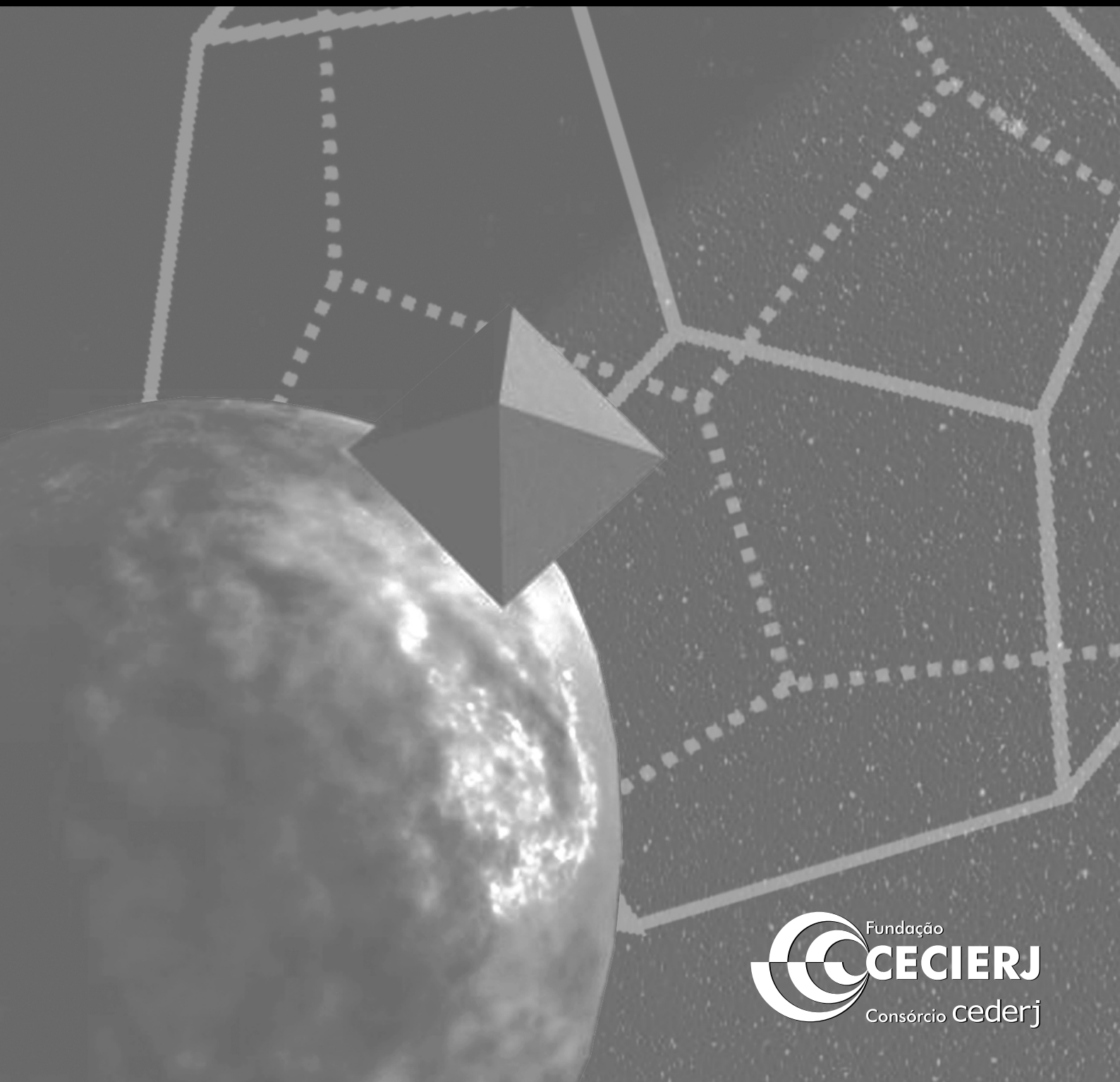
Módulo 1

Marcelo Almeida Bairral
Miguel Angelo da Silva

Volume 2
2ª edição

# Instrumentação do Ensino da Geometria



Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação CECIERJ

Consórcio cederj

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

# Instrumentação do Ensino da Geometria

**Volume 2 - Módulo 1**
**2ª edição**

Marcelo Almeida Bairral
Miguel Angelo da Silva

GOVERNO DO Rio de Janeiro

SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

# Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

**Presidente**
Masako Oya Masuda

**Vice-presidente**
Mirian Crapez

**Coordenação do Curso de Matemática**
UFF - Regina Moreth
UNIRIO - Luiz Pedro San Gil Jutuca

## Material Didático

**ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO**
Marcelo Almeida Bairral
Miguel Angelo da Silva

**COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL**
Cristine Costa Barreto

**DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO**
Anna Carolina da Matta Machado
Anna Maria Osborne
José Meyohas

**COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM**
Maria Angélica Alves

## Departamento de Produção

**EDITORA**
Tereza Queiroz

**COORDENAÇÃO EDITORIAL**
Jane Castellani

**COPIDESQUE**
Nilce Rangel Del Rio

**REVISÃO TIPOGRÁFICA**
Kátia Ferreira dos Santos
Patrícia Paula

**COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO**
Jorge Moura

**PROGRAMAÇÃO VISUAL**
André Freitas de Oliveira

**ILUSTRAÇÃO**
Equipe CEDERJ

**CAPA**
Sami Souza

**PRODUÇÃO GRÁFICA**
Oséias Ferraz
Verônica Paranhos



Copyright © 2005, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.



B163i

Bairral, Marcelo Almeida.
Instrumentação do ensino de geometria. v.2 / Marcelo Almeida Bairral. – 2.ed.– Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.
326p.; 19 x 26,5 cm.

ISBN: 85-7648-231-2

1. Geometria. 2. Ângulos. 3. Poliedros. I. Silva, Miguel Angelo da. II. Título.

CDD: 516.15

**2010/1**

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

# Governo do Estado do Rio de Janeiro

**Governador**
Sérgio Cabral Filho

**Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia**
Alexandre Cardoso

## Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Vieiralves

**UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE**
Reitor: Roberto de Souza Salles

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO**
Reitora: Malvina Tania Tuttman

# Instrumentação do Ensino da Geometria

**Volume 2 - Módulo 1**

## SUMÁRIO


**Aula 16** - Girando e formando sólidos ____ **7**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 17** - A revolução do cone: secções cônicas ____ **17**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 18** - Explorando o Teorema de Pitágoras ____ **35**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 19** - O Teorema de Pitágoras e sua relação com polígonos semelhantes ____ **45**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 20** - Construindo, jogando e aprendendo com quebra-cabeças ____ **55**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 21** - Triângulo Retângulo: de Tales à Trigonometria ____ **69**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 22** - Unidades de medida ____ **91**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 23** - Áreas de figuras planas ____ **117**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 24** - Estudando retas, círculos e circunferências ____ **137**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 25** - Estudando simetrias ____ **151**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 26** - Estudando rotações ____ **173**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 27** - Estudando translações ____ **191**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 28** - Parecido ou semelhante? Estudando homotetias e semelhanças ____ **215**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 29** - Atividades lúdicas, estratégias geométricas e inteligências múltiplas ____ **243**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Aula 30** - Resumindo o nosso trabalho na disciplina _____ **263**
*Marcelo Almeida Bairral / Miguel Angelo da Silva*

**Referências**_____**281**

**Módulo Prático** _____ **291**

AULA 16

# Girando e formando sólidos

## Meta da aula

Instrumentalizar o ensino dos sólidos de revolução.

## objetivos

Esperamos que, após estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Definir e conceituar os sólidos de revolução, utilizando material concreto.
- Calcular volumes e áreas dos sólidos de revolução.
- Aplicar recursos didáticos no ensino de sólidos de revolução.
- Utilizar a internet como ferramenta de aprendizagem.

## Pré-requisitos

Para um bom desempenho nesta aula, você deve relembrar os conceitos de cilindro, cone e esfera, assim como o cálculo de áreas de superfícies e volumes desses sólidos. No seu curso de Geometria Básica, esses conteúdos foram abordados ao longo das Aulas 25 a 33.

No decorrer das atividades desta aula, você irá construir mais alguns recursos para o seu laboratório pessoal de Geometria. Para isso, pegue o seu material de desenho (compasso, esquadro, régua, lápis, borracha etc.) e providencie o seguinte: palitos para churrasco, cartolina colorida, arame, alicate, acetato, areia, cola etc.

**!**

Lembre-se de acessar a página da disciplina e seu conjunto de aulas na Plataforma Cederj. Há interessantes animações que auxiliam o desenvolvimento da visualização e representação. Se puder, acesse também os *sites* sugeridos nesta aula.

## INTRODUÇÃO

Sólidos e superfícies de revolução estão reproduzidos em inúmeros objetos criados pelo homem ou presentes na Natureza. Nossas crianças observam e analisam esses objetos desde os primeiros anos de vida. Apesar disso, como os demais conteúdos da Geometria Espacial, nossos professores e livros didáticos desenvolvem este conteúdo somente no Ensino Médio. Acreditamos que, com tal prática, além de deixarmos uma lacuna desnecessária na formação de nossos jovens, perdemos uma grande oportunidade de aproximar a Matemática da realidade deles e de contribuir para a superação dos primeiros níveis de van Hiele, conforme descritos em nossa Aula 1.

**!**

Relembrando...
De acordo com as pesquisas do casal van Hiele, o desenvolvimento do pensamento geométrico se dá em cinco níveis hierarquizados, a saber:
- Básico, que corresponde a observações de forma e tamanho.
- Análise, quando o aluno percebe a definição do conceito e as relações entre figuras.
- Síntese ou Dedução Informal, fase do desenvolvimento da dedução lógica informal.
- Dedução, o aluno compreende e elabora deduções formais simples.
- Rigor, o aluno realiza deduções formais abstratas em diferentes sistemas axiomáticos.

