC (pois $AB \equiv AC$), e BC é a base do triângulo isósceles BCG, temos que $\overleftrightarrow{GA}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$, ou seja, $r \perp u$.

Provamos então que r é perpendicular a qualquer reta de α passando por A. Se m é uma reta de α que não passa por A, consideremos a reta m' paralela a m passando por A (como na **Figura 20.7**). Como foi provado, $r \perp m'$, e já que $m // m'$, segue da proposição anterior que $r \perp m$.

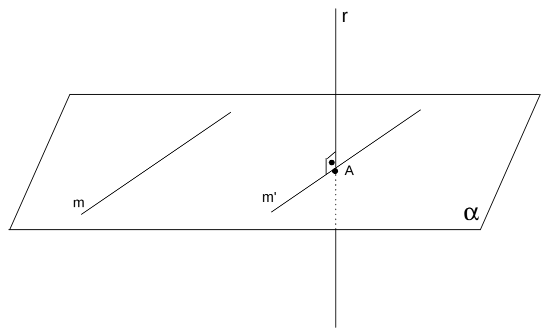


Figura 20.7: As retas m e m'.

2^o *caso* - A reta r não contém o ponto A.

Nesse caso, chame de r' a reta paralela a r passando por A. Como $r \perp s$ e $r \perp t$, segue da proposição anterior que $r' \perp s$ e $r' \perp t$ (**Figura 20.8**).

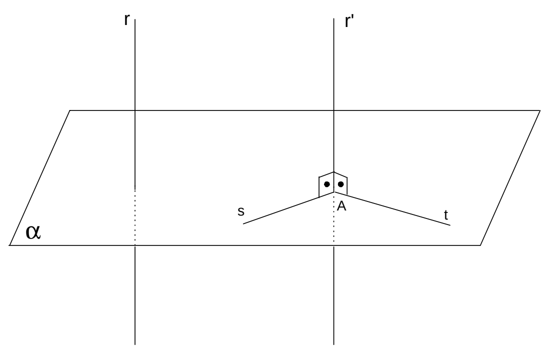


Figura 20.8: As retas r e r'.

Pelo 1^o caso, já provado, tem-se que r' é perpendicular a todas as retas de α. Como $r // r'$, segue que r também é perpendicular a todas as retas de α. Q.E.D.

Apresentamos a seguir quatro proposições, cujas provas serão colocadas nos exercícios desta aula.

Proposição 3

Se uma reta r é perpendicular a um plano α e paralela a uma reta s, então s é perpendicular a α.

Proposição 4
Se uma reta r é perpendicular a um plano α e α é paralelo a um plano β, então r é perpendicular a β.

Proposição 5
Se duas retas distintas r e s são perpendiculares a um plano α, então r é paralela a s.

Proposição 6
Se dois planos distintos α e β são perpendiculares a uma reta r, então α é paralelo a β.

Terminaremos esta aula com dois resultados que falam de perpendicularismo: existe um único plano perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dado, e existe uma única reta perpendicular a um plano dado passando por um ponto dado.

Proposição 7
Dados uma reta r e um ponto P, existe um único plano passando por P e perpendicular a r.

Prova:

Temos que provar duas coisas. A primeira é que existe um plano passando por P e perpendicular a r. Chamamos isso de "prova da existência". A segunda é que esse plano é o único com essas propriedades. Chamamos isso de "prova da unicidade".

Para provar a existência, considere dois planos distintos, α e β, contendo r, e tome um ponto $A \in r$. Seja s a reta de α passando por A e perpendicular a r (note que no plano já provamos a existência e a unicidade da perpendicular passando por um ponto) e seja t a reta de β passando por A e perpendicular a r. Chame de γ ao plano contendo s e t (**Figura 20.9**).

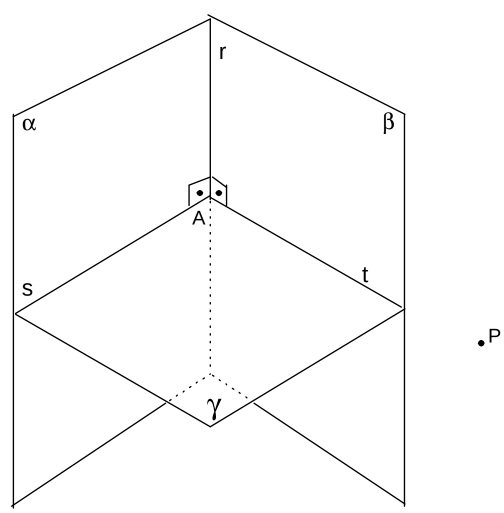


Figura 20.9: Prova da proposição 21.

A reta r é perpendicular a duas retas concorrentes de γ, portanto $r \perp \gamma$. Se o ponto P estiver em γ, a demonstração está concluída. Se não, chame de γ' o único plano paralelo a γ passando por P. Pela proposição 4 desta aula concluímos que $r \perp \gamma'$, e fica provada a existência.

Para provar a unicidade, suponha que existam dois planos distintos, γ_1 e γ_2, passando por P e perpendiculares a r. A proposição 6 garante que $\gamma_1 // \gamma_2$; ou seja, $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$. Mas isso é uma contradição, pois ambos os planos passam pelo ponto P. Portanto existe um único plano passando por P e perpendicular a r. Q.E.D.

Proposição 8

Dados um plano α e um ponto P, existe uma única reta passando por P e perpendicular a α.

Prova:

Provaremos primeiro a existência. Tome uma reta $r \subset \alpha$ e um ponto $A \in r$. Chame de s a reta de α passando por A e perpendicular a r. Sejam β o plano passando por A e perpendicular a r e γ o plano passando por A e perpendicular a s. Chame de t a interseção entre β e γ (**Figura 20.10**).

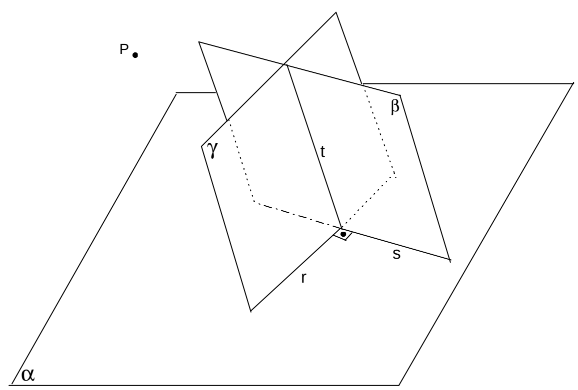


Figura 20.10: Prova da proposição 8.

Como $s \perp \gamma$ e $t \subset \gamma$, tem-se $s \perp t$. Da mesma forma, como $r \perp \beta$ e $t \subset \beta$, tem-se $r \perp t$. Assim, a reta t é perpendicular a duas retas concorrentes contidas no plano α, e portanto $t \perp \alpha$. Se $P \in t$, a prova da existência está terminada. Se não, chame de t' a reta paralela a t passando por P. A proposição 3, desta aula, assegura que $t' \perp \alpha$. Fica concluída assim a prova da existência.

Para provar a unicidade, suponha que existem duas retas distintas t_1 e t_2 passando por P e perpendiculares a α. Da proposição 5, obtemos que $t_1 // t_2$, ou seja, $t_1 \cap t_2 = \emptyset$. Mas isso é uma contradição, pois as duas retas passam pelo ponto P. Logo existe uma única reta passando por P e perpendicular a α. Q.E.D.

Note que as provas das duas proposições anteriores são muito parecidas. Na verdade, muitas das proposições têm enunciados parecidos, trocando retas por planos. Ao reler esta aula, faça uma lista relacionando cada enunciado com outros que sejam semelhantes. Recorde também os enunciados semelhantes da parte de geometria plana (Aula 5).

Vamos concluir esta aula com uma definição.

Definição 1
Dados um plano α e um ponto P fora de α, seja Q o ponto em que a perpendicular a α passando por P intersecta α. O ponto Q é chamado de *pé da perpendicular baixada de P ao plano α*. O ponto R da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ tal que Q está entre P e R e $PQ \equiv QR$ é chamado de reflexo de P relativo ao plano α (**Figura 20.11**).

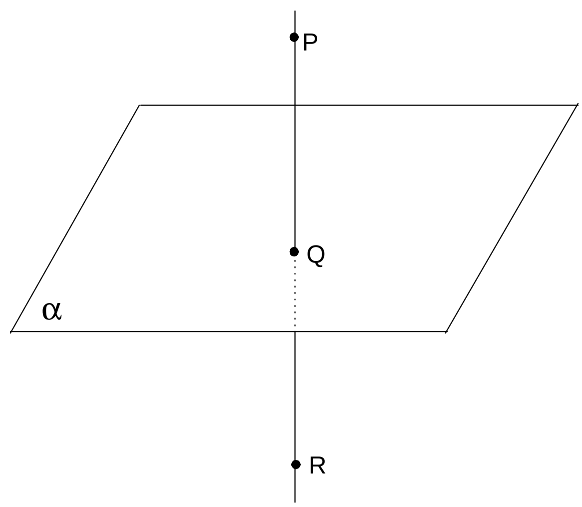


Figura 20.11: Q é o pé da perpendicular. R é o reflexo de P relativo a α.

Prova-se que Q é o ponto de α mais próximo de P (veja o exercício 9 desta aula).

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- Conceito de ângulo entre retas.
- Perpendicularidade entre reta e reta e entre reta e plano.

Exercícios

1. Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa:

   - Se r e s são perpendiculares a t, então r e s são paralelas.
   - Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.
   - Se duas retas reversas são paralelas a um plano, então toda reta perpendicular a elas é perpendicular ao plano.
   - Se duas retas paralelas entre si são paralelas a um plano, então toda reta perpendicular a elas é perpendicular ao plano.
   - Dadas duas retas reversas, sempre existe um plano perpendicular a ambas.
   - Se $r//s$, $\alpha \perp r$ e $\beta \perp s$, então $\alpha // \beta$.

2. Se r é perpendicular a um plano α e s é perpendicular a r, prove que $s \subset \alpha$ ou s é paralela a α.

3. Dois triângulos ABC e DBC são isósceles de base BC e estão situados em planos distintos. Prove que as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são ortogonais.

4. Na **Figura 20.12**, r é perpendicular a α e $\overleftrightarrow{AC}$ é perpendicular a s. Prove que s é perpendicular a t.

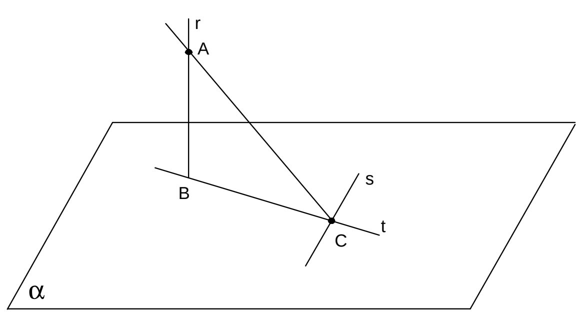


Figura 20.12: Exercício 4.

5. Prove a proposição 3.

6. Prove a proposição 4.

7. (Prova da proposição 5) Suponha que duas retas distintas r e s sejam perpendiculares a um plano α. Se r e s não são paralelas, então r e

s são concorrentes ou reversas. Se r e s são concorrentes, digamos em um ponto A, chame de γ o plano contendo r e s. Prove que $\alpha \cap \gamma$ é uma reta. Seja $t = \alpha \cap \gamma$ (veja a **Figura 20.13**).

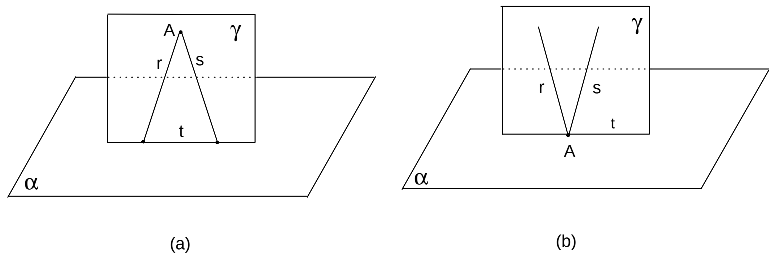


Figura 20.13: (a) A não pertence a α. (b) A pertence a α.

Prove que r e s são perpendiculares a t. O plano γ contém, assim, duas retas perpendiculares a t e passando por A, o que é um absurdo (justifique). Esse absurdo prova que r e s não podem ser concorrentes. Se r e s são reversas, tome um ponto $P \in r$ e seja s' a reta paralela a s passando por P. Prove que r e s' são concorrentes e que s' é perpendicular a α. Mas já provamos na primeira parte que duas retas concorrentes não podem ser ambas perpendiculares a α. Isso prova que r e s também não podem ser reversas. Portanto, r e s são paralelas.

8. **(Prova da proposição 6)**. Suponha que dois planos distintos α e β sejam perpendiculares a uma reta r. Vamos provar por contradição que α e β são paralelos. Suponha que α e β não sejam paralelos e seja t a reta de intersecção entre eles. Há duas possibilidades:

   1^a possibilidade: r não intersecta t.

   2^a possibilidade: r intersecta t.

   Se r não intersectar t, tome um ponto $P \in t$ e chame de γ o plano que contém r e P.

   Se r intersectar t, tome um ponto $Q \notin t$ sobre α e chame de γ o plano que contém r e Q (veja as duas possibilidades na **Figura 20.14**). Em qualquer uma das possibilidades, prove que $a = \gamma \cap \alpha$ e $b = \gamma \cap \beta$ são retas concorrentes. Prove também que $r \perp a$ e $r \perp b$. Mas isso é uma contradição (justifique). Portanto, α e β são paralelos.

9. Sejam α um plano, $P \notin \alpha$ e Q o pé da perpendicular baixada de P a α. Prove que Q é o ponto de α mais próximo de P. Mais precisamente, prove que $m(PA) > m(PQ)$, para todo $A \neq Q$ em α.

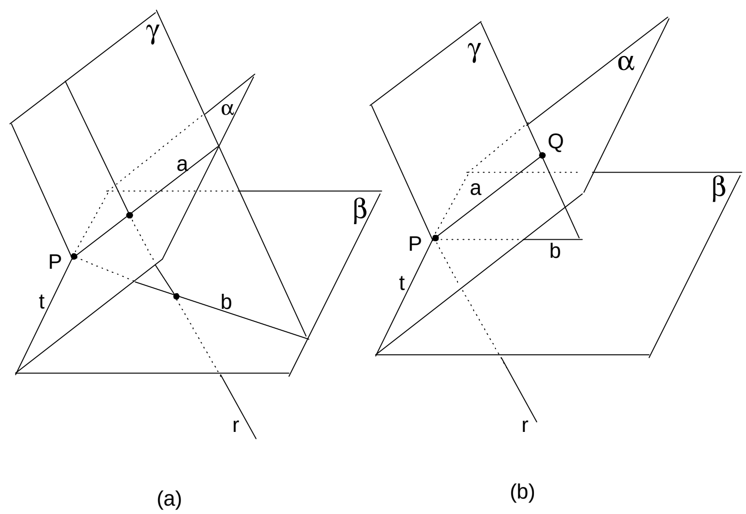


Figura 20.14: (a) r não intersecta t. (b) r intersecta t.

10. **(Planos paralelos são equidistantes)** Sejam α e β planos paralelos e sejam A e B dois pontos de α. Prove que $m(AA') = m(BB')$, sendo A' e B' os pés das perpendiculares baixadas de, respectivamente, A e B ao plano β.

11. Se uma reta r é paralela a um plano α, prove que, para quaisquer dois pontos A e B em r, $m(AA') = m(BB')$, sendo A' e B' os pés das perpendiculares baixadas de, respectivamente, A e B ao plano α.

12. Sejam r e s retas reversas e sejam P e Q pontos distintos. Denote por r' e s' as retas que passam por P e são paralelas a, respectivamente, r e s. Denote por r'' e s'' as retas que passam por Q e são paralelas a, respectivamente, r e s. Prove que o ângulo entre r' e s' é igual ao ângulo entre r'' e s''.

    Sugestão: Se r', s', r'' e s'' são coplanares, o resultado é conseqüência do fato que, se duas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes (veja a **Figura 20.15**).

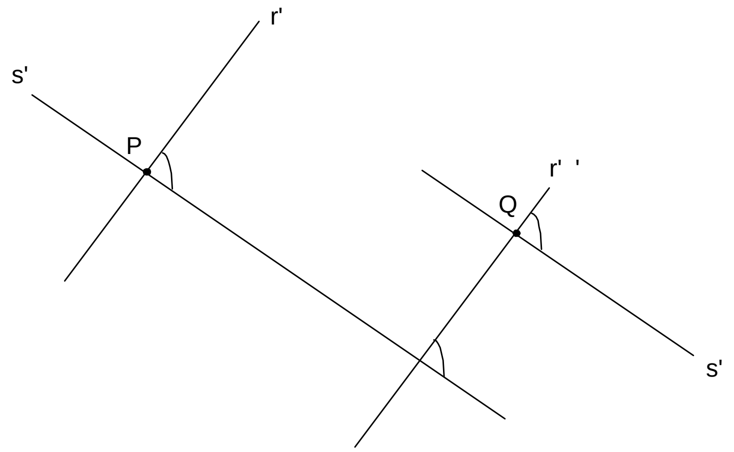


Figura 20.15: Exercício 12.

Se r', s', r'' e s'' não são coplanares, chame de α o plano que contém r' e s' e de β o plano que contém r'' e s''. Prove que α é paralelo a β. Tome pontos $A' \neq P$ em r' e $B' \neq P$ em s' e, por esses pontos, trace retas paralelas à reta $\overleftrightarrow{PQ}$. Chame de A'' e B'' os pontos em que essas retas cortam β (veja **Figura 20.16**).

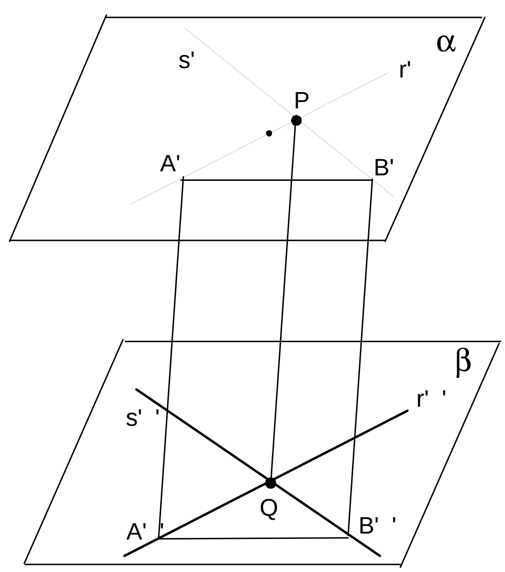


Figura 20.16: Exercício 12.

13. Sejam α um plano e r uma reta oblíqua a α. Chame de A o ponto em que r intersecta α. Prove que existe uma única reta contida em α, passando por A que é perpendicular a r.

Aula 21 – Ângulos no espaço - parte II

Objetivos

- Identificar ângulos entre planos e entre retas e planos.
- Determinar distâncias no espaço.

Introdução

Nesta aula, dando continuidade ao nosso estudo de ângulos, veremos como se definem o ângulo entre dois planos e o ângulo entre uma reta e um plano no espaço. Veremos também como calcular a distância entre um ponto e uma reta, e entre um ponto e um plano.

Ângulo entre planos e perpendicularismo entre planos

Sejam α e β planos que se cortam e seja r a reta de interseção entre eles. Tome um ponto $A \in r$ e chame de γ o plano que passa por A e é perpendicular a r. Esse plano intersecta α e β segundo as retas s e t, respectivamente, como na **Figura 21.1**.

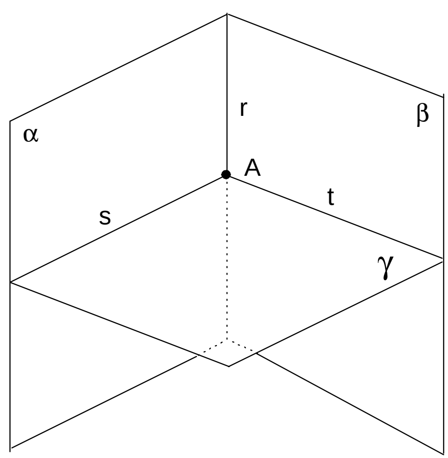


Figura 21.1: Definição de ângulo entre planos.

O ângulo entre os planos α e β é definido como o ângulo entre as retas s e t. Prova-se (veja exercício 16) que o valor do ângulo não depende do ponto A escolhido, como está ilustrado na **Figura 21.2**.

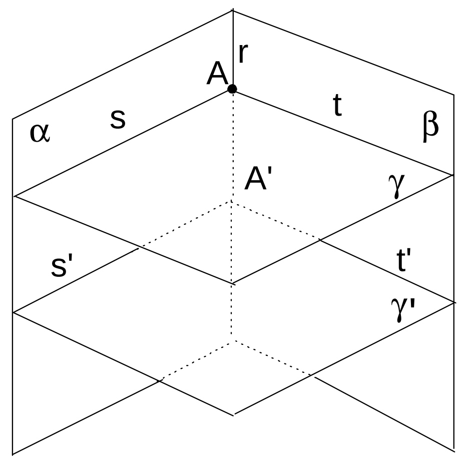


Figura 21.2: O ângulo entre s e t é igual ao ângulo entre s' e t'.

Dois planos são ditos perpendiculares se o ângulo entre eles for de 90^o. A seguinte proposição fornece um ótimo critério para concluir que dois planos são perpendiculares.

Proposição 1

Se um plano contém uma reta perpendicular a outro plano, então esses planos são perpendiculares.

Prova:

Seja r uma reta perpendicular a um plano α e suponha que o plano β contenha r. Queremos mostrar que α é perpendicular a β. Para isso, seja $s = \alpha \cap \beta$, e considere um ponto $A \in s$ que não pertença a r. Seja γ o plano que passa por A e é perpendicular a s. Esse plano corta α e β segundo retas u e t, respectivamente (**Figura 21.3**). Por definição de perpendicularismo entre planos, para provar que $\beta \perp \alpha$, temos que mostrar que $u \perp t$.

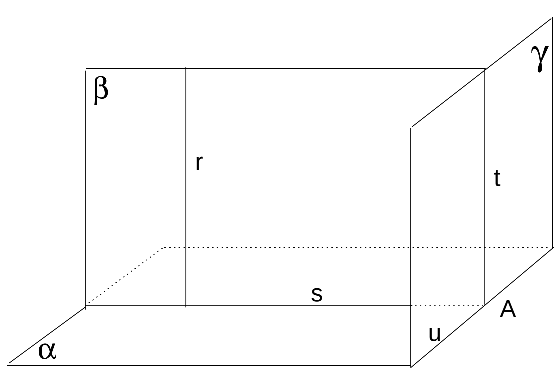


Figura 21.3: Prova de que $\alpha \perp \beta$.

Em primeiro lugar, $r \perp s$, pois r é perpendicular a α e $s \subset \alpha$. Como s é perpendicular a γ por construção do plano γ, segue do exercício 2 da Aula 20 que r é paralela a γ. Isso implica que r e t não se intersectam. Como r e t são coplanares (ambas pertencem a β), conclui-se que r e t são paralelas. Como $r \perp \alpha$, segue que t é perpendicular a α. Assim, t é perpendicular a qualquer reta contida em α. Mas u está em α, pois $u = \gamma \cap \alpha$. Logo, t é perpendicular a u. Q.E.D.

A proposição seguinte também relaciona perpendicularismo entre reta e plano com perpendicularismo entre planos.

Proposição 2

Se uma reta r e um plano β são perpendiculares a um plano α, então r está contida em β ou r é paralela a β.

Prova:

Suponha que r não esteja contida em β. Provaremos que r é paralela a β. Para isso, seja $s = \alpha \cap \beta$ e considere um plano γ perpendicular a s. O plano γ corta α e β segundo retas que chamaremos u e t, como na **Figura 21.4**.

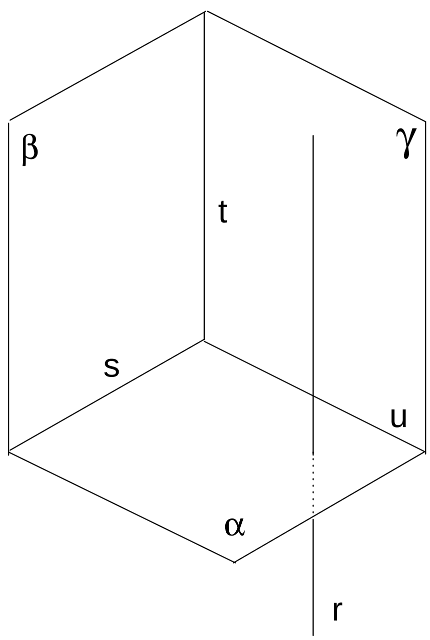


Figura 21.4: Prova da proposição 24.

Como $\gamma \perp s$ por construção, tem-se $s \perp t$ e $s \perp u$. Além disso, por definição de perpendicularismo entre planos, tem-se que $t \perp u$. Logo, t é perpendicular às retas concorrentes s e u contidas em α. Concluímos então que $t \perp \alpha$. Mas r é perpendicular a α por hipótese, e $r \neq t$, porque t está contida em β e r não está. Segue então, da proposição 5, que r é paralela a t. Como $t \subset \beta$, conclui-se que r é paralela a β. Q.E.D.

A seguinte proposição decorre diretamente das anteriores e será deixada como exercício ao fim desta aula.

Proposição 3

Se dois planos secantes são perpendiculares a um plano, então a reta de interseção entre eles é perpendicular a esse plano.

Ângulo entre uma reta e um plano

Considere uma reta r oblíqua a um plano α, intersectando-o no ponto A. Observe que as retas que estão em α e passam por A fazem com r ângulos que podem ser bem diferentes. Veja a **Figura 21.5**. Por esse motivo, a definição de ângulo entre reta e plano merece um certo cuidado.

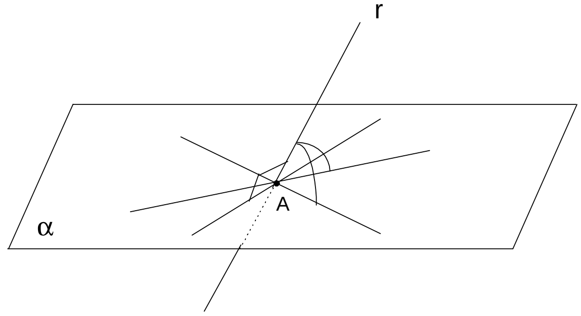


Figura 21.5: O ângulo entre r e as retas de α varia.

Se r for perpendicular a α, existem infinitos planos perpendiculares a α contendo r (como você verá no exercício 3 desta aula). A situação é diferente no caso em que r é oblíqua a α: existe um único plano contendo r e perpendicular a α. Vamos mostrar essa afirmação.

Para isso, seja $A = r \cap \alpha$ e tome um ponto $P \neq A$ em r. Chame de Q o pé da perpendicular baixada de P ao plano α. Temos que $Q \neq A$, pois estamos assumindo que r é oblíqua a α. Seja β o plano que passa pelos pontos P, Q e A (veja a **Figura 21.6**).

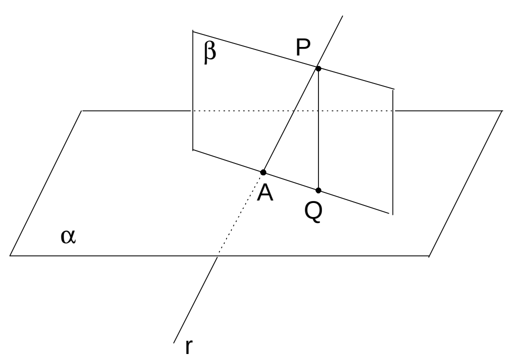


Figura 21.6: Plano contendo r e perpendicular a α.

Como β contém a reta $\overleftrightarrow{PQ}$, que é perpendicular a α, segue que $\beta \perp \alpha$. Além disso, β contém r (pois contém os pontos P e A, pertencentes a r). Está provado então que existe um plano perpendicular a α que contém r.

Para provar a unicidade, considere um plano γ contendo r e perpendicular a α. Como $\overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular a α, obtém-se da proposição 2 que $\overleftrightarrow{PQ} \subset \gamma$ ou $\overleftrightarrow{PQ} // \gamma$. Não podemos ter o segundo caso, pois $P \in r \subset \gamma$. A conclusão é que $\overleftrightarrow{PQ}$ está contida em γ, de onde se conclui que γ contém os pontos P, Q e A. Mas esses pontos determinam o plano β, o que mostra que $\gamma = \beta$. Concluímos então que só existe um plano perpendicular a α contendo r. Provamos então a proposição a seguir:

Proposição 4

Se uma reta é oblíqua a um dado plano, existe um único plano contendo a reta e perpendicular a esse plano.

Podemos agora definir o ângulo entre uma reta e um plano.

Definição 1

Se uma reta é perpendicular a um plano, dizemos que eles formam um ângulo de 90^o. Se r é uma reta oblíqua a um plano α, e β é o plano contendo r e perpendicular a α, definimos o ângulo entre r e α como sendo o ângulo entre r e $s = \alpha \cap \beta$ (**Figura 21.7**).

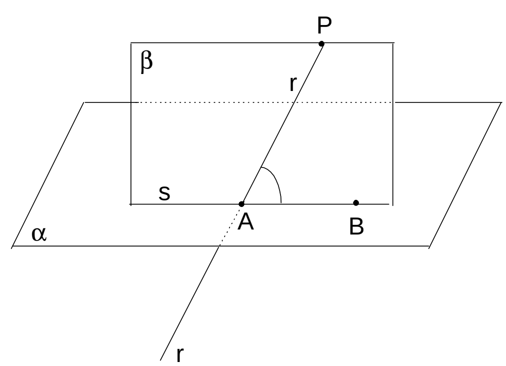


Figura 21.7: O ângulo entre r e α é o ângulo entre r e s.

Distâncias no espaço

Como você deve se lembrar, a distância entre dois pontos no plano é o comprimento do segmento de reta que une os dois pontos. Essa mesma forma de calcular a distância entre dois pontos também é usada para pontos no espaço. Vamos agora definir a distância entre ponto e reta e entre ponto e plano.

Definição 2

Considere um ponto P e uma reta r. Se $P \in r$, a distância de P a r é zero. Se $P \notin r$, seja α o plano que contém r e P, e seja s a única reta de α que passa por P e é perpendicular a r. Seja $Q = r \cap s$. A distância de P a r é definida como a medida do segmento PQ (**Figura 21.8**).

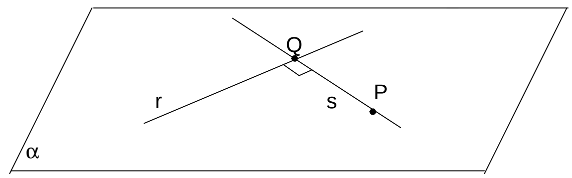


Figura 21.8: Distância de ponto a reta.

Observe que Q é o ponto de r mais próximo de P. Em outras palavras, tem-se $m(PR) > m(PQ)$ para qualquer outro ponto R na reta r.

Definição 3

Considere um ponto P e um plano α. Se $P \in \alpha$, a distância de P a α é zero. Se $P \notin \alpha$, seja Q o pé da perpendicular baixada de P a α. A distância de P a α é definida como a medida do segmento PQ (veja a **Figura 21.9**).

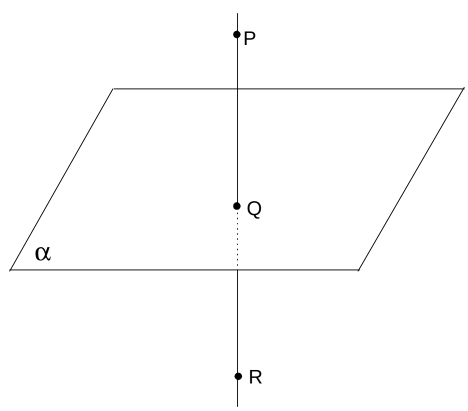


Figura 21.9: Distância de ponto a reta.

Como vimos no exercício 9 da Aula 20, o ponto Q é o ponto de α mais próximo de P.

Definiremos, a seguir, a distância de reta a plano e a distância de plano a plano, que são bastante intuitivas. Ao final desta aula definiremos a distância entre duas retas no espaço, o que é um conceito um pouco mais elaborado.

Definição 4

Considere uma reta r e um plano α. Se r intersecta α, a distância entre r e α é zero. Se r não corta α, ou seja, $r//\alpha$, segue pelo exercício 11 da Aula 20 que, para quaisquer pontos A e B em r, a distância de A a α é igual à distância de B a α. Definimos a distância de r a α como sendo a distância de qualquer ponto de r a α. Veja a **Figura 21.10**.

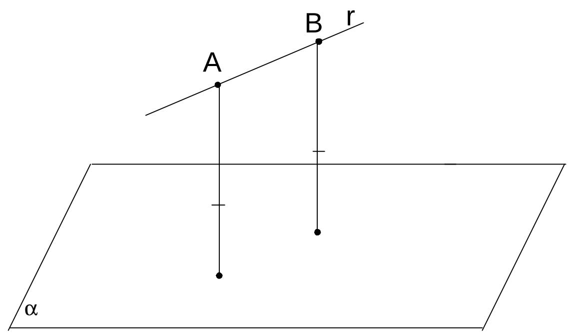


Figura 21.10: Distância de reta a plano.

Definição 5

Considere dois planos α e β. Se α intersectar β, a distância de α a β é zero. Se α é paralelo a β, segue do exercício 10 da Aula 20 que, dados dois pontos A e B quaisquer do plano α, a distância de A a β é igual à distância de B a β, ou seja, esse valor não depende do ponto escolhido. A distância de α a β é definida como a distância de um ponto qualquer de α a β (ou vice-versa).

Vamos agora definir a distância entre duas retas. O caso mais simples é quando as duas retas em questão estão em um mesmo plano: são concorrentes ou paralelas. Veremos então esses dois casos primeiro.

Definição 6

Se duas retas são concorrentes, a distância de uma a outra é zero. Se duas retas r e s são paralelas, mostra-se (veja exercício 12) que dados quaisquer dois pontos A e B de r, a distância entre A e s é igual à distância entre B e s, ou seja, esse valor não depende do ponto (veja a **Figura 21.11**). Nesse caso, a distância de r a s é definida como a distância de um ponto qualquer de r a s.

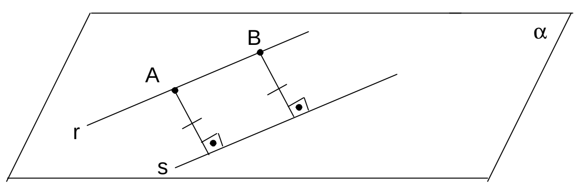


Figura 21.11: Distância entre retas paralelas.

Suponha agora que r e s sejam retas reversas. Sabemos, da proposição 19, da aula 19, que existem planos paralelos α e β tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$. Tome um ponto $A \in r$, e seja B o pé da perpendicular baixada de A ao plano β. Seja r' a reta paralela a r passando por B. A reta r' corta s (por quê?) em um ponto que chamaremos C. Veja a **Figura 21.12**. Trace a reta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ passando por C. Essa reta corta r (por quê?) em um ponto que chamaremos D, também indicado na **Figura 21.12**. Temos que a reta $\overleftrightarrow{CD}$ é perpendicular aos planos paralelos α e β, pois $\overleftrightarrow{CD}$ é paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.

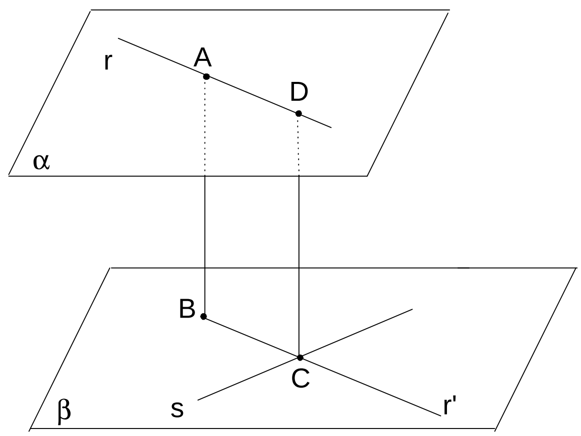


Figura 21.12: A distância de r a s é $m(CD)$.

Podemos provar (veja exercício 13 desta aula) que o segmento CD é o único, dentre aqueles que ligam um ponto de r a um ponto de s, que é perpendicular a r e a s ao mesmo tempo. Além disso, ele é o de menor comprimento, ou seja, $m(CD) < m(C'D')$, para quaisquer pontos $C' \in s$ e $D' \in r$ (veja o exercício 14). Isso motiva a seguinte definição:

Definição 7

Se r e s são retas reversas, a distância de r a s é a medida do único segmento com extremos em r e s que é perpendicular a r e a s.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- Como calcular ângulos entre planos.
- Como calcular ângulos entre retas e planos.
- Como calcular distâncias entre ponto e reta, entre ponto e plano, entre reta e plano, entre planos e entre retas.

Exercícios

1. Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa.

   - Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.
   - Se dois planos são perpendiculares a um terceiro, então eles são perpendiculares entre si.
   - Se uma reta e um plano são paralelos, então todo plano perpendicular ao plano dado é perpendicular à reta.
   - Se uma reta é oblíqua a um de dois planos paralelos, então ela é oblíqua ao outro.
   - Não existem quatro retas perpendiculares duas a duas.

2. Se um plano γ é perpendicular a dois planos secantes α e β, mostre que γ é perpendicular à reta de interseção entre α e β.

3. Dados um plano α e uma reta r perpendicular a α, mostre que existem infinitos planos contendo r.

4. Se uma reta r está contida em um plano α e s é perpendicular a α, mostre que existe um único plano contendo s e perpendicular a r.

5. Se dois planos são paralelos, prove que todo plano perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.

6. Se uma reta r é paralela a um plano α, prove que todo plano perpendicular a r é perpendicular a α.

7. Se uma reta r é paralela a um plano α, prove que existe um único plano contendo r e perpendicular a α.

8. Prove que o ângulo entre uma reta e um plano é igual ao ângulo entre essa reta e qualquer plano paralelo ao plano dado.

9. Se A e B são pontos distintos, prove que o conjunto de pontos do espaço que são equidistantes de A e B é um plano. Além disso, esse plano passa pelo ponto médio do segmento AB e é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$.

10. Seja ABC um triângulo que não intersecta um plano α, e sejam a, b e c as distâncias de, respectivamente, A, B e C ao plano α. Prove que a distância do baricentro de ABC ao plano α é dada por $\dfrac{a+b+c}{3}$.

11. Seja r uma reta que corta um plano α, e seja s uma reta contida em α. Prove que o ângulo entre r e s é maior ou igual ao ângulo entre r e α.

12. Prove que retas paralelas são equidistantes. Mais precisamente, se r e s são retas paralelas, prove que a distância de A a s é igual à distância de B a s, quaisquer que sejam A e B pertencentes a r.

13. Se r e s são retas reversas, prove que existe somente um segmento com extremos em r e em s que é perpendicular a r e a s.

14. Sejam r e s retas reversas e seja CD ($C \in A$ e $D \in r$) o único segmento com extremos em r e em s que é perpendicular a r e a s. Prove que $m(CD) < m(C'D')$, quaisquer que sejam $C' \in s$ e $D' \in r$.

15. Prove a proposição 3 desta aula.

16. Sejam α e β planos que se cortam e seja r a reta de interseção entre eles. Tome pontos A e A' em r e sejam γ e γ' os planos perpendiculares a r e que passam por A e A', respectivamente. Sejam $s = \gamma \cap \alpha$, $t = \gamma \cap \beta$, $s' = \gamma' \cap \alpha$ e $t' = \gamma' \cap \beta$ (veja a **Figura 21.12**. Prove que o ângulo entre s e t é igual ao ângulo entre s' e t'.

    Sugestão: Prove que $s//s'$ e $t//t'$. Inspire-se no exercício 12 da Aula 20.

17. (UFF,1996) Considere dois planos α e β, secantes e não-perpendiculares, e um ponto P não pertencente a α nem a β. Pode-se afirmar que:

    (a) Toda reta que passa por P e é paralela a α também é paralela a β.
    (b) Toda reta que passa por P e intersecta α também intersecta β.
    (c) Se um plano contém P e intersecta α então ele intersecta β.
    (d) Existe um plano que contém P e é perpendicular a α e a β.
    (e) Existe um plano que contém P e é paralelo a α e a β.

Aula 22 – O prisma

Objetivos

- Identificar e classificar prismas.

- Conhecer propriedades de prismas.

Introdução

A partir desta aula, estaremos estudando alguns dos principais *sólidos geométricos*: prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. Veremos os principais elementos desses sólidos, e algumas de suas propriedades.

Definição 1
Sejam α e α' dois planos paralelos e r uma reta que os corta. Seja $P = A_1A_2\ldots A_n$ um polígono convexo contido em α. Por todo ponto X pertencente ao polígono ou ao seu interior, trace a reta paralela a r passando por X, e seja X' o ponto em que essa reta corta o plano α'. A figura formada pela união dos segmentos XX' é chamada de prisma. Veja na **Figura 22.1** o caso particular em que o polígono P é um pentágono.

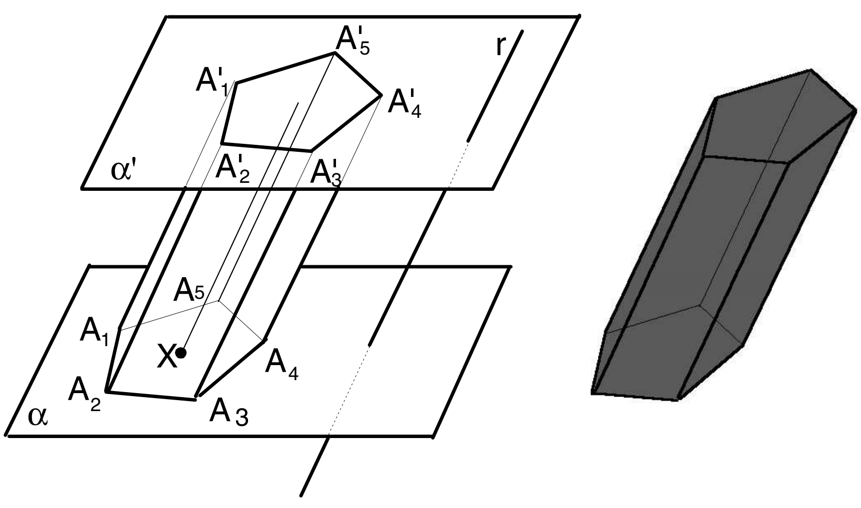


Figura 22.1: Prisma de base pentagonal.

Os polígonos $P = A_1A_2 \ldots A_n$ e $P' = A'_1A'_2 \ldots A'_n$, unidos com seus interiores, são chamados bases do prisma, enquanto os quadriláteros $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ..., $A_nA_1A'_1A'_n$, unidos com seus interiores, são chamados *faces laterais* do prisma. Chamamos de fronteira do prisma à união de suas bases e suas faces laterais. De acordo com a Aula 21, P' é congruente a P, e as faces laterais do prisma são paralelogramos.

Os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n, A'_1A'_2, \ldots A'_n$ são chamados vértices, e os segmentos $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ..., $A_nA'_n$ são chamados arestas laterais. Como as faces laterais de um prisma são paralelogramos, tem-se que as arestas laterais são todas congruentes.

Um prisma é chamado reto se as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Caso contrário o prisma é chamado oblíquo (veja a **Figura 22.2**). As faces laterais de um prisma reto são retângulos.

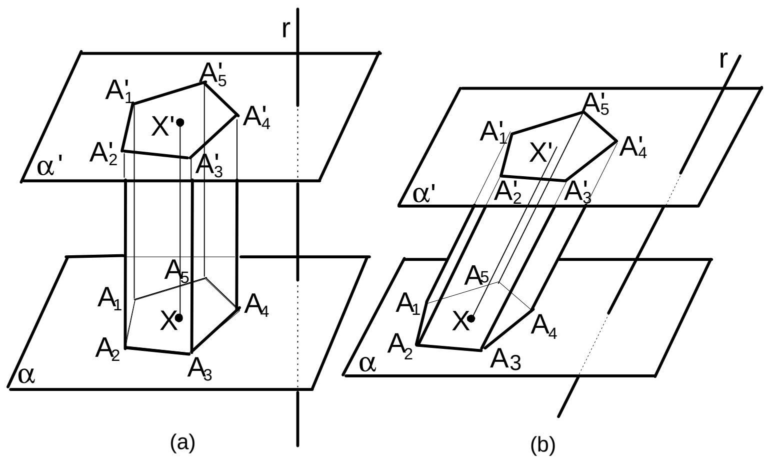


Figura 22.2: (a) Prisma reto. (b) Prisma oblíquo.

A altura de um prisma é a distância entre os planos das bases. Tem-se que a altura de um prisma reto é a medida de cada uma de suas arestas laterais. A área lateral de um prisma é definida como a soma das áreas de suas faces laterais. A área total de um prisma é a soma da área lateral com as áreas de suas bases.

A área lateral de um prisma reto é facilmente calculada. Suponha que o prisma reto tenha altura h e base $P = A_1A_2 \ldots A_n$. Como as faces laterais do prisma reto são retângulos, temos

$$\begin{aligned} \text{Área lateral} &= \text{Área}(A_1A_2A'_2A'_1) + \ldots + \text{Área}(A_nA_1A'_1A'_n) \\ &= m(A_1A_2)h + \ldots + m(A_nA_1)h \\ &= [m(A_1A_2) + \ldots + m(A_nA_1)]\, h \\ &= (\text{perímetro de } P)h \end{aligned}$$

Assim,

> A área lateral de um prisma reto é o produto do perímetro da base pela altura.

Veremos agora um tipo especial de prisma: o paralelepípedo.

O paralelepípedo

Definição 2
Um prisma cujas bases são paralelogramos é chamado paralelepípedo.

Como já sabemos que as faces laterais de qualquer prisma são paralelogramos, segue que todas as faces de um paralelepípedo são paralelogramos. Um paralelepípedo reto é dito retangular (ou retângulo) se suas bases são retângulos. Como já sabemos que as faces laterais de qualquer prisma reto são retângulos, resulta que todas as faces de um paralelepípedo retângulo são retângulos (veja a **Figura 22.3**). Um *cubo* é um paralelepípedo retangular que tem todas as arestas congruentes.

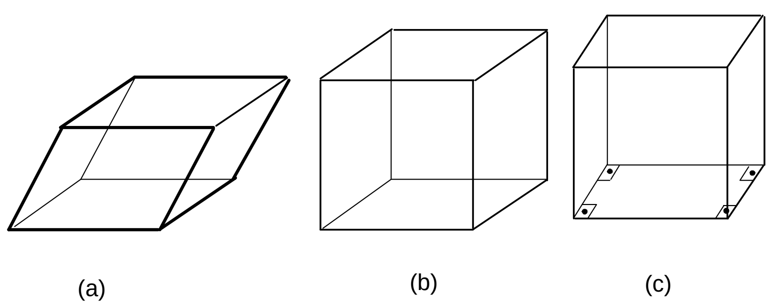


Figura 22.3: Tipos de paralelepípedo. (a) Oblíquo. (b) reto. (c) retangular.

Chama-se diagonal de um paralelepípedo a um segmento ligando dois vértices não pertencentes a uma mesma face. Um paralelogramo possui quatro diagonais, representadas na **Figura 22.4**.

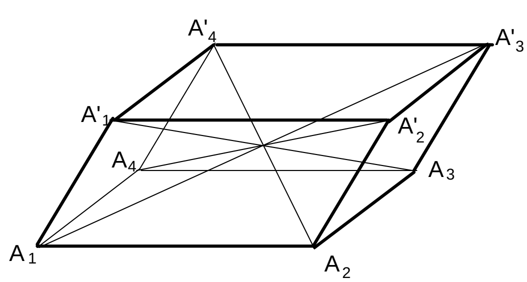


Figura 22.4: Diagonais de um paralelepípedo.

Duas faces de um paralelepípedo são chamadas opostas se elas não possuem nenhum vértice em comum. Assim são opostas as faces $A_2A_3A'_3A'_2$ e $A_1A_4A'_4A'_1$ na **Figura 22.4**, assim como os seguintes pares de faces: $A_1A_2A'_2A'_1$ e $A_4A_3A'_3A'_4$, $A_1A_2A_3A_4$ e $A'_1A'_2A'_3A'_4$ (bases).

A **Figura 22.4** parece sugerir que as diagonais de um paralelepípedo são concorrentes, ou seja, passam por um mesmo ponto. A proposição a seguir diz que, de fato, isso sempre ocorre:

Proposição 1
As diagonais de um paralelepípedo cortam-se em um ponto e esse ponto divide cada uma delas ao meio.

Prova:

Considere as diagonais $A_4A'_2$ e $A_1A'_3$ mostradas na **Figura 22.5**. Como todas as faces de um paralelepípedo são paralelogramos e os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, conclui-se que $\overleftrightarrow{A'_2A'_3}//\overleftrightarrow{A_2A_3}$, $\overleftrightarrow{A_2A_3}//\overleftrightarrow{A_1A_4}$, $A'_2A'_3 \equiv A_2A_3$ e $A_2A_3 \equiv A_1A_4$.

Segue que $\overleftrightarrow{A'_2A'_3}//\overleftrightarrow{A_1A_4}$ e que $A_1A_4 \equiv A'_2A'_3$. Logo, os pontos A_1, A_4, A'_2 e A'_3 são coplanares e o quadrilátero $A_1A_4A'_3A'_2$ possui um par de lados opostos paralelos e congruentes (A_1A_4 e $A'_2A'_3$). Pela proposição 13 da Aula 6, podemos afirmar que $A_1A_4A'_3A'_2$ é um paralelogramo. Suas diagonais $A_4A'_2$ e $A_1A'_3$ (veja o exercício 5 da aula 6), portanto, se cortam em um ponto T que as divide ao meio (veja a **Figura 22.5**).

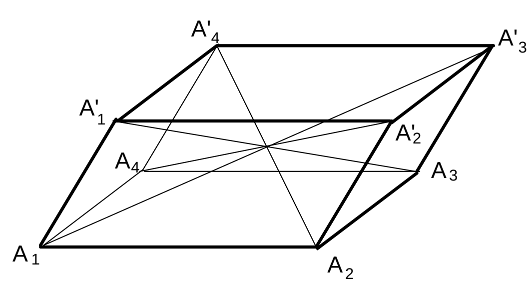


Figura 22.5: Encontro das diagonais $A_1A'_3$ e $A_4A'_2$.

Considere agora as diagonais $A_1A'_3$ e $A_2A'_4$. De maneira análoga ao que fizemos anteriormente, prova-se que os pontos A_1, A_2, A'_3 e A'_4 são coplanares e são os vértices de um paralelogramo. Chamemos de R ao ponto em que as diagonais do paralelogramo $A_1A_2A'_3A'_4$ se cortam (ponto médio das diagonais). Veja a **Figura 22.6**.

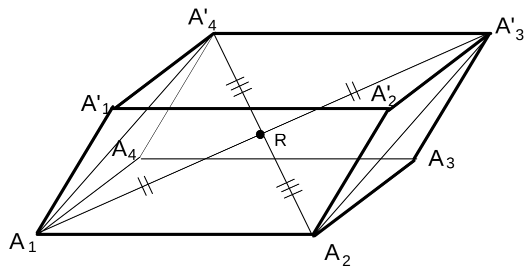


Figura 22.6: Encontro das diagonais A_1A_3' e A_2A_4'.

Temos que tanto o ponto T quanto o ponto R dividem o segmento A_1A_3' ao meio. Logo, $T = R$ e, portanto, as três diagonais A_1A_3', A_4A_2' e A_2A_4' passam por T. Além disso, o ponto T divide essas diagonais ao meio. Da mesma forma, considerando as diagonais A_1A_3' e A_3A_1', conclui-se que A_3A_1' também passa por T e que o ponto T divide A_3A_1' ao meio. Q.E.D.

Para paralelepípedos, vale também o seguinte resultado:

Proposição 2

As faces opostas de um paralelepípedo são paralelas e congruentes.

Prova:

Considere um paralelepípedo como na **Figura 22.4**. Provaremos que os planos das faces $A_1A_2A_2'A_1'$ e $A_4A_3A_3'A_4'$ são paralelos e que essas faces são congruentes. Para os outros pares de faces opostas a demonstração é idêntica.

Como todas as faces de um paralelepípedo são paralelogramos, tem-se $\overleftrightarrow{A_4A_4'} // \overleftrightarrow{A_1A_1'}$ e $\overleftrightarrow{A_4A_3} // \overleftrightarrow{A_1A_2}$. Segue que a reta $\overleftrightarrow{A_1A_1'}$ é paralela ao plano que contém $A_4A_3A_3'A_4'$, pois não está contida em tal plano e é paralela a uma reta dele (a reta $\overleftrightarrow{A_4A_4'}$). Do mesmo modo, $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ é paralela ao plano de $A_4A_3A_3'A_4'$, pois não está contida nele e é paralela a $\overleftrightarrow{A_4A_3}$ (estamos usando a proposição 13 da Aula 18). Então o plano de $A_4A_3A_3'A_4'$ é paralelo ao plano de $A_1A_2A_2'A_1'$, pois é paralelo a duas retas concorrentes dele.

Resta agora verificar que as faces $A_1A_2A_2'A_1'$ e $A_4A_3A_3'A_4'$ são congruentes. Para isso, trace os segmentos $A_1'A_2$ e $A_4'A_3$ (veja a **Figura 22.7**). Como os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, segue que $A_1A_1' \equiv A_4A_4'$, $A_1A_1' \equiv A_2A_2'$ e $A_2A_2' \equiv A_3A_3'$. Da mesma forma, os segmentos A_1A_2, A_4A_3, $A_4'A_3'$ e $A_1'A_2'$ são congruentes.

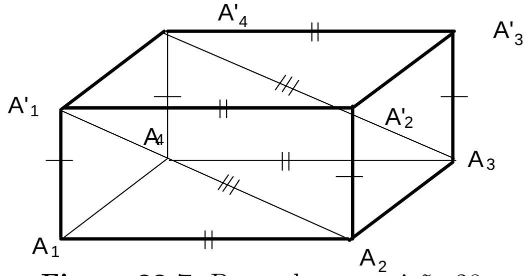


Figura 22.7: Prova da proposição 28.

Como $\overleftrightarrow{A_1'A_4'} // \overleftrightarrow{A_1A_4}$ e $\overleftrightarrow{A_1A_4} // \overleftrightarrow{A_2A_3}$, tem-se $\overleftrightarrow{A_1'A_4'} // \overleftrightarrow{A_2A_3}$, o que implica que A_2, A_3, A_1' e A_4' são coplanares. Além disso, $A_1'A_4' \equiv A_2'A_3' \equiv A_2A_3$. Os lados opostos $A_1'A_4'$ e A_2A_3 do quadrilátero $A_2A_3A_4'A_1'$ são assim paralelos e congruentes, ou seja, $A_2A_3A_4'A_1'$ é um paralelogramo. Daí $A_3A_4' \equiv A_2A_1'$, e segue de L.L.L. que $A_1'A_1A_2 \equiv A_4'A_4A_3$ e $A_1'A_2'A_2 \equiv A_4'A_3'A_3$. Logo, $A_1A_2A_2'A_1'$ e $A_4A_3A_3'A_4'$ são congruentes. Q.E.D.

Considere um paralelepípedo $A_1A_2A_3A_4A_1'A_2'A_3'A_4'$ e sejam $a = m(A_1A_2)$, $b = m(A_1A_4)$ e $c = m(A_1A_1')$. Pelos argumentos utilizados anteriormente, tem-se

$$\begin{aligned} m(A_1A_2) &= m(A_4A_3) = m(A_4'A_3') = m(A_1'A_2') = a \\ m(A_1A_4) &= m(A_2A_3) = m(A_2'A_3') = m(A_1'A_4') = b \qquad \text{e} \\ m(A_1A_1') &= m(A_2A_2') = m(A_3A_3') = m(A_4A_4') = c \end{aligned}$$

Chamamos os números a, b e c de *medidas do paralelepípedo*. Em paralelepípedos retângulos temos o seguinte resultado:

Proposição 3

Se as medidas de um paralelepípedo retângulo são a, b e c, então as suas diagonais medem $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Prova:

Considere um paralelepípedo retangular $A_1A_2A_3A_4A_1'A_2'A_3'A_4'$ com medidas a, b e c. Trace a diagonal A_2A_4' e o segmento A_2A_4, como na **Figura 22.8**.

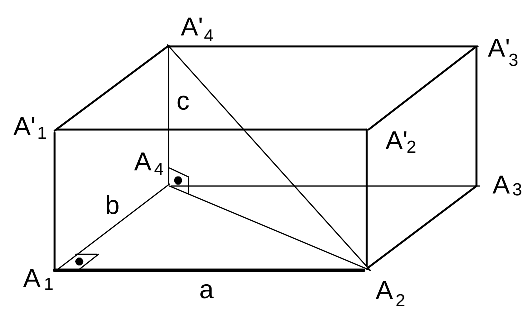


Figura 22.8: Medida da diagonal do paralelepípedo retângulo.

Lembre-se de que em um paralelepípedo retangular as bases são retângulos e as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Isso implica que os triângulos $A_1A_4A_2$ e $A_4A_4'A_2$ são triângulos retângulos, com hipotenusas A_4A_2 e $A_4'A_2$, respectivamente. Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned} m(A_4A_2)^2 &= m(A_1A_4)^2 + m(A_1A_2)^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{e} \\ m(A_4'A_2)^2 &= m(A_4A_2)^2 + m(A_4A_4')^2 = a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

Logo, $m(A_4'A_2) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. A prova para as outras diagonais é inteiramente análoga. Q.E.D.

Resumo

Nessa aula você aprendeu...

- A definição de prisma.
- Um caso particular importante de prisma: o paralelepípedo.
- Como calcular a área lateral de um prisma reto.
- Que as diagonais de um paralelepípedo se encontram em um ponto que as divide ao meio.

Exercícios

1. Determine a natureza de um prisma (isto é, se o prisma é triangular, quadrangular etc.), sabendo que a soma dos ângulos de todas as suas faces vale 2880^o.

2. Determine a área do triângulo $A_1A_2'A_4'$ da **Figura 22.9**, sabendo que o lado do cubo mede $10\,cm$.

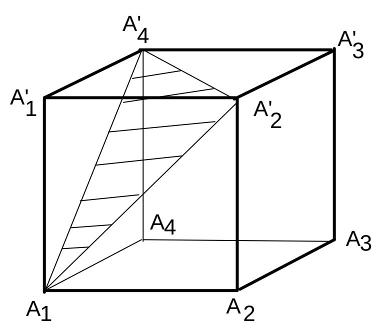


Figura 22.9: Exercício 2.

3. Determine a área do triângulo $A_2A_3A_1'$ do cubo da **Figura 22.10**, sabendo que o lado do cubo mede $10\,cm$.

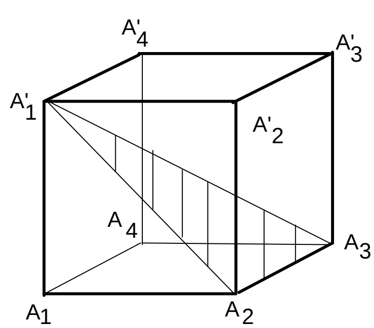


Figura 22.10: Exercício 3.

4. Determine a área do triângulo $A_1A_2'A_5'$ no prisma reto da **Figura 22.11**, sabendo que a base é um pentágono regular de $1\,m$ de lado e que as arestas laterais medem $2\,m$.

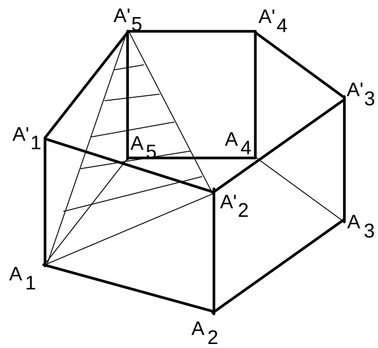


Figura 22.11: Exercício 4.

5. Em relação ao prisma do exercício anterior, determine a área do triângulo $A_1A_2'A_4'$.

6. Determine a área total de um paralelepípedo retangular, sabendo que sua diagonal mede $25\sqrt{2}\,cm$ e que a soma de suas dimensões vale $60\,cm$.

7. (UFES - 1982) Uma formiga mora na superfície de um cubo de aresta a. O menor caminho que ela deve seguir para ir de um vértice ao vértice oposto tem comprimento:

   (a) $a\sqrt{2}$ (b) $a\sqrt{3}$ (c) $3a$ (d) $(1+\sqrt{2})a$ (e) $a\sqrt{5}$

8. Determine os ângulos internos do triângulo $A_1A_2'A_4'$ do exercício 2. Determine $tg(A_2\widehat{A_3}A_1')$, sendo $A_2A_3A_1'$ o triângulo do exercício 3.

9. (CESGRANRIO-1982)

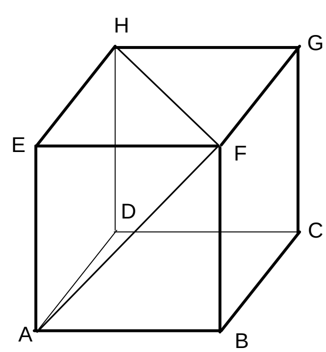


Figura 22.12: Exercício 9.

O ângulo formado pelas diagonais AF e FH do cubo da **Figura 22.12** mede:

(a) 30^o (b) 45^o (c) 60^o (d) 90^o (e) 108^o

10. A **Figura 22.13** mostra um paralelepípedo retangular de medidas 3, 2 e 1. Determine a distância do ponto G ao plano determinado pelos pontos C, E e H.

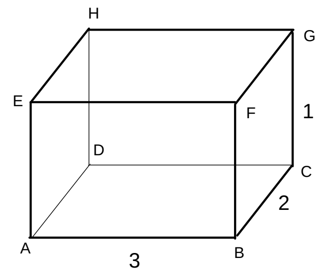


Figura 22.13: Exercício 10.

11. (FATEC, 1987) Na **Figura 22.14**, tem-se um prisma reto cuja diagonal principal mede $3a\sqrt{2}$.

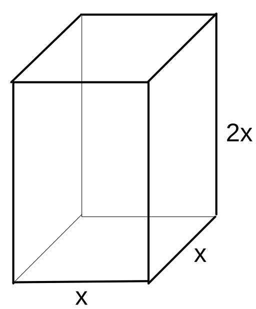


Figura 22.14: Exercício 11.

A área total desse prisma é:

(a) $30\,a^2$ (b) $24\,a^2$ (c) $18\,a^2$ (d) $12\,a^2$ (e) $6\,a^2$

12. (U.F. VIÇOSA - 1990) A **Figura 22.15** mostra um paralelepípedo de base quadrada. Sabe-se que um plano intersecta esse paralelepípedo. Dessa interseção, resulta o quadrilátero $MNOP$, cujos lados ON e OP formam ângulos de 30^o com a face $ABCD$.

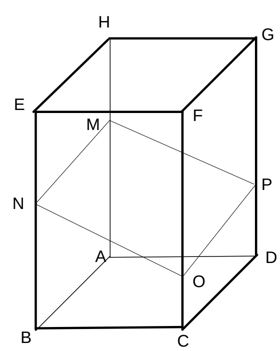


Figura 22.15: Exercício 12.

Se a área da base do paralelepípedo vale 3, então o perímetro de $MNOP$ vale:

(a) 8 (b) 4 (c) 6 (d) 10 (e) 12

13. (FUVEST-FGV, 1991) Na **Figura 22.16**, I e J são os centros das faces $BCGF$ e $EFGH$ do cubo $ABCDEFGH$ de aresta a.

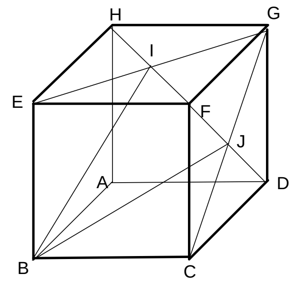


Figura 22.16: Exercício 13.

Os comprimentos dos segmentos AI e IJ são, respectivamente:

(a) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\ ,\ a\sqrt{2}$ (b) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\ ,\ \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (c) $a\sqrt{6}\ ,\ \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

(d) $a\sqrt{6}\ ,\ a\sqrt{2}$ (e) $2a\ ,\ \dfrac{a}{2}$

14. (UFF) Em um cubo de aresta ℓ, a distância entre o ponto de encontro de suas diagonais e qualquer de suas arestas é:

(a) $\ell\sqrt{3}$ (b) $\ell\sqrt{2}$ (c) $\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$ (d) $\dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$ (e) $\dfrac{\ell}{2}$

Aula 23 – A pirâmide

Objetivos

- Identificar e classificar pirâmides.
- Conhecer propriedades de pirâmides.

Ao ouvirmos a palavra pirâmide, logo nos vem à mente a imagem das três enormes construções localizadas no planalto de Gizé, as quais formam, provavelmente, o mais decantado grupo de monumentos em todo o mundo. Entretanto, os arqueólogos já encontraram mais de 80 pirâmides espalhadas por todo o Egito. Qual era sua finalidade e, principalmente, como foram construídas, são duas das mais intrigantes perguntas de toda a história da humanidade e que, talvez, nunca venham a ser respondidas ou, por outro lado, talvez venham a ter centenas de respostas conflitantes, conforme o ponto de vista de cada um de nós.

Introdução

Continuando o nosso estudo dos principais sólidos geométricos, veremos nesta aula a definição de pirâmide, seus elementos e suas partes.

Considere um polígono convexo $P = A_1A_2 \ldots A_n$ contido em um plano α, e um ponto A fora de α. Para todo ponto X pertencente a P ou ao seu interior, trace o segmento AX. A figura formada pela união dos segmentos AX é chamada de *pirâmide* (veja na **Figura 23.1** um caso particular em que P é um hexágono).

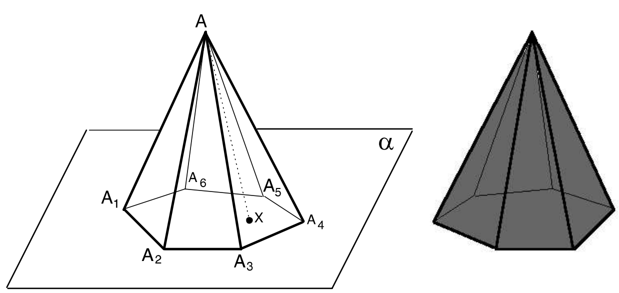


Figura 23.1: Pirâmide hexagonal.

O ponto A é o *vértice da pirâmide* e o polígono P, unido com o seu interior, é a *base da pirâmide*. Os segmentos AA_1, AA_2, ..., AA_n são chamados *arestas laterais* e os triângulos AA_1A_2, AA_2A_3, ..., AA_nA_1, unidos com seus interiores, são as *faces laterais*. A distância do vértice A ao plano da base é chamada *altura da pirâmide*. Se a base tem três lados, a pirâmide é chamada *triangular*; se tem quatro lados, *quadrangular*, e assim por diante. A pirâmide triangular também recebe o nome de *tetraedro*.

Uma pirâmide é chamada *regular* se sua base é um polígono regular e se o pé da perpendicular baixada do vértice ao plano da base coincide com o centro da base.

Falando de outra forma, uma pirâmide é regular se sua base é um polígono regular e se sua altura for a medida do segmento que une o vértice da pirâmide ao centro da base. Lembre-se de que o centro de um polígono regular é o centro da circunferência inscrita (ou circunscrita). Para alguns polígonos regulares, o centro é facilmente obtido.