Após o apogeu da Matemática grega, representado por Euclides, Arquimedes e Apolônio, somente depois de 500 anos, na figura de **Papus** de Alexandria, século III d.C., foi reeditada a genialidade da Geometria grega. Em seu trabalho mais importante, *Coleção Matemática*, com oito volumes, antecipou seu famoso teorema: "Girando-se um arco plano em torno de um eixo de seu plano, eixo esse que não corta o arco, a área da superfície de revolução assim formada é igual ao produto do comprimento do arco pelo da trajetória descrita pelo centróide do arco".

Como você verá, devemos propor atividades ao longo do Ensino Fundamental, para que os alunos desenvolvam suas habilidades de observação, visualização, criação de imagens mentais, descrição, argumentação, cálculos simples etc., deixando para o Ensino Médio as demonstrações formais e os cálculos rebuscados.

Nesta aula, você estudará apenas os sólidos mais comuns: cilindro, cone e esfera. Entendemos que o estudo de superfícies e de sólidos de revolução quaisquer deve ser deixado para a Matemática Superior. Certamente, nas disciplinas de Cálculo, você determinou áreas e volumes de sólidos de revolução como aplicação da integral definida. Apesar disso, o famoso **Teorema de Papus** pode ser demonstrado com os recursos da Matemática do Ensino Médio, como você pode ver em Lima *et al*. (2000).

## CONSTRUINDO SUPERFÍCIES E SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Como você aprendeu na Aula 32, de Geometria Básica, superfícies de revolução são as superfícies geradas pela rotação de uma linha simples (geratriz) em torno de uma reta (eixo de rotação) que não lhe intercepta, exceto, talvez, numa das extremidades. Veja as **Figuras 20.1** e **20.2**

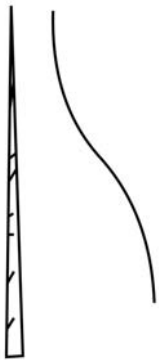


**Figura 20.1.a:** Eixo de rotação e geratriz do sólido de revolução.

**Figura 20.1.b:** O sólido gerado.

**Figura 20.2.a:** Eixo de rotação e geratriz do sólido de revolução.

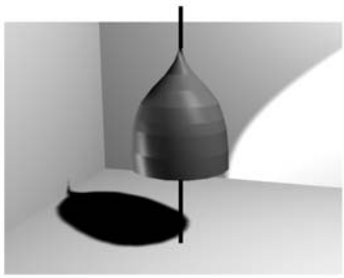


**Figura 20.2.b:** O sólido gerado.

Se a linha for fechada ou o eixo de rotação interceptá-la nos dois extremos, a figura gerada será chamada sólido de revolução. Sendo uma linha fechada, o eixo de rotação poderá interceptar um ponto ou um de seus lados. Veja as **Figuras 20.3, 20.4** e **20.5**, a seguir.

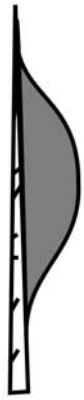


**Figura 20.3.a:**
Eixo de rotação e geratriz do sólido de revolução.

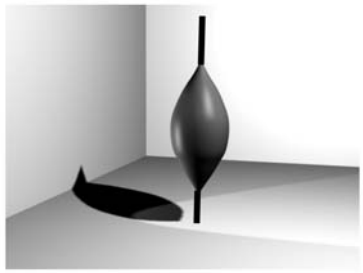


**Figura 20.3.b:**
O sólido gerado.

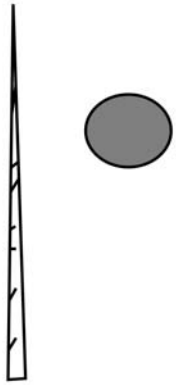


**Figura 20.4.a:**
Eixo de rotação e geratriz do sólido de revolução.

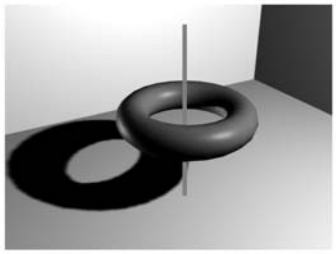


**Figura 20.4.b:**
O sólido gerado.

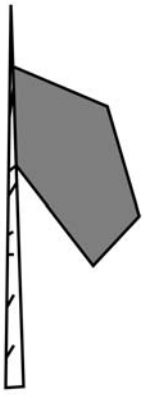


**Figura 20.5.a:**
Eixo de rotação e geratriz do sólido de revolução.

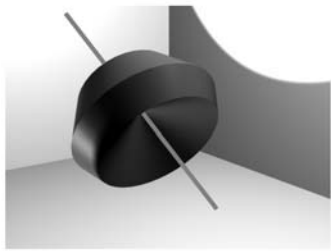


**Figura 20.5.b:**
O sólido gerado.

**!**

Quando um sólido de revolução é construído, a superfície que o contém é uma superfície de revolução.

Nos primeiros anos do Ensino Fundamental, os alunos podem visualizar os sólidos de revolução, utilizando **BANDEIRINHAS** estilizadas com figuras diversas, construídas com palitos para churrasco e cartolina. Ao friccionar o palito nas mãos, fazendo-o girar, o sólido será visualizado no espaço.

Essas **BANDEIRINHAS** são sugeridas por Kaleff, Sá e Toledo (2002), em um artigo em que elas sugerem também a construção de uma engenhosa caixa geradora de sólidos de revolução, acompanhada de várias atividades. Algumas dessas atividades utilizaremos nesta aula. Vale a pena ver!

***ATIVIDADES***

**1. Construa as bandeirinhas possíveis com várias figuras, a saber: retângulo, triângulo retângulo, triângulo qualquer, trapézio retângulo, semicírculo e quarto de círculo. Desenhe e descreva todos os sólidos obtidos com suas bandeirinhas.**

***COMENTÁRIO***

*Não deixe de fazer suas bandeirinhas; elas fazem parte do seu laboratório de Geometria!*

*Entre os sólidos gerados por suas bandeirinhas, você deve ter identificado o cilindro circular reto (que passamos a chamar cilindro), o cone circular reto (que passamos a chamar cone) e a esfera, além do tronco de cone, da meia esfera e de outros sólidos atípicos. Repare que, dependendo do eixo de rotação escolhido, a mesma figura pode gerar sólidos completamente distintos e, mesmo quando geram sólidos do mesmo tipo, eles têm características diferentes, como área de superfície e volume.*

*Observe que essa atividade, realizada por alunos do Ensino Fundamental, desenvolveria as habilidades do primeiro nível de van Hiele. Você pode complementá-la levando, para a sala de aula, diversos objetos do cotidiano de seus alunos, como embalagens, bola de futebol, peão, vasos de planta, moringas, jarras, objetos de decoração etc., alguns de revolução, outros não, e solicitar aos alunos que comparem esses objetos com as formas obtidas pelas bandeirinhas. Depois de algumas perguntas e observações, eles poderão fazer uma lista de atributos relevantes para a construção do conceito desses objetos, como, por exemplo: esses objetos podem rolar! Caso isso aconteça, seus alunos estarão no segundo nível de van Hiele.*

*Com auxílio de um arame, você pode variar o estilo da bandeirinha, afastando a figura do eixo de rotação e gerando outros sólidos interessantes. Observe a **Figura 20.4**, que representa o sólido chamado toro.*

*Ainda variando as suas bandeirinhas, você pode construí-las só com arame e gerar apenas as superfícies dos sólidos. Observe a **Figura 20.6**, a seguir.*

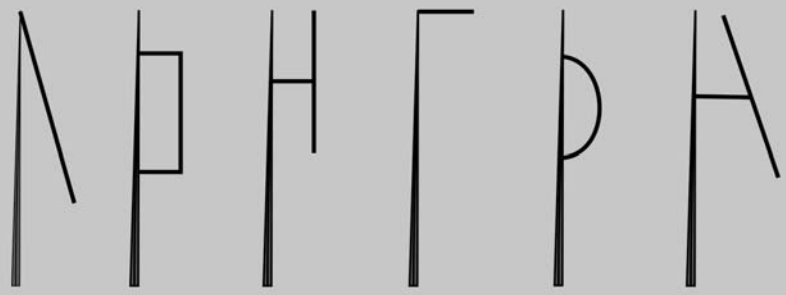


**Figura 20.6:** Bandeirinhas que geram superfícies de revolução.

*Se você quiser caprichar, pinte as partes do arame com cores diferentes para destacar a superfície desejada. Capriche! Seus alunos merecem!*

**2. Desenhe a planificação de um cilindro e de um cone. (Se você conseguir desenhar a planificação da esfera, não deixe de me avisar!)**

***COMENTÁRIO***

*É fácil ver que a planificação do cilindro consiste em um retângulo acompanhado de duas circunferências congruentes. Você também sabe que um dos lados do retângulo terá medida igual à do comprimento das circunferências. O que você pode não ter feito é desenhar com a precisão necessária o segmento com o comprimento da circunferência. Para isso, você deve se lembrar de uma das técnicas de retificação da circunferência aprendidas na Aula 7 da sua disciplina Construções Geométricas. A técnica mais simples consiste em determinar os lados do quadrado e do triângulo eqüilátero inscritos na circunferência. O dobro da soma das medidas desses dois segmentos é o comprimento da circunferência, com erro menor que um centésimo. No caso do cone, você deve ter lembrado que teremos um setor circular acompanhado de uma circunferência. Novamente, o seu problema deve ter sido a precisão do desenho. Depois de feita a circunferência da base do cone, você deve retificá-la. Agora, escolha o comprimento da geratriz da superfície do cone. O seu problema, então, é construir um arco de raio igual à geratriz, com comprimento igual à retificação da base do seu cone. Essa é a Atividade 3 da Aula 7 de Construções Geométricas. A planificação é a ferramenta adequada para estudarmos a área da superfície desses sólidos de revolução. Você se lembra das fórmulas?*

**3. Com toda precisão, construa planificações de um prisma reto de base quadrada, um cilindro e um cone que tenham a mesma área da base e a mesma altura. Para cada um dos sólidos, construa um modelo em cartolina e outro em acetato ou transparência. Deixe os modelos sem uma das bases, para serem usados nos experimentos que faremos nas próximas atividades.**