Por exemplo, para triângulos, o centro é simplesmente o seu baricentro; para hexágonos, o centro é a interseção entre duas das maiores diagonais, como A_2A_5 e A_3A_6 na **Figura 23.2.a**.

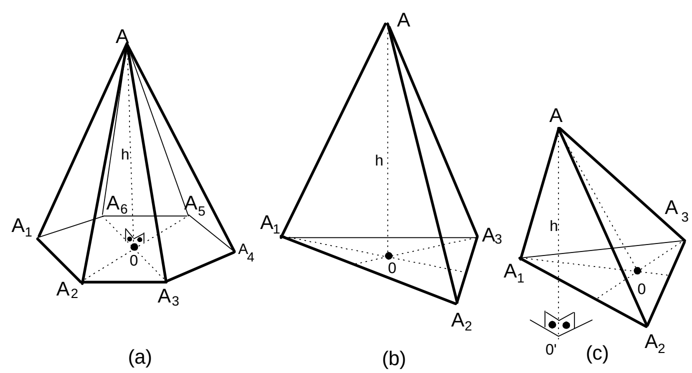


Figura 23.2: Pirâmides regulares e não regulares.

As pirâmides (a) e (b) da **Figura 23.2** são regulares, pois suas bases são polígonos regulares e a altura de cada uma delas é a medida do segmento AO. A pirâmide (c) não é regular, pois sua altura é diferente da medida de AO. Um tipo especial de pirâmide regular é o *tetraedro regular* que é uma pirâmide regular, de base triangular, com todas as arestas congruentes.

Para pirâmides regulares, vale a proposição a seguir.

Proposição 1

As faces laterais de uma pirâmide regular são triângulos isósceles congruentes.

Prova:

Considere uma pirâmide regular com vértice A, e cuja base é um polígono (regular) $P = A_1A_2 \ldots A_n$. Queremos mostrar que os triângulos AA_1A_2, AA_2A_3, …, AA_nA_1 são isósceles e congruentes entre si. Para isso, seja O o centro de P e chame de d o valor da distância de O a cada um dos vértices de P. Trace o segmento OA_1 (acompanhe na **Figura 23.3**, que ilustra o caso onde P é um hexágono).

Como a pirâmide é regular, sua altura h é a medida de AO, e o triângulo AA_1O é retângulo de hipotenusa AA_1. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$m(AA_1)^2 = m(AO)^2 + m(OA_1)^2 = h^2 + d^2,$$

de onde se conclui que $m(AA_1) = \sqrt{h^2 + d^2}$. Da mesma forma, prova-se que os segmentos AA_2, AA_3, ..., AA_n também medem $\sqrt{h^2 + d^2}$. Daí se conclui imediatamente que todas as faces laterais são triângulos isósceles. As bases desses triângulos são os lados do polígono P. Como P é regular, conclui-se que os triângulos AA_1A_2, AA_2A_3, ..., AA_nA_1 têm as mesmas medidas. Por L.L.L., segue que são todos congruentes entre si.

Q.E.D.

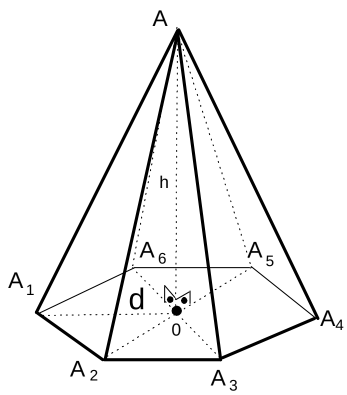


Figura 23.3: Pirâmide regular.

Segue dessa proposição que os segmentos ligando os vértices de uma pirâmide regular aos pontos médios dos lados da base são todos congruentes. Esses segmentos são chamados de apótemas da pirâmide, e são precisamente as alturas relativas às bases de suas faces laterais (veja a **Figura 23.4**). Também chamamos de apótema a medida desses segmentos.

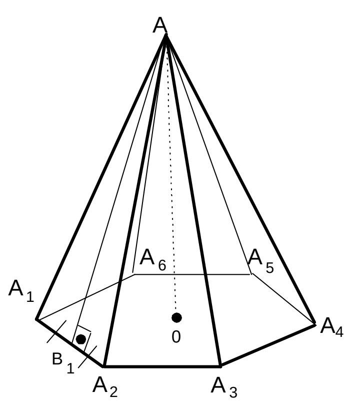


Figura 23.4: AB_1 é apótema da pirâmide.

Definição 1

A área lateral de uma pirâmide é a soma das áreas de suas faces laterais. A área total é a soma da área lateral com a área da base.

Vamos determinar a área lateral de uma pirâmide regular. Considere uma pirâmide regular cujo vértice é A e cuja base é um polígono $P = A_1A_2\dots A_n$. Sabemos que a altura relativa à base de cada face lateral é o apótema a da pirâmide. Logo

$$\begin{aligned}\text{Área lateral} &= \text{Área}(AA_1A_2) + \text{Área}(AA_2A_3) + \dots + \text{Área}(AA_nA_1)\\ &= \frac{1}{2}m(A_1A_2)a + \frac{1}{2}m(A_2A_3)a + \dots + \frac{1}{2}m(A_nA_1)a\\ &= \frac{1}{2}\left[m(A_1A_2) + m(A_2A_3) + \dots + m(A_nA_1)\right]a\\ &= \frac{1}{2}a(\text{perímetro de } P).\end{aligned}$$

Provamos então a seguinte proposição:

Proposição 2

A área lateral de uma pirâmide regular é a metade do produto do apótema pelo perímetro da base.

Considere agora uma pirâmide qualquer e suponha que a cortemos por um plano α' paralelo ao plano α da base. O plano α' divide a pirâmide em dois pedaços. A parte que não contém a base é de novo uma pirâmide, e já sabemos algumas coisas sobre ela. A parte que contém a base (veja a **Figura 23.5**) recebe o nome de pirâmide truncada ou tronco de pirâmide.

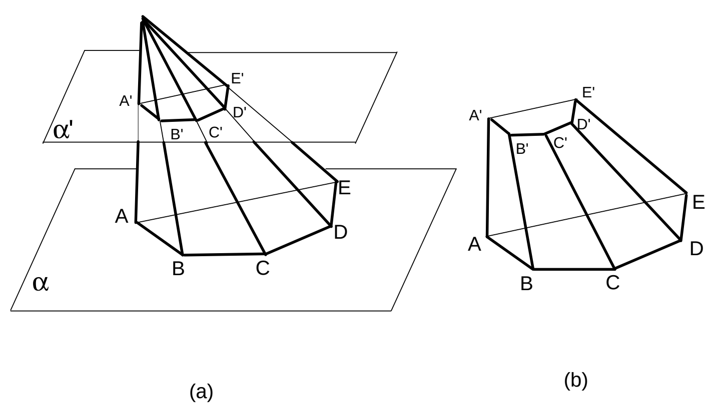


Figura 23.5: Pirâmide e pirâmide truncada.

Em uma pirâmide truncada, as faces contidas nos planos paralelos são chamadas bases. As demais faces são as faces laterais. Para a pirâmide truncada $A'B'C'D'E'ABCDE$, mostrada na **Figura 23.5.b**, as bases são os polígonos $A'B'C'D'E'$ e $ABCDE$. As faces laterais de uma pirâmide truncada são trapézios (justifique!).

Uma pirâmide truncada obtida a partir de uma pirâmide regular é chamada pirâmide truncada regular. As faces laterais de tal pirâmide são trapézios isósceles congruentes (veja exercício 17 desta aula). As alturas desses trapézios são chamadas apótemas da pirâmide truncada.

A área lateral de uma pirâmide truncada regular é dada pela proposição a seguir.

Proposição 3
A área lateral de uma pirâmide truncada regular é o produto do apótema pela média aritmética dos perímetros das bases.

Para a pirâmide truncada regular, mostrada na **Figura 23.6**, a proposição 3 diz que a sua área lateral é $\frac{a(p+p')}{2}$, onde a é o apótema e p e p' são os perímetros dos polígonos $ABCDEF$ e $A'B'C'D'E'F'$, respectivamente. A prova da proposição será deixada como exercício (veja exercício 18 desta aula).

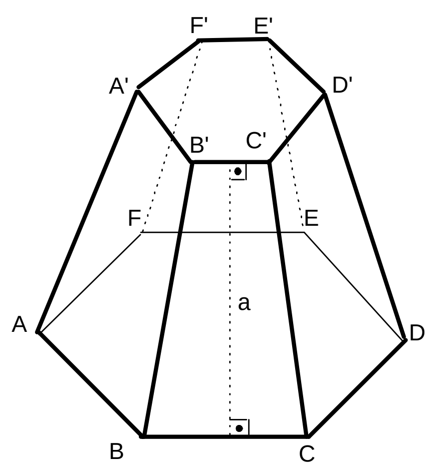


Figura 23.6: a é apótema da pirâmide truncada regular.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- A definição de pirâmide e de seus principais elementos.
- A calcular a área lateral de uma pirâmide regular.
- A calcular a área lateral de um tronco de pirâmide.

Exercícios

1. Determine a natureza de uma pirâmide, isto é, se a pirâmide é triangular, quadrangular etc., sabendo que a soma dos ângulos das faces é 2160^o.

2. Determine a altura de uma pirâmide regular, de base pentagonal, sabendo que todas as suas arestas medem $10\,cm$.

3. É possível construir uma pirâmide regular, de base hexagonal, de modo que todas as arestas tenham o mesmo comprimento?

4. A **Figura 23.7** mostra uma pirâmide regular de altura igual a $2\,m$ e base pentagonal de lado medindo $1\,m$. Determine a área do triângulo AFC.

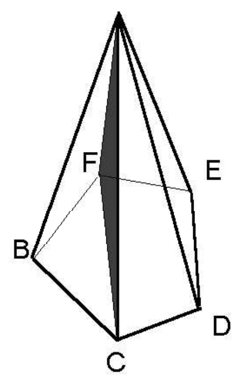


Figura 23.7: Exercício 4.

5. Determine a área total de um tetraedro regular de $1\,m$ de aresta.

6. Determine a altura de um tetraedro regular de $1\,m$ de aresta.

7. Determine a medida da aresta de um tetraedro regular, sabendo que, aumentada em $4\,m$, sua área aumenta em $40\sqrt{3}\,m^2$.

8. Em uma pirâmide regular de base triangular, a medida de seu apótema é igual à medida do lado da base. Se sua área total vale $10\,m^2$, determine sua altura.

9. Determine a relação entre a medida de uma aresta lateral e a medida de uma aresta da base de uma pirâmide regular de base triangular, para que a área lateral seja $\dfrac{4}{5}$ da área total.

10. Uma pirâmide regular de base triangular de lado medindo $10\,cm$ tem suas faces laterais formando um ângulo de 60^o com o plano da base. Determine a altura da pirâmide.

11. Determine o ângulo que as faces laterais de uma pirâmide regular de base hexagonal formam com o plano da base, sabendo que as arestas laterais medem $2\sqrt{5}\,cm$ e que as arestas da base medem $4\,cm$.

12. Na **Figura 23.8**, $ABCD$ é um tetraedro regular e M é o ponto médio de AD.

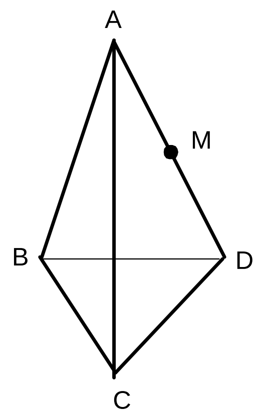


Figura 23.8: Exercício 12.

(a) Prove que o plano que contém $\overleftrightarrow{BC}$ e M é perpendicular a $\overleftrightarrow{AD}$.

(b) Se a aresta de $ABCD$ mede a, determine a distância entre as aresta $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

13. (CESGRANRIO-1987) Seja $VABC$ um tetraedro regular. O cosseno do ângulo α que a aresta VA faz com o plano ABC é:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

14. (ESCOLA NAVAL-1988) Em uma pirâmide triangular $VABC$, a base ABC é um triângulo equilátero e as arestas VA, VB e VC formam ângulos retos. A tangente do ângulo formado por uma face lateral e a base é igual a:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) 1 d) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt{3}$

15. (CESGRANRIO-1988) Em uma pirâmide $VABCDEF$ regular hexagonal, uma aresta lateral mede o dobro de uma aresta da base (veja a **Figura 23.9**).

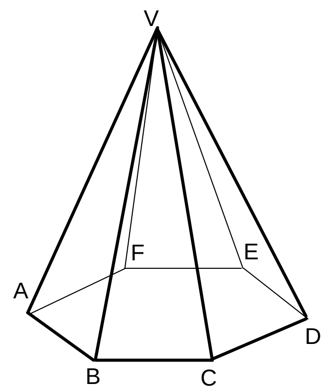


Figura 23.9: Exercício 15.

O ângulo $A\widehat{V}D$ formado por duas arestas laterais opostas mede:

a) 30^o b) 45^o c) 60^o d) 75^o e) 90^o

16. (UFF-1997) Marque a opção que indica quantos pares de retas reversas são formados pelas retas suportes das arestas de um tetraedro:

a) um par b) dois pares c) três pares d) quatro pares
e) cinco pares

17. (CESGRANRIO-1980) Considere a pirâmide hexagonal regular de altura h e lado da base medindo ℓ da **Figura 23.10**. Trace o segmento GD ligando D ao ponto G que divide VC ao meio.

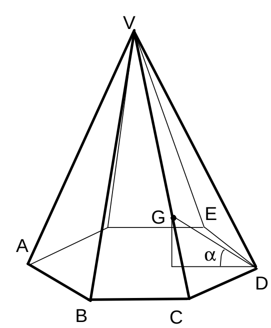


Figura 23.10: Exercício 17.

Se α é o ângulo agudo formado por GD e sua projeção na base da pirâmide, então $tg\alpha$ é igual a:

a) $\dfrac{h\sqrt{3}}{3\ell}$ b) $\dfrac{h}{2\ell}$ c) $\dfrac{h\sqrt{2}}{\ell}$ d) $\dfrac{h\sqrt{3}}{2\ell}$ e) $\dfrac{h\sqrt{3}}{\ell}$

18. (UFF-2000) No tetraedro regular representado na **Figura 23.11**, R e S são, respectivamente, os pontos médios de NP e OM.

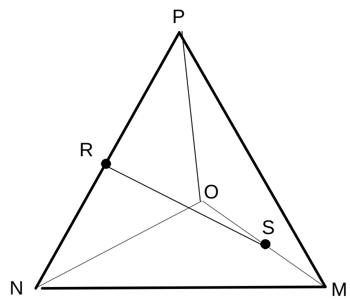


Figura 23.11: Exercício 18.

A razão $\dfrac{m(RS)}{m(MN)}$ é igual a:

a) $\sqrt{3}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $3\sqrt{2}$

19. Prove que as faces laterais de uma pirâmide truncada regular são trapézios isósceles congruentes.

20. Prove a proposição 3.

Aula 24 – O cilindro e o cone

Objetivo

- Identificar e classificar cilindros e cones.

Cilindro

Sejam α e α' dois planos paralelos e Γ um círculo contido em α. Seja r uma reta que corta α e α'. Por cada ponto X pertencente a Γ ou ao seu interior, trace a reta paralela a r e seja X' o ponto em que essa reta intersecta α'. A união de todos os segmentos XX' é chamada de *cilindro circular* (veja a **Figura 24.1**).

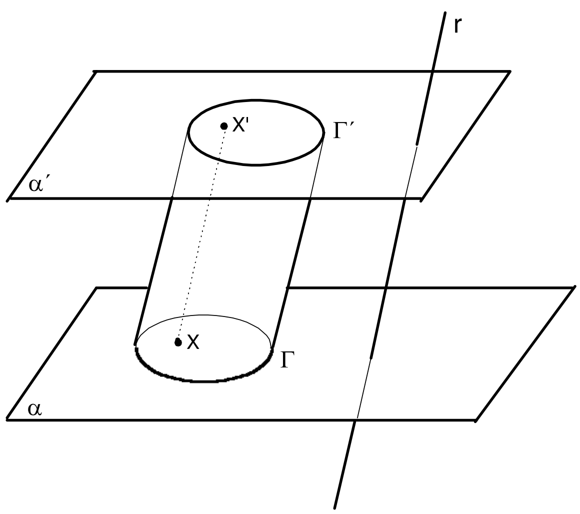


Figura 24.1: Cilindro circular.

A interseção do cilindro com o plano α' é um círculo Γ' de mesmo raio que Γ (veja a proposição 22 e o exercício 9 da aula 19).

Os círculos Γ e Γ' são as *bases do cilindro*, e cada segmento XX', quando $X \in \Gamma$, é chamado *geratriz do cilindro*.

A união das geratrizes de um cilindro é chamada de *superfície lateral*.

Se O e O' são os centros de Γ e Γ', respectivamente, a reta $\overleftrightarrow{OO'}$ é chamada de eixo do cilindro. Um cilindro é chamado *reto* se o seu eixo for perpendicular às bases. Caso contrário, o cilindro é chamado *oblíquo* (veja a **Figura 24.2**).

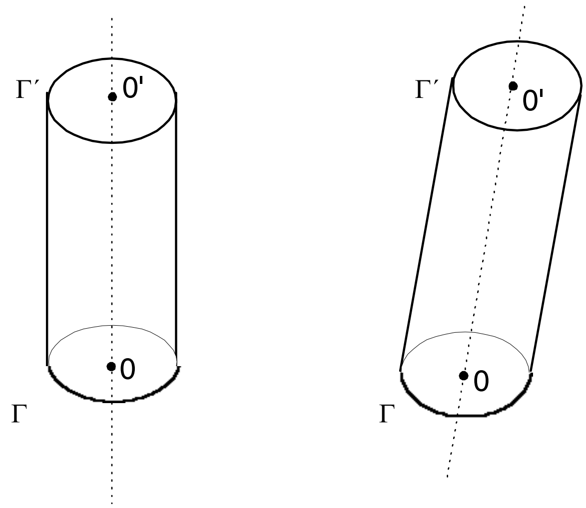


Figura 24.2: Cilindro circular reto e oblíquo.

A *altura* de um cilindro é definida como a distância entre os planos das bases. Se o cilindro for reto, sua altura é exatamente a medida do segmento OO' que liga os centros das bases.

Chamamos de *seção meridiana* de um cilindro à interseção do cilindro com um plano que contém o seu eixo. As seções meridianas de um cilindro são paralelogramos (retângulos ou não). Justifique!

Para um cilindro circular reto, as seções meridianas são retângulos com medidas h (altura) e $2r$ (diâmetro da base) (veja a **Figura 24.3**). Você pode imaginar um cilindro oblíquo com uma seção meridiana retangular?

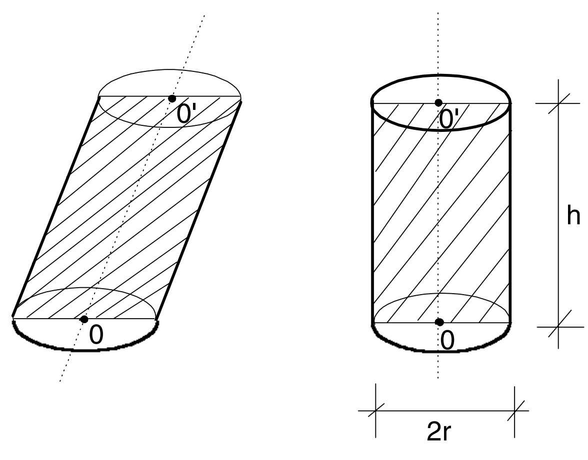


Figura 24.3: Seções meridianas de cilindros oblíquos e retos.

Um cilindro é chamado *equilátero* se ele for reto e se sua seção meridiana for um quadrado (veja a **Figura 24.4**).

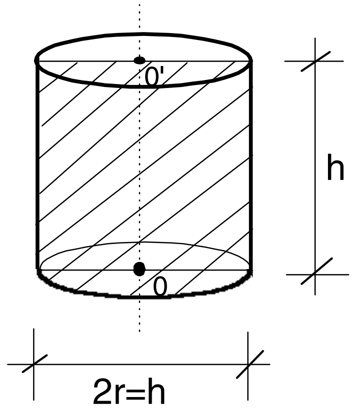


Figura 24.4: Cilindro equilátero.

Plano tangente a um cilindro

Seja C um cilindro cujas bases são círculos Γ e Γ' de centros O e O', respectivamente. Sejam α e α' os planos das bases e AA' uma geratriz de C. Chame de r a reta tangente a Γ em A e seja γ o plano que contém $\overleftrightarrow{AA'}$ e r (**Figura 24.5**).

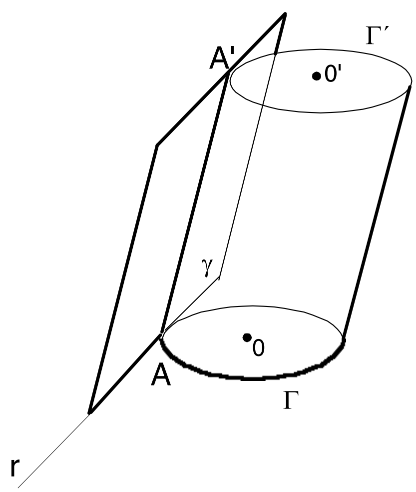


Figura 24.5: Plano tangente.

Podemos mostrar que a interseção entre γ e o cilindro é exatamente o segmento AA' (veja exercício 8). Um plano cuja interseção com um cilindro é uma geratiz é chamado de *plano tangente*.

Com relação à **Figura 24.5**, qualquer outro plano que contém $\overleftrightarrow{AA'}$ intersecta o cilindro segundo um paralelogramo (veja a **Figura 24.6**).

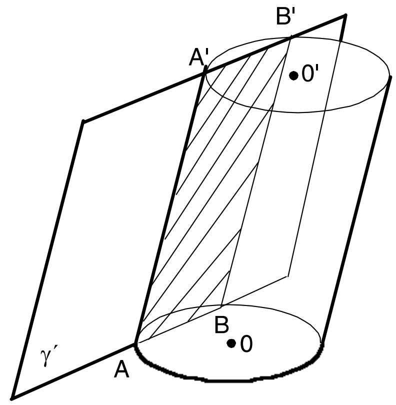


Figura 24.6: Plano não tangente contendo uma geratriz.

Prisma inscrito em um cilindro e circunscrito a um cilindro

Dizemos que um prisma está inscrito em um cilindro se os planos de suas bases coincidem com os planos das bases do cilindro e se suas arestas laterais são geratrizes do cilindro (**Figura 24.7.a**).

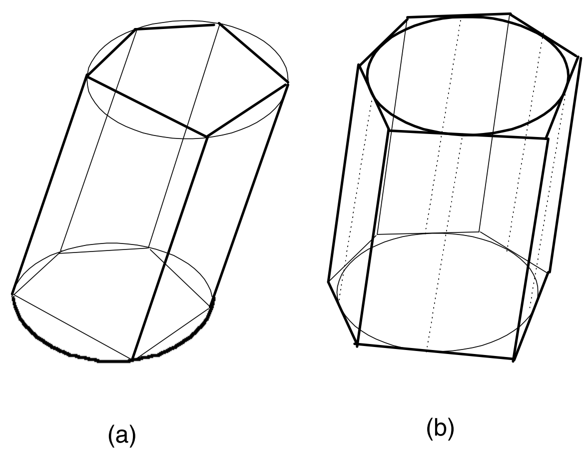


Figura 24.7: (a) Prisma inscrito. (b) Prisma circunscrito.

Dizemos que um prisma está circunscrito a um cilindro se os planos de suas bases coincidem com os planos das bases do cilindro e se os planos de suas faces laterais são tangentes ao cilindro (**Figura 24.7.b**).

As linhas tracejadas na **Figura 24.7.b** indicam as geratrizes ao longo das quais as faces laterais do prisma tangenciam o cilindro.

Cone

Considere um círculo Γ contido em um plano α e seja A um ponto fora de α. Para cada ponto X pertencente a Γ ou ao seu interior, trace o segmento AX. A união dos segmentos AX é chamada de cone (veja a **Figura 24.8**).

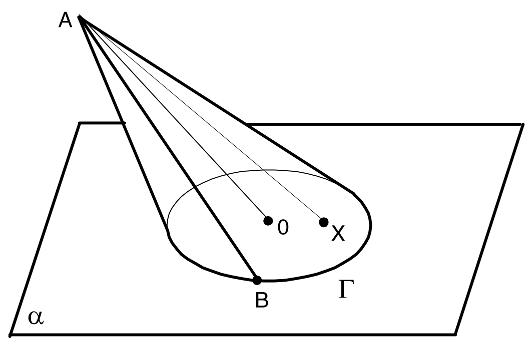


Figura 24.8: Cone.

A união do círculo Γ, com seu interior, é chamado *base do cone* e o ponto A, *vértice do cone*. Uma *geratriz do cone* é um segmento ligando o vértice a um ponto de Γ. Na **Figura 24.8**, AB é uma geratriz.

A reta contendo o vértice e o centro O de Γ é chamada de *eixo do cone*, e a união das geratrizes do cone é chamada *superfície lateral*. Um cone é chamado *reto* se o seu eixo for perpendicular ao plano da base. Caso contrário, o cone é chamado *oblíquo*. Veja a **Figura 24.9**.

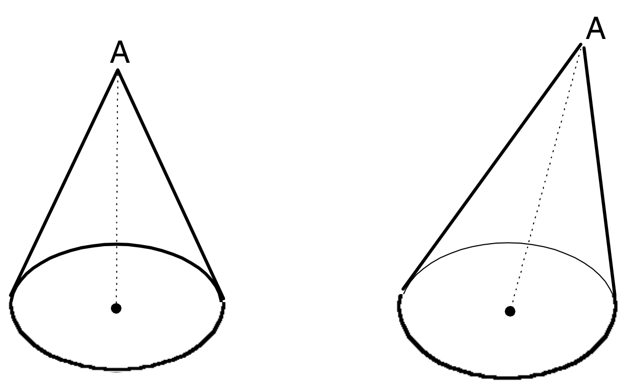


Figura 24.9: (a) Cone reto (b) Cone oblíquo.

Chamamos de *altura do cone* a distância do vértice ao plano da base. Para cones retos, a altura é dada pela medida do segmento ligando o vértice ao centro da base.

A interseção do cone com um plano que contém o seu eixo é chamada *seção meridiana*. As seções meridianas de um cone reto são triângulos isósceles congruentes (veja a **Figura 24.10**).

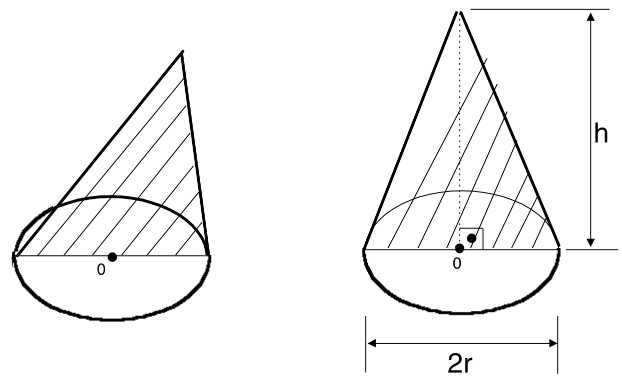


Figura 24.10: Seções meridianas dos cones oblíquo e reto.

Um cone é chamado *equilátero* se ele for reto e sua seção meridiana for um triângulo equilátero (veja a **Figura 24.11**).

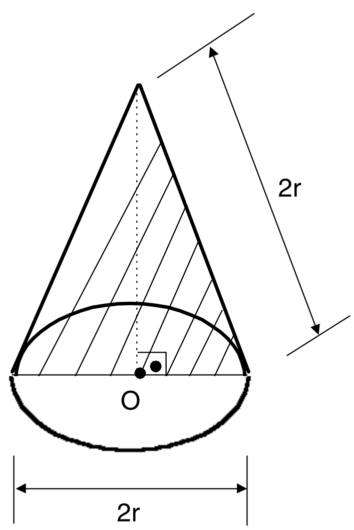


Figura 24.11: Cone equilátero.

Considere um cone de vértice A e base Γ e sejam AB uma geratriz e r a reta tangente a Γ em B. Chame de γ o plano que contém as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e r. Pode-se mostrar (veja exercício 17) que a interseção de γ com o cone é exatamente a geratriz AB. Um plano que intersecta o cone segundo uma geratriz é chamado de *plano tangente*. Veja a **Figura 24.12**.

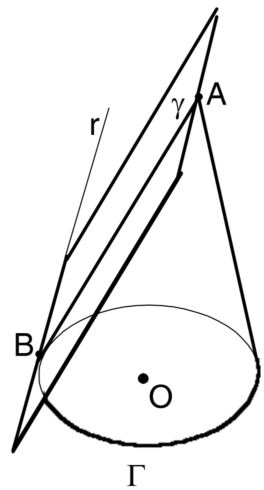


Figura 24.12: Plano tangente.

Com relação à **Figura 24.12**, qualquer outro plano que contém AB contém outra geratriz do cone e sua interseção com o cone é um triângulo (veja a **Figura 24.13**).

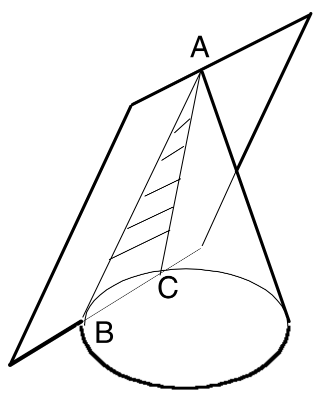


Figura 24.13: Plano não tangente contendo AB.

Pirâmide inscrita em um cone e circunscrita a um cone

Dizemos que uma pirâmide está inscrita em um cone se o seu vértice coincide com o vértice do cone e se sua base for um polígono inscrito na base do cone (veja **Figura 24.14.a**). Nesse caso, as arestas laterais da pirâmide são geratrizes do cone.

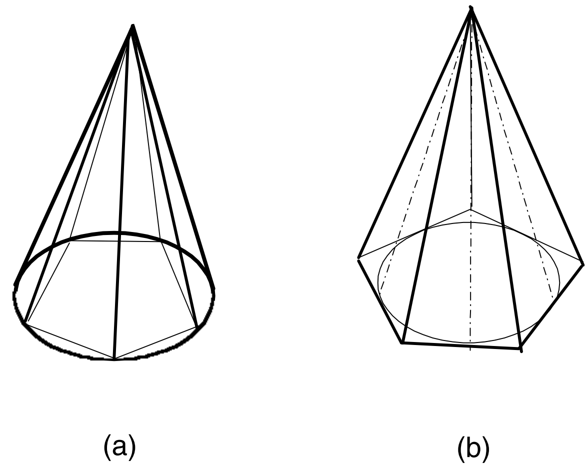


Figura 24.14: (a) Pirâmide inscrita. (b) Pirâmide circunscrita.

Dizemos que uma pirâmide está circunscrita a um cone se o seu vértice coincide com o vértice do cone e se sua base for um polígono circunscrito à base do cone (**Figura 24.14.b**). Nesse caso, as faces laterais da pirâmide são tangentes ao cone.

As linhas tracejadas da **Figura 24.14.b** indicam as geratrizes segundo as quais as faces laterais da pirâmide tangenciam o cone.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- As definições de cilindro e de cone.
- Sobre os elementos de um cilindro e de um cone.
- Sobre prisma inscrito em um cilindro e circunscrito a um cilindro.
- Sobre pirâmide inscrita em um cone e circunscrita a um cone.

Exercícios

1. Determine a altura de um cilindro, sabendo que as geratrizes medem $20\,cm$ e que formam um ângulo de 60^o com o plano da base.

2. Um cilindro reto, com $10\,cm$ de altura e raio da base igual a $13\,cm$, é cortado por um plano paralelo ao eixo e distante $5\,cm$ desse eixo. Determine a área da seção plana determinada por esse plano.

3. Um cilindro reto, com 12 cm de altura e raio da base igual a 4 cm, é cortado por um plano paralelo ao eixo, de modo que a seção plana determinada tem área igual à área da base. Determine a distância desse plano ao eixo.

4. Um plano secciona um cilindro reto paralelamente ao eixo e forma um arco de 60^o com a base do cilindro. Se a altura do cilindro é 20 cm e a distância do plano ao eixo é de 4 cm, determine a área da seção.

5. A **Figura 24.15** mostra um cilindro reto, de 1 m de altura e raio da base igual a 40 cm, inclinado de 45^o.

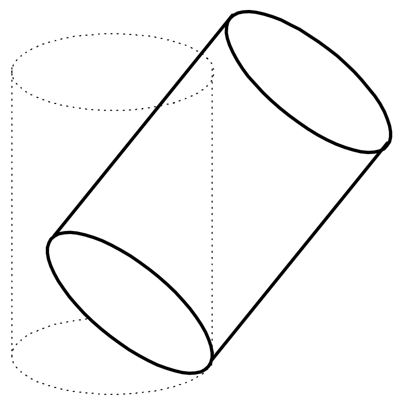


Figura 24.15: Exercício 5.

Determine a altura do ponto mais alto do cilindro.

6. Considere a afirmativa: se cortarmos um cilindro reto por um plano inclinado em relação ao plano da base, a seção plana é um círculo. (veja a **Figura 24.16**). A afirmativa é verdadeira ou falsa? Justifique.

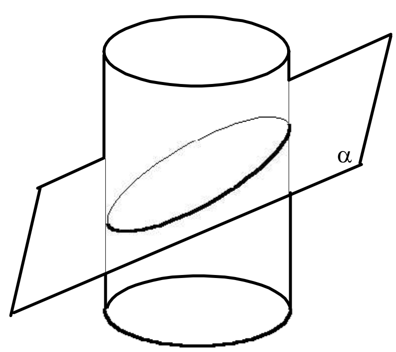


Figura 24.16: Exercício 6.

7. Na **Figura 24.17**, $ABCD$ é um tetraedro regular de $1\,m$ de aresta e α é um plano paralelo ao plano de BCD. Seja $B'C'D'$ a seção determinada por α. Se a distância de α ao plano de BCD é metade da altura do tetraedro, determine a altura e o raio da base do cilindro reto que tem uma base no plano de BCD e a outra base está inscrita no triângulo $B'C'D'$.

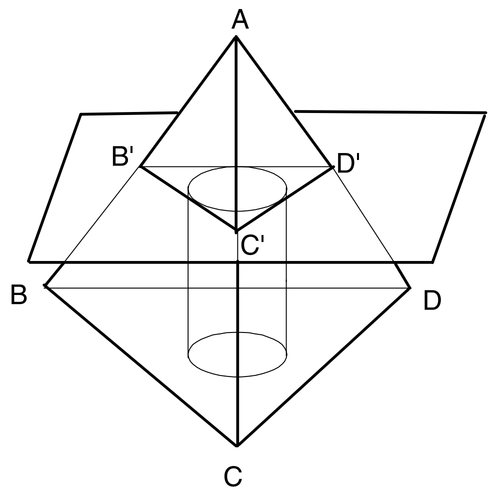


Figura 24.17: Exercício 7.

8. Seja AA' uma geratriz de um cilindro e seja r a reta tangente a Γ em A, sendo Γ a base que contém A. Se γ é o plano que contém $\overleftrightarrow{AA'}$ e r, prove que a interseção entre γ e o cilindro é exatamente o segmento AA'.

9. Determine o diâmetro da base de um cone reto de $24\,cm$ de altura, sabendo que sua geratriz mede $25\,cm$.

10. Um dado cone tem uma geratriz perpendicular ao plano da base medindo $15\,cm$. Se o diâmetro da base mede $8\,cm$, determine a medida da maior geratriz do cone.

11. Determine a altura de um cone reto, cujo raio da base mede $3\,cm$, sabendo que a área da seção meridiana é igual à área da base.

12. Um cone reto, de $10\,cm$ de altura e raio da base medindo $4\,cm$, é cortado por um plano perpendicular ao plano da base e distando $1\,cm$ do eixo do cone. Determine a maior distância entre um ponto da seção e o plano da base.

13. Um cilindro reto tem $4\,cm$ de altura e raio da base igual a $1\,cm$. Considere um cone cuja base coincide com uma base do cilindro e cujo vértice é o centro da outra base. Um plano paralelo às bases intersecta os sólidos de modo que a região exterior ao cone e interior ao cilindro tem área igual à metade da área da base do cilindro. Determine a distância desse plano ao plano da base do cone.

14. Em um cone reto de $4\,cm$ de altura está inscrita uma pirâmide hexagonal regular, cujo apótema mede $5\,cm$. Determine a área da seção meridiana do cone.

15. Um pedaço de papel, na forma de um setor circular de 72^o e raio igual a $5\,cm$, é dobrado (como na **Figura 24.18**) até ser obtido um cone.

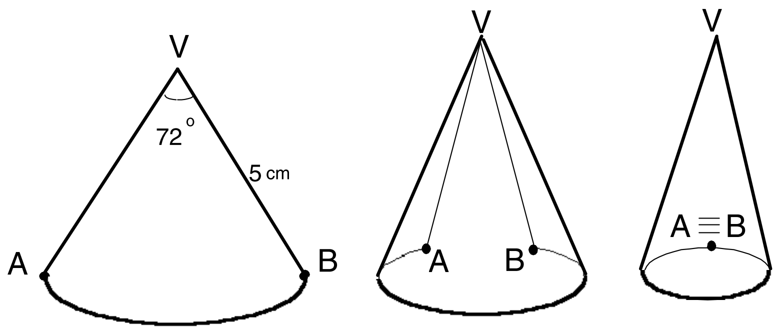


Figura 24.18: Exercício 15.

Determine a altura do cone.

16. Se o raio da base, a altura e a geratriz de um cone reto constituem, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão igual a 1, determine a altura do cone.

17. Considere um cone de vértice A e base Γ e seja B um ponto pertencente a Γ. Seja r a reta tangente a Γ em B e chame de γ o plano que contém r e $\overleftrightarrow{AB}$. Prove que a interseção entre γ e o cone é exatamente a geratriz AB.

Informações sobre a próxima aula

Na próxima aula, estudaremos um sólido cuja superfície não contém segmentos de reta.

Aula 25 – A esfera

Objetivos

- Identificar a esfera e seus elementos.
- Estudar posições relativas entre esferas e entre planos e esferas.

Introdução

Sejam O um ponto e r um número real positivo. Chamamos de esfera de centro O e raio r ao conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto O é r (veja a **Figura 25.1**).

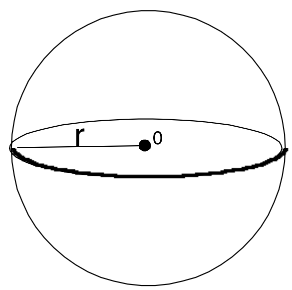


Figura 25.1: Esfera de centro O e raio r.

Também chamamos *raio* a todo segmento ligando O a um ponto da *esfera*. Se A e B são pontos da esfera tais que o segmento AB contém O, dizemos que AB é um *diâmetro* e que A e B são diametralmente opostos. A região limitada pela esfera é o conjunto de pontos cuja distância ao ponto O é menor ou igual a r.

Seções planas de uma esfera

Considere a interseção de uma esfera de centro O e raio r com um plano α cuja distância ao centro da esfera seja um número d menor que r e considere um ponto A nessa interseção. O plano α é dito *secante* à esfera.

Seja O' o pé da perpendicular ao plano α traçada a partir de O e trace os segmentos OO', OA e $O'A$ (veja a **Figura 25.2**). Como $\overleftrightarrow{OO'}$ é perpendicular a α e $O'A \subset \alpha$, tem-se que o triângulo $OO'A$ é retângulo de hipotenusa OA.

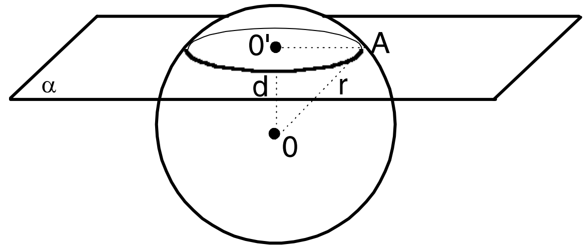


Figura 25.2: Seção plana de uma esfera.

Pelo Teorema de Pitágoras temos

$$r^2 = m(OA)^2 = m(OO')^2 + m(O'A)^2 = d^2 + m(O'A)^2,$$

o que implica que

$$m(O'A) = \sqrt{r^2 - d^2}.$$

Assim, a distância ao ponto O' de todo ponto da interseção entre α e a esfera vale $\sqrt{r^2 - d^2}$, o que mostra que essa interseção é o círculo contido em α, de centro O' e raio $r' = \sqrt{r^2 - d^2}$. Quanto menor for d, maior será o valor de r'. Se $d = 0$, ou seja, se o plano α passar pela origem, tem-se $r' = r$, o que significa que a interseção da esfera com um plano que passa pelo centro é um círculo de mesmo raio que a esfera. Chamamos tal círculo de *círculo máximo*. Na **Figura 25.3**, a interseção de α com a esfera é um círculo máximo.

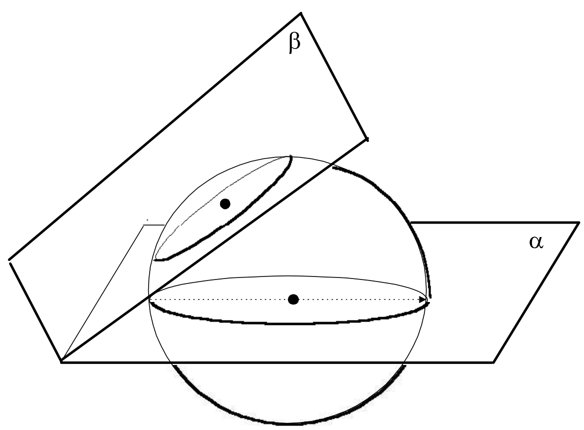


Figura 25.3: Seções de uma esfera.

Provamos assim a seguinte proposição:

Proposição 1

A interseção de um plano com uma esfera é um círculo cujo centro é o pé da perpendicular ao plano traçada a partir do centro da esfera. Se dois planos equidistam do centro da esfera, as seções planas que eles determinam são círculos de mesmo raio.

Se A e B são pontos diametralmente opostos de uma esfera, B é o ponto da esfera mais distante de A, ou seja, para qualquer outro ponto C tem-se $m(AB) > m(AC)$.

Para ver isso, basta observar que o triângulo ABC é retângulo de hipotenusa AB (veja **Figura 25.4**).

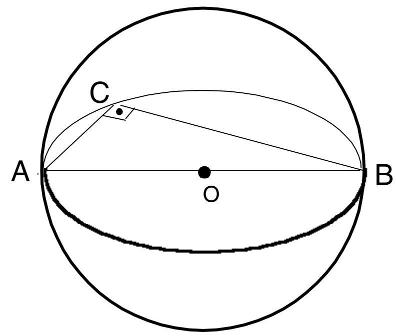


Figura 25.4: B é o ponto mais distante de A.

Vimos anteriormente que, se um plano secciona uma esfera, ele o faz segundo um círculo. Veremos agora uma outra possibilidade. Considere uma esfera de centro O e raio r e tome um ponto A sobre ela. Chame de α o plano que passa por A e é perpendicular a OA (veja **Figura 25.5**).

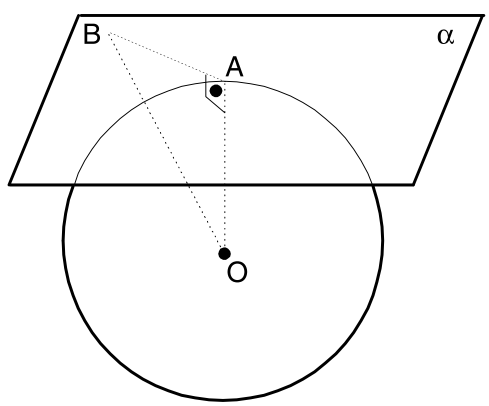


Figura 25.5: $OA \perp \alpha$.

Para todo ponto $B \neq A$ e pertencente a α, tem-se que $\overleftrightarrow{OA}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$, pois $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$ e $\overleftrightarrow{OA}$ é perpendicular a α. Logo, o triângulo OAB é retângulo com ângulo reto em A e, portanto, $m(OB) > m(OA) = r$. Assim, qualquer ponto de α diferente do ponto A está fora da esfera. Conseqüentemente, A é o único ponto na interseção de α com a esfera. Quando ocorre de um plano intersectar uma esfera em apenas um ponto, dizemos que esse plano é *tangente* à esfera.

Provamos, então, a seguinte proposição:

Proposição 2
Se um plano é perpendicular a um raio de uma esfera em sua extremidade, então ele é tangente à esfera.

Analogamente ao que ocorre na tangência entre uma reta e um círculo, a recíproca da proposição anterior é também verdadeira:

Proposição 3
Se um plano é tangente a uma esfera, então ele é perpendicular ao raio com extremidade no ponto de tangência.

Deixaremos a prova da proposição anterior como exercício (veja o exercício 6 desta aula).

Há uma terceira possibilidade para a posição relativa entre uma esfera e um plano. Se a distância entre o centro da esfera e o plano for maior que o raio da esfera, então eles não se intersectam, e o plano é chamado de *exterior*. Veja na **Figura 25.6** as posições relativas entre um plano e uma esfera.

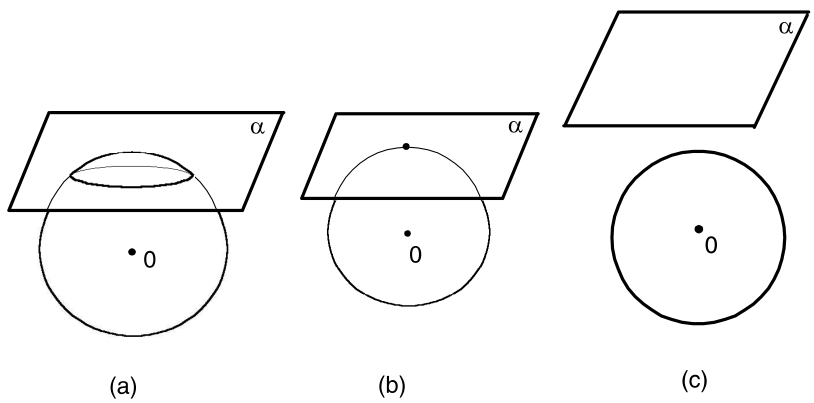


Figura 25.6: Posições relativas entre um plano e uma esfera: (a) plano secante, (b) plano tangente e (c) plano exterior.

Posições relativas entre esferas

As posições relativas entre duas esferas são bastante parecidas com as posições relativas entre dois círculos. Duas esferas são ditas *disjuntas* quando não têm nenhum ponto em comum. Quanto possuem exatamente um ponto em comum, elas são chamadas *tangentes*. Quando elas se intersectam em mais de um ponto, são chamadas *secantes*. No caso de esferas tangentes, pode-se mostrar (veja exercício 11) que a reta que liga os seus centros contém o ponto de interseção (chamado *ponto de tangência*). Na **Figura 25.7**, temos exemplos de esferas disjuntas ((a) e (b)), tangentes interiormente ((c)), tangentes exteriormente ((d)) e secantes ((e)).

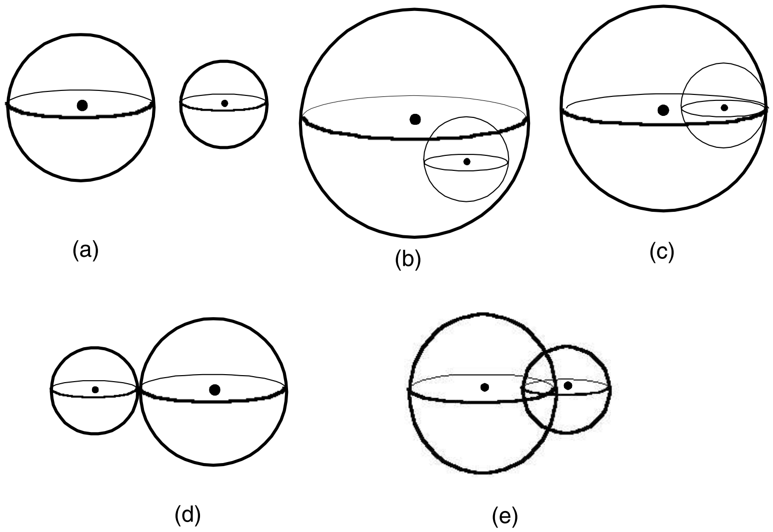


Figura 25.7: Posições relativas entre duas esferas.

Vamos determinar, agora, a interseção entre esferas secantes (**Figura 25.7.e**). Para isso, considere duas esferas S_1 e S_2, centradas em O_1 e O_2, respectivamente, e seja A um ponto nessa interseção. Chame de α o plano passando por A e perpendicular à reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ e seja $O = \alpha \cap \overleftrightarrow{O_1O_2}$. Vamos estudar o caso em que O pertence ao interior do segmento O_1O_2 (**Figura 25.8**). O estudo dos outros casos é análogo, e será deixado como exercício.

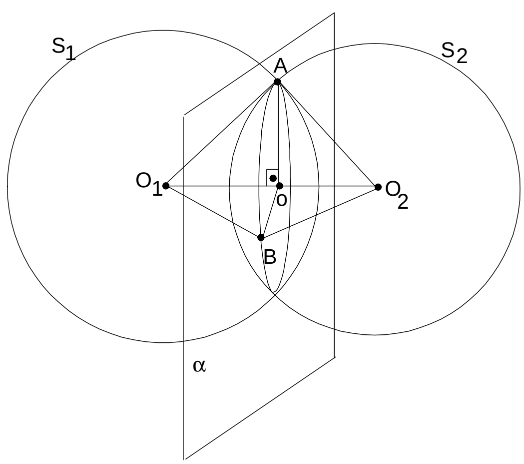


Figura 25.8: Esferas secantes.

Vamos mostrar inicialmente que $S_1 \cap S_2$ está contido em α. Com esse objetivo, considere qualquer outro ponto B pertencente a $S_1 \cap S_2$, e trace os segmentos O_1B, O_2B, O_1A, O_2A, OB e OA. Temos $O_1A \equiv O_1B$ (pois A e B pertencem a S_1) e $O_2A \equiv O_2B$(pois A e B pertencem a S_2). Como O_1O_2 é comum aos triângulos O_1AO_2 e O_1BO_2, segue de L.L.L. que $O_1AO_2 \equiv O_1BO_2$. Em conseqüência, $A\widehat{O_1}O_2 \equiv B\widehat{O_1}O_2$. Agora compare os triângulos AO_1O

e BO_1O. Temos $O_1A \equiv O_1B$ e $A\widehat{O_1}O \equiv B\widehat{O_1}O$ (provado anteriormente). Como O_1O é comum, segue de L.A.L. que $AO_1O \equiv BO_1O$. Conseqüentemente, $A\widehat{O}O_1 \equiv B\widehat{O}O_1$ e $OB \equiv OA$. Como $A\widehat{O}O_1$ é reto, pois $OA \subset \alpha$ e $\overleftrightarrow{O_1O} \perp \alpha$, obtemos que $B\widehat{O}O_1$ é reto e, portanto, $B \in \alpha$. Como $OB \equiv OA$, tem-se que B pertence à esfera de centro O e raio OA.

Concluímos que $S_1 \cap S_2$ está contido em α e na esfera de centro O e raio OA. Como já sabemos que a interseção entre um plano e uma esfera é um círculo, segue que $S_1 \cap S_2$ está contido no círculo de centro O e raio OA contido no plano α. Deixamos como exercício a prova de que todo ponto desse círculo pertence a $S_1 \cap S_2$. Está provada a seguinte proposição:

Proposição 4

A interseção entre duas esferas secantes é um círculo. O centro desse círculo pertence à reta que contém os centros das esferas.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- A definição de esfera.
- Que as seções planas de uma esfera são círculos.
- Que a interseção entre duas esferas secantes é um círculo.

Exercícios

1. Um plano, distando $12\,cm$ do centro de uma esfera, secciona essa esfera, segundo um círculo de raio igual a $5\,cm$. Determine o raio da esfera.

2. Duas esferas se cortam segundo um círculo de raio r. Se os raios das esferas valem R_1 e R_2, determine a distância entre os centros das esferas.

3. Uma esfera de raio r é seccionada por um plano α de modo que a seção plana determinada tem área igual à metade da área da seção plana determinada por um plano que passa pelo centro da esfera. Determine a distância do centro da esfera ao plano α.

4. Os raios de duas esferas concêntricas valem $29\,cm$ e $21\,cm$. Calcule a área da seção feita na esfera maior por um plano tangente à esfera menor.

5. Considere uma esfera de raio r e um ponto P distando $2r$ do centro da esfera. Determine o conjunto dos pontos da esfera cuja distância a P é igual a $2r$.

6. Se um plano é tangente a uma esfera, prove que ele é perpendicular ao raio com extremidade no ponto de tangência.

7. Um cone reto com raio da base medindo $6\,cm$ está contido em uma esfera de $8\,cm$ de raio. Determine a maior altura que o cone pode ter.

8. Determine o raio da maior esfera que cabe dentro de um cone reto de altura $12\,cm$ e raio da base igual a $5\,cm$.

9. Dados dois pontos distintos A e B, prove que é uma esfera o conjunto dos pés das perpendiculares traçadas de A aos planos que passam por B.

10. (FUVEST-2001) No jogo de bocha, disputado em um terreno plano, o objetivo é conseguir lançar uma bola de raio 8 o mais próximo possível de uma bola menor de raio 4. Em um lançamente, um jogador conseguiu fazer com que as duas bolas ficassem encostadas. A distância entre os pontos A e B em que as bolas tocam o chão é:

    a) 8 b) $6\sqrt{2}$ c) $8\sqrt{2}$ d) $4\sqrt{3}$ e) $6\sqrt{3}$

11. Sejam S_1 e S_2 duas esferas tangentes (interior ou exteriormente) em um ponto T. Se O_1 e O_2 são os centros de S_1 e S_2, respectivamente, prove que O_1, O_2 e T são colineares. Conclua que o plano tangente a S_1 em T coincide com o plano tangente a S_2 em T.

12. Sejam α um plano e r uma reta perpendicular a α. Seja $Q = r \cap \alpha$ e tome um ponto $P \neq Q$ em r. Prove que um ponto A pertence a α se e somente se o ângulo $P\widehat{Q}A$ é reto.

13. (UFF-1994) Considere duas retas perpendiculares r e s e um segmento de reta MN contido em r. Pode-se afirmar, quanto à existência de esferas de centros na reta s que passam por M e N que:

    a) existem duas únicas.

    b) existem no máximo três.

    c) existe uma infinidade.

    d) não existe nenhuma.

    e) se existir uma, existirá uma infinidade.

Aula 26 – Poliedros

Objetivos

- Identificar poliedros
- Aplicar o Teorema de Euler

Introdução

Nesta aula estudaremos outros exemplos de "figuras" no espaço: os *poliedros*

Começaremos com a definição geral, dada a seguir.

Definição 1
Poliedro é a reunião de um número finito de polígonos planos, chamados *faces*, tais que:

- cada lado desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono;
- a interseção de dois polígonos quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice comum, ou é vazia.

Cada lado de cada polígono é chamado *aresta* do poliedro, e cada vértice de cada polígono é chamado *vértice* do poliedro.

Todo poliedro limita uma região do espaço chamada *interior do poliedro.* Também chamaremos de poliedro a união de um poliedro com seu interior.

Como exemplos de poliedros, podemos citar todos os prismas e todas as pirâmides. A **Figura 26.1** apresenta outros exemplos de poliedros.

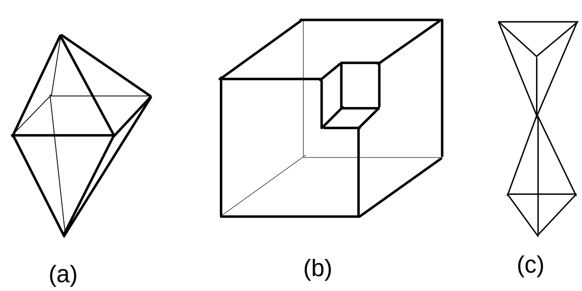


Figura 26.1: Exemplos de poliedros.

A **Figura 26.2** mostra exemplos de figuras que não são poliedros.

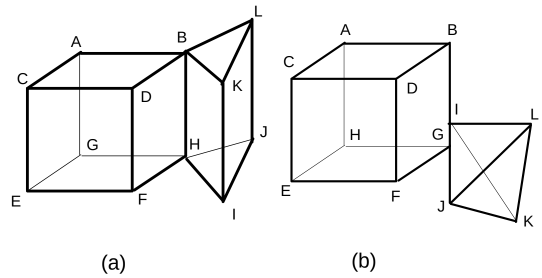


Figura 26.2: Exemplos de figuras que não são poliedros.

O exemplo da **Figura 26.2.a** não é poliedro, pois a aresta BH é lado de quatro faces (DFHB, BHIK, BHJL e AGHB), não cumprindo, assim, a primeira condição na definição de poliedro. O exemplo da **Figura 26.2.b** não é poliedro, pois a interseção entre os polígonos $DBGF$ e IJL é o segmento IG, que não é lado nem vértice do poliedro, não cumprindo, assim, a segunda condição na definição de poliedro.

Teorema de Euler

Na Aula 6 definimos polígonos convexos. A noção de convexidade para polígonos, que são figuras planas, estende-se para poliedros, que são figuras no espaço.

Definição 2

Um conjunto C do espaço é chamado convexo se, para quaisquer dois pontos A e B pertencentes a C, o segmento AB está inteiramente contido em C.

Compare a definição acima com a de polígonos convexos da aula 6.

Definição 3

Um poliedro é chamado convexo se o seu interior for um conjunto convexo.

Voltando à **Figura 26.1**, vemos que o poliedro **26.1.a** é convexo, enquanto os poliedros **26.1.b** e **26.1.c** não são convexos. Todos os prismas e pirâmides são poliedros convexos.

O que faremos agora é contar o número de arestas, de vértices e de faces de alguns poliedros convexos. Para facilitar essa tarefa, usaremos as letras V, A e F para designar, respectivamente, o número de vértices, de arestas e de faces de um poliedro.

Consideremos, primeiramente, os prismas. Se cada base do prisma tiver n lados, então $V = 2n$, $A = 3n$ e $F = n + 2$ e, assim,

$$V - A + F = 2n - 3n + n + 2 = 2.$$

Consideremos, agora, as pirâmides. Se o números de lados da base da pirâmide for n, então $V = n + 1$, $A = 2n$ e $F = n + 1$, de onde se obtém que

$$V - A + F = n + 1 - 2n + n + 1 = 2.$$

Para o poliedro da **Figura 26.1.a**, temos $V = 6$, $A = 12$ e $F = 8$ e, portanto, $V - A + F = 2$. Na verdade, para todo poliedro convexo, vale a relação $V - A + F = 2$. Essa relação foi descoberta por Euler:

A fórmula de Euler $V - A + F = 2$, válida para poliedros convexos, apareceu pela primeira vez em uma carta para Goldback em 1750. Existem várias provas para a fórmula. Na realidade, ela é válida para uma classe maior de poliedros: para saber se a fórmula vale para um determinado poliedro, imagine que ele seja feito de borracha. Se ao inflá-lo ele assumir a forma de uma esfera, então a fórmula de Euler é valida. Note que o poliedro da **Figura 26.1.b** não é convexo, mas satisfaz essa condição.

Teorema de Euler

Para todo poliedro convexo tem-se que $V - A + F = 2$, onde V é o número de vértices, A, o número de arestas e F, o número de faces do poliedro.

A beleza do teorema acima está na simplicidade de seu enunciado. É claro que é muito fácil determinar $V - A + F$ para qualquer poliedro que nos for dado, mas não podemos esquecer que existem infinitos deles. Lembre-se de que uma regra só é aceita em Matemática se pudermos prová-la usando apenas o raciocínio lógico e os resultados já estabelecidos.

Não faremos aqui uma prova do teorema de Euler. Ao leitor interessado, recomendamos *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 2, página 235. Lá se encontra uma prova que é praticamente a que foi publicada na *Revista do Professor de Matemática*, número 3, 1983, pelo professor Zoroastro Azambuja Filho.

Para poliedros não convexos, a relação de Euler pode valer ou não. Para o poliedro da **Figura 26.1.b**, por exemplo, tem-se $V = 14$, $A = 21$ e $F = 9$ e, portanto, $V - A + F = 2$. Para o poliedro da **Figura 26.1.c**, temos $V = 7$, $A = 12$ e $F = 8$ e, então, $V - A + F = 3$. Nesse caso, a relação de Euler não vale.

Um outro exemplo de poliedro para o qual não vale a relação de Euler está ilustrado na **Figura 26.3**.

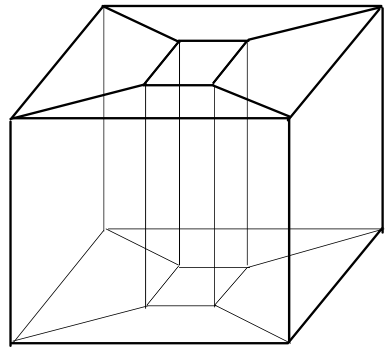


Figura 26.3: Poliedro para o qual não vale a relação de Euler.

O número $V - A + F$ é chamado característica de Euler , e, para poliedros como os que estamos estudando, vale a seguinte fórmula: $V - A + F = 2 - 2G$, sendo G o número de "túneis" do poliedro (chamado gênero do poliedro). Para entender melhor o que queremos dizer com "túneis", observe a figura 3 de um poliedro com um "túnel" (gênero 1).

Para esse poliedro, tem-se $V = 16$, $A = 32$ e $F = 16$ e, portanto, $V - A + F = 0$.

Estudaremos, agora, um tipo especial de poliedro, chamado *poliedro regular*.

Poliedros regulares

Definição 4

Poliedro regular é um poliedro convexo em que as faces são polígonos regulares congruentes e que em todos os vértices concorrem com o mesmo número de arestas.

Como exemplos de poliedros regulares, temos o cubo (em que todas as faces são quadrados), o tetraedro regular (em que todas as faces são triângulos equiláteros) e o octaedro regular (em que todas as faces são triângulos equiláteros). Veja a **Figura 26.4**. O cubo também é chamado de hexaedro regular. Repare que o nome de alguns poliedros está relacionado ao número de faces, por exemplo: tetraedro - quatro faces, octaedro - oito faces, etc.

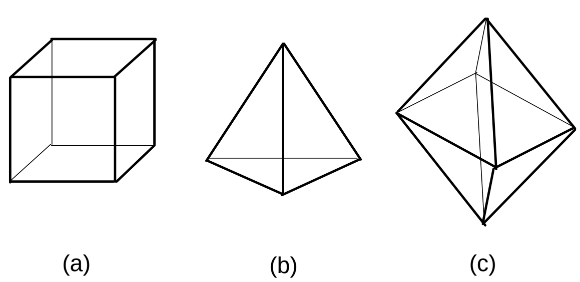


Figura 26.4: (a) Cubo, (b) tetraedro regular (c) octaedro regular.

Outros exemplos de poliedros regulares são o icosaedro regular (em que todas as faces são triângulos equiláteros) e o dodecaedro regular (em que todas as faces são pentágonos regulares). Veja a **Figura 26.5**.

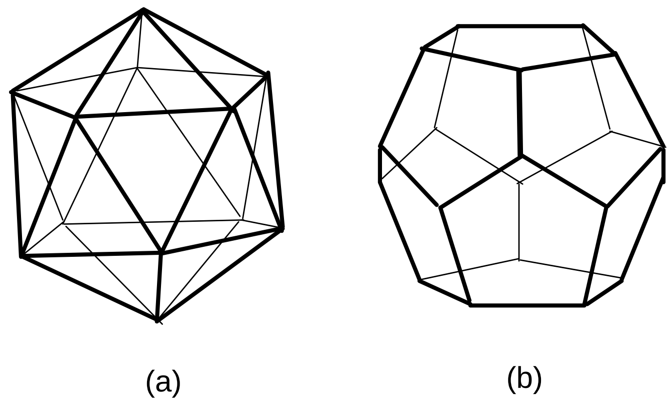


Figura 26.5: (a) Icosaedro, (b) dodecaedro.

O resultado a seguir diz que os exemplos das **Figuras 26.4** e **26.5** são, na verdade, os únicos exemplos de poliedros regulares. Em sua demonstração, utilizaremos o teorema de Euler. Platão foi o primeiro matemático a provar que existem apenas cinco poliedros regulares.

Platão
427 a.C. - 347 d.C., Atenas, Grécia
Platão tem muitas contribuições na Filosofia e na Matemática. Contribuiu também para as artes: dança, música, poesia, arquitetura e drama. Ele discutiu questões filosóficas, tais como ética, metafísica, onde tratou de imortalidade, homem, mente e realismo. Na Matemática, seu nome está associado aos sólidos platônicos: cubo, tetraedro, octaedro, icosaedro e dodecaedro.
O dodecaedro era o modelo de Platão para o universo.
Consulte:
`http://www-groups.dcs.st-nd.ac.uk/~history/Mathematicians/platao.html`

Teorema.	Existem apenas cinco poliedros regulares.

Prova:

Seja P um poliedro regular e seja p o número de lados de cada uma de suas faces. Seja q o número de arestas que concorrem em cada vértice de P (observamos que devemos ter $p \geq 3$ e $q \geq 3$). Se multiplicarmos o número de vértices de P por q, obteremos o dobro do número de arestas, pois cada aresta concorre em exatamente dois vértices. Assim,

(I) $$2A = qV$$

Se multiplicarmos o número de faces de P por p, obteremos o dobro do número de arestas, pois cada aresta é lado de exatamente duas faces. Assim,

(II) $$2A = pF$$

Substituindo (I) e (II) na relação de Euler $V - A + F = 2$, obtemos

(III) $$\frac{2A}{q} - A + \frac{2A}{p} = 2$$

de onde se conclui que

(IV) $$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} > \frac{1}{2}$$

A desigualdade anterior implica que não podemos ter simultaneamente $p > 3$ e $q > 3$ (verifique isso!). Se $p = 3$, segue de (IV) que

$$\frac{1}{q} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

de onde se conclui que $q < 6$. Logo, se $p = 3$, devemos ter $q = 3, 4$ ou 5. Da mesma forma, se $q = 3$, prova-se que devemos ter $p = 3, 4$ ou 5. Portanto, as possibilidades são:

- $p = 3$ e $q = 3$
- $p = 3$ e $q = 4$
- $p = 3$ e $q = 5$
- $p = 4$ e $q = 3$
- $p = 5$ e $q = 3$

Para determinar os poliedros possíveis, calcularemos o número de faces em cada possibilidade. Usando as equações (II) e (III), obtemos facilmente que

$$F = \frac{4q}{2p + 2q - pq}$$

Então,

- $p = 3$ e $q = 3 \Rightarrow F = 4$ (tetraedro regular)
- $p = 3$ e $q = 4 \Rightarrow F = 8$ (octaedro regular)
- $p = 3$ e $q = 5 \Rightarrow F = 20$ (icosaedro regular)
- $p = 4$ e $q = 3 \Rightarrow F = 6$ (hexaedro regular ou cubo)
- $p = 5$ e $q = 3 \Rightarrow F = 12$ (dodecaedro regular)

Q.E.D.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- O que são poliedros.
- O teorema de Euler.
- O que são poliedros regulares.
- Que existem apenas cinco poliedros regulares.