***COMENTÁRIO***

*A dificuldade deve ser construir o quadrado com a mesma área do círculo. Essa é a Atividade 2 da Aula 7 de Construções Geométricas. Capriche!*

*Não deixe de construir seus modelos; eles serão fundamentais em outras atividades desta aula, além de equiparem o seu laboratório.*

**4. De olho nos seus modelos, quais seriam os eixos e planos de simetria e as secções dos Sólidos de Revolução?**

***COMENTÁRIO***

*Você não deve ter tido dificuldades em identificar eixos e planos de simetria!*

*As secções da esfera são, sempre, circunferências, mas podem motivar problemas interessantes e difíceis, como determinar o raio da secção, o ângulo sólido central, o cone inscrito, o volume da calota etc.*

*Nos casos do cilindro e do cone, as secções paralelas às bases geram circunferências; as perpendiculares geram retângulos ou triângulos isósceles. As demais podem gerar curvas fechadas, ovais, ou curvas abertas, parecidas com parábolas ou hipérboles. O difícil é garantir que tipo de figura está sendo formado. Na próxima aula, você terá algumas respostas.*

*Uma alternativa para seus alunos visualizarem os cortes é mergulhar os modelos transparentes numa vasilha com água e procurar as posições adequadas.*

**5. Supondo que seus alunos saibam que o volume do prisma reto é a área da base vezes a altura, descreva um procedimento no qual, usando seus modelos e areia fina, seus alunos possam concluir a fórmula do volume do cilindro.**

***COMENTÁRIO***

*Comente com seus colegas e com o tutor o seu procedimento. Se puder, visite a Plataforma Cederj e avalie a sua escolha.*

6. Como fazer para que seus alunos concluam que o volume do cone é 1/3 do volume do cilindro?

***COMENTÁRIO***

*Você pode colocar o cone de cartolina dentro do cilindro de cartolina; encher o cilindro transparente com areia e derramá-la no cilindro de cartolina; comparar as alturas da parte que restou cheia de areia com a parte vazia do cilindro transparente, ou derramar a areia que restou no cone transparente. Lembre-se sempre de que as áreas das bases e as alturas são as mesmas!*

7. Muitas embalagens são sólidos de revolução, principalmente cilindros, como as latas de leite em pó. Se você medir uma dessas latas, verá que sua altura é igual ao diâmetro da boca. Você teria uma explicação matemática para esse fato? Monte um experimento para que seus alunos cheguem às mesmas conclusões que você.

***COMENTÁRIO***

*O interesse da indústria é que, para um determinado volume, a embalagem tenha o menor custo possível, isto é, gaste o mínimo de material para ser fabricada.*
*Do ponto de vista matemático, isso significa ter o mesmo volume com a menor área possível. Esse objetivo é atingido quando a altura do cilindro é igual ao seu diâmetro.*
*Monte o seu experimento e converse com os seus colegas e com o tutor.*
*Note que esse problema permite uma ótima oportunidade de interagir com a Álgebra: você pode escrever a área da superfície do cilindro, para um volume conhecido, como função do raio da base, representá-la graficamente e perceber que seu ponto de mínimo se dá quando o raio da base é a metade da altura.*

## RESUMO

Sólidos e superfícies de revolução são obtidos pela rotação de figuras ou de curvas em torno de um eixo (reta) fixo, isto é, a figura formada pela reunião de todos os círculos (ou circunferências) desenhados pelos pontos da figura ou da curva, enquanto gira. Os sólidos de revolução mais comuns são o cilindro, o cone e a esfera. Do ponto de vista didático, podemos criar atividades que permitam trabalhar com esses sólidos desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, passando pelos vários níveis de van Hiele. Isso certamente preparará melhor os nossos alunos, não só para compreenderem o mundo à sua volta, como também para entenderem os procedimentos dedutivos que serão desenvolvidos no Ensino Médio.

## ATIVIDADE FINAL

Observe as bandeirinhas e os sólidos de revolução desenhados a seguir. Para as bandeirinhas, desenhe os sólidos correspondentes; para os sólidos, desenhe as bandeirinhas correspondentes. Reflita sobre o cálculo de áreas e volumes dos vários sólidos.

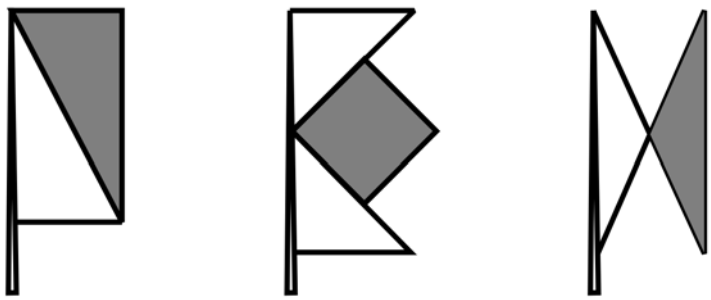


**Figura 20.7**

***COMENTÁRIO***

*Se você teve dificuldades, converse com seus colegas e com o tutor. Visite, também, a Plataforma Cederj.*

## AUTO-AVALIAÇÃO

Você deve ter realizado a Atividade 3, com rigor, resgatando as técnicas de construções geométricas, tão importantes no estudo e exploração de propriedades da Geometria. Se não o fez, não deixe de fazê-lo.

As atividades que dependem de visualização, como a Atividade 4, não devem mais oferecer dificuldade para você. As muitas atividades desse tipo, realizadas em aulas anteriores, devem ter desenvolvido sua visão espacial. Se alguma dificuldade persiste, refaça aquelas atividades com maior rigor, manipule os seus modelos de todos os tipos.

Os aspectos numéricos de áreas e volumes, desenvolvidos na disciplina de Geometria Básica, também fazem parte do arsenal de habilidades de um bom professor de Geometria. Não perca a oportunidade de rever o que está esquecido. É assim que construímos nosso conhecimento: aprendendo e reaprendendo o tempo todo (alguns autores chamam isso de *teoria pedagógica da mola*).

Coragem, irmão!

## INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, estudaremos as cônicas, curvas originadas nas secções do cone, geralmente estudadas em Geometria Analítica. Você deve providenciar papel vegetal em tamanho A4 (umas dez folhas).

AULA 17

# A revolução do cone: secções cônicas

## Meta da aula

Instrumentalizar o ensino das secções cônicas.

## objetivos

Esperamos que, após estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Definir e conceituar as cônicas como secções do cone.
- Definir e conceituar as cônicas como lugares geométricos do plano.
- Perceber que as abordagens das cônicas feitas na Geometria Espacial, Geometria Analítica e em Construções Geométricas falam sobre os mesmos objetos matemáticos.
- Utilizar recursos didáticos para o ensino das cônicas.
- Utilizar a internet como ferramenta de aprendizagem.

## Pré-requisitos

Se você teve um bom desempenho na aula passada, sobre sólidos de revolução, está devidamente preparado para a aula de hoje. Poderão ocorrer momentos de dificuldade, mas será uma questão de atenção e persistência. Faremos várias referências aos módulos de Geometria Analítica e de Construções Geométricas; tenha-os à mão. No decorrer das atividades desta aula, você utilizará alguns recursos didáticos. Para isso, pegue o seu material de desenho (compasso, esquadro, régua, lápis, borracha etc.). Providencie, também, cerca de dez folhas de papel vegetal, tamanho A4, para realizar dobraduras.

**!**

Lembre-se de acessar a página da disciplina e seu conjunto de aulas na Plataforma Cederj. Há interessantes animações que auxiliam o desenvolvimento da visualização e da representação. Se puder, acesse também os *sites* sugeridos nesta aula.

## INTRODUÇÃO

Chamamos nossa aula de ***Revolução do cone*** porque, além de o cone ser um sólido de revolução, o seu estudo causou uma verdadeira revolução na Matemática grega. Por sua obra, ***Secções cônicas***, **APOLÔNIO**, no século III a.C., era chamado de "O Grande Geômetra". Secções cônicas reúne quase tudo que hoje sabemos sobre elipse, parábola e hipérbole, inclusive seus nomes. Antes ainda, no século IV a.C., **MENAECMUS** descobriu uma família de curvas que poderia ser obtida cortando-se, por um plano, um cone circular reto. Entusiasmado com as descobertas de Hipócrates de Chios (como vimos na Aula 18), ele procurava soluções para os três problemas famosos da Grécia antiga. Tamanho foi o progresso alcançado pelos gregos no estudo das cônicas, que alguns pesquisadores os consideram como os verdadeiros inventores da Geometria analítica.

**APOLÔNIO**

Juntamente com Euclides e Arquimedes, Apolônio de Perga foi um dos pilares da Idade Áurea da Matemática Grega, entre 300 e 200 a.C. Quase toda sua obra foi perdida; conhecemos apenas alguns títulos que foram descritos por Papus: *Dividir em uma razão, Cortar uma área, Sobre secção determinada, Tangências, Inclinações e Resultado rápido*. Esta última apresenta uma aproximação de $\pi$, como conhecemos hoje: 3,1416. Dos oito volumes de sua obra mais famosa, *Secções cônicas*, sete estão preservados até hoje: os quatro primeiros em grego e outros três em tradução árabe do original. Edmund Halley, astrônomo e cientista inglês, determinou a órbita do cometa que levou seu nome em 1682 utilizando teoria de Newton (Principia); em 1710, fez a tradução latina dos sete livros.
*Secções cônicas*, de Apolônio, e os *Elementos*, de Euclides, são consideradas as obras mais importantes da Grécia Antiga.

**MENAECMUS**

Matemático grego que viveu no século IV a.C., é considerado o inventor das secções cônicas. Suas conclusões foram obtidas quando tentava resolver o problema da duplicação do cubo a partir dos resultados de Hipócrates de Chios. Foi professor de Alexandre, o Grande. Conta a lenda que quando Alexandre lhe pediu um atalho para aprender Geometria, Menaecmus respondeu: "Rei, para viajar pelo país há estradas reais e estradas para os cidadãos comuns; mas na Geometria só há uma estrada para todos".