Exercícios

1. Construa dois exemplos de poliedros não convexos para os quais vale a relação de Euler.
2. Construa um exemplo de poliedro em que $V - A + F = -2$.
3. Você seria capaz de obter poliedros para os quais $V - A + F = -4, -6, -8, \ldots$?
4. Um poliedro convexo de onze faces tem seis faces triangulares e cinco faces quadrangulares. Determine o número de arestas e de vértices desse poliedro.
5. É possível construir um poliedro de doze faces com sete faces triangulares e cinco faces quadrangulares? Justifique!
6. Um poliedro convexo de 11 vértices possui faces triangulares, quadrangulares e uma face pentagonal. Se o número de faces triangulares é igual ao número de faces quadrangulares, determine o número de faces do poliedro.
7. Um poliedro possui seis faces triangulares, cinco quadrangulares, quatro pentagonais e duas hexagonais. Determine o número de arestas desse poliedro.
8. Prove que para todo poliedro valem as desigualdades $2A \geq 3F$ e $2A \geq 3V$, onde V, A e F denotam, respectivamente, o número de vértices, o número de arestas e o número de faces do poliedro.
9. Prove que em todo poliedro convexo valem as desigualdades $3F \geq A+6$ e $3V \geq A + 6$.

10. Um poliedro convexo possui seis faces triangulares, cinco quadrangulares, quatro pentagonais e duas hexagonais. Determine a soma dos ângulos internos de todas as faces desse poliedro.

11. Prove que a soma das medidas dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo é dada por $S = 360(A - F)$.
Sugestão: Numere as faces de 1 até F e denote por n_1 o número de lados da primeira face, por n_2 o número de lados da segunda face, e assim por diante. Use a fórmula que determina a soma dos ângulos internos de um polígono convexo para mostrar que
$$S = 180(n_1 - 2) + 180(n_2 - 2) + \ldots + 180(n_F - 2).$$
Agora, observe que $n_1 + n_2 + \ldots + n_F = 2A$, pois cada aresta é lado de exatamente duas faces.

12. (U.MACK-1981) Um poliedro convexo tem 15 faces. De dois de seus vértices partem 5 arestas, de quatro outros partem 4 arestas e dos restantes partem 3 arestas. O número de arestas do poliedro é:
a) 75 b) 53 c) 31 d) 45 e) 25

13. (CESGRANRIO-1984) Um poliedro convexo é formado por 80 faces triangulares e 12 faces pentagonais. O número de vértices do poliedro é:
a) 80 b) 60 c) 50 d) 48 e) 36

14. Diagonal de um poliedro é qualquer segmento que une dois vértices que não estão na mesma face. Quantas diagonais possui o icosaedro regular?

15. (ESCOLA NAVAL-1988) Um poliedro convexo é formado por 10 faces triangulares e 10 faces pentagonais. O número de diagonais desse poliedro é:
a) 60 b) 81 c) 100 d) 121 e) 141

16. Dê um exemplo de um poliedro convexo com dez arestas.

17. Determine o número de vértices e o número de faces de um poliedro convexo com dez arestas.

18. Descreva um procedimento que leve à construção de um tetraedro regular. Justifique.

19. Descreva um procedimento que leve à construção de um octaedro regular. Justifique.

Aula 27 – Introdução ao conceito de volume

Objetivos

- Introduzir o conceito de volume.
- Calcular o volume de um paralelepípedo.

Introdução

Considere dois recipientes, um cúbico e outro de forma qualquer (veja a **Figura 27.1**). Suponha que se utilizem n litros de líquido para encher o primeiro recipiente e m litros de líquido para encher o segundo.

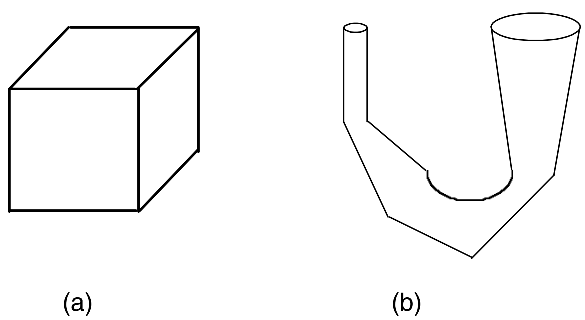


Figura 27.1: (a) Recipiente cúbico. (b) Recipiente de forma qualquer.

O número $\frac{m}{n}$ é uma medida de quanto o segundo recipiente é maior (ou menor) que o primeiro. Podemos dizer que o espaço ocupado pelo segundo recipiente é $\frac{m}{n}$ vezes o espaço ocupado pelo primeiro. Por exemplo, uma garrafa de 3 litros d'água ocupa 3/2 mais espaço que uma garrafa de 2 litros.

A noção de volume de um sólido está relacionada ao espaço por ele ocupado. Com relação ao nosso exemplo, se adotarmos o primeiro recipiente como unidade de volume, dizemos que o volume do segundo recipiente é $\frac{m}{n}$. O volume do primeiro recipiente é 1. Assim, para se determinar o volume de um recipiente, é só enchê-lo e verificar a quantidade de líquido utilizada.

Esse método empírico para se determinar volume, contudo, pode ser indesejável (imagine um recipiente do tamanho de um estádio de futebol!) ou mesmo impraticável (qual o volume da terra?). Além disso, deseja-se, na prática, fazer o caminho inverso: deseja-se saber, a priori, a quantidade de líquido necessária para se encher um determinado recipiente ou quais devem ser as dimensões de uma caixa d'água para que sua capacidade seja de

1000 litros. Para que isso seja possível, devemos ser capazes de determinar o volume dos sólidos utilizando apenas o raciocínio lógico e algumas propriedades. Para isso, escolhe-se como unidade de volume um cubo de lado 1. Dizemos que esse cubo tem volume igual a 1. Se a aresta do cubo medir $1\,cm$, o volume do cubo será $1\,cm^3$ (lê-se "um centímetro cúbico"), se a aresta medir $1\,m$, o volume será $1\,m^3$ ("um metro cúbico"), e assim por diante.

A determinação do volume dos sólidos será feita com base nas três propriedades a seguir:

P_1 : A todo "sólido no espaço" está associado um número real positivo, chamado seu volume.

P_2 : Sólidos congruentes têm o mesmo volume (por exemplo, duas esferas de mesmo raio, ou dois cilindros retos de mesmo raio da base e mesma altura).

P_3 : Se um sólido S é dividido em dois sólidos S_1 e S_2, então o volume de S é a soma dos volumes de S_1 e S_2.

Volume do paralelepípedo

Vejamos como utilizar as propriedades P_1, P_2 e P_3 para determinar o volume dos principais sólidos.

Primeiramente, considere o cubo escolhido como unidade de volume e divida cada uma de suas arestas em n partes iguais, obtendo n^3 cubinhos justapostos, todos de aresta medindo $\frac{1}{n}$ (veja na **Figura 27.2** um caso particular em que $n = 3$).

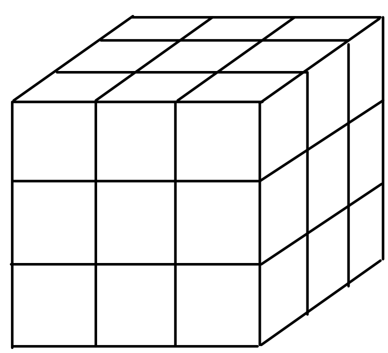


Figura 27.2: Cubo dividido em 27 cubos menores de aresta medindo $\frac{1}{3}$.

Pela propriedade P_2, todos os n^3 cubinhos têm o mesmo volume. Além disso, pela propriedade P_3 o volume do cubo original é a soma dos volumes dos n^3 cubinhos. Segue que o volume de cada cubinho é $\frac{1}{n^3}$. Compare com os resultados da aula 13 sobre área de figuras planas.

Nosso objetivo, agora, é determinar o volume de um paralelepípedo retangular $ABCDEFGH$ cujas arestas medem a, b e c. O argumento que utilizaremos é análogo ao utilizado para o cálculo da área de um retângulo. Tome um vértice qualquer do paralelepípedo e considere as semi-retas que partem desse vértice e contêm arestas do paralelepípedo. Sobre essas semi-retas, marque segmentos de medidas $\frac{1}{n}$ (veja a **Figura 27.3**).

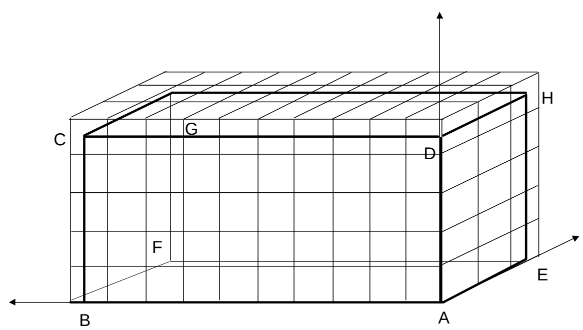


Figura 27.3: Divisão do paralelepípedo para cálculo do volume.

Para facilitar a discussão, admita que tenhamos $m(AB) = a$, $m(AD) = b$ e $m(AE) = c$. Sejam p o número de segmentos de medida $\frac{1}{n}$ que cabem em AB, q o número desses segmentos que cabem em AD e s o número desses segmentos que cabem em AE (a **Figura 27.3** ilustra um caso particular em que $p = 9$, $q = 4$ e $s = 2$).

Temos,

$$p.\frac{1}{n} \leq a < (p+1)\frac{1}{n} \ ,$$

$$q.\frac{1}{n} \leq b < (q+1)\frac{1}{n} \quad \text{e}$$

$$s.\frac{1}{n} \leq c < (s+1)\frac{1}{n}$$

donde se conclui que

$$\text{(I)} \qquad pqs\frac{1}{n^3} \leq abc < (p+1)(q+1)(s+1)\frac{1}{n^3}$$

Por outro lado, o paralelepípedo retangular cujas arestas medem $\frac{p}{n}$, $\frac{q}{n}$ e $\frac{s}{n}$ está inteiramente contido em nosso paralelepípedo $ABCDEFGH$ e é formado por pqs cubinhos de aresta $\frac{1}{n}$. Como já sabemos que o volume de cada um desses cubinhos é $\frac{1}{n^3}$, segue que o volume de $ABCDEFGH$ satisfaz

$$\text{(II)} \qquad V \geq psq\frac{1}{n^3}$$

Além disso, o paralelepípedo retangular cujas arestas medem $\frac{p+1}{n}$, $\frac{q+1}{n}$ e $\frac{s+1}{n}$ contém $ABCDEFGH$ e é formado por $(p+1)(q+1)(s+1)$ cubinhos de aresta $\frac{1}{n}$. Então,

$$\text{(III)} \qquad V < (p+1)(q+1)(s+1)\frac{1}{n^3}$$

Juntando (II) e (III) obtemos

$$\text{(IV)} \qquad pqs\frac{1}{n^3} \leq V < (p+1)(q+1)(s+1)\frac{1}{n^3}$$

De (I) e (IV) conclui-se que

$$\begin{aligned} |\, V - abc \,| &< (p+1)(q+1)(s+1)\frac{1}{n^3} - pqs\frac{1}{n^3} \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{pq}{n^2} + \frac{ps}{n^2} + \frac{qs}{n^2} + \frac{p}{n^2} + \frac{q}{n^2} + \frac{s}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Como $\frac{p}{n} \leq a$, $\frac{q}{n} \leq b$ e $\frac{s}{n} \leq c$, resulta que

$$\begin{aligned} |\, V - abc \,| &< \frac{1}{n}\left(ab + ac + bc + \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\ &< \frac{1}{n}(ab + ac + bc + a + b + c + 1) \end{aligned}$$

A desigualdade acima é válida para qualquer inteiro positivo n. Note que o lado direito da desigualdade fica tão pequeno quanto desejarmos, bastando para isso tomar n bastante grande. Isso mostra que $|\, V - abc \,|$ é menor que qualquer número real positivo, o que só é possível se $|\, V - abc \,| = 0$.

Assim, $V = abc$. Notando que ac é a área do retângulo $ABFE$ e que b é a altura do paralelepípedo, provamos então que

> O volume de um paralelepípedo retangular é o produto da área da base pela altura.

Lembramos que um paralelepípedo retangular tem como base um retângulo e suas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases.

Nosso objetivo agora é determinar o volume de um paralelepípedo $ABCDEFGH$ qualquer. Para isso, consideraremos $ABCD$ e $EFGH$ como bases. No plano da base $EFGH$, trace perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{FG}$ a partir dos pontos E e H, obtendo pontos F_1 e G_1 (veja **Figura 27.4**).

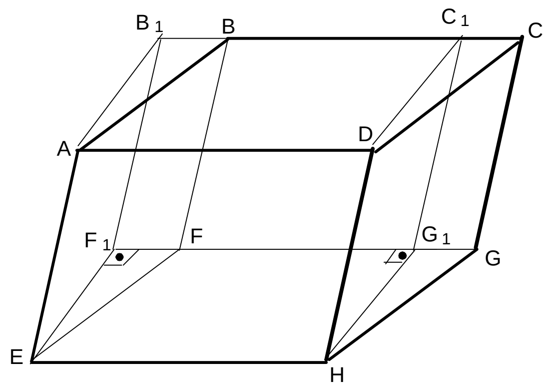


Figura 27.4: Transformação para um paralelepípedo de base retangular.

O quadrilátero obtido EF_1G_1H é um retângulo (lembre que $\overleftrightarrow{EH}$ é paralelo a $\overleftrightarrow{FG}$. Pelos pontos F_1 e G_1 trace retas paralelas a $\overleftrightarrow{AE}$ e sejam B_1 e C_1 os pontos em que essas retas intersectam o plano que contém $ABCD$ (**Figura 27.4**). O paralelepípedo $AB_1C_1DEF_1G_1H$ é um paralelepípedo de bases retangulares e sua altura é a mesma do paralelepípedo original $ABCDEFGH$. Além disso, as bases desses paralelepípedos têm a mesma área (por quê?). Observe que podemos sobrepor o sólido DC_1CHG_1G sobre o sólido AB_1BEF_1F através de uma translação ao longo da reta $\overleftrightarrow{AD}$. Segue que esses dois sólidos são congruentes e, portanto, têm o mesmo volume. Concluímos que os paralelepípedos $ABCDEFGH$ e $AB_1C_1DEF_1G_1H$ têm o mesmo volume. Tudo o que fizemos foi partir de um paralelepípedo qualquer e obter um paralelepípedo de bases retangulares com mesmo volume, mesma área da base e mesma altura.

Agora, vamos transformar o paralelepípedo $AB_1C_1DEF_1G_1H$ em um paralelepípedo retangular de mesma altura, mesma área da base e mesmo volume. Como já sabemos calcular o volume de um paralelepípedo retangular, determinaremos o volume de $AB_1C_1DEF_1G_1H$ (e, portanto, do paralelepípedo original $ABCDEFGH$). No plano que contém a face DC_1G_1H, trace pelos pontos H e G_1 segmentos perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{DC_1}$, obtendo pontos D_1 e C_2. Faça o mesmo no plano da face AB_1F_1E, e obtenha pontos A_1 e B_2 (veja **Figura 27.5**).

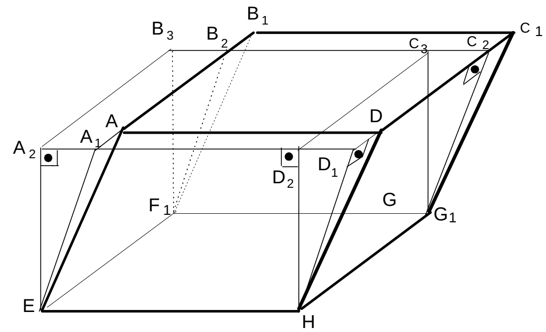


Figura 27.5: Transformação para um paralelepípedo de base retangular.

Podemos provar (veja o primeiro exercício desta aula) que $A_1B_2C_2D_1EF_1G_1H$ é um paralelepípedo com o mesmo volume que $AB_1C_1DEF_1G_1H$. Evidentemente, $AB_1C_1DEF_1G_1H$ e $A_1B_2C_2D_1EF_1G_1H$ têm a mesma altura e as áreas de suas bases são iguais.

Finalmente, no plano da face A_1D_1HE, trace pelos pontos E e H segmentos perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{A_1D_1}$, obtendo pontos A_2 e D_2. Faça o mesmo no plano da face $B_2C_2G_1F_1$ e obtenha os pontos B_3 e C_3. Podemos provar (veja os exercícios desta aula) que $A_2B_3C_3D_2EF_1G_1H$ é um paralelepípedo retangular que tem o mesmo volume que $A_1B_2C_2D_1EF_1G_1H$. Evidentemente, esses dois paralelepípedos têm a mesma altura e as áreas de suas bases são iguais.

Nosso paralelepípedo original $ABCDEFGH$ foi transformado no paralelepípedo retangular $A_2B_3C_3D_2EF_1G_1H$ através das seguintes transformações:

$$\begin{aligned} ABCDEFGH \to AB_1C_1DEF_1G_1H &\to A_1B_2C_2D_1EF_1G_1H \\ &\to A_2B_3C_3D_2EF_1G_1H. \end{aligned}$$

Em cada uma dessas transformações, foram preservados o volume, a altura e as áreas das bases. Logo,

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(ABCDEFGH) = \mathrm{Vol}(A_2B_3C_3D_2EF_1G_1H) &= \text{Área}(EF_1G_1H)m(A_2E) \\ &= \text{Área}(EFGH)m(A_2E) \end{aligned}$$

Como $m(A_2E)$ é exatamente a altura do paralelepípedo $ABCDEFGH$ em relação à base $EFGH$, provamos o seguinte resultado:

O volume de um paralelepípedo é o produto da área da base pela altura relativa à base

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- O conceito de volume de um sólido.
- Que o volume de um paralelepípedo é o produto da área da base pela altura relativa à base.

Exercícios

1. O objetivo deste exercício é mostrar que o sólido $A_1B_1C_2D_1EF_1G_1H$, da **Figura 27.5**, do texto, é um paralelepípedo que tem o mesmo volume que o paralelepípedo $AB_1C_1DEF_1G_1H$. Isso deve ser feito da seguinte forma: faremos uma série de afirmações e a você caberá justificar cada uma delas.

   Seja α o plano que contém os pontos D_1, H e E, e β o plano que contém os pontos A_1, E e H. Justifique as afirmações a seguir:

   i) A reta $\overleftrightarrow{HG_1}$ é perpendicular ao plano α.
   ii) $\overleftrightarrow{EF_1}$ é perpendicular ao plano α.
   iii) $\overleftrightarrow{EF_1}$ é perpendicular ao plano β.
   iv) $\alpha = \beta$ e, portanto, as retas $\overleftrightarrow{EA_1}$ e $\overleftrightarrow{HD_1}$ são coplanares.
   v) Os planos das faces DC_1G_1H e AB_1F_1E são paralelos.
   vi) $\overleftrightarrow{EA_1}$ e $\overleftrightarrow{HD_1}$ são paralelas.
   vii) $A_1B_2C_2D_1EF_1G_1H$ é um paralelepípedo.
   viii) Os sólidos EA_1ADD_1H e $F_1B_2B_1C_1C_2G_1$ são congruentes.
   ix) $A_1B_2C_2D_1EF_1G_1H$ e $AB_1C_1DEF_1G_1H$ têm o mesmo volume.

2. Tomando como base o exercício 1, prove que o sólido $A_2B_3C_3D_2EF_1G_1H$, da **Figura 27.5**, é um paralelepípedo retangular que tem o mesmo volume que o paralelepípedo $A_1B_2C_2D_1EF_1G_1H$.

3. Determine o volume de um cubo, sabendo que ele foi confeccionado a partir de uma folha de zinco de $600\,cm^2$.

4. Um depósito, em forma de um cubo, com capacidade para 8000 litros, está completamente cheio de água. Deseja-se transferir toda a água para um outro reservatório, na forma de um paralelepípedo retangular, cujas dimensões são $3,0\,m$ de comprimento, $2,5\,m$ de largura e $4,0\,m$ de altura. Que altura alcançará a água?

5. Um paralelepípedo retangular tem base quadrada e sua diagonal forma um ângulo de 60^o com o plano da base. Se o volume do paralelepípedo é de $36.000\,cm^3$, determine a área total do paralelepípedo.

6. Oito cubos iguais são dispostos de modo a formar um paralelepípedo retangular. Determine a forma do paralelepípedo para que a superfície tenha área mínima.

7. Entre todos os paralelepípedos retangulares de mesmo volume, qual o de menor área total?

8. Se dois paralelepípedos têm a mesma base e suas alturas são iguais, pode-se dizer que suas áreas laterais são iguais? Justifique a sua resposta.

9. A base de um paralelepípedo oblíquo é um quadrado de lado a e suas arestas laterais medem $2a$. Se uma das arestas laterais forma um ângulo de 60^o com os lados adjacentes da base e o volume do paralelepípedo é $8\sqrt{2}\,cm^3$, determine a.

10. (F.C.M. SANTA CASA, 1982) Dispondo-se de uma folha de cartolina, medindo $50\,cm$ de comprimento por $30\,cm$ de largura, pode-se construir uma caixa aberta, cortando-se um quadrado de $8\,cm$ de lado em cada canto da folha. O volume dessa caixa, em cm^3, será:

    (a) 1244 (b) 1828 (c) 2324 (d) 3808 (e) 12000

11. (U.F.GO, 1983) A aresta, a diagonal e o volume de um cubo estão, nessa ordem, em progressão geométrica. A área total desse cubo é:

    (a) $6\sqrt{3}$ (b) $6(2\sqrt{3}-1)$ (c) 3 (d) 12 (e) 18

12. (CESGRANRIO, 1988) Um tanque cúbico, com face inferior horizontal, tem $1\,m^3$ de volume e contém água até sua metade. Após mergulhar uma pedra de granito, o nível da água subiu $8\,cm$. O volume dessa pedra é:

    (a) $80\,cm^3$ (b) $800\,cm^3$ (c) $8000\,cm^3$ (d) $80000\,cm^3$ (e) $800000\,cm^3$

13. (U.F.C., 1992) As dimensões da base de um paralelepípedo retangular P são $3\,m$ e $5\,m$, e seu volume é $60\,m^3$. O comprimento, em metros, do maior segmento de reta que une dois pontos de P é igual a:

    (a) $2\sqrt{5}$ (b) $3\sqrt{5}$ (c) $4\sqrt{5}$ (d) $5\sqrt{2}$ (e) $6\sqrt{2}$

Aula 28 – Volume de prismas e cilindros

Objetivos

- Apresentar o Princípio de Cavalieri.
- Determinar o volume de um paralelepípedo usando o Princípio de Cavalieri.
- Calcular o volume de um prisma.
- Calcular o volume de um cilindro.

Introdução

A determinação do volume de um paralelepípedo qualquer mostra que a tarefa de determinar o volume dos sólidos, mesmo dos mais simples, não é uma tarefa fácil. Essa tarefa pode ser grandemente facilitada se utilizarmos o *Princípio de Cavalieri.*

Princípio de Cavalieri
Considere dois sólidos S_1 e S_2 e um plano α. Suponha que, para todo plano β paralelo a α, as seções planas $\beta \cap S_1$ e $\beta \cap S_2$ têm a mesma área. Então $Vol(S_1) = Vol(S_2)$ (**Figura 28.1**).

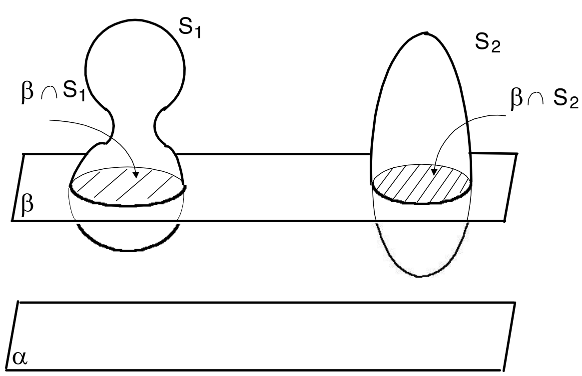


Figura 28.1: Princípio de Cavalieri.

Cavalieri.
1598 -1647.

Bonaventura Francesco Cavalieri se agregou à ordem dos Jesuítas em Milão em 1615, enquanto ainda era um garoto. Seu interesse em Matemática foi estimulado pelos trabalhos de Euclides e depois por Galileu. A teoria de indivisíveis apresentada por ele, em 1635, permitiu encontrar facilmente e rapidamente áreas e volumes de várias figuras geométricas.
Cavalieri também escreveu sobre seções cônicas, trigonometria, ótica, astronomia e astrologia.
Consulte:
`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Cavalieri.html`

Cálculo do volume do paralelepípedo usando o princípio de Cavalieri

Vejamos, agora, como se torna simples a prova para a fórmula do volume de um paralelepípedo qualquer, quando se utiliza o princípio de Cavelieri. Seja $S_1 = ABCDEFGH$ um paralelepípedo qualquer e sejam α e β os planos das faces $ABCD$ e $EFGH$ (veja a **Figura 28.2**).

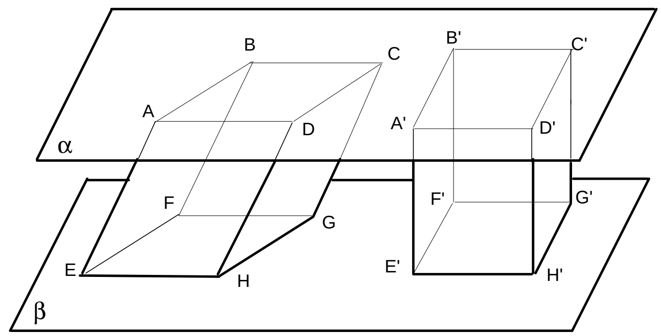


Figura 28.2: Cálculo do volume de um paralelepípedo.

No plano α, tome um retângulo $A'B'C'D'$ que tem a mesma área que $ABCD$ e, pelos pontos A', B', C' e D' trace perpendiculares a α. Essas retas cortam o plano β em pontos E', F', G' e H' (veja a **Figura 28.2**). O paralelepípedo $S_2 = A'B'C'D'E'F'G'H'$ obtido é retangular. Seja γ um plano qualquer paralelo ao plano β e que corta S_1 e S_2. Sabemos que $\gamma \cap S_1$ é congruente a $EFGH$ e $\gamma \cap S_2$ é congruente a $E'F'G'H'$ (veja a **Figura 28.3**).

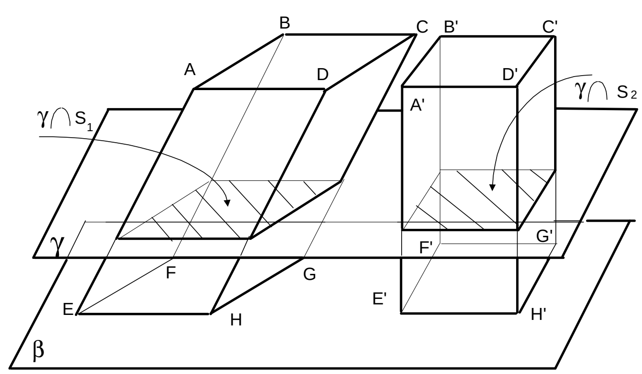


Figura 28.3: $\gamma \cap S_1$ e $\gamma \cap S_2$ têm a mesma área.

Logo,

$$\text{Área}(\gamma \cap S_1) = \text{Área}(EFGH) = \text{Área}(E'F'G'H') = \text{Área}(\gamma \cap S_2)$$

para todo plano γ paralelo a β.

Pelo Princípio de Cavalieri tem-se

$$Vol(S_1) = Vol(S_2)$$

Como já sabemos que o volume de um paralelepípedo retangular é o produto da área da base pela altura, temos

$$Vol(S_1) = Vol(S_2) = \text{Área}(E'F'G'H')m(A'E') = \text{Área}(EFGH).altura(S_1)$$

O Princípio de Cavalieri é, na verdade, um teorema; isto é, ele pode ser provado. Sua prova, porém, envolve conceitos avançados da Matemática, que ainda não temos condições de abordar. Embora possamos obter o volume dos principais sólidos (cilindros, prismas, cones, pirâmides, esferas etc.) sem utilizar o princípio de Cavalieri, a utilização desse princípio simplifica bastante a determinação de alguns desses volumes. Em vista disso, neste curso esse princípio será aceito como verdadeiro, sem prova.

Cálculo do volume do prisma

Um procedimento análogo ao utilizado na determinação do volume de um paralelepípedo, pode ser utilizado na determinação do volume de um prisma qualquer. Seja S um prisma cuja base é um polígono P qualquer. No plano da base, considere um retângulo $ABCD$ de área igual à area de P. Sobre esse retângulo construa um paralelepípedo retangular S' de altura igual à altura de S. Seja γ um plano paralelo à base de S e que é secante a S (veja na **Figura 28.4** um caso particular onde a base de S é um hexágono).

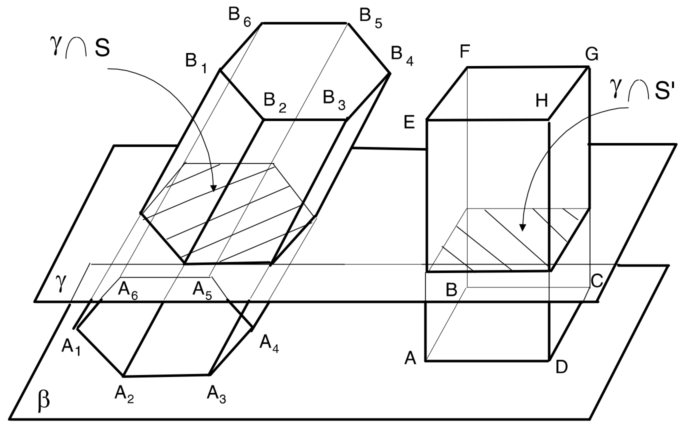


Figura 28.4: Cálculo do volume do prisma.

Sabemos que $\gamma \cap S$ é congruente a P e que $\gamma \cap S'$ é congruente a $ABCD$. Logo,

$$\text{Área}(\gamma \cap S) = \text{Área}(P) = \text{Área}(ABCD) = \text{Área}(\gamma \cap S')$$

para todo plano γ paralelo à base de S.

Pelo Princípio de Cavalieri, tem-se

$$Vol(S) = Vol(S') = \text{Área}(ABCD).m(AE).$$

Provamos então que

O volume de um prisma é o produto da área da base pela altura.

Cálculo do volume do cilindro

Para determinar o volume de um cilindro, procedemos de maneira análoga à do cálculo do volume de um prisma. Dado um cilindro C (reto ou oblíquo) de altura h e cuja base é um círculo Γ contido em um plano α, considere um paralelepípedo retangular R de altura h e cuja base é um retângulo contido em α e de mesma área que Γ (veja **Figura 28.5**).

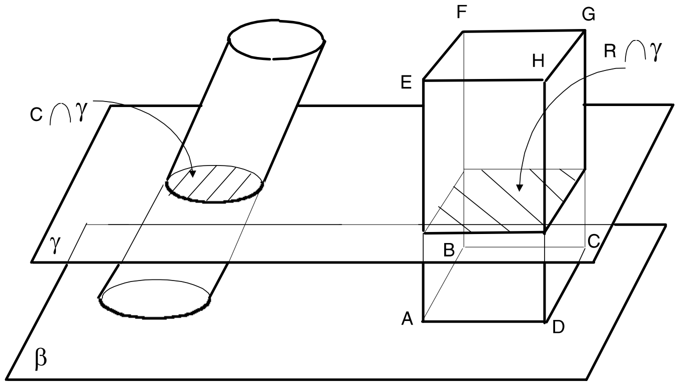


Figura 28.5: Cálculo do volume do cilindro.

Para todo plano γ, paralelo a α e secante a C, tem-se

$$\text{Área}(C \cap \gamma) = \text{Área}(\Gamma) = \text{Área}(ABCD) = \text{Área}(R \cap \gamma).$$

Pelo Princípio de Cavalieri, conclui-se que

$$Vol(C) = Vol(R) = \text{Área(ABCD)}.m(AE) = \text{Área}(\Gamma).\text{altura}(C).$$

Provamos então que

O volume de um cilindro é o produto da área de sua base pela altura.

Resumo

Nessa aula você aprendeu...

- O Princípio de Cavalieri.
- A calcular o volume de um prisma.
- A calcular o volume de um cilindro.

Exercícios

1. Calcule o volume de um prisma reto de $3\,m$ de altura, cuja base é um hexágono regular, sabendo que se a altura fosse de $5\,m$ o volume aumentaria em $6\,m^3$.

2. Um prisma reto tem $12\,cm$ de altura e sua base é um triângulo cujos lados medem $2\,cm$, $4\,cm$ e $(20 + 8\sqrt{3})\,cm$. Determine o volume do prisma.

3. Calcule o volume de um prisma reto de altura a e cuja base é um pentágono (dodecágono) regular de lado a.

4. Em um prisma oblíquo, a aresta lateral mede $6\,cm$ e sua seção reta (perpendicular às arestas laterais) é um hexágono regular de $6\sqrt{3}\,cm^2$. Determine a área lateral e o volume desse prisma.

5. Um cilindro, de raio da base igual a $4\,cm$ e geratriz medindo $6\,cm$, tem seu eixo formando um ângulo de 45^o com o plano da base. Determine o volume desse cilindro.

6. Deseja-se construir um reservatório na forma de um cilindro equilátero e que tenha volume igual a um reservatório na forma de um paralelepípedo retangular de dimensões $2\,m \times 2\,m \times 1,5\,m$. Qual o raio do cilindro?

7. Quantos litros de água deve conter aproximadamente um reservatório cilíndrico de $3\,m$ de raio e $8\,m$ de altura?

Lembre-se que...
$1\ell = 1\,dm^3$

8. Em um reservatório cilíndrico de raio igual a $50\,cm$, colocou-se uma pedra, o que elevou em $35\,cm$ o nível da água. Determine o volume da pedra.

9. Com uma folha de zinco de $5\,m$ de comprimento e $4\,m$ de largura, podemos construir dois cilindros, um segundo o comprimento e outro segundo a largura. Em qual dos casos o volume será maior?

10. Um cilindro reto de raio r e altura h é cortado por um plano paralelo ao seu eixo. Se a distância entre o eixo e o plano é $\frac{r}{2}$, determine os volumes dos sólidos obtidos.

11. Um sólido S está localizado entre dois planos horizontais α e β, cuja distância é de $1\,m$. Cortando o sólido por qualquer plano horizontal compreendido entre α e β, obtém-se como seção um disco de raio igual a $1\,m$.

   a) Pode-se garantir que o sólido S é um cilindro? Justifique.

   b) Calcule o volume de S.

12. (PUC-SP, 1985) Se a área da base de um prisma diminui 10% e a altura aumenta 20%, o seu volume:

    (a) aumenta 8%.

    (b) aumenta 15%.

    (c) aumenta 108%.

    (d) diminui 8%.

    (e) não se altera.

13. (VUNESP-1988) Considere um galpão como o da **Figura 28.6**:

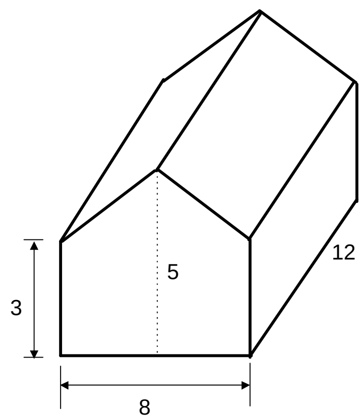


Figura 28.6: Exercício 13.

O volume de ar contido no galpão é igual a:

(a) 288 (b) 384 (c) 480 (d) 360 (e) 768

14. (CRESCEM, 1977) O líquido contido em uma lata cilíndrica deve ser distribuído em potes também cilíndricos cuja altura é $\frac{1}{4}$ da altura da lata e cujo diâmetro da base é $\frac{1}{3}$ do diâmetro da base da lata. O número de potes necessários é:

(a) 6 (b) 12 (c) 18 (d) 24 (e) 36

15. (CESGRANRIO, 1983) Um tonel cilíndrico, sem tampa e cheio d'água, tem $10\,dm$ de altura e $5\,dm$ de raio da base. Inclinando-se o tonel de 45^o, o volume de água derramada é, aproximadamente:

(a) $145\,dm^3$ (b) $155\,dm^3$ (c) $263\,dm^3$
(d) $353\,dm^3$ (e) $392\,dm^3$

16. (U.F.GO, 1984) Um pedaço de cano, de 30 cm de comprimento e 10 cm de diâmetro interno, encontra-se na posição vertical e possui a parte inferior vedada. Colocando-se dois litros de água em seu interior, a água:

    a) irá ultrapassar o meio do cano

    b) transbordará

    c) não chegará ao meio do cano

    d) encherá o cano até a borda

    e) atingirá exatamente o meio do cano

Aula 29 – Volume de pirâmides, cones e esferas

Objetivos

- Calcular o volume de uma pirâmide.
- Calcular o volume de um cone.
- Calcular o volume de uma esfera.

Introdução

Sabemos que se cortarmos um prisma ou um cilindro por um plano paralelo à base, a seção plana obtida é congruente à base. Essa propriedade nos permitiu aplicar o Princípio de Cavalieri na determinação do volume de prismas e cilindros. Com o intuito de utilizar esse princípio na determinação do volume de pirâmides e cones, precisaremos determinar seções planas quando cortamos esses sólidos por planos paralelos às suas bases.

Seções planas de pirâmides e cones

A seguinte proposição será de grande utilidade na determinação das seções planas paralelas às bases de pirâmides e cones.

Proposição 1

Sejam α e α' planos paralelos e P um ponto não situado entre α e α'. Sejam d e d' as distâncias de P a α e α', respectivamente. Para todo ponto $A \in \alpha$, seja $A' = \overrightarrow{PA} \cap \alpha'$ (**Figura 29.1**). Então

$$\frac{m(PA)}{m(PA')} = \frac{d}{d'} \ , \ \text{para todo } A \in \alpha.$$

Prova:

Seja r a reta passando por P e perpendicular aos planos α e α'. Sejam $B = r \cap \alpha$ e $B' = r \cap \alpha'$ (**Figura 29.1**). Por definição de distância de ponto a plano, temos $d = m(PB)$ e $d' = m(PB')$. Trace os segmentos BA e $B'A'$.

Como $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$ estão em um mesmo plano (o plano determinado por $\overleftrightarrow{PA}$ e $\overleftrightarrow{PB}$) e α e α' são paralelos, temos $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{A'B'}$. Os triângulos PBA e $PB'A'$ são semelhantes e, conseqüentemente,

$$\frac{m(PA)}{m(PA')} = \frac{m(PB)}{m(PB')} = \frac{d}{d'}$$

Q.E.D.

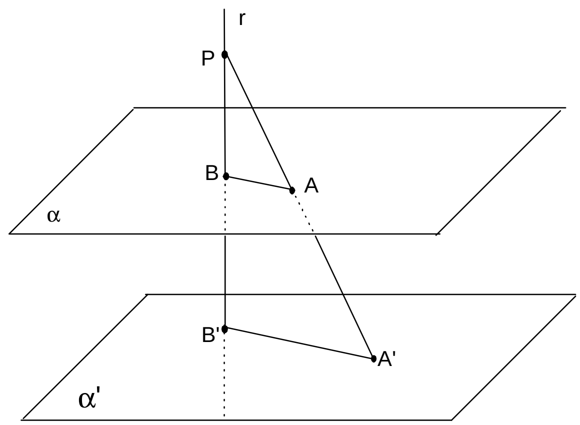


Figura 29.1: Proposição 1.

Considere agora uma pirâmide $ABCD$ e seja h a sua altura em relação à face BCD. Lembre-se que h é a distância de A ao plano α que contém BCD. Seja α' um plano paralelo a α e que corta a pirâmide segundo o triângulo $B'C'D'$ (veja a **Figura 29.2**). Chame de h' a distância de A ao plano α'.

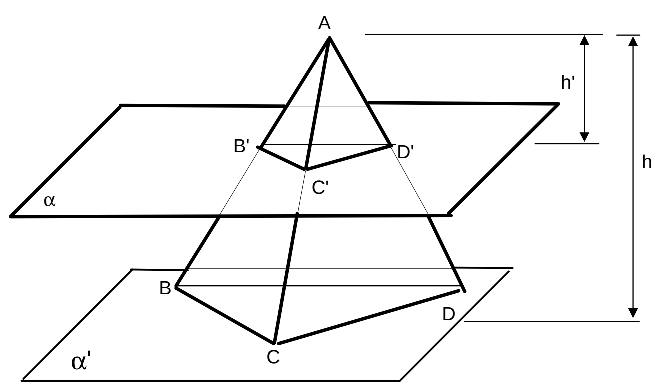


Figura 29.2: Seção paralela à base de uma pirâmide triangular.

Pela proposição 1 temos

$$\frac{m(AB')}{m(AB)} = \frac{m(AC')}{m(AC)} = \frac{m(AD')}{m(AD)} = \frac{h'}{h}.$$

Pelo segundo caso de semelhança estudado na Aula 10, temos que $AB'C' \sim ABC$, $AC'D' \sim ACD$ e $AB'D' \sim ABD$ com razão de semelhança $\frac{h'}{h}$. Logo,

$$\frac{m(B'C')}{m(BC)} = \frac{m(C'D')}{m(CD)} = \frac{m(B'D')}{m(BD)} = \frac{h'}{h}.$$

Segue do terceiro caso de semelhança estudado na aula 10 $B'C'D' \sim BCD$ (com razão de semelhança $\frac{h'}{h}$).

Conclui-se que

$$\frac{\text{Área}(B'C'D')}{\text{Área}(BCD)} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Provamos, assim, o seguinte resultado:

Proposição 2

Seja $ABCD$ uma pirâmide de altura h em relação à face BCD. Seja α' um plano paralelo ao plano da face BCD e que corta a pirâmide segundo um triângulo $B'C'D'$. Chame de h' a altura da pirâmide $AB'C'D'$ em relação a $B'C'D'$. Então $B'C'D'$ é semelhante a BCD e

$$\frac{\text{Área}(B'C'D')}{\text{Área}(BCD)} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2.$$

Usando as mesmas idéias utilizadas na prova da proposição acima, podemos provar a seguinte proposição:

Proposição 3

Considere um cone C com vértice em A e cuja base é um círculo Γ de raio r e seja α' um plano paralelo ao plano da base e que é secante a C. Chame de h a altura do cone e de h' a distância de A ao plano α' (veja **Figura 29.3**). Então $\Gamma' = C \cap \alpha'$ é um círculo de raio $r' = \frac{h'}{h} r$.

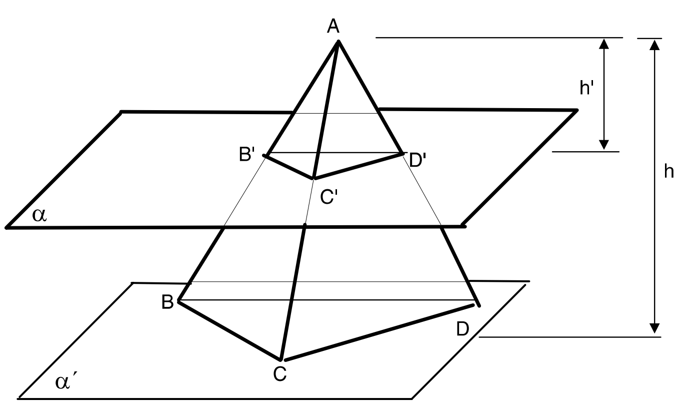


Figura 29.3: Seção de um cone por um plano paralelo à base.

Como conseqüência,

$$\frac{\text{Área}(\Gamma')}{\text{Área}(\Gamma)} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2.$$

A prova desta proposição será deixada como exercício (veja exercício 27 desta aula).

Cálculo do volume de uma pirâmide

Como conseqüência da proposição 2, provaremos a seguinte proposição:

Proposição 4
Se dois tetraedros (pirâmides triangulares) têm a mesma altura e mesma área da base, então eles têm o mesmo volume.

Prova:

Sejam $ABCD$ e $EFGH$ dois tetraedros tais que Área (BCD) = Área (FGH) e tais que as alturas em relação às bases BCD e FGH são iguais a h. Considere que as duas pirâmides estão situadas sobre um plano α. Seja α' um plano paralelo a α e que secciona as pirâmides segundo os triângulos $B'C'D'$ e $F'G'H'$ (veja a **Figura 29.4**).

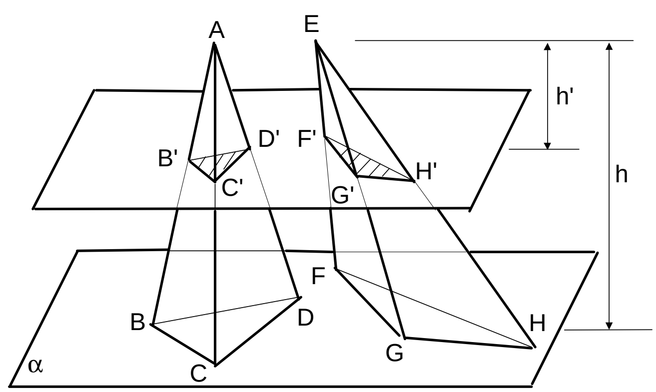


Figura 29.4: Tetraedros de mesma altura e mesma área da base.

Usando a proposição 2, temos

$$\frac{\text{Área}(B'C'D')}{\text{Área}(BCD)} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \frac{\text{Área}(F'G'H')}{\text{Área}(FGH)}$$

Como Área(BCD) = Área(FGH) segue que

$$\text{Área(B'C'D')} = \text{Área(F'G'H')}$$

para todo plano α' paralelo a α e secante aos dois tetraedros. Pelo Princípio de Cavalieri, conclui-se que $ABCD$ e $EFGH$ têm o mesmo volume.

Q.E.D.

Determinaremos, agora, a fórmula para o cálculo do volume de uma pirâmide triangular.

Considere um prisma triangular reto $ABCDEF$. Lembre-se que já sabemos calcular o seu volume. A idéia será dividir o prisma em três tetraedros de mesmo volume. Acompanhe as divisões pela **Figura 29.5**.

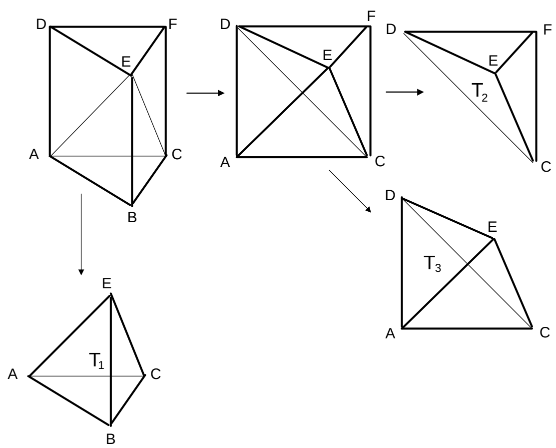


Figura 29.5: Divisão do prisma em três tetraedros.

Primeiramente, divida o prisma no tetraedro $EABC$ e na pirâmide $EDACF$ através do plano contendo os pontos E, A e C. Em seguida, divida a pirâmide $EDACF$ nos tetraedros $EDFC$ e $EDAC$, através do plano contendo os pontos D, E e C. O nosso prisma ficou assim dividido nos tetraedros $T_1 = EABC$, $T_2 = EDFC$ e $T_3 = EDAC$. Mostraremos agora que T_1, T_2 e T_3 têm o mesmo volume.

Em primeiro lugar, considere T_2 e T_3 com bases DFC e DAC. Como $DACF$ é um retângulo, a diagonal DC divide $DACF$ em dois triângulos congruentes, que são DAC e DFC. Logo, T_2 e T_3 têm bases de mesma área. Além disso, como as bases DFC e DAC estão em um mesmo plano (o plano do retângulo $DACF$), tem-se que as alturas de E em relação às bases DFC e DAC são iguais. Assim, T_2 e T_3 têm também a mesma altura. Usando a proposição 4, conclui-se que $Vol(T_2) = Vol(T_3)$.

Considere agora T_1 e T_2 com bases ABC e DEF, respectivamente. Como ABC e DEF são congruentes (pois são bases do prisma $ABCDEF$), tem-se que Área(ABC)=Área (DEF). Além disso, como $m(EB)$ é a altura de T_1 relativa à base ABC, $m(FC)$ é a altura de T_2 relativa à base DEF e $EB \equiv FC$, segue que T_1 e T_2 têm também a mesma altura. Usando a proposição 4 desta aula, conclui-se que $Vol(T_1) = Vol(T_2)$.

Portanto, o nosso prisma $ABCDEF$ foi dividido em três tetraedros de mesmo volume: T_1, T_2 e T_3. Logo,

$$Vol(T_1) = Vol(T_2) = Vol(T_3) = \frac{1}{3}Vol(ABCDEF) = \frac{1}{3}\text{Área(ABC)m(BE)}$$

Provamos então o seguinte resultado:

O volume de uma pirâmide triangular é um terço do produto da área da base pela altura.

A partir da fórmula para o cálculo do volume de uma pirâmide triangular, podemos achar facilmente a fórmula para o volume de uma pirâmide qualquer. Seja S uma pirâmide de altura h com vértice em A e cuja base é um polígono $P = A_1A_2 \ldots A_n$. Essa pirâmide pode ser dividida nos $n-2$ tetraedros: $AA_1A_2A_3$, $AA_1A_3A_4$, $AA_1A_{n-1}A_n$ (veja na **Figura 29.6** um caso particular em que P é um pentágono).

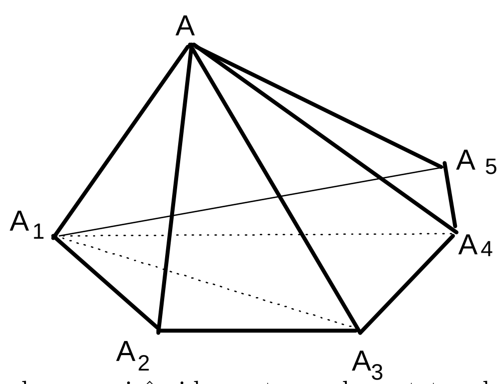


Figura 29.6: Divisão de uma pirâmide pentagonal nos tetraedros $AA_1A_2A_3$, $AA_1A_3A_4$ e $AA_1A_4A_5$.

Observe que a altura de cada tetraedro é igual à altura de S. Logo,

$$\begin{aligned} Vol(S) &= Vol(AA_1A_2A_3) + Vol(AA_1A_3A_4) + \ldots + Vol(AA_1A_{n-1}A_n) \\ &= \frac{1}{3}\text{Área}(A_1A_2A_3)h + \frac{1}{3}\text{Área}(A_1A_3A_4)h + \ldots + \frac{1}{3}\text{Área}(A_1A_{n-1}A_n)h \\ &= \frac{1}{3}h(\text{Área}(A_1A_2A_3) + \text{Área}(A_1A_3A_4) + \ldots + \text{Área}(A_1A_{n-1}A_n) \\ &= \frac{1}{3}h\text{Área(P)} \end{aligned}$$

Assim, vale também

> O volume de uma pirâmide é um terço do produto da altura pela área da base.

Cálculo do volume de um cone

Conhecendo a fórmula para o cálculo do volume de uma pirâmide, podemos achar a fórmula para o volume de um cone, utilizando as proprosições 2 e 3. Considere um cone C de altura h, vértice em A e base dada por um círculo Γ. No plano de Γ, considere um triângulo BCD de área igual à área de Γ e sobre ele construa uma pirâmide P de altura h (veja **Figura 29.7**).

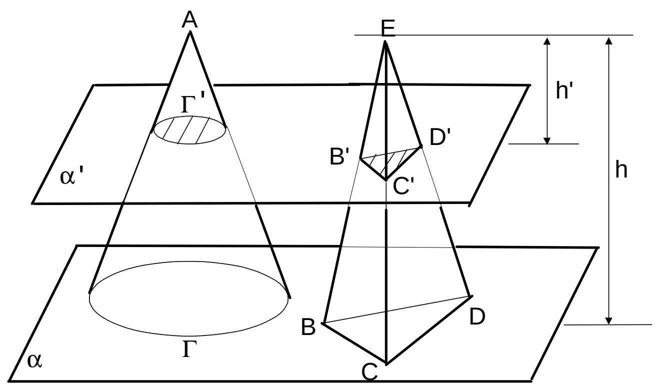


Figura 29.7: Seções paralelas às bases do cone e da pirâmide.

Para todo plano α' paralelo a α (o plano de Γ) e secante ao cone (e à pirâmide), sabemos das proposições 2 e 3 que as áreas de $\Gamma' = \alpha' \cap C$ e $B'C'D' = P \cap \alpha'$ satisfazem

$$\frac{\text{Área}(\Gamma')}{\text{Área}(\Gamma)} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \frac{\text{Área}(B'C'D')}{\text{Área}(BCD)}$$

sendo h' a distância de A (ou E) ao plano α'.

Como $\text{Área}(\Gamma) = \text{Área}(BCD)$ por construção, segue que $\text{Área}(C \cap \alpha') = \text{Área}(P \cap \alpha')$, para todo plano α' paralelo a α. Pelo Princípio de Cavalieri, conclui-se que

$$Vol(C) = Vol(P) = \frac{1}{3}\text{Área}(BCD)h = \frac{1}{3}\text{Área}(\Gamma)h$$

Provamos então que

> O volume de um cone é um terço do produto da área da base pela altura.

Cálculo do volume de uma esfera

Buscaremos, agora, uma fórmula para o cálculo do volume de uma esfera. Com esse objetivo, recorde que se cortarmos uma esfera de raio r por um plano distando h do seu centro, obteremos um círculo de área igual a $\pi(r^2 - h^2)$. Esse valor corresponde à área de uma coroa circular limitada por círculos de raios r e h. Isso sugere que para determinar o volume de uma esfera através do Princípio de Cavalieri, devemos construir um sólido, cujo volume saibamos calcular, tal que suas seções planas sejam coroas circulares de área $\pi(r^2 - h^2)$. Mostraremos, agora, como obter esse sólido. Para isso, considere que uma esfera de raio r esteja sobre um plano α e construa um cilindro reto de altura $2r$ e cuja base seja um círculo de raio r contido em α. Considere, ainda, dois cones, ambos com vértice no centro do cilindro, cujas bases sejam as bases do cilindro (veja a **Figura 29.8**).

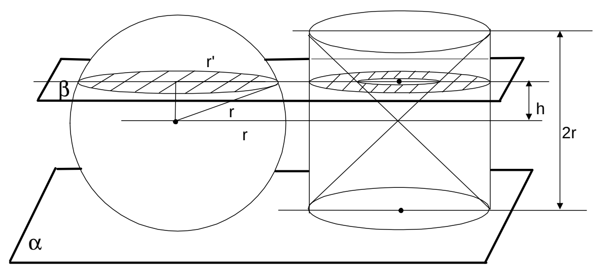


Figura 29.8: Anticlépsidra.

Mostraremos que o sólido compreendido entre o cilindro e os cones é o sólido desejado. Esse sólido é conhecido por *anticlépsidra* (veja na **Figura 29.8** sua seção plana determinada por um plano β distando h do centro da esfera). A seção plana determinada na esfera tem, como sabemos, área igual a $\pi r'^2 = \pi(r^2 - h^2)$. A seção plana determinada na anticlépsidra é uma coroa circular, cujo raio maior é r e cujo raio menor é h (por quê?). Logo, sua área vale $\pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2 - h^2)$. Assim, as seções planas da anticlépsidra determinadas por planos paralelos ao plano α têm a mesma área que as seções planas determinadas na esfera. Pelo Princípio de Cavalieri, conclui-se que o volume da esfera é igual ao volume da anticlépsidra. Observando que a altura de cada cone é r, tem-se

$$\begin{aligned} Vol(\text{esfera}) &= Vol(\text{cilindro}) - 2Vol(\text{cone}) \\ &= \pi r^2 \times 2r - 2\frac{1}{3}\pi r^2 \times r \\ &= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

Provamos, então, que

> O volume de uma esfera de raio r é $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- A calcular o volume de pirâmides, cones e esferas.

Exercícios

1. Determine o volume e a área total de um tetraedro regular cuja aresta mede a.

2. Um recipiente, em forma de um tetraedro regular invertido de aresta medindo $1\,m$, está com água até a metade de sua altura, como mostra a **Figura 29.9**.

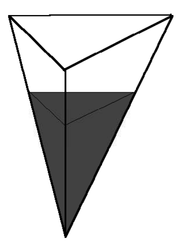


Figura 29.9: Exercício 2.

Invertendo o recipiente, como na **Figura 29.10**, qual deverá ser a altura do nível da água?

3. Uma pirâmide regular de base hexagonal tem altura $6\,cm$ e apótema igual a $9\,cm$. Determine o volume e a área lateral dessa pirâmide.

4. Uma pirâmide regular de base pentagonal tem volume de $500\,cm^3$ e o círculo inscrito na base tem raio igual a $\sqrt{3}\,cm$. Determine a medida da aresta lateral dessa pirâmide.

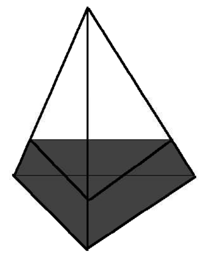


Figura 29.10: Exercício 2.

5. Duas pirâmides regulares, uma de base hexagonal e outra de base decagonal, têm a mesma altura e as arestas das bases são congruentes. Determine a razão entre os volumes dessas pirâmides.

6. Calcule o volume e a área total de um octaedro regular de aresta igual a $10\,cm$.

7. Na **Figura 29.11**, $ABCD$ é um tetraedro regular de volume V.

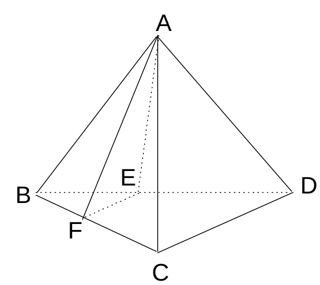


Figura 29.11: Exercício 7.

Se $m(BF) = \dfrac{1}{4}m(BC)$ e $m(BE) = \dfrac{1}{3}m(BD)$, determine o volume da pirâmide $ABFE$.

8. Prove que os segmentos que unem os vértices de uma pirâmide triangular aos baricentros das faces opostas se intersectam em um ponto e se dividem por esse ponto na razão $\dfrac{1}{3}$.

9. A que altura da base devemos cortar uma pirâmide por um plano paralelo à base para obtermos dois sólidos de mesmo volume?

10. Determine o volume do maior tetraedro que pode ser guardado dentro de um cubo de aresta a.

11. Prove que a soma das distâncias de um ponto interior de um tetraedro regular às suas faces é constante.

12. Um tetraedro regular está inscrito em um cone. Determine a razão entre o volume do tetraedro e o volume do cone.

13. Um copo cônico de papel foi feito a partir de um setor circular de $10\,cm$ de raio e ângulo central de 108^o. Calcule o volume do copo.

14. Um recipiente, com a forma de um cone invertido, tem $12\,m$ de altura. Esse recipiente está completamente cheio com 27000 litros de água e 37000 litros de óleo. Determine a altura da camada de água.

15. Na **Figura 29.12**, $ABCDEFGH$ é um cubo de aresta a e M é o ponto médio de AB.

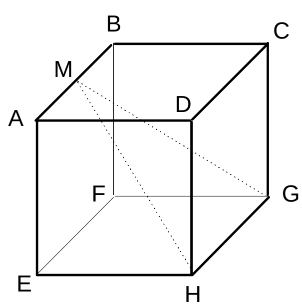


Figura 29.12: Exercício 15.

Determine a distância de F ao plano que contém M , H e G.

16. Um recipiente cilíndrico, de raio da base igual a $5\,m$ e altura igual a $15\,m$, está completamente cheio de água. Despeja-se toda a água em um sistema de dois cones invertidos, interligados por um duto de volume desprezível, como mostra a **Figura 29.13**.

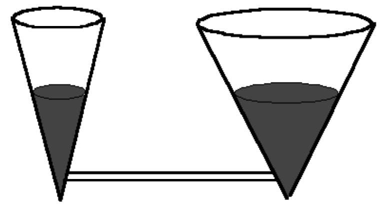


Figura 29.13: Exercício 16.

Sabendo que as alturas dos cones são iguais a $15\,m$ e que os raios de suas bases valem $5\,m$ e $10\,m$, respectivamente, determine a altura do nível da água.

17. Determine o volume de uma esfera, sabendo que a área da seção determinada por um plano que dista $4\,cm$ do centro da esfera é de $9\pi\,cm^2$.

18. O raio de uma esfera mede $16\,cm$. De um ponto P situado a $34\,cm$ do centro da esfera, traçam-se retas tangentes à esfera, como na **Figura 29.14**.

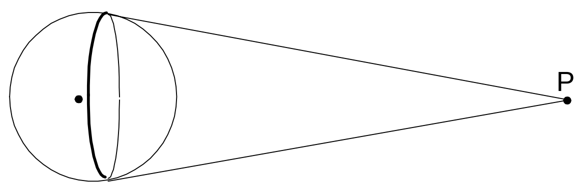


Figura 29.14: Exercício 18.

Prove que a união dos segmentos com extremidades em P e nos pontos de tangência com a esfera é um cone reto e determine o volume desse cone.

19. Considere uma esfera de centro O e raio r e um ponto P situado a uma distância $\frac{r}{2}$ do centro da esfera. Determine a área da seção plana determinada por um plano que passa por P e forma um ângulo θ com a reta $\overleftrightarrow{OP}$.

20. Duas esferas tangentes exteriormente entre si tangenciam internamente uma esfera de raio R. Determine os raios das esferas tangentes internamente para que a soma de seus volumes seja o menor possível.

21. (ITA - 1988) As arestas laterais de uma pirâmide regular de 12 faces têm comprimento l. O raio do círculo circunscrito ao polígono da base mede $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,l$. Então o volume dessa pirâmide é:

    (a) $3\sqrt{2}\,l^3$ (b) $2\,l^3$ (c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,l^3$ (d) $\sqrt{2}\,l^3$ (e) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\,l^3$

22. (ITA - 1990) Seja V o vértice de uma pirâmide com base triangular ABC. O segmento AV de comprimento unitário é perpendicular à base. Os ângulos das faces laterais no vértice V são todos de 45^o. Desse modo, o volume da pirâmide será igual a:

    (a) $\dfrac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-2}$ (b) $\dfrac{1}{6}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (c) $\dfrac{1}{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

    (d) $\dfrac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-1}$ (e) N.R.A.

23. (VUNESP, 1985) Em cada um dos vértices de um cubo de madeira se recorta uma pirâmide $AMNP$, onde M, N e P são os pontos médios das arestas, como se mostra na **Figura 29.15**.

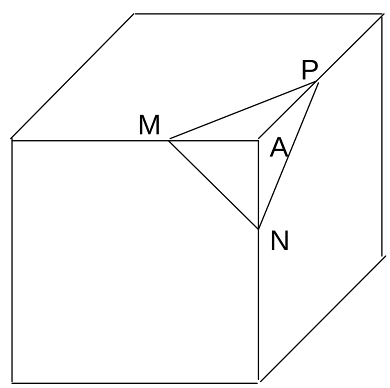


Figura 29.15: Exercício 23.

Se V é o volume do cubo, o volume do poliedro que resta ao retirar as oito pirâmides é:

(a) $\dfrac{1}{2}V$ (b) $\dfrac{3}{4}V$ (c) $\dfrac{2}{3}V$ (d) $\dfrac{5}{6}V$ (e) $\dfrac{3}{8}V$

24. (CESGRANRIO - 1991) Uma ampulheta é formada por dois cones retos iguais, com eixos verticais e justapostos pelo vértice, o qual tem um pequeno orifício que permite a passagem de areia da parte de cima para a parte de baixo. Ao ser colocada para marcar um intervalo de tempo, toda a areia está na parte de cima e, 35 minutos depois, a

altura da areia na parte de cima reduziu-se à metade, como mostra a **Figura 29.16**.

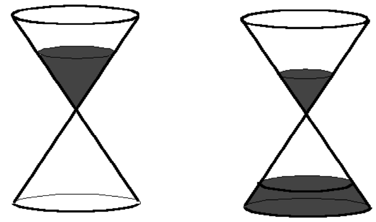


Figura 29.16: Exercício 24.

Supondo que em cada minuto a quantidade de areia que passa do cone de cima para o cone de baixo é constante, em quanto tempo mais toda a areia terá passado para a parte de baixo?

(a) 5 minutos (b) 10 minutos (c) 15 minutos (d) 20 minutos
(e) 30 minutos

25. (UFMG - 1992) Um plano intersecta uma esfera segundo um círculo de diâmetro AB, como mostra a **Figura 29.17**.

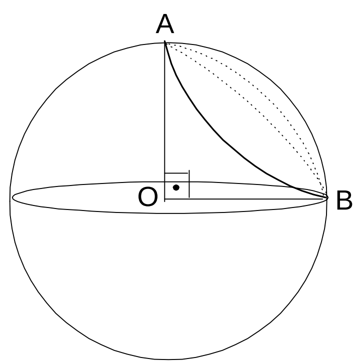


Figura 29.17: Exercício 25.

O ângulo $A\hat{O}B$ mede 90^o e o raio da esfera, $12\,cm$. O volume do cone de vértice O e base de diâmetro AB é:

(a) 9π (b) $36\sqrt{2}\pi$ (c) $48\sqrt{2}\pi$ (d) $144\sqrt{2}\pi$ (e) 1304π

26. Duas esferas de metal de raios $2r$ e $3r$ se fundem para formar uma única esfera. Determine o raio dessa nova esfera.

27. Prove a proposição 3.

Aula 30 – Área de superfícies - parte I

Objetivo

- Determinar áreas de algumas superfícies curvas.

Introdução

Suponha que um pintor utilize x litros de tinta para pintar uma parede quadrada de $1\,m$ de lado e y litros de tinta para pintar a parte externa de uma torre de uma igreja (**Figura 30.1**).

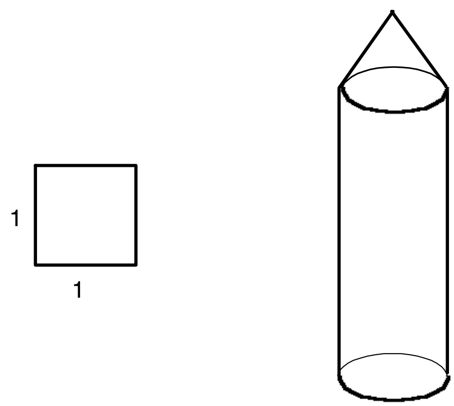


Figura 30.1: Área de superfícies curvas.

Se a camada de tinta da parede e da torre tiverem a mesma espessura, podemos dizer que a área da parte externa da torre é $\frac{y}{x}$ vezes maior que a área da parede. Se adotarmos um quadrado de lado $1\,m$ como unidade de área, então a área da parte externa da torre é $\frac{y}{x}\,m^2$. Assim, para medir a área de qualquer superfície, basta pintá-la e verificar a quantidade de tinta utilizada. Entretanto, pelas razões já descritas quando introduzimos o conceito de área de figuras planas, devemos ser capazes de calcular a área de superfícies sem apelar para nenhum método empírico. Se uma superfície for formada por pedaços de planos, cujas áreas sabemos calcular, então saberemos dizer qual a área da superfície. Por exemplo, é fácil calcular a área da superfície lateral de um prisma, a área de uma pirâmide, a área de um octaedro, a área de um poliedro etc. (veja a **Figura 30.2**).

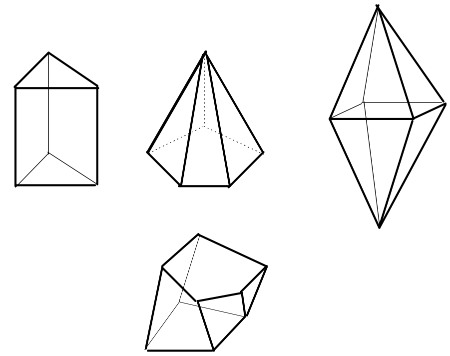


Figura 30.2: Exemplos de superfícies cujas áreas sabemos calcular.