Já no início do século XVII, **Kepler**, estudioso da obra de Apolônio, usou a elipse para descrever trajetórias de planetas, e **Galileu** usou a parábola para estudar os movimentos de projéteis.

No moderno mundo globalizado pelas possibilidades de comunicação que a telefonia celular e a internet oferecem, as cônicas estão presentes nas antenas parabólicas, faróis de automóveis e viagens espaciais, apenas para citar os exemplos mais óbvios.

Em Matemática, estudamos as cônicas não somente na Geometria, como também em Geometria Analítica, Construções Geométricas, Álgebra Linear e Cálculo, como você já deve ter percebido. Em cada um desses contextos, é dado um enfoque particular ao estudo dessas curvas; o que nem sempre fica claro para o estudante de Matemática é que eles tratam, de fato, das mesmas curvas. Por outro lado, recursos da Geometria Dinâmica, nem sempre utilizados, permitem avanços notáveis na compreensão das propriedades dessas curvas, podendo integrar as várias abordagens dadas ao tema.

Nesta aula, daremos um tratamento que visa a integrar os vários aspectos, visões do tema, de modo acessível a um aluno de Ensino Médio.

**Kepler (1571-1630)**

Estudou profundamente a obra de Apolônio, mas acrescentou a interpretação própria de que as cônicas não seriam apenas três tipos de curvas: elipses, parábolas e hipérboles. Para ele, havia cinco espécies de cônicas. Partindo da secção vertical, que consiste em duas retas que se interceptam, onde os focos coincidem com a intersecção, kepler passava por uma infinidade de hipérboles, ao afastar os focos, até chegar ao infinito, quando a curva se transformava numa parábola. Se o foco retorna do infinito pelo outro lado, surge uma infinidade de parábolas, até que os focos coincidam novamente, formando uma circunferência. Em sua *Astronomia Nova*, de 1609, surpreendeu o mundo, afirmando que os planetas descrevem trajetórias elípticas em torno do Sol, que ocupa um dos focos da trajetória. Saiba mais, consultando Boyer (1974, pp. 236-239).

**Galileu Galilei (1564-1642)**

Contemporâneo de Kepler, o italiano Galileu deu inestimáveis contribuições à Física, fundando a mecânica dos corpos em queda livre. Percebeu que o movimento de um projétil no vácuo, é parabólico. Foi também um dos precursores da invenção do telescópio, com o qual descobriu os satélites de Júpiter; observou as manchas do Sol, as fases de Vênus e os anéis de Saturno. Perseguido pela Santa Inquisição, em 1633, foi obrigado a negar suas descobertas e passou a viver como prisioneiro em sua própria casa. Morreu cego em 1642, sem imaginar que, em 1992, seria inocentado da acusação de heresia pela Igreja Católica. Saiba mais, consultando Eves (2002, pp. 352-356).

## O CONE DE DUAS FOLHAS

Foi Apolônio quem introduziu, pela primeira vez, o conceito de cone de duas folhas, ou cone duplo, como também é chamado. Antes dele, os gregos definiam as cônicas a partir de três tipos de cone de uma única folha, conforme o ângulo do vértice fosse agudo, reto ou obtuso (BOYER, 1974, p. 107).

Imaginemos uma reta "r", denominada geratriz, girando em torno de um eixo de rotação "a" que a intercepta num ponto A qualquer.

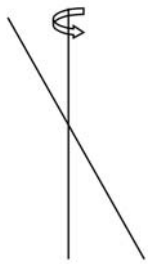


**Figura 17.1.a:** Eixo de rotação e geratriz do cone duplo.

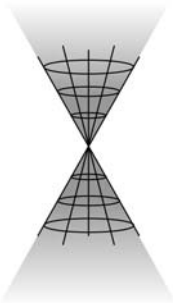


**Figura 17.1.b:** Cone de revolução.

## AS CÔNICAS COMO SECÇÕES DO CONE

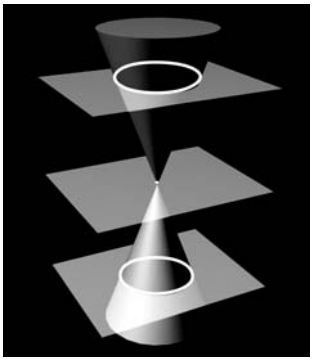


**Figura 17.2**

Se seccionarmos o cone por um plano perpendicular ao seu eixo de rotação, obteremos uma circunferência ou um ponto.

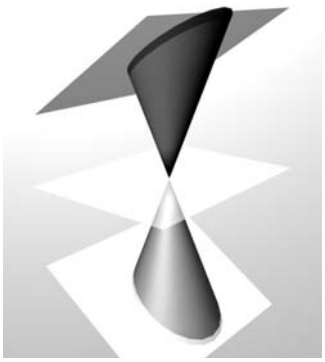


**Figura 17.3**

Se o plano interceptar o eixo de simetria num ângulo diferente de 90°, não paralelo à geratriz, a secção será uma elipse ou um ponto.

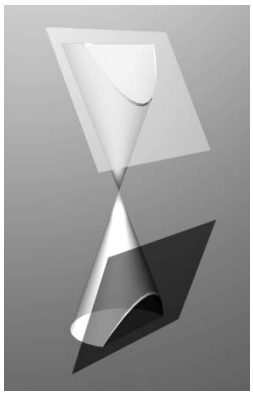


Figura 17.4

Se o plano de intersecção for paralelo à geratriz, a secção será uma parábola ou uma reta.

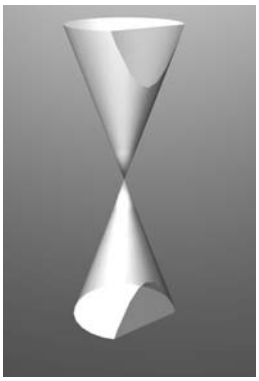


Figura 17.5

Se o plano de intersecção for paralelo ao eixo de rotação, a secção será uma hipérbole (de duas folhas) ou um conjunto de duas retas concorrentes.

## AS CÔNICAS COMO LUGARES GEOMÉTRICOS

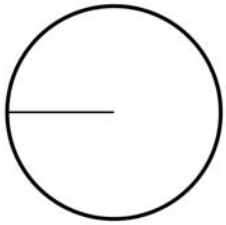


Figura 17.6

A circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano que são eqüidistantes de um ponto fixo, denominado centro.

A elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano, cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante.

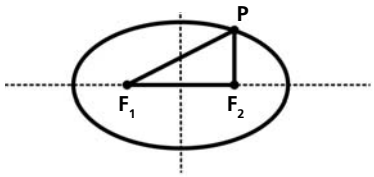



Figura 17.7

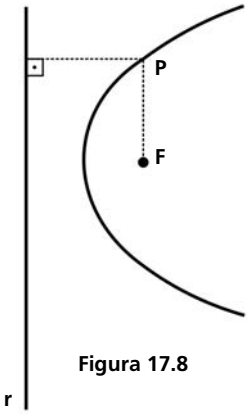



Figura 17.8

Dados uma reta "r" e um ponto "F", não pertencente a ela, chamamos de parábola ao lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de r e F.

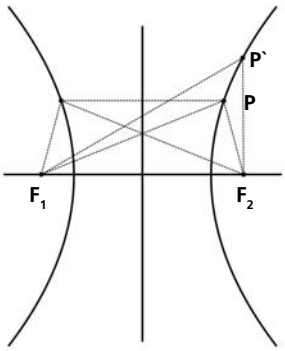



**Figura 17.9**

A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cujo valor absoluto da diferença das distâncias a dois pontos dados é constante.

As definições das cônicas como lugares geométricos nos permitem desenhá-las e deduzir suas equações e propriedades, como você já fez em suas aulas de Geometria Analítica, Aulas 7, 8 e 9, e Construções Geométricas, Aulas 20 e 21.

O que nem sempre se discute é a relação entre a *cônica* obtida pelo corte do cone e a *cônica* obtida do lugar geométrico do plano. Serão, de fato, as mesmas curvas? Isto é, será que um aluno do Ensino Médio percebe que a curva obtida pelo corte do cone por um plano paralelo à geratriz, chamada *parábola*, tem os seus pontos eqüidistantes de uma reta e de um ponto fora dela? O que tem a ver a parábola desenhada no cone com a parábola de equação $y = \frac{1x^2}{4p}$?

Sem trabalhar essas questões, dificilmente o estudante perceberá que existe algo em comum entre as três curvas do plano, entre si, e entre elas e as curvas do espaço desenhadas no cone pela intersecção de um plano.

Para não fugir aos objetivos da nossa disciplina, discutiremos apenas o caso da parábola obtida do corte de um cone reto, tendo um ângulo reto no vértice.

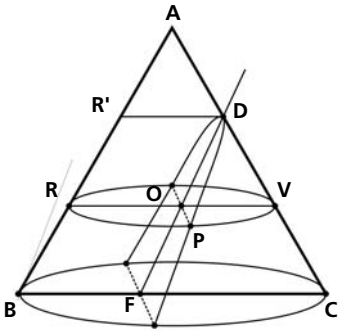



**Figura 17.10:** Parábola desenhada no cone.

Considere uma parábola com vértice "D", desenhada na superfície cônica. Escolha um ponto "P" qualquer da parábola. Intercepte o cone por um plano perpendicular ao seu eixo de rotação, contendo "P". A intersecção desse plano com a superfície cônica é uma circunferência. Considerando as simetrias da parábola e da circunferência, a reta DF intercepta um diâmetro, RV, da circunferência, em "O". Note que OP é a média harmônica entre OR e OV (o triângulo PRV é retângulo, pois está inscrito num semicírculo, e OP é a sua altura); isto é, $(OP)^2 = OR.OV$. Por outro lado, os triângulos OVD e BCA são semelhantes e teremos $\frac{OV}{DO} = \frac{BC}{AB}$.

Também os triângulos R´DA e BCA são semelhantes e, portanto, $\frac{R'D}{AR'} = \frac{BC}{AB}$.
Como R´D = RO (paralelas entre paralelas), teremos:

$$OP^2 = OR.OV = R'D.OV = AR'.\frac{BC}{AB}.DO.\frac{BC}{AB} = \frac{AR'.BC^2}{AB^2}.DO$$ isto é,

$$\boxed{DO = \frac{AB^2}{AR'.BC^2}.OP^2}$$

Você pode ficar surpreso em saber que essa dedução foi feita por Menaecmus, no século IV a.C. (BOYER, 1974, p. 69 e 70). Faltou a ele observar que, se desenharmos um par de eixos "xy" no vértice D da parábola, como mostra a **Figura 17.10**, OP e DO serão, respectivamente, a abscissa "x" e a ordenada "y" de "P". Além disso, você pode observar (e Menaecmus deve ter observado) que AB, AR´ e BC são constantes para qualquer ponto P da parábola. Com essas observações, nossa equação pode ser escrita na forma $y=k.x^2$, como escreveríamos, hoje em dia. Menaecmus também não percebeu que esses resultados não estavam restritos ao cone com ângulo reto no vértice; poderiam, também, ser obtidos de um cone qualquer, como sabemos hoje.

**!**

Em geral, os professores e os livros didáticos de Geometria, ao discutirem o cone, limitam-se ao estudo de áreas e volumes, não discutindo as cônicas. Por outro lado, os professores e livros de Geometria Analítica, ao discutirem as cônicas, limitam-se a defini-las como lugares geométricos do plano e a deduzir suas equações e propriedades analiticamente. Esse procedimento deixa um vácuo na formação do aluno que, via de regra, mesmo depois da formação superior, acha que o estudo das cônicas se resume a um punhado de fórmulas arbitrárias.

Entendemos que o professor de Geometria deve suprir essa lacuna, unificando as visões espacial e plana dessas curvas. Você deve ter observado que o tratamento dado anteriormente, além de estar ao alcance de um aluno do Ensino Médio, oferece uma grande oportunidade para relembrar vários conceitos da Geometria Elementar. Você encontrará uma discussão completa deste tema em Tinoco (1999, pp. 163–174).

Cabe também ao professor de Geometria explorar outros aspectos do estudo das cônicas, como veremos a seguir.

***ATIVIDADES***

1. Pegue um folha de papel vegetal, tamanho A4 (você pode usar um papel comum, mas não terá o mesmo efeito visual). Marque, com um lápis, um ponto F, localizado a 3cm do lado maior da folha, ao centro, como mostra a **Figura 17.11.a**. Marque vários pontos na borda da folha mais próxima do ponto F, com intervalos de 1cm. Dobrando a folha, faça cada marca da borda encontrar o ponto F, vincando as dobras, como na **Figura 17.11.b**. Com um lápis, desenhe o contorno da região que restou "lisa" no papel.

a) Que figura você desenhou em sua folha?

_____

_____

_____

b) Por que a dobradura gerou essa figura?

_____

_____

_____

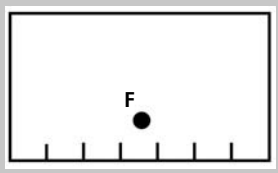



**Figura 17.11.a:** Folha de papel A4.

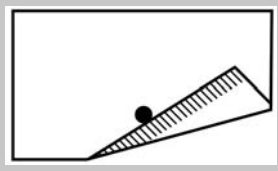


**Figura 17.11.b:** Dobradura.

***COMENTÁRIO***

*Você deve ter percebido que se trata de uma parábola! Nas suas tentativas de desenhar a figura, deve, também, ter notado que os vincos das dobras representam tangentes à parábola, e que o ponto F, desenhado no papel é, na verdade, o seu foco. Para responder ao item c, você precisa perceber que a borda da folha é a diretriz da sua parábola. Depois disso, será fácil observar, na* ***Figura 17.12****, que a distância do ponto B, de tangência, ao ponto fixo F é a mesma distância em relação à borda da folha, ponto D, pois a dobra é a mediatriz do segmento FD. Isto é, esses pontos satisfazem à definição da parábola como lugar geométrico do plano. Para completar, precisamos ainda provar que outros pontos diferentes de B não podem pertencer à parábola. Com efeito, se considerarmos um outro ponto C, na dobra, o segmento CD1 será menor que CF. Por quê?*

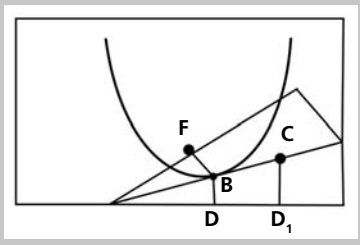



**Figura 17.12:** Visualização da tangência.

2. Prove, usando construções geométricas, que o ponto F que você fixou na folha é, de fato, o foco da parábola.

**COMENTÁRIO**

*Essa é a Atividade 7 da Aula 22 do seu curso de Construções Geométricas. Relembre essa construção. Vale a pena interagir várias técnicas na exploração de um mesmo problema; isso contribuirá para consolidar uma visão abrangente sobre o tema estudado.*

3. Por que os refletores de dentistas e os faróis dos automóveis são parabólicos?

_____

_____

_____

**COMENTÁRIO**

*Na verdade, tantos os faróis como os refletores são superfícies de revolução denominadas parabolóides, estudadas na Aula 30 de Geometria Analítica (reveja). Trata-se da superfície gerada pela rotação de uma parábola em torno de seu eixo focal. Mas, todo corte por um plano que contenha o eixo de rotação do parabolóide é uma parábola. Sendo assim, se você observar a* ***Figura 17.4****, e imaginar que a sua parábola é um espelho e seu foco é uma lâmpada, perceberá que todo raio de luz, emitido pela lâmpada, se refletirá na direção de BD, que não se altera quando modificamos D, direcionando a iluminação, como é desejável em ambos os casos.*

4. Por que as antenas são parabólicas?

_____

_____

_____

**COMENTÁRIO**

*Agora ficou fácil!*

*Basta lembrar que a antena parabólica recebe sinais emitidos por satélites. Como a distância em relação a eles é muito grande, os sinais chegam às antenas como se fossem feixes de paralelas. A antena reflete todos na direção do foco, onde está localizado o captador que os liga ao aparelho de televisão.*

Como você já pôde observar em aulas anteriores, os recursos da Geometria Dinâmica oferecem novas oportunidades de explorações conceituais em Geometria. No caso particular das cônicas, há os efeitos resultantes de alterações da distância focal e da excentricidade; há o fato, não óbvio nas definições, de que circunferência, elipse, parábola e hipérbole são curvas de uma mesma família, podendo ser consideradas umas como caso particular das outras; há a relação entre definições, curvas e equações, tudo isso fica ao alcance dos nossos olhos, como num passe de mágica, quando usamos os *softwares* de Geometria Dinâmica. Santos (2002), também acessível em http://www.ufv.br/dma/virrsbm/resumos/angelarocha.PDF, sugere várias explorações utilizando o *Skatchpad*, e Rodrigues e Rezende (1999), outras tantas atividades, utilizando o *Cabri-géomètre*.

**!**

Você encontrará várias atividades interessantes nos *sites* listados a seguir. Não deixe de conferi-las!
http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/diversos/conicas.html
http://coloquio.impa.br/posters/francisco_braun.pdf
http://josefleal.no.sapo.pt/conicas.htm
http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/conicas.htm
http://www.mat.ufrgs.br/~calculo/conicas/animadas/index.html
http://www.vestibular1.com.br/revisao/conicas.doc
http://www.cl-gaia.rcts.pt/matematica/geometer%20parte%2011.htm
http://www.cl-gaia.rcts.pt/matematica/geometer%20parte%2010.htm
http://www.fc.up.pt/cmup/activities/paldiv/conicas.html
http://planeta.terra.com.br/educacao/miltonpb/Geo_Anal/Conicas.htm
http://abel.mat.ufpb.br/~sergio/winplot/vetorial/conicas.html
http://www.dm.ufscar.br/~yolanda/cursos/ga/yolanda/curvas5.html

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR 1

Considerando que você já esteja familiarizado com o *Cabri-géomètre*, sugerimos uma interessante atividade proposta por Rodrigues e Resende (1999, p. 93). Essa atividade permite que o estudante, com domínio da parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, perceba que se trata da mesma curva definida como lugar geométrico e com a equação $y = \frac{1}{4p} x^2$.

Siga os seguintes passos no *Cabri*:

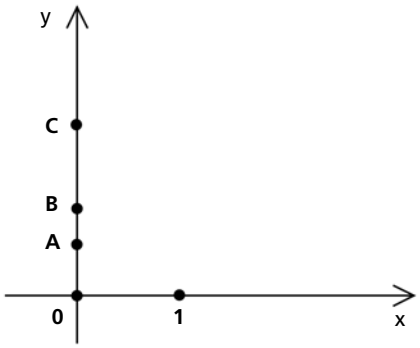



**Figura 17.13:** Pontos no plano cartesiano.

• construa um sistema de coordenadas ortogonais *Oxy*;

• marque um ponto no eixo x e denomine-o 1;

• marque três pontos no eixo y, e denomine-os A, B e C, como mostra a **Figura 17.13**. Considere as coordenadas desses pontos dadas por: A=(0,c), B=(0,b+c) e C=(0,a+b+c);

• construa a reta perpendicular ao eixo x, passando pelo ponto 1, e denomine-a s;

• construa a reta paralela ao eixo x, passando pelo ponto C, e denomine-a $r_1$;

• marque a intersecção da reta $r_1$ e a reta s, e denomine C';

• marque um ponto x genérico, no eixo x, de preferência entre a origem O e o ponto 1;

• construa a reta perpendicular ao eixo x, passando pelo ponto x, e denomine-a t;

• construa a reta BC';

• marque a intersecção da reta BC' e a reta t, e denomine-a D;

• construa a reta paralela ao eixo x passando por D, e denomine-a $r_2$;

• marque a intersecção da reta $r_2$ e a reta s, denominando-a B';

• construa a reta AB';

• marque a intersecção de AB' e a reta t, denominando-a P;

• utilizando o recurso lugar geométrico, desenhe a trajetória de ponto P, quando x se move sobre o eixo x.

a) Utilizando a Teoria da Geometria Euclidiana Plana, justifique ser a curva obtida o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

b) Desenhe a trajetória do ponto P para diversas posições dos pontos A, B e C. Anote comentários e conclusões.

***COMENTÁRIO***

*Se você ainda teve dificuldades com o Cabri, não desanime, retome as instruções de uso e pratique as atividades propostas; rapidamente você dominará os comandos. Converse com seus colegas e com o tutor sobre os itens a e b.*

***ATIVIDADES***

5. Agora, você vai construir uma elipse por dobraduras.
Desenhe, na folha A4 de papel vegetal, uma circunferência de maior raio possível; chame o centro de F. Marque um ponto "F`" no interior da circunferência, a uns 3cm dela. Faça marcações, ao longo da circunferência, com intervalos de, aproximadamente, um centímetro. Dobrando a folha, faça encontrar cada marcação com o ponto "F`", vincando as dobras. A figura que surge é uma parábola. Desenhe o procedimento realizado e, utilizando a Geometria elementar, prove que, de fato, trata-se de uma parábola.

***COMENTÁRIO***

*Essa curiosa construção da parábola deve-se ao matemático* **VAN SCHOOTEN**. *Novamente, você deve ter percebido que os vincos das dobraduras correspondem a tangentes à elipse. Para perceber que estamos, realmente, diante de uma elipse, precisamos provar que para cada ponto de tangência a soma de suas distâncias em relação a F e F' é constante. Observando a* ***Figura 17.14****, vemos que DF é igual ao raio da circunferência, para qualquer escolha de D ao longo da mesma. Além disso, os triângulos F'AB e DAB são congruentes. Em particular, F'B≅BD. Ora, assim, (F'B + BF) será, sempre, igual ao raio da circunferência, seja ele qual for. Isto é, o ponto B pertence à elipse. Também podemos observar que os outros pontos da dobra não pertencerão à elipse. Faça isso!*

**FRANZ VAN SCHOOTEN (1615-1660)**

Foi um holandês que realizou importantes estudos na área da Geometria Analítica; publicou *Geometria a Renato Des Cartes de Schooten*. Além disso, dedicou-se também, à construção de aparelhos para desenhar cônicas.

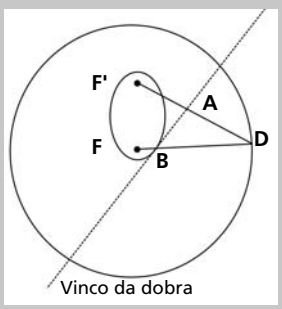



**Figura 17.14:** Representação da dobradura.

6. Outra maneira de verificar que a curva que se insinua na dobradura trata-se, de fato, de uma elipse, é desenhá-la com um lápis e, admitindo que seja uma elipse, determinar seus focos e constatar que eles coincidem com F e F'. Faça isso, utilizando técnicas de construções geométricas.

***COMENTÁRIO***

*Esse é o Problema 3 da Aula 21 de Construções Geométricas. Aproveite a oportunidade para rever o estudo analítico da elipse.*

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR 2

A elipse é, também, o lugar geométrico dos centros das circunferências que tangenciam, por dentro, uma circunferência dada, e passam por um ponto escolhido no interior dessa mesma circunferência. Tente desenhar e visualizar essa intrigante propriedade. Você pode verificá-la utilizando o *Cabri-géomètre* (RODRIGUES; REZENDE,1999, pp. 89-90). Veja como fica fácil!

• Construa uma circunferência $C_1$, de centro $F_1$, passando por um ponto A.

• Marque um ponto $F_2$, interior à circunferência $C_1$, distinto de $F_1$.

• Marque um ponto D sobre a circunferência $C_1$, distinto de A.

• Construa a circunferência que tangencia internamente a circunferência $C_1$ em D e passa por $F_2$, e nomeie-a $C_2$.

• Marque o centro de $C_2$ e nomeie-o O.

• Utilizando o recurso lugar geométrico, desenhe a trajetória do ponto O, quando o ponto D se move sobre a circunferência $C_1$.

***COMENTÁRIO***

*Se tudo deu certo, você deve ter ficado entusiasmado com o efeito do movimento na visualização dos fenômenos geométricos. Aproveite e faça uma pesquisa: modifique a posição do ponto $F_2$, colocando-o em várias posições (mais perto e mais longe de $F_1$, sobre $F_1$, sobre $C_1$, fora de $C_1$), anote as suas conclusões e compare-as com seus estudos de Geometria analítica. Converse com seus colegas e com o tutor sobre suas observações.*

***ATIVIDADES***

7. A construção da hipérbole por dobraduras é bastante parecida com a da elipse. Na mesma circunferência desenhada para a elipse, coloque o ponto F' (fora da circunferência uns 5cm). Fazendo coincidir a borda da circunferência com F', faça muitos vincos no papel vegetal.
Desenhe a curva marcada no papel e mostre que é uma hipérbole.

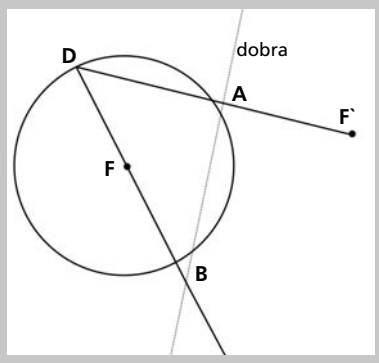



**Figura 17.15:** Representação da dobradura.

***COMENTÁRIO***

*Observando a **Figura 17.15**, você percebe que o vinco da dobra interceptará o raio da circunferência ou o seu prolongamento. Para mostrar que se trata de uma hipérbole, devemos provar que $\tilde{(}BF' - BF)$ é constante.*

*Como a dobra é a mediatriz do segmento F'D, os triângulos DBA e F'BA são congruentes. Em particular, BF' = BD, isto é, BF'–BF= BD – BF = FD. Como FD é o raio da circunferência, temos que BF' – BF é constante, o que prova que o ponto B pertencerá a uma hipérbole. É fácil ver que qualquer outro ponto da dobra não pertencerá à hipérbole. Experimente fazer isso.*

*Se você fez a Atividade Complementar 2, já sabia o efeito causado na construção da parábola, quando o ponto F' é colocado fora da circunferência.*

8. As técnicas de desenho também permitem comprovar que as dobraduras definem uma hipérbole. Considerando os focos F e F' e uma dobradura como tangente, encontre o eixo imaginário e as assíntotas da hipérbole.

***COMENTÁRIO***

*Essa é a Atividade 2 da Aula 22 de Construções Geométricas. Não custa dar uma olhadinha! Depois de construir as assíntotas, você pode observar que elas poderiam facilmente ser obtidas por dobradura. Observe! Se você traçar as tangentes à circunferência que passam por F', encontrará dois pontos da circunferência D1 e D2. Fazendo coincidir F' com esses pontos, o vinco da dobra será paralelo aos raios FD1 e FD2 da circunferência; isto é, essas dobras não tangenciam a hipérbole num ponto B, como na* ***Figura 17.15*** *Faça essas dobras e confirme que elas são as assíntotas.*

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR 3

Ainda usando o *Cabri*, Rodrigues e Rezende (1999, p. 97-99) descrevem a construção da hipérbole a partir da sua definição como lugar geométrico dos pontos, cujo valor absoluto das distâncias em relação a dois pontos fixos é constante. Acompanhe:

• crie dois pontos: $F_1$ e $F_2$. Em um canto da área de trabalho, crie um segmento de medida 2a e um ponto A, como mostra a **Figura 17.16**. A distância entre $F_1$ e $F_2$ deve ser estritamente maior 2a;

• crie a reta $\overline{F_1F_2}$, o ponto médio O do segmento $\overline{F_1F_2}$ e a reta perpendicular a $\overline{F_1F_2}$, passando pelo ponto O, denominando-a "s";

• crie a reta "r" passando pelo ponto $F_1$ e pelo ponto A;

• transporte o segmento de medida 2a sobre a reta "r", tendo como um dos extremos o ponto $F_1$ e o outro na direção do ponto A, e denomine o segundo extremo B;

• crie o segmento $BF_2$;

• construa a mediatriz do segmento $BF_2$ e denomine-a "m";

• marque a intersecção da mediatriz "m" e da reta "r", denominando-a P;

• construa o simétrico do ponto P com relação à reta "s", denominando-o P';

• utilizando o recurso lugar geométrico, desenhe a trajetória dos pontos P e P', quando o ponto A move-se em direção à reta "s".

Utilizando a Teoria da Geometria Euclidiana Plana, justifique a construção, mostrando que os pontos P e P' satisfazem a condição desejada.

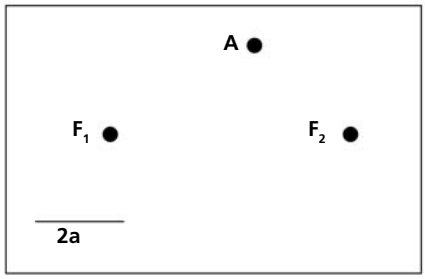



**Figura 17.16:** Representação dos pontos.

***COMENTÁRIO***

*Você não deve ter tido dificuldade, mas se persistirem dúvidas, converse com o tutor. Aproveite para explorar os recursos do software, modificando a distância entre F1 e F2 e comparando os efeitos com suas conclusões das aulas de Geometria Analítica, com relação à excentricidade das cônicas.*

## CONCLUSÃO

Propondo atividades adequadas, podemos mostrar, até a alunos do Ensino Médio, que as três abordagens são, na verdade, diferentes maneiras de tratarmos os mesmos objetos matemáticos.

Fazendo uma viagem no tempo, é possível observar que desde a Grécia Antiga as cônicas vêm despertando a curiosidade e o interesse dos matemáticos. Passando pelo século XVII, quando Kepler descreveu as trajetórias elípticas dos planetas do sistema solar, chegamos aos dias de hoje, sob o império das antenas e espelhos parabólicos.

Somados às tradicionais técnicas de construções geométricas, os modernos recursos de Geometria Dinâmica, disponíveis em diversos programas de computador, oferecem incríveis oportunidades de abordagens conceituais em Geometria que, no caso das cônicas, deixam absolutamente claro, para o estudante, o que há de comum entre essas três curvas aparentemente tão diferentes.

## RESUMO

As curvas denominadas cônicas: elipse, parábola e hipérbole, normalmente são estudadas sob três pontos de vista bem diferentes, tratados de forma independente. Em alguns momentos, dizemos que as cônicas são curvas, obtidas pela intersecção de um plano com uma superfície cônica, no espaço; outras vezes, dizemos que são lugares geométricos de pontos do plano que satisfazem condições específicas; dizemos, também, que essas curvas são os gráficos de equações cartesianas, de segundo grau.

## AUTO-AVALIAÇÃO

O conjunto de atividades desta aula deve tê-lo convencido de que as três abordagens das cônicas, feitas de formas independentes, falam, de fato, sobre os mesmos objetos matemáticos. Você deve também ter percebido que o professor de Geometria, ao omitir a discussão conceitual das cônicas, além de deixar uma lacuna na compreensão dessas curvas, perde grande oportunidade de levar seus alunos a refletir sobre a interação entre Geometria Espacial, Geometria Plana, Construções Geométricas e Geometria Analítica. Se você não teve chance de realizar as atividades complementares, deve fazê-las na primeira oportunidade: elas são fundamentais para o bom entendimento do conceito de excentricidade. Também terá sido especialmente importante a realização das Atividades 2, 6 e 8 para relembrar conceitos de Construções Geométricas.

## INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você revisará o seu conhecimento sobre o Teorema de Pitágoras e conhecerá diferentes alternativas metodológicas para o seu estudo.

AULA 18

# Explorando o Teorema de Pitágoras

## Meta da aula

Instrumentalizar o ensino do Teorema de Pitágoras.

## objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Enunciar e demonstrar o Teorema de Pitágoras.
- Conhecer episódios da história do Teorema de Pitágoras.
- Utilizar vários recursos para ensinar o Teorema de Pitágoras.
- Encontrar ternos pitagóricos.

## Pré-requisitos

Para um bom desempenho nesta aula, basta que você se lembre das definições e propriedades elementares das figuras geométricas, inclusive do próprio Teorema de **Pitágoras**. Se você sentir alguma dificuldade durante a aula, recorra ao seu material de Geometria Básica.
Você deve ter à mão cartolina, papelão ou material emborrachado, para construir alguns quebra-cabeças do tipo Tangram e acrescentar ao seu laboratório pessoal de Geometria.

**!**

Lembre-se de acessar a página da disciplina e seu conjunto de aulas na Plataforma Cederj. Há interessantes animações que auxiliam o desenvolvimento da visualização e representação. Ao acessar também os *sites* sugeridos na aula, você terá novas motivações para o estudo do Teorema de Pitágoras.

**PITÁGORAS DE SAMOS**

Como resultado do pacto de silêncio dos pitagóricos, reunidos na irmandade filosófico-religiosa fundada por Pitágoras, pouco se sabe sobre sua história e produção matemática. Muitos historiadores consideram lendas as informações biográficas sobre Pitágoras. Atribuem-se aos pitagóricos algumas importantes contribuições à Matemática, como: a soma dos ângulos internos do triângulo; a demonstração do Teorema de Pitágoras; a descoberta dos irracionais e a construção dos poliedros regulares. Saiba mais sobre Pitágoras, consultando http://www.calculu.cjb.net/.

## INTRODUÇÃO

O Teorema de Pitágoras é, certamente, o mais conhecido resultado da Matemática. Em qualquer ambiente fechado que estejamos, ele está presente. Pessoas sem qualquer iniciação matemática utilizam-no diariamente! Talvez isso explique o fato de os antigos egípcios já utilizarem a chamada "corda dos treze nós" para marcar os terrenos férteis à beira dos rios. Atualmente, esse procedimento é muito utilizado pelos pedreiros e mestres-de-obras em geral; ou seja, eles constroem ângulos de 90 graus utilizando uma corda, formando o conhecido terno pitagórico 3, 4 e 5.

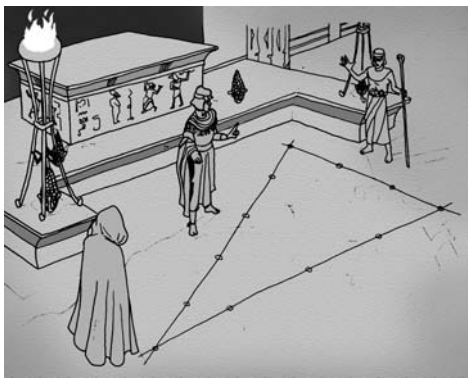


**Figura 18.1**

Apesar disso, os livros e os professores de Matemática insistem em apresentar o Teorema de Pitágoras aos estudantes, apenas ao final do Ensino Fundamental, na oitava série. Obviamente, uma demonstração formal do Teorema tem como pré-requisitos a semelhança de triângulos e algumas manipulações algébricas que envolvem potência e radiciação, além de abstração e visualização geométricas, freqüentemente não dominadas pelos estudantes de oitava série.

Você verá, nesta aula, atividades simples que podem ser propostas desde o início do terceiro ciclo para desenvolver a intuição do aluno e prepará-lo para a demonstração formal que será feita ao final do quarto ciclo do Ensino Fundamental. Por exemplo, o estudo dos ternos pitagóricos quase nunca é explorado nos livros didáticos e, no entanto, representa uma grande interação entre Álgebra e Geometria. No Ensino Médio, o Teorema de Pitágoras pode ser demonstrado, utilizando-se a Geometria Analítica, que também não costuma ser trabalhada.

Nas atividades desta aula, você estudará alternativas para explorar o Teorema de Pitágoras, sem, no entanto, esgotar o assunto.

!

Não deixe de conversar com o tutor e com colegas, e de consultar a bibliografia e os *sites* indicados!

## O TEOREMA DE PITÁGORAS

Na Aula 12, de Geometria Básica, você estudou o Teorema de Pitágoras numa visão moderna, como uma das conseqüências da semelhança de triângulos.

!

**Teorema de Pitágoras**

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos (Aula 12, Geometria Básica ).

**PITÁGORAS** enunciava: o quadrado *sobre* a hipotenusa é igual à soma dos quadrados *sobre* os catetos. Esse enunciado deixa claro que, para Pitágoras, o Teorema tratava de uma relação entre áreas, diferente do que os nossos livros de hoje nos fazem entender.

## DEMONSTRANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS

Todos sabemos que a primeira demonstração geral do Teorema de Pitágoras é atribuída ao próprio Pitágoras, no século VI a.C., apesar de seu enunciado já ser conhecido pelos babilônios dos tempos de **HAMURABI,** mais de mil anos antes. Mesmo assim, através dos séculos, o famoso Teorema continuou a despertar o interesse e a curiosidade dos matemáticos e inúmeras (mais de 100) demonstrações dele se sucederam. Nas atividades seguintes, apresentaremos algumas delas, começando pela atribuída a Pitágoras.

**HAMURABI**
**(1792-1750 a.C.)**

Quase tudo que se sabe da cultura dos antigos babilônios deve-se à descoberta de cerca de meio milhão de tábulas com escritas cuneiformes encontradas na região noroeste do atual Irã. Dessas, cerca de 400 tratam estritamente de Matemática. A maior parte delas, do período de 2100 a 1600 a.C., durante a primeira dinastia babilônica, era do rei Hamurabi.

***ATIVIDADES***

1. Construa um quadrado em algum MATERIAL. Divida o lado em duas partes, digamos a e b. Construa, agora, quatro triângulos retângulos com catetos a e b (chamemos a hipotenusa de c), de preferência em cor diferente da utilizada no quadrado. Se você cobrir os "cantos" do quadrado com os triângulos, restará descoberto um quadrado de lado c. Arraste os triângulos sobre o quadrado para deixar descobertos dois quadrados de lados a e b.

**MATERIAL**

O material pode ser: cartolina, papelão, isopor, borracha imantada etc. Hoje em dia, nos supermercados, alguns produtos são empacotados em bandejas de isopor prensado, que podem ser reaproveitadas a custo zero.

***COMENTÁRIO***

*Como foi dito, essa é a prova atribuída a Pitágoras. Além do valor histórico, ela pode ser apresentada aos alunos na forma de quebra-cabeças. Construa o seu material e o acrescente a seu laboratório pessoal.*

2. EUCLIDES fez uma das mais elegantes demonstrações do Teorema de Pitágoras. O diagrama que ilustra sua idéia ficou conhecido como "capelo franciscano" ou "cadeira de noiva," numa alusão aos chapéus utilizados por cardeais franciscanos ou à cadeira onde se carrega a noiva, após os casamentos judaicos.
Comece observando que a área do quadrado ACHJ é duas vezes a área do triângulo JAB, que, por sua vez, é igual a duas vezes a área do triangulo CAD, que é a mesma área do retângulo ADKL, isto é:
$(AC)^2 = 2\Delta(JAB) = 2\Delta(CAD) = ADKL$

**EUCLIDES DE ALEXANDRIA**

Viveu no século IV a.C. e é famoso por sua obra *Elementos*, quase toda dedicada à Geometria, e um dos livros mais conhecidos do mundo. Além dessa, outras obras dele sobrevivem até hoje: *Os Dados*, sobre grandezas e lugares geométricos; *Divisão de Figuras*, sobre a divisão de figuras planas; *Os Fenômenos*, sobre Geometria esférica para uso de astrônomos e *Óptica*, um tratado sobre perspectiva ou geometria da visão direta.

Verifique, você mesmo, e complete a demonstração de Euclides.

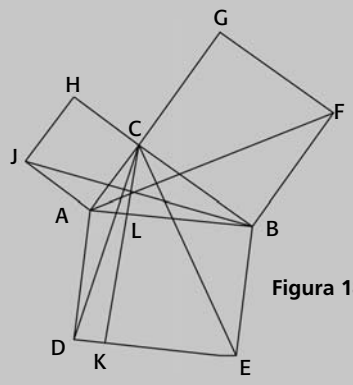



**Figura 18.2**

***COMENTÁRIO***

*É possível que você tenha percebido que $(BC)^2 = BEKL$ e que $(AB)^2 = ADKL + BEKL = (AB)^2 + (BC)^2$. Se você teve dificuldades, lembre-se de que a área de um triângulo é a metade de uma base, vezes a altura relativa a ele. Procure bases convenientes e relacione as áreas dos quadrados e dos triângulos.*

3. **Bhaskara** foi outro que se ocupou do Teorema de Pitágoras. Sua conhecida demonstração pode também ser reproduzida em quebra-cabeças com grande efeito didático. Observe!

a) Demonstre o teorema, observando que a área do quadrado é a soma dos quatro triângulos com o quadrado interno.

b) Invente um Tangram, de forma que seus alunos possam manipular e provar sozinhos o famoso Teorema.

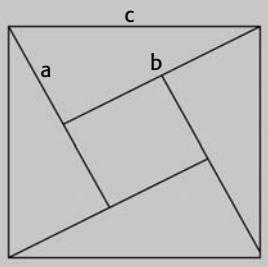



**Figura 18.3**

***COMENTÁRIO***

*Você deve ter observado que as áreas envolvidas podem ser escritas como $c^2$, $ab/2$ e $(b-a)^2$. Daí para o Teorema de Pitágoras é um pulo!*

*Quanto ao Tangram, uma versão bastante simples seria a seguinte:*

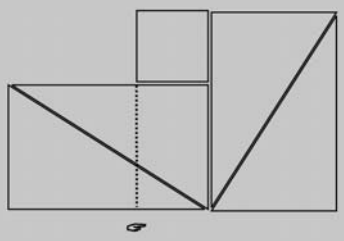


**Figura 18.4**

**Bhaskara (1114-1185)**

O mais importante matemático indiano do século XII, Bhaskara preencheu as lacunas deixadas por seus antecessores. Descobriu uma solução geral para a equação de Pell ($x^2 = 1\ py^2$) e foi o primeiro matemático a considerar que a divisão por zero é infinita. Suas obras mais conhecidas, o Lilavati (nome de sua filha) e o Vija-Ganita, tratam de equações lineares e quadráticas, mensuração, progressões aritméticas e geométricas, radicais, ternos pitagóricos e outros assuntos, todos de grande interesse para os matemáticos indianos. A demonstração do Teorema de Pitágoras, que você estudou na disciplina Geometria Básica, também é atribuída a Bhaskara.

**LEONARDO DA VINCI (1452-1519)**

Grande gênio da pintura, famoso por seu quadro *Monalisa*, também se dedicou a outras artes, como a escultura, e às ciências, como Matemática, Física, Astronomia, Anatomia, Filosofia. Foi, além do mais, um grande inventor e estrategista militar. Na Matemática, estudou com o matemático Luca Pacioli (1445-1509), tendo ilustrado ele próprio sua obra *De Divina Proportione*, sobre o Número Áureo.

4. Até mesmo o genial **Leonardo da Vinci** se rendeu ao "triângulo direto", como era chamado. Acrescentou, às tantas já existentes, a sua demonstração, sintetizada no esquema a seguir.

As linhas tracejadas denunciam a congruência entre os dois polígonos que têm, em comum, o triângulo ABC. A partir dessa congruência, você pode deduzir sozinho o que estava na cabeça do gênio. Verifique você mesmo!

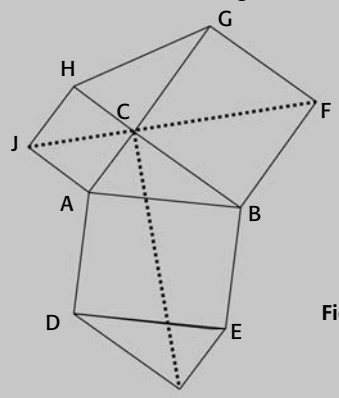



**Figura 18.5**

***COMENTÁRIO***

*Acreditamos que você tenha conseguido deduzir a prova. Caso contrário, continue tentando. Afinal, Leonardo era um gênio, e nós, simples mortais. Converse com seus colegas ou com o tutor.*

5. Outra interessante demonstração que pode ser reproduzida em quebra- cabeça do tipo Tangram é devida a Dudeney, matemático que viveu no século passado.

Construa o seu Tangram!

Desenhe um quadrado. Desenhe a figura ao lado, como se fosse unir seus vértices aos pontos médios de seus lados, Agora, recorte duas cópias de cores diferentes. Com as peças de uma cor, construa um quadrado e, com as peças da outra cor, construa dois quadrados. Disponha os quadrados de modo que seus lados formem um triângulo.

Deduza analiticamente, a partir da **Figura 18.6**, o Teorema de Pitágoras.

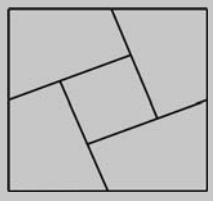


**Figura 18.6**

***COMENTÁRIO***

*Este quebra-cabeça pode ser utilizado inclusive por alunos de 5ª série, pois não exige pré-requisitos conceituais; porém, a dedução analítica do Teorema deve ser deixada para a 8ª série. Se você teve dificuldade para deduzir analiticamente o Teorema, não desista, continue insistindo. Converse com seus colegas ou com o tutor e visite a Plataforma Cederj.*

6. O vigésimo presidente americano, James Abram Garfield (1831-1881), mesmo sem formação superior em Matemática, foi seduzido pelo Teorema de Pitágoras ainda nos bancos escolares, mas somente em 1876, quando era senador, realizou seu grande sonho de produzir uma demonstração original para o Teorema. Veja!

Basta calcular a área do trapézio de duas maneiras: diretamente e pela soma das áreas dos três triângulos. Igualando as áreas, você encontrará a relação de Pitágoras.

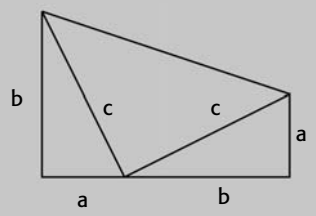



**Figura 18.7**

***COMENTÁRIO***

*Essa demonstração é também uma excelente oportunidade para relacionar o Teorema de Pitágoras com o cálculo de áreas.*

7. Acreditamos que algumas atividades apresentadas anteriormente podem perfeitamente ser utilizadas com alunos de 5ª série. Se quisermos, podemos elaborar tarefas ainda mais simples; por exemplo, utilizando papel quadriculado, geoplano, Tangram tradicional etc. Crie você mesmo uma atividade que considere adequada a alunos de 5ª série. Eis uma ilustração sugestiva!

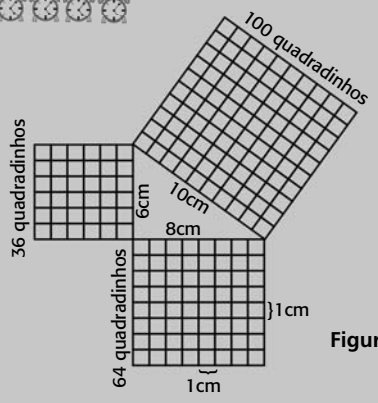



**Figura 18.8**

***COMENTÁRIO***

*Abuse da sua criatividade! Depois, consulte as referências, faça uma pesquisa na Internet, visite a Plataforma Cederj e converse com seus colegas ou com o tutor, para verificar a adequação de suas idéias. Uma atividade interessante seria utilizar uma corda de 13 nós com as crianças e pedir a elas que formem "cantos retos".*

## TERNOS PITAGÓRICOS

Chamamos três números naturais a, b e c de terno pitagórico quando $a^2 + b^2 = c^2$. Uma vez obtido um terno pitagórico, seus múltiplos também o serão. Prove isso!

A curiosidade de encontrar os ternos pitagóricos fez surgir algumas sucessões de números como, por exemplo,

$$(2m, m^2-1, m^2+1) \quad (1)$$

É fácil ver que esses ternos são pitagóricos, mas eles não representam todas as possibilidades. Um modelo definitivo para os ternos pitagóricos é dado por

$$d(n^2 - m^2, 2mn, m^2+n^2) \qquad (2)$$

onde d é um número natural qualquer e $m>n>0$ são números primos entre si, que não podem ser, ao mesmo tempo, nem pares nem ímpares.

***ATIVIDADE***

8.

a) Prove que $(2m, m^2-1, m^2+1)$ é, de fato, um terno pitagórico.

b) Dê exemplos de ternos pitagóricos que não satisfaçam ao modelo do item a.

c) O terno $(n^2 - m^2, 2mn, m^2+n^2)$ é sempre um terno de números primos entre si. Por quê?

d) No terno (2), por que devemos ter $m>n$?

e) No terno (2), o que aconteceria se m e n fossem negativos? E se tivessem sinais contrários?

f) No terno (2), por que não podem m e n ser ambos pares ou ímpares?

g) Você acha que o terno (2) representa a totalidade dos ternos pitagóricos?

h) Encontre os ternos pitagóricos com termos de até dois dígitos.

***COMENTÁRIO***

*Se você não se interessou em resolver esta atividade, não tem importância! O que é realmente importante é observar a riqueza dessa discussão para o amadurecimento matemático de alunos de 7ª ou 8ª séries, e, até mesmo, do Ensino Médio.*

## CONCLUSÃO

Utilizando-se recursos adequados, o Teorema de Pitágoras pode perfeitamente ser estudado desde a 5a série, a fim de motivar o resgate da História da Matemática, explorando relações entre áreas e relações numéricas, através dos ternos pitagóricos.

## RESUMO

Além da tradicional demonstração, como