Mas, e se a superfície for curva, como, por exemplo, a superfície lateral de um cone, a superfície lateral de um cilindro, ou uma esfera?

Antes de falarmos mais formalmente sobre esse assunto, exploremos um pouco a nossa intuição. Vamos chamar de e a espessura da camada de tinta utilizada na pintura de uma chapa retangular de área A. Para facilitar o raciocínio, suponhamos que a chapa não tem espessura. Após a pintura, a chapa toma a forma de um paralelepípedo retangular de altura e e base retangular de área A (veja a **Figura 30.3**).

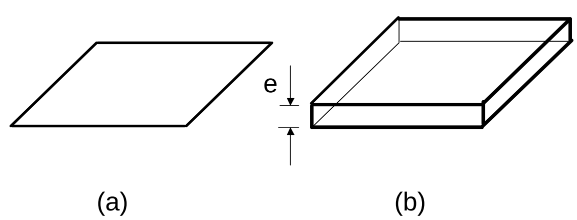


Figura 30.3: (a) Chapa não pintada (b) chapa pintada.

O volume V de tinta utilizada é exatamente o volume do paralelepípedo retangular, ou seja, $V = A \times e$. Daí, obtém-se que

(I) $$A = \frac{V}{e}$$

Vamos considerar, agora, a pintura da superfície lateral de uma lata na forma de um cilindro circular reto. Chamemos de R o raio do cilindro, de h a sua altura e de e a espessura da camada de tinta. Após a pintura, a superfície lateral transforma-se no sólido limitado pelos cilindros (com mesmo eixo) de altura h e raios R e $R + e$ (veja **Figura 30.4**).

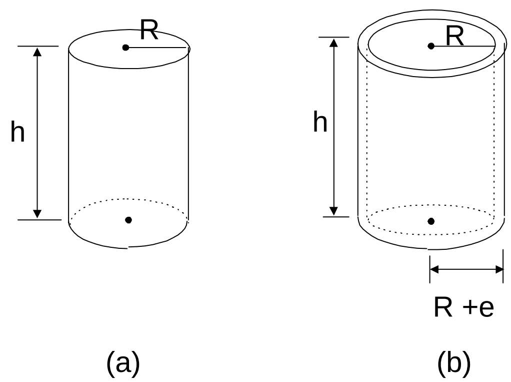


Figura 30.4: (a) Lata não pintada, (b) lata pintada.

O volume de tinta utlizado é exatamente a diferença entre os volumes dos dois cilindros, ou seja,

(II) $$V = \pi(R+e)^2h - \pi R^2h = \pi eh(2R+e)$$

No exemplo da chapa retangular, as bases inferior e superior do paralelepípedo têm área igual a A e (I) vale para qualquer valor de e. No exemplo da lata, as áreas laterais dos dois cilindros são diferentes e a área lateral da lata não pode ser dada por (I). Contudo, se o valor de e for bastante pequeno, as áreas laterais dos dois cilindros são praticamente iguais e podemos aproximar o valor A da área lateral da lata por

(III) $$A \simeq \frac{V}{e} = \frac{\pi eh(2R+e)}{e} = \pi h(2R+e)$$

Essa aproximação será tanto melhor quanto menor for o valor de e. Isso nos faz conjecturar que (III) nos dá o valor exato se fizermos $e = 0$. Assim, é de se esperar que a área lateral de um cilindro reto de raio R e altura h seja dada por $A = 2\pi Rh$. Veremos adiante que, de fato, esse é o valor da área lateral de um cilindro.

Usando as mesmas idéias acima, podemos descobrir qual deve ser a fórmula que determina a área da esfera. Para isso, considere duas esferas concêntricas de raios R e $R+e$ (veja **Figura 30.5**).

O volume do sólido limitado pelas duas esferas é dado por

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi(R+e)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(R^3 + 3R^2e + 3Re^2 + e^3 - R^3) \\ &= \frac{4}{3}\pi e(3R^2 + 3Re + e^2) \end{aligned}$$

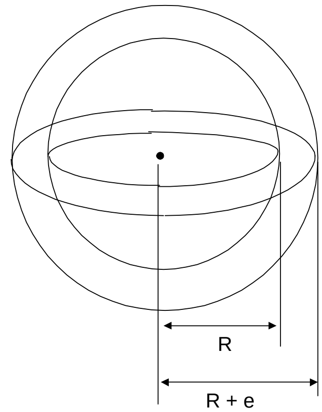


Figura 30.5: Esferas concêntricas.

Um valor aproximado para a área A da esfera é

$$\text{(IV)} \qquad A \simeq \frac{V}{e} = \frac{4}{3}\pi(3R^2 + 3Re + e^2) \ ,$$

e essa aproximação será tanto melhor quanto menor for o valor de e, e (IV) deverá dar o valor exato se $e = 0$. Assim, é de se esperar que a área de uma esfera de raio R seja $A = 4\pi R^2$. Veremos adiante que esse é realmente o valor da área da esfera.

Área de superfícies

Em aulas anteriores, aprendemos a calcular a área de algumas figuras planas como o paralelogramo, o triângulo, o trapézio, o círculo etc. Isso foi feito a partir de algumas propriedades (propriedades análogas permitem determinar o volume dos principais sólidos). Essas propriedades referem-se a superfícies planas e, portanto, não podem ser utilizadas para determinar a área de superfícies como a esfera, a superfície lateral do cilindro ou a superfície lateral do cone.

Para resolver satisfatoriamente esse problema, é necessário dar uma definição precisa do conceito de superfície (que inclui as superfícies planas e as superfícies curvas citadas acima) bem como o de sua área. Para isso, é necessário utilizar ferramentas que estão fora do conteúdo desta disciplina. Tais ferramentas serão estudadas nos cursos de Cálculo e, com elas, podemos determinar áreas (e volumes) de objetos que, de outra forma, não conseguiríamos ou teríamos grandes dificuldades de fazê-lo. Por isso, a determinação da área das principais superfícies curvas será feita de maneira elementar e intuitiva.

Área do cilindro e do cone

A superfície de um cilindro é composta de suas bases e de uma superfície lateral. Como já sabemos calcular a área de um círculo, nos concentraremos, agora, na tarefa de determinar a área lateral de um cilindro (área da superfície lateral).

Dado um cilindro reto de raio R e altura h, podemos cortar sua superfície lateral ao longo de uma geratriz e desenrolá-lo até obtermos um retângulo de lados medindo $2\pi R$ e h (veja **Figura 30.6**).

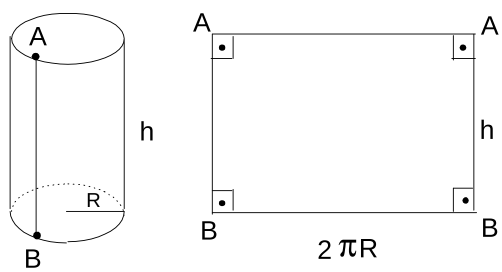


Figura 30.6: Planificação de um cilindro.

Esse procedimento, chamado planificação, não altera a área lateral do cilindro e, como sabemos calcular a área de um retângulo, podemos determinar facilmente o seu valor:

$$\text{Área lateral do cilindro} = \text{Área do retângulo} = 2\pi Rh$$

Portanto,

A área lateral do cilindro é dada pelo produto da altura pelo comprimento do círculo da base.

A superfície de um cone é composta de sua base e de sua superfície lateral. Considere um cone reto com raio da base medindo R. Lembramos que, em um cone reto, todas as geratrizes têm o mesmo comprimento. Chamemos de g a medida de suas geratrizes. Para determinar sua *área lateral* (área da superfície lateral), fazemos, como no caso do cilindro, uma planificação: cortamos o cone ao longo de uma geratriz e o desenrolamos até transformá-lo em um setor de um círculo de raio g que subtende um arco de comprimento igual a $2\pi R$ (veja **Figura 30.7**).

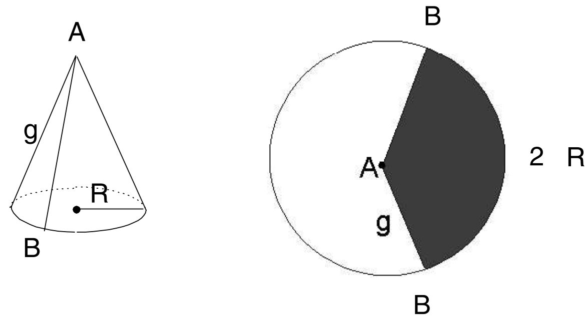


Figura 30.7: Planificação de um cone.

A área lateral do cone é igual à área do setor circular obtido que, por sua vez, é proporcional ao comprimento do arco subentendido:

$$\frac{\text{Área(setor)}}{\pi g^2} = \frac{2\pi R}{2\pi g}$$

Logo,

$$\text{Área(lateral do cone)} = \text{Área(setor)} = \pi R g = \frac{1}{2} g(2\pi R)$$

Portanto,

A área lateral do cone é a metade do produto da geratriz pelo comprimento do círculo da base.

Lembramos que a altura, a geratriz e o raio da base de um cone reto estão relacionados pela fórmula (veja **Figura 30.8**):

$$g = \sqrt{h^2 + R^2}$$

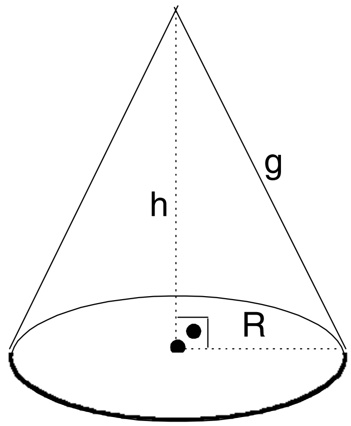


Figura 30.8: Altura (h), geratriz (g) e raio da base (R) de um cone.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- A calcular a área de cilindros, cones e esferas.

Exercícios

1. Um cilindro reto e um prisma reto, cuja base é um triângulo equilátero, têm a mesma altura e a mesma área lateral. Determine a razão entre o volume do cilindro e o volume do prisma.

2. A planificação da superfície lateral de um cone reto é um setor circular de 90^o. Se o raio da base do cone é $5\,cm$, determine a altura do cone.

3. Um cilindro e um cone, ambos retos, possuem o mesmo raio da base e suas geratrizes têm a mesma medida. Determine a razão entre a área lateral do cone e a área lateral do cilindro.

4. Em um cone reto, o ângulo entre uma geratriz e o eixo é α. Determine o ângulo do setor circular obtido pela planificação do cone.

5. Prove que, de todos os cilindros de mesmo volume, o cilindro equilátero é o que possui a menor área total.

6. (UFPA, 1985) A área lateral de um cilindro reto é metade da área da base. Se o perímetro de sua seção meridiana é $18\,m$, o volume vale:

   (a) $8\pi\,m^3$ (b) $10\pi\,m^3$ (c) $12\pi\,m^3$ (d) $16\pi\,m^3$ (e) $20\pi\,m^3$

7. (ITA, 1977) Se S é a área total de um cilindro reto de altura h, e se m é a razão direta entre a área lateral e a soma das áreas das bases, então o valor de h é dado por:

   (a) $h = m\sqrt{\dfrac{S}{2\pi(m+2)}}$ (b) $h = m\sqrt{\dfrac{5}{4\pi(m+2)}}$

   (c) $h = m\sqrt{\dfrac{5}{2\pi(m+2)}}$ (d) $h = m\sqrt{\dfrac{5}{4\pi(m+1)}}$ (e) N.R.A.

8. (U.MACK, 1975) A altura de um cilindro é $20\,cm$. Aumentando-se o raio desse cilindro de $5\,cm$, a área lateral do novo cilindro fica igual à área total do primeiro. O raio do primeiro cilindro, em cm, é:

   (a) 10 (b) 8 (c) 12 (d) 5 (e) 6

9. (ITA, 1988) A geratriz de um cone circular reto forma com o eixo do cone um ângulo de 45^o. Sabendo-se que o perímetro de sua seção meridiana vale $2\,cm$, podemos afirmar que a área total desse cone vale:

   (a) $\dfrac{\pi}{3}(2\sqrt{2}-2)\,cm^2$ (b) $\pi(\sqrt{2}-1)\,cm^2$

   (c) $\pi(\sqrt{3}-1)\,cm^2$ (d) $\dfrac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)\,cm^2$ (e) $\pi(\sqrt{5}-1)\,cm^2$

Aula 31 – Área de superfícies - parte II

Objetivos

- Definir sólidos de revolução.
- Determinar áreas de algumas superfícies de revolução.

Introdução

Considere um plano e uma linha simples L contida nesse plano. Essa linha simples poderia ser um segmento de reta, uma poligonal simples, um pedaço de círculo ou qualquer conjunto que, intuitivamente, pudéssemos esticá-lo e transformá-lo em um segmento de reta. Considere, ainda, uma reta r contida nesse plano e que não corte L. Dado $P \in L$, sabemos que existe um único plano α passando por P e perpendicular a r. Seja $O = r \cap \alpha$ e chame de C o círculo contido em α, centrado em O e de raio OP (veja **Figura 31.1**).

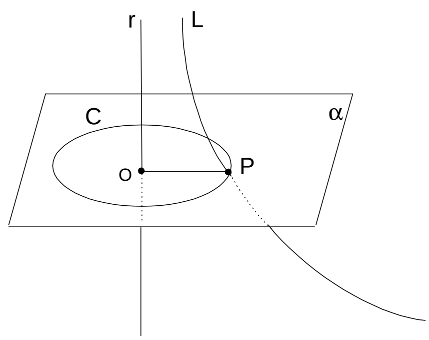


Figura 31.1: Rotação de um ponto em torno de um eixo.

A superfície S obtida pela união de todos os círculos C é chamada de superfície de revolução. Dizemos que S foi obtida pela rotação de L em torno de r. A reta r é chamada de *eixo* e L de *geratriz* da *superfície de revolução* (veja **Figura 31.2**).

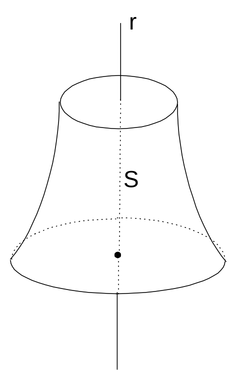


Figura 31.2: Superfície de revolução.

Se a linha L for fechada ou se seus dois extremos pertencerem ao eixo, a superfície de revolução delimita um sólido, chamado de *sólido de revolução*.

O cilindro, o cone e a esfera são exemplos de superfície de revolução. O cilindro pode ser obtido pela rotação de um retângulo em torno de uma reta que contém um de seus lados; o cone pode ser obtido pela rotação de um triângulo retângulo em torno de uma reta que contém um dos catetos, e a esfera pode ser obtida pela rotação de um semicírculo em torno de uma reta que contém o diâmetro (veja **Figura 31.3**).

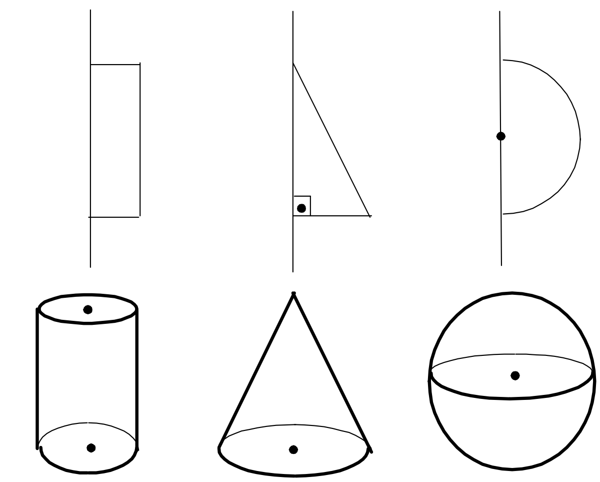


Figura 31.3: Cilindro, cone e esfera como superfícies de revolução.

Considere, agora, a rotação de um segmento de reta AB em torno de uma reta r. Chame de R e R' as distâncias de, respectivamente, A e B à reta r. A superfície de revolução obtida é um cone ($R = 0$ ou $R' = 0$), um cilindro ($R = R'$) ou um tronco de cone ($R \neq R'$) (veja **Figura 31.4**).

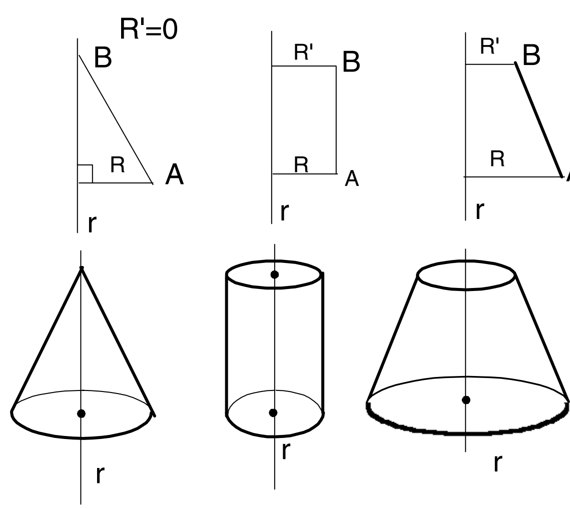


Figura 31.4: Rotação de um segmento.

Se a superfície for um cone ou um cilindro, já sabemos calcular sua área. Calcularemos, agora, a área no caso em que a superfície é um tronco de cone. Para isso, seja $C = r \cap \overleftrightarrow{AB}$ e sejam $l = m(AB)$ e $c = m(BC)$. Denote por O e O' os pés das perpendiculares à reta r baixadas de A e B, respectivamente (veja **Figura 31.5**).

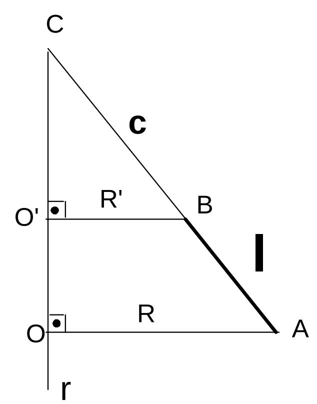


Figura 31.5: $CO'B \simeq COA$.

Observe que a área A do tronco de cone é a diferença entre as áreas laterais de dois cones: um de raio R e geratriz $l + c$ e outro de raio R' e geratriz c. Logo,

$$A = \pi R(l + c) - \pi R'c$$

Da semelhança dos triângulos $CO'B$ e COA, obtemos

$$\frac{R'}{c} = \frac{R}{l + c}$$

Substituindo na equação anterior, tem-se

$$A = \pi Rl + \pi R'(l + c) - \pi R'c = \pi Rl + \pi R'l = 2\pi \frac{R + R'}{2} l$$

Note que $\dfrac{R + R'}{2}$ é exatamente a distância do ponto médio de AB à reta r ou, o que é a mesma coisa, o raio do círculo obtido pela rotação do ponto médio AB em torno de r. Chamaremos esse círculo de círculo médio do tronco de cone. Então, a equação anterior nos diz que

> a área lateral de um tronco de cone é o produto do comprimento do *círculo médio* pela geratriz.

Para os nossos propósitos, será mais conveniente encontrar uma outra expressão para a área lateral A de um tronco de cone. Para isso, sejam M o ponto médio de AB e s a reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ em M. Sejam $D = r \cap s$, $a = m(MD)$ e h a altura do tronco de cone. Façamos $m = \dfrac{R + R'}{2}$ (veja **Figura 31.6**).

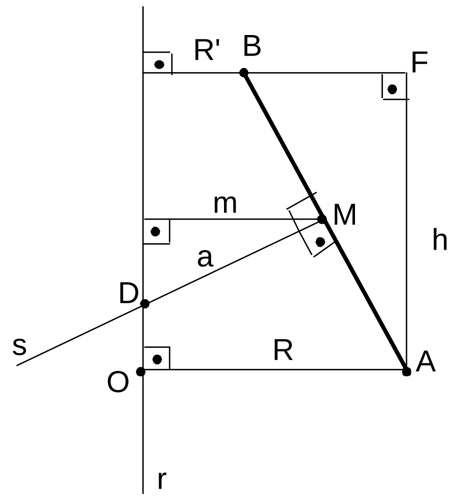


Figura 31.6: Determinação da área lateral de um tronco de cone.

Como os triângulos MED e AFB são semelhantes (por quê?), tem-se $\dfrac{m}{h} = \dfrac{a}{l}$, o que implica

(I) $$A = 2\pi ml = 2\pi ah$$

No caso em que $R = R'$ (nesse caso temos um cilindro), é claro que $D = E$, $a = m = R$ e h é a medida da geratriz do cilindro. Logo, nesse caso, (I) também fornece a área lateral de um cilindro. No caso em que $R' = 0$ (nesse caso temos um cone), tem-se $m = \dfrac{R}{2}$ e (I) também fornece a área lateral de um cone.

Conforme veremos, a expressão (I) será de grande utilidade na determinação da área de uma esfera. O número a da fórmula (I), que é o comprimento do segmento da mediatriz de AB localizado entre r e $\overleftrightarrow{AB}$, será também chamado de *apótema* (a razão para esse nome se tornará clara na próxima seção).

Área da esfera

Considere um polígono regular de $2n$ lados e seja r uma reta que passa por dois vértices opostos. A superfície de revolução obtida pela rotação do polígono em torno de r é formada por 2 cones e por $n-2$ troncos de cone. Veja na **Figura 31.7** dois casos particulares em que $n=4$ e $n=5$.

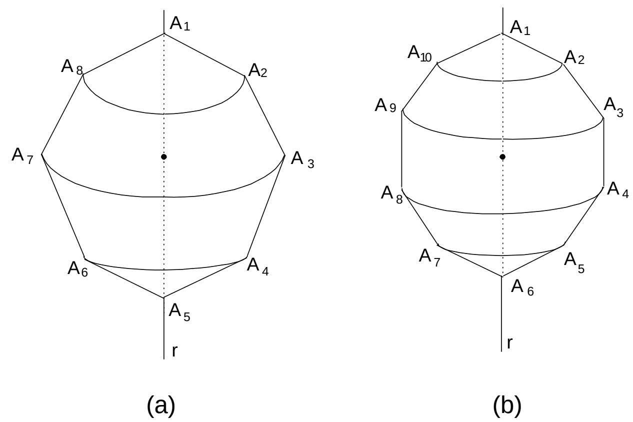


Figura 31.7: Rotação de um polígono de $2n$ lados em torno de uma reta que contém vértices opostos (a) $n=4$. (b) $n=5$.

No caso em que n é ímpar, como na **Figura 31.7.b**, um dos $n-2$ troncos de cone é, na verdade, um cilindro. Observe que a soma das alturas dos 2 cones e dos $n-2$ troncos de cone é igual à distância entre dois vértices opostos, como A_1 e A_5 na **Figura 31.7.a** e A_1 e A_6 na **Figura 31.7.b**.

Chamaremos essa distância de *diâmetro* do polígono. Além disso, tanto os apótemas dos cones quanto os apótemas dos troncos de cone coincidem com o apótema do polígono regular. O seguinte resultado é conseqüência imediata de (I):

Proposição 1

Seja S a superfície de revolução obtida pela rotação de um polígono regular de $2n$ lados em torno de uma reta que contém dois vértices opostos. Sejam a o apótema e d o diâmetro do polígono regular. Então a área de S é igual a $2\pi ad$.

Nosso objetivo agora é determinar a área de uma esfera. O caminho que seguiremos foi inspirado nas idéias originais de Arquimedes. Seja S uma esfera de raio R, a qual pode ser vista como a superfície de revolução obtida pela rotação de um semicírculo C de raio R em torno do diâmetro.

Inscrevamos em C a metade de um polígono regular $A_1A_2\ldots A_{2n}$ de $2\,n$ lados e circunscrevamos em C a metade de um polígono regular $B_1B_2\ldots B_{2n}$ de $2\,n$ lados (veja na **Figura 31.8** um caso particular em que $n=4$).

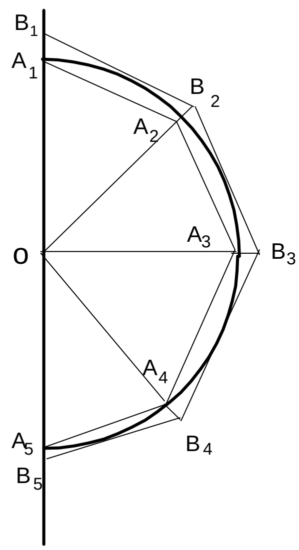


Figura 31.8: Determinação da área de uma esfera.

Sejam S_1 e S_2 as superfícies de revolução obtidas pela rotação de, respectivamente, $A_1\ldots A_{n+1}$ e $B_1\ldots B_{n+1}$ em torno da reta que contém o diâmetro. Devemos ter

$$(II) \qquad \text{Área}(S_1) < \text{Área}(S) < \text{Área}(S_2)$$

Observe que o diâmetro do polígono inscrito é $2R$ e que o apótema do polígono circunscrito é R. Além disso, podemos provar facilmente (veja os exercícios desta aula) que o apótema do polígono inscrito vale $Rcos\left(\dfrac{180^o}{2n}\right)$ e que o diâmetro do polígono circunscrito vale $\dfrac{2R}{cos\,(180^o/2n)}$.

Segue de (II) e da proposição 1 que

$$(III) \qquad 4\pi R^2 cos\left(\frac{180^o}{2n}\right) < \text{Área(S)} < \frac{4\pi R^2}{cos(180^o/2n)}$$

As desigualdades (III) valem para todo inteiro positivo n. Como $cos(180^o/4n) < 1$, tem-se

$$4\pi R^2 cos\left(\frac{180^o}{2n}\right) < 4\pi R^2 < \frac{4\pi R^2}{cos(180^o/2n)}$$

As desigualdades (III) e (IV) implicam

$$|\text{ Área}(S) - 4\pi R^2 | < 4\pi R^2 \left(\frac{1}{cos(180^o/2n)} - cos(180^o/2n) \right)$$

para todo inteiro positivo n. Como o lado direito da desigualdade acima é tão pequeno quanto desejarmos (para n suficientemente grande), concluímos que $|\text{ Área}(S) - 4\pi R^2 | = 0$.

Portanto,

Proposição 2

A área de uma esfera de raio R é $4\pi R^2$.

Encerraremos esta aula tratando do que chamamos de *segmento esférico* e de *calota esférica*.

Definição 1

Calota esférica é cada uma das partes em que fica dividida uma esfera quando cortada por um plano.

Definição 2

Segmento esférico é cada uma das partes em que fica dividido o sólido limitado por uma esfera quando esta é cortada por um plano.

Note que calota esférica é uma superfície (possui área) e segmento esférico é um sólido (possui volume).

Definição 3

Chamamos de *altura de um segmento esférico* a parte do diâmetro perpendicular ao plano secante contida no segmento esférico (veja **Figura 31.9**).

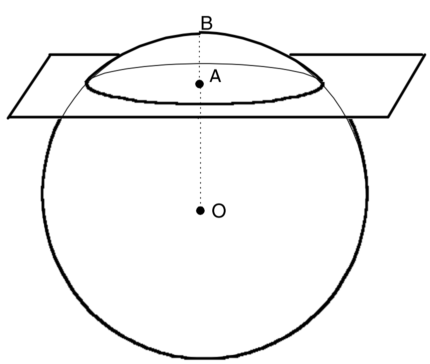


Figura 31.9: $m(AB)$ é a altura do segmento esférico.

Definição 4

Chamamos de *altura de uma calota esférica* a altura do segmento esférico correspondente.

A proposição a seguir dá as fórmulas para o cálculo da área de uma calota esférica e do volume de um segmento esférico.

Proposição 3

A área de uma calota esférica de altura h é dada por $A = 2\pi Rh$ e o volume de um segmento esférico de altura h é dado por $V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$, sendo R o raio da esfera que contém a calota esférica.

A fórmula para o volume de um segmento esférico pode ser determinada através do Princípio de Cavalieri, da mesma maneira que obtivemos a fórmula para o volume de uma esfera. A fórmula para a área de uma calota esférica pode ser obtida de (I), usando um procedimento análogo ao utilizado na determinação da área de uma esfera. Deixamos a prova da proposição 3 a cargo do aluno (veja exercícios 3 e 4 desta aula).

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- A calcular a área da superfície de revolução obtida pela rotação de um polígono regular em torno de um diâmetro.
- A calcular a área da esfera.
- A calcular a área de uma calota esférica e o volume de um segmento esférico.

Exercícios

1. Prove que o apótema de um polígono regular de n lados, inscrito em um círculo de raio R é igual a $Rcos\left(\frac{180^o}{n}\right)$.
2. Prove que o diâmetro de um polígono regular de $2\,n$ lados, circunscrito a um círculo de raio R, é igual a $\frac{2R}{cos\,(180^o/n)}$.
3. Prove que o volume de um segmento esférico de altura h e raio R é igual a $\pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$.
4. Prove que a área de uma calota esférica de altura h e raio R é igual a $2\pi Rh$.

5. Um cilindro equilátero e uma esfera têm o mesmo volume. Determine a razão entre suas áreas.

6. Uma esfera de $6\,cm$ de raio é seccionada por um plano que dista $2\,cm$ do seu centro. Determine as áreas das calotas obtidas.

7. Uma esfera de raio $8\,cm$ é seccionada por dois planos paralelos α e β, distantes, respectivamente, $3\,cm$ e $5\,cm$ do seu centro. Se o centro da esfera está entre α e β, determine o volume do sólido compreendido entre α e β.

8. (CESGRANRIO, 1977) Uma laranja pode ser considerada uma esfera de raio R, composta por 12 gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo tem área igual a:

   (a) $2\pi R^2$ (b) $4\pi R^2$ (c) $\frac{3\pi}{4}R^2$ (d) $3\pi R^2$ (e) $\frac{4}{3}\pi R^2$

9. (PUC-SP, 1971) A medida dos lados de um triângulo equilátero ABC é a. O triângulo ABC gira em torno de uma reta r do plano do triângulo, paralela ao lado BC e passando por A. O volume do sólido de revolução obtido é:

   (a) $\frac{\pi a^3}{3}$ (b) $\frac{\pi a^3}{2}$ (c) πa^3 (d) $\frac{3\pi a^3}{2}$ (e) $\frac{\pi a^3}{5}$

10. A **Figura 31.10** mostra uma esfera de raio R e um cone reto de altura $2R$ cuja base é um círculo de raio R tangente à esfera.

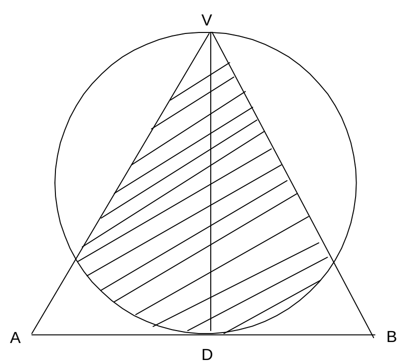


Figura 31.10: Exercício 10.

Sabendo que o segmento VD, que liga o vértice do cone ao centro da base do cone, é um diâmetro da esfera, determine o volume do sólido limitado pela esfera e pelo cone.

11. (ITA, 1975) As medidas dos catetos de um triângulo retângulo são $(sen\, x)\, cm$ e $(cos\, x)\, cm$. Um estudante calculou o volume do sólido gerado pela rotação desse triângulo em torno da hipotenusa, e obteve como resultado $\pi\, cm^3$. Considerando esse resultado como certo, podemos afirmar que x é, em rad, igual a:

    (a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{5}$ (e) $N.R.A.$

12. (V.UNIF. RS, 1980) O volume do sólido gerado pela rotação de um triângulo equilátero de lado a em torno de um de seus lados é:

    (a) $\frac{\pi a^3}{4}$ (b) $\frac{\pi a^3}{3}$ (c) $\frac{\pi a^3}{2}$ (d) $\frac{3\pi a^3}{4}$ (e) $\frac{4\pi a^3}{3}$

13. (U. MACK, 1981) Na **Figura 31.11**, o retângulo $ABCD$ faz uma rotação completa em torno de AB.

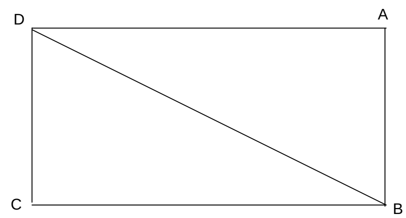


Figura 31.11: Exercício 13.

A razão entre os volumes gerados pelos triângulos ABD e BCD é:
(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 3 (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{1}{4}$

14. (UFMG, 1982) Considerem-se um retângulo $ABCD$ e dois cilindros: um obtido girando-se $ABCD$ em torno de AB e, o outro, girando-se o retângulo em torno de BC. A razão entre a soma dos volumes dos dois cilindros e a área do retângulo, nessa ordem, é 10π. O perímetro do retângulo é:

    (a) 10 (b) 20 (c) 30 (d) 40 (e) 50

15. A **Figura 31.12** mostra um setor circular de raio 1 e ângulo igual a 30^o.

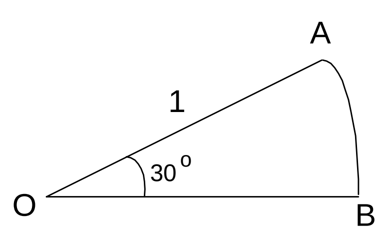


Figura 31.12: Exercício 15.

Determine a área total do sólido obtido pela rotação do setor em torno de OB.

16. A **Figura 31.13** mostra duas linhas (L_1 e L_2) e três retas r, s e t contidas em um plano, com $r \perp s$ e $r \perp t$.

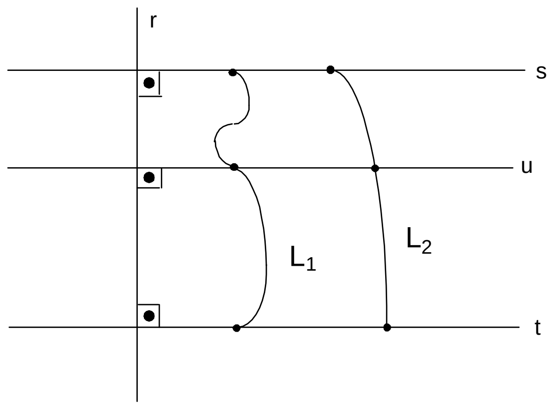


Figura 31.13: Exercício 16.

Suponha que cada reta u perpendicular a r e entre s e t corte L_1 e L_2 em um único ponto e que a distância de $L_1 \cap u$ a r seja menor que a distância de $L_2 \cap u$ a r. Podemos afirmar que a área da superfície de revolução obtida pela rotação de L_1 em torno de r é menor que a área da superfície de revolução obtida pela rotação de L_2 em torno de r? Justifique sua resposta.

17. (UFF,1999) A **Figura 31.5** representa um paralelogramo $MNPQ$.

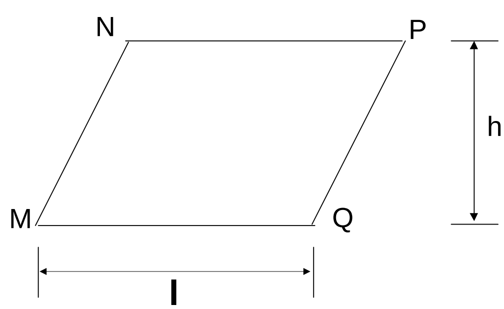


Figura 31.14: Exercício 17.

O volume do sólido obtido pela rotação do paralelogramo em torno da reta suporte do lado MQ é igual a:

(a) $\frac{\pi}{2}h^2(\ell + h)$ (b) $\frac{\pi}{2}h^2\ell$ (c)$\pi h^2(\ell + h)$
(d) $\pi h(\ell + h)^2$ (e) $\pi h^2\ell$

Aula 32 – Inscrição e circunscrição de sólidos

Objetivos

- Identificar se determinados sólidos são ou não inscritíveis.
- Identificar se determinados sólidos são ou não circunscritíveis.

Introdução

Quando estudamos Geometria Plana, definimos polígonos inscritíveis e polígonos circunscritíveis. Analogamente, podemos considerar a inscrição e a circunscrição de alguns sólidos.

Definição 1
Um poliedro está inscrito em uma esfera se todos os seus vértices pertencem à esfera. Nesse caso, diz-se que o poliedro é *inscritível*. Um poliedro está circunscrito a uma esfera se todas as faces do poliedro são tangentes à esfera. Nesse caso, diz-se que o poliedro é *circunscritível*.

Quando um poliedro está inscrito em uma esfera, diz-se também que a esfera está circunscrita ao poliedro. Quando um poliedro está circunscrito a uma esfera, diz-se também que a esfera está inscrita no poliedro.

Como exemplo de poliedro inscritível podemos citar os paralelepípedos retangulares. Para ver que todo paralelepípedo retangular é inscritível, lembre que as diagonais de um paralelepípedo qualquer são concorrentes em um ponto e que esse ponto as divide ao meio. Além disso, as diagonais de um paralelepípedo retangular têm o mesmo comprimento. Logo, o ponto de encontro entre elas é equidistante dos vértices e a distância entre esse ponto e cada um dos vértices é a metade da medida de suas diagonais.

Como $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ é a medida das diagonais de um paralelepípedo retangular de medidas a, b e c, provamos que:

Proposição 1
Todo paralelepípedo retangular é inscritível. Se o paralelpípedo retangular tem medidas a, b e c então o raio da esfera circunscrita é $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.
Segue da proposição 8 que o raio da esfera circunscrita a um cubo de aresta a é $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Uma pergunta natural que surge é: todo paralelepípedo é inscritível? A proposição a seguir diz que não.

Proposição 2

Todo paralelepípedo inscritível é retangular.

Prova:

Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo inscrito em uma esfera S. Sejam α o plano da face $ABCD$ e $\mathcal{C}$ o círculo obtido pela interseção entre α e S. Como A, B, C e D pertencem a $\mathcal{C} = \alpha \cap S$, o paralelogramo $ABCD$ está inscrito em $\mathcal{C}$. Mas pode-se provar facilmente (veja exercício 1 desta aula) que todo paralelogramo inscritível é um retângulo. Logo, a face $ABCD$ é um retângulo. Um raciocínio análogo prova que as outras faces são também retângulos. Assim, todas as faces de $ABCDEFGH$ são retângulos e, portanto, $ABCDEFGH$ é um paralelepípedo retangular.

Q.E.D.

Consideraremos, agora, a circunscrição de paralelepípedos. É um fato verdadeiro, e muito fácil de provar (veja exercício 2 desta aula), que todo paralelogramo circunscritível é um losango. É de se esperar que valha um resultado análogo para paralelepípedos, ou seja, que todo paralelepípedo circunscritível seja um *romboedro* (paralelepípedo que possui todas as arestas congruentes). Mas isso não é verdade. O paralelepípedo da **Figura 32.1** é circunscritível e não é um romboedro.

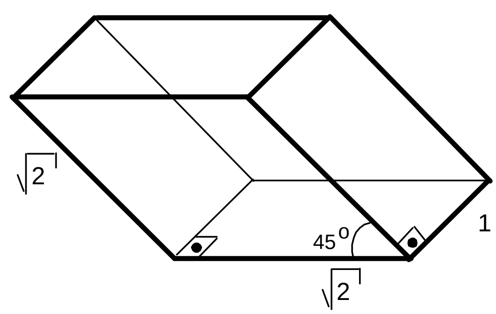


Figura 32.1: Paralelepípedo circunscritível que não é um romboedro.

Deixaremos como exercício (veja exercício 3 desta aula) a prova de que o paralelepípedo da **Figura 32.1** é circunscritível.

Para paralelepípedos circunscritíveis, vale o seguinte resultado:

Proposição 3
As faces de um paralelepípedo circunscritível têm a mesma área.

A prova desta proposição será deixada como exercício (veja exercício 4 desta aula).

Segue da proposição anterior que um paralelepípedo retangular circunscritível é um cubo.

Provaremos agora que todo cubo é inscritível.

Considere um cubo $ABCDFGHI$ de aresta a. Já sabemos que ele é circunscritível e que o raio da esfera circunscrita é $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Seja O o centro dessa esfera e trace os segmentos OA, OB, OC, OD, AC e BD. Seja E o ponto de encontro entre os segmentos AC e BD e trace o segmento OE (veja a **Figura 32.2**).

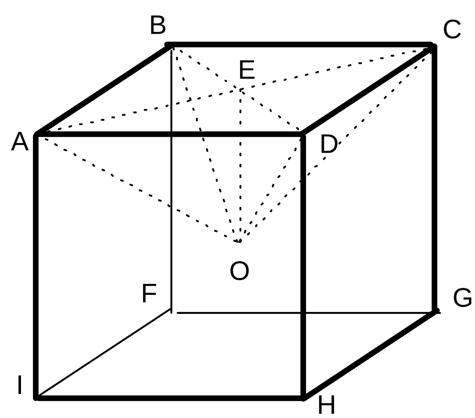


Figura 32.2: E é o ponto de encontro das diagonais da face.

Como $OA \equiv OC$ e E é o ponto médio de AC, segue que OE é perpendicular a AC. Da mesma forma, como $OB \equiv OD$ e E é o ponto médio de BD, tem-se que OE também é perpendicular a BD. Assim, OE é perpendicular a duas retas concorrentes do plano que contém $ABCD$ e, portanto, OE é perpendicular à face $ABCD$. Como OBE é retângulo em E, $m(OB) = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $m(BE) = a\sqrt{2}/2$, segue do Teorema de Pitágoras que $m(OE) = a/2$.

Está provado que a distância de O ao plano da face $ABCD$ é $a/2$. Da mesma forma, prova-se que a distância de O aos planos das outras faces é também $a/2$. Logo, a esfera de centro O e raio $a/2$ é tangente a todas as faces do cubo. Está, então, provado que:

Proposição 4
Todo cubo é circunscritível. Se a aresta do cubo é a, o raio da esfera inscrita é $\frac{a}{2}$. Além disso, a esfera inscrita tangencia o cubo no centro de cada face.

Inscrição e circunscrição de tetraedros

Consideraremos, agora, a inscrição de tetraedros. A proposição a seguir será fundamental para esse fim.

Proposição 5
Por quatro pontos não coplanares passa uma única esfera

Prova:

Sejam A, B , C e D pontos que não estão em um mesmo plano e seja α o plano que contém B, C e D. Sabemos que existe um ponto E que equidista dos pontos B, C e D. O ponto E é precisamente o circuncentro do triângulo BCD. Seja r a reta perpendicular a α e passando por E (veja **Figura 32.3**).

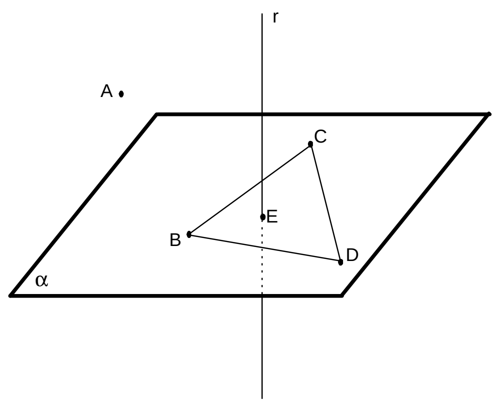


Figura 32.3: Prova da proposição 5.

Seja P um ponto de r. Usando o caso de congruência L.A.L. nos triângulos PBE, PEC e PED, podemos provar que $PB \equiv PC \equiv PD$, ou seja, todo ponto de r equidista de B, C e D.

Seja β o plano perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e que passa pelo ponto médio de AB. Podemos provar (veja o exercício 5 desta aula) que β equidista de A e B, ou seja, todo ponto de β equidista de A e B. Afirmamos que β intersecta r. Provaremos essa afirmação por contradição. Suponha que β e r sejam paralelos. Como $r \perp \alpha$, tem-se $\beta \perp \alpha$ (justifique!). Como $\overleftrightarrow{AB} \perp \beta$ e $\overleftrightarrow{AB}$ não está contida em α, segue que $\overleftrightarrow{AB}$ e α são paralelos, o que é um absurdo, pois

$B \in \overleftrightarrow{AB} \cap \alpha$. Portanto, β intersecta r em um um ponto Q (veja **Figura 32.4**).

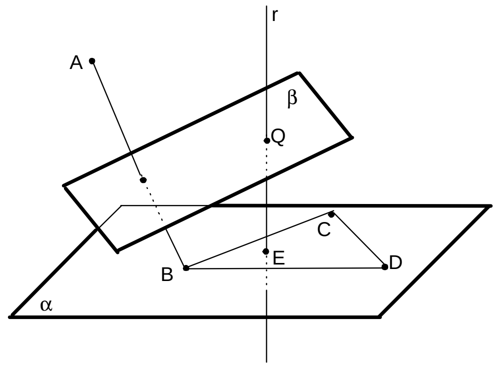


Figura 32.4: Prova da proposição 5.

Temos que $m(QB) = m(QC) = m(QD)$, pois $Q \in r$, e $m(QA) = m(QB)$, pois $Q \in \beta$. Logo, Q equidista de A, B, C e D, o que prova que a esfera centrada em Q e de raio $m(QA)$ passa por A, B, C e D. Deixaremos como exercício (veja exercício 6 desta aula) a prova de que não existe outra esfera que passa por A, B, C e D.

Q.E.D.

Como conseqüência imediata da proposição 5 temos o seguinte corolário:

Corolário: Todo tetraedro é inscritível.

Provaremos agora que todo tetraedro regular é circunscritível.

Seja $ABCD$ um tetraedro regular e seja O o centro da esfera circunscrita. Sejam M o ponto médio de BC, E o circuncentro de BCD e trace AM, MD e AE (veja **Figura 32.5**).

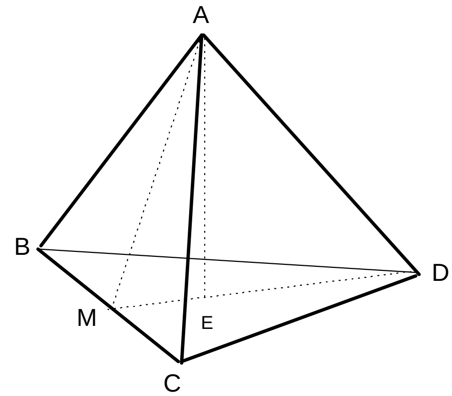


Figura 32.5: Prova de que todo tetraedro regular é circunscritível.

Note que $E \in MD$, pois o triângulo BCD é equilátero. Como ABC e DBC são equiláteros e M é o ponto médio de BC, temos $AM \perp BC$ e $DM \perp BC$. Logo, BC é perpendicular ao plano que contém os pontos A, M e D. Segue que BC é perpendicular a AE. Da mesma forma, prova-se que AE e DC são perpendiculares. Logo, AE é perpendicular a duas retas concorrentes ($\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CD}$) do plano que contém B, C e D. Segue que AE é perpendicular ao plano da face BCD. Conseqüentemente, o centro O da esfera circunscrita pertence à reta $\overleftrightarrow{AE}$. De fato, $O \in AE$ (prove isso!). Da mesma forma, prova-se que as retas que ligam O ao circuncentro (nesse caso coincide com o baricentro) das outras faces de $ABCD$ são perpendicular às respectivas faces. Seja F o circuncentro de ABC e trace OF e OM (veja **Figura 32.6**).

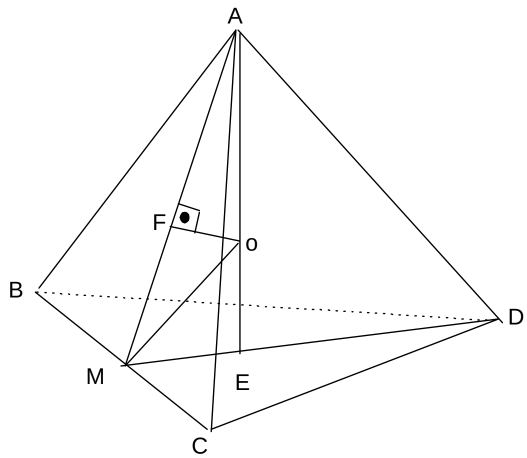


Figura 32.6: F é o baricentro de ABC.

Note que os triângulos OEM e OFM são retângulos em E e F, respectivamente. Além disso,

$$m(FM) = \frac{1}{3}m(AM) = \frac{1}{3}m(DM) = m(EM).$$

Os triângulos OEM e OFM são então congruentes, de onde se conclui que $OE \equiv OF$, ou seja, a distância de O ao plano da face BCD é igual à distância de O ao plano da face ABC. Da mesma forma, prova-se que a distância de O ao plano das outras faces é igual a $m(OE)$. Isso prova que a esfera de centro O e raio OE é tangente a todas as faces de $ABCD$. Logo, o tetraedro $ABCD$ é circunscritível e o centro O da esfera circunscrita é também o centro da esfera inscrita. Observe que $m(OE)$ é o raio da esfera inscrita e $m(AO)$ é o raio da esfera circunscrita. Calcularemos, agora, $m(OE)$ e $m(AO)$. Se a aresta do tetraedro mede a, sabemos que:

$$m(AM) = \frac{a\sqrt{3}}{2}\ ,$$

$$m(FM) = m(EM) = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ e}$$

$$m(AF) = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}\ .$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos

$$m(AE)^2 = m(AM)^2 - m(EM)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}.$$

Assim,

$$m(AE) = \frac{a\sqrt{6}}{3}\ .$$

Como os triângulos AFO e AEM são semelhantes, tem-se

$$\frac{m(OF)}{m(EM)} = \frac{m(AO)}{m(AM)} = \frac{m(AF)}{m(AE)}.$$

Substituindo os valores de $m(EM)$, $m(AM)$, $m(AF)$ e $m(AE)$, obtemos que $m(OF) = \frac{a\sqrt{6}}{12}$ e $m(AO) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Sintetizando o que fizemos anteriormente, temos o seguinte resultado.

Proposição 6

Todo tetraedro regular é inscritível e circunscritível e as esferas inscrita e circunscrita têm o mesmo centro. Se a aresta do tetraedro vale a, então os raios r e R das esferas, respectivamente, inscrita e circunscrita, valem $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$ e $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Além disso, a esfera inscrita tantencia as faces em seus baricentros.

Sabemos que todo tetraedro é inscritível. Se o tetraedro for regular, sabemos que ele também é circunscritível e que os centros das esferas inscrita e circunscrita coincidem. Resta a seguinte pergunta: todo tetraedro é circunscritível? A resposta é sim, e a prova desse fato será deixada como exercício desta aula (veja o exercício 20 desta aula).

Inscrição e circunscrição de um octaedro regular

Encerraremos esta aula com o estudo da inscrição e da circunscrição de um octaedro regular.

Seja $ABCDEF$ um octaedro regular de aresta medindo a, e seja O o ponto de encontro das diagonais BD e CE. Trace AO (veja **Figura 32.7**).

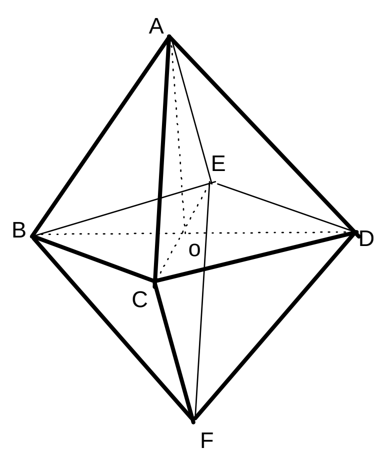


Figura 32.7: Octaedro regular.

Como $AB \equiv AD \equiv AC \equiv AE$ (pois todas as arestas têm o mesmo comprimento) e O é o ponto médio de BD e de CE, tem-se que $AO \perp BD$ e $AO \perp CE$. Segue que AO é perpendicular ao plano de $BCDE$. Além disso, os triângulos AOD, AOE, AOB e AOC, retângulos em O, são congruentes (por quê?). Em particular, $OE \equiv OB \equiv OC \equiv OD$. Seja M o ponto médio de BC e trace AM e OM. Seja OG a altura do triângulo AOM relativa ao lado AM (veja **Figura 32.8**).

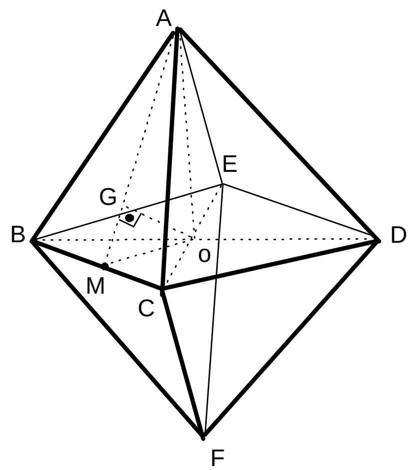


Figura 32.8: BC é perpendicular ao plano que contém AMO.

Como $AB \equiv AC$ e $OB \equiv OC$, tem-se que $AM \perp BC$ e $OM \perp BC$, de onde se conclui que BC é perpendicular ao plano que contém AMO. Segue que OG é perpendicular a BC. Como $OG \perp AM$, conclui-se que OG é perpendicular à face ABC. Determinemos, agora, $m(AO)$ e $m(OG)$. Como $m(AD) = a$, $m(OD) = \frac{1}{2}m(BD) = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ e AOD é retângulo em O, segue do teorema de Pitágoras que

$$m(AO)^2 = m(AD)^2 - m(OD)^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

ou seja, $m(AO) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Da mesma forma, prova-se que $m(FO) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Como a distância de O a cada um dos pontos B, C, D e E é também $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, segue que a esfera de centro O e raio $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ passa por todos os vértices do octaedro. Para determinar $m(OG)$, usaremos a semelhança entre os triângulos AOM e AGO.

Dessa semelhança, temos

$$\frac{m(OM)}{m(OG)} = \frac{m(AM)}{m(AO)} = \frac{m(AO)}{m(AG)}$$

Como $m(OM) = \frac{a}{2}$, $m(AM) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ e $m(AO) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, obtemos que $m(OG) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ e que $m(AG) = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}m(AM)$.

Como OG é perpendicular à face ABC, segue que a distância de O à face ABC é $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. Além disso, como $m(AG) = \frac{2}{3}m(AM)$, tem-se que G é o baricentro do triângulo ABC. Da mesma forma, prova-se que a distância de O às demais faces é $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. Assim, a esfera de centro O e raio $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ é tangente a todas as faces do octaedro e os pontos de tangência são precisamente os baricentros das faces. Está provado, então, que:

Proposição 7

Um octaedro regular é inscritível e circunscritível e os centros das esferas inscrita e circunscrita coincidem. Se a aresta do octaedro mede a, então os raios das esferas inscrita e circunscrita medem, respectivamente, $r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ e $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Além disso, a esfera inscrita tangencia o octaedro nos baricentros das faces.

Resumo

Nesta aula você aprendeu...

- Que todo paralelepípedo retangular é inscritível.
- Que todo paralelepípedo inscritível é retangular.
- Que as faces de um paralelepípedo circunscritível têm a mesma área.
- Que por quatro pontos não coplanares passa uma única esfera.
- Que todo tetraedro é inscritível e circunscritível.
- Que todo octaedro regular é inscritível e circunscritível.

Exercícios

1. Prove que todo paralelogramo inscritível é retângulo.

2. Prove que todo paralelogramo circunscritível é losango.

3. Prove que o paralelepípedo da **Figura 32.1**, do texto, é circunscritível.

4. Prove que as faces de um paralelepípedo circunscritível têm a mesma área.

   Sugestão: Prove que a altura do paralelepípedo em relação a qualquer face é a mesma e use a fórmula para o volume de um paralelepípedo.

5. Sejam AB um segmento e β o plano perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e passando pelo ponto médio de AB. Prove que, para todo $P \in \beta$ tem-se $m(P, A) = m(P, B)$.

6. Prove que a esfera que passa por quatro pontos não coplanares é única.

7. Seja $ABCD$ um tetraedro regular de aresta a. Prove que o octaedro determinado pelos pontos médios das arestas do tetraedro é regular e determine a medida de suas arestas (veja **Figura 32.9**).

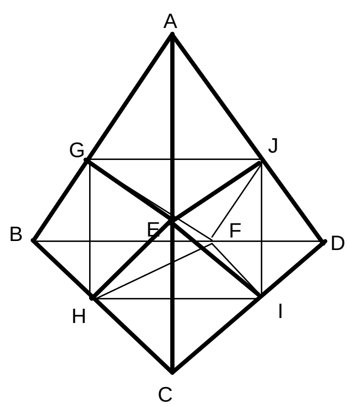


Figura 32.9: Exercício 7.

8. Seja $ABCDEFGH$ um cubo de aresta medindo a. Prove que é regular o tetraedro determinado pelos centros das faces do cubo e calcule a medida de suas arestas (veja **Figura 32.10**).

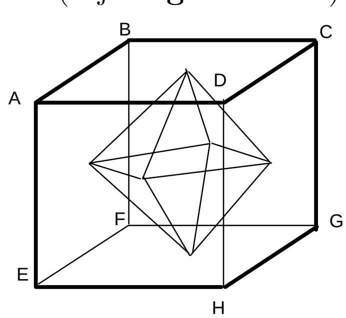


Figura 32.10: Exercício 8.

9. Seja $ABCDEF$ um octaedro regular de aresta medindo a. Prove que o poliedro determinado pelos centros das faces do octaedro é um cubo e calcule a medida de suas arestas (veja **Figura 32.3**).

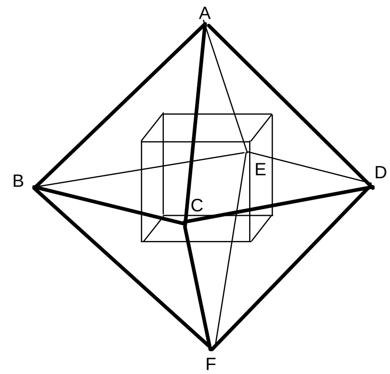


Figura 32.11: Exercício 9.

10. Dizemos que um cilindro está inscrito em uma esfera se os círculos das bases estão contidos na esfera (veja **Figura 32.4**).

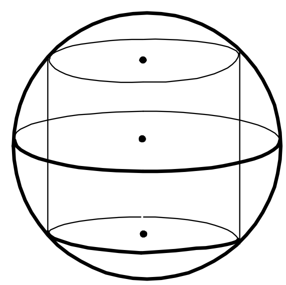


Figura 32.12: Exercício 10.

Prove que se um cilindro está inscrito em uma esfera, então ele é reto.

11. Determine o raio de um cilindro equilátero inscrito em uma esfera de raio R.

12. Dizemos que um cilindro está circunscrito a uma esfera se os planos das suas bases são tangentes à esfera e suas geratrizes intersectam a esfera em apenas um ponto (veja a **Figura 32.13**).

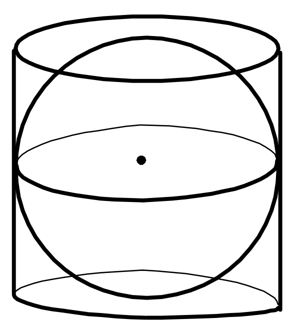


Figura 32.13: Exercício 12.

Se um cilindro está circunscrito a uma esfera, podemos afirmar que ele é reto? Justifique sua resposta.

13. Um cilindro reto está circunscrito a uma esfera de raio R. Prove que esse cilindro é equilátero e determine seu raio.

14. Dizemos que um cone está inscrito em uma esfera se o seu vértice pertence à esfera e o círculo da base está contido na esfera (veja **Figura 32.14**).

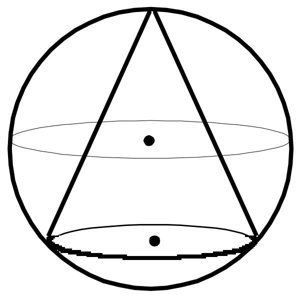


Figura 32.14: Exercício 14.

Determine a altura de um cone reto de raio da base r inscrito em uma esfera de raio R.

15. Dizemos que um cone está circunscrito a uma esfera se sua base é tangente à esfera e suas geratrizes intersectam a esfera em apenas um ponto (veja **Figura 32.15**).

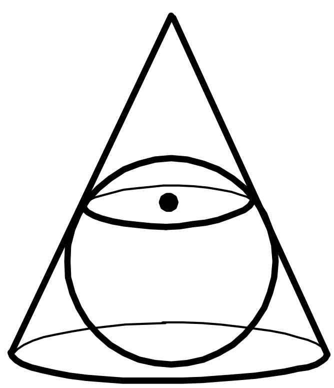


Figura 32.15: Exercício 15.

Se um cone está circunscrito a uma esfera, podemos afirmar que ele é reto? Justifique sua resposta.

16. Um cone reto de altura h e raio r está circunscrito a uma esfera. Determine o raio dessa esfera.

17. Determine o volume do cone equilátero circunscrito a uma esfera de raio R.

18. Um cilindro e um cone reto estão inscritos em uma esfera de raio $5\,cm$, de modo que a base do cone coincide com a base inferior do cilindro. Se o cone e o cilindro têm o mesmo volume, determine a área lateral do cone.

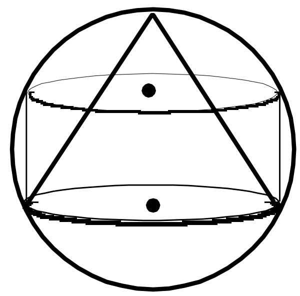


Figura 32.16: Exercício 18.

19. Considere dois planos α e β que se intersectam segundo uma reta r, e seja γ um plano perpendicular a r em um ponto A. Sejam $s = \alpha \cap \gamma$ e $t = \beta \cap \gamma$. Sejam u_1 e u_2 as retas que contêm as bissetrizes dos ângulos determinados por s e t (veja a **Figura 32.17**).

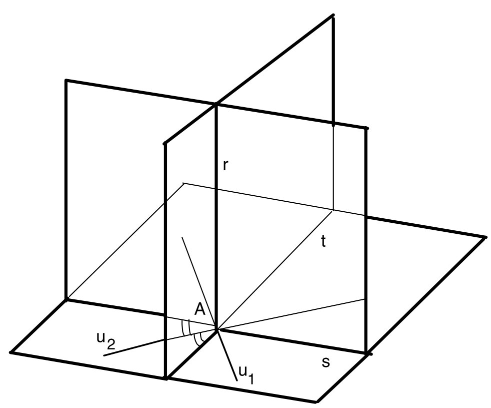


Figura 32.17: Exercício 19.

Sejam π_1 o plano determinado por r e u_1 e π_2 o plano determinado por r e u_2. Prove que $\pi_1 \cup \pi_2$ é o conjunto dos pontos que equidistam de α e β. Chamaremos π_1 e π_2 de planos bissectores de α e β.

20. Prove que todo tetraedro é circunscritível.

    Sugestão: Seja $ABCD$ um tetraedro e considere o plano bissector dos planos das faces ABC e ABD que contém pontos da face BCD. Esse plano intersecta CD em um ponto E (veja **Figura 32.18**).

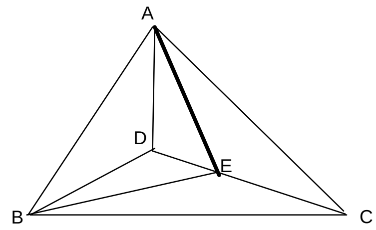


Figura 32.18: Exercício 20.

Considere agora o plano bissector dos planos das faces ABC e ADC que contém pontos de BCD. Esse plano intersecta BE em um ponto F (veja **Figura 32.19**).

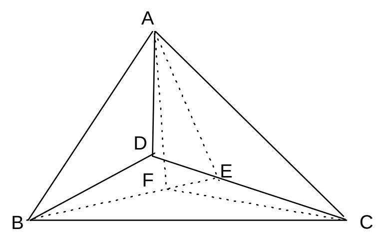


Figura 32.19: Exercício 20.

Finalmente, considere o plano bissector dos planos das faces ADC e BDC que contém pontos de ABD.

Esse plano intersecta AF em um ponto G (veja **Figura 32.20**).

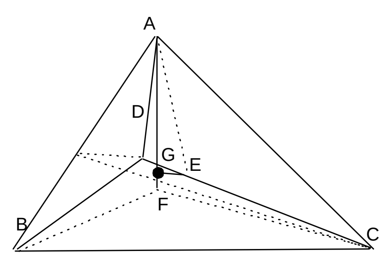


Figura 32.20: Exercício 20.

Use o exercício 19 para provar que G equidista das quatro faces do tetraedro.

Aula 33 – Aspectos da disciplina Geometria Básica

Chegamos ao fim da disciplina de Geometria Básica. Gostaríamos de dirigir a você algumas palavras sobre o trabalho que realizamos juntos.

A disciplina de Geometria Básica contém tópicos que são, em sua maioria, contemplados no programa do Ensino Médio. A tarefa de elaborar um texto abordando tais tópicos é delicada, porque ao mesmo tempo em que se trabalha um conteúdo já conhecido por muitos (embora não tenhamos contado com isso), deve-se fornecer uma visão mais profunda e mais crítica dos mesmos, para possibilitar ao futuro professor segurança maior em sua tarefa de ensinar Geometria.

Você deve ter notado que algumas aulas foram mais difíceis que outras, que certas demonstrações foram mais complexas, outras mais simples e outras ainda nem foram feitas. Por certo que alguns desses procedimentos não terão sido completamente entendidos ao fim da disciplina, e mesmo do curso.

O desenvolvimento da visão geométrica e a compreensão de vários dos conceitos aqui abordados constituem o trabalho e a reflexão de muitos anos. Esperamos que você retorne várias vezes à leitura deste e de outros textos, não só agora, mas sempre.

Também é fato que alguns dos assuntos, fórmulas e propriedades que constituem assunto do Ensino Médio não foram abordados aqui. De fato, nossa opção foi apresentar um texto que trabalhasse um pouco mais formalmente os conteúdos que julgamos serem o mínimo indispensável para uma abordagem inicial, dando suporte para que o aluno possa deduzir as fórmulas por si mesmo.

Gostaríamos de sugerir que o tempo disponibilizado para esta disciplina, na segunda rodada de exames presenciais, seja utilizado para resumir e listar as definições e os teoremas na ordem em que aparecem no texto, a fim de ter uma visão global dos conteúdos, e de como eles estão ordenados e relacionados. Isso é importante também porque permite que você planeje seu tempo de estudo e até que memorize alguns tópicos mais importantes.

Procure discutir e trocar idéias com seus colegas mais próximos, com os tutores presenciais e a distância. Havendo sugestões ou reclamações, por favor, envie tudo por escrito ao seu pólo, de forma anônima se preferir, com recomendação de envio aos autores.

Esperamos que tenha aproveitado este curso, e que se interesse em procurar outros livros sobre o assunto, como os que estão sugeridos na primeira parte do guia da disciplina, e os que estarão disponíveis na biblioteca de seu pólo.

Finalmente, lembramos que já é uma tradição em muitas de nossas escolas, públicas e particulares, que o estudo da Geometria seja deixado para o fim do ano letivo, nas séries que trabalham tais conteúdos. Muitas vezes o tempo disponível para esse estudo não é suficiente para o amadurecimento necessário do conteúdo.

É consenso, porém, entre os que estudam Matemática mais a fundo, que o estudo da Geometria é uma das melhores formas de se iniciar o aprendizado em Matemática. Isso porque, além da organização dos conteúdos e da abordagem axiomática aplicada a conceitos relativamente simples, a Geometria possui uma grande beleza intrínseca, que apaixonou vários matemáticos ao longo de milênios. Esperamos que a simplicidade deste nosso trabalho não tenha ocultado tão grande beleza, e que você possa aumentar o grupo de apaixonados pela Geometria!

Edson Luiz Cataldo Ferreira
Francisco Xavier Fontenele Neto
Isabel Lugão Rios

ISBN 85-7648-022-0
9788576480228

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

UERJ
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Universidade Federal Fluminense
uff

UNIVERSIDADE DO BRASIL

Universidade Federal Rural
do Rio de Janeiro

UNIRIO

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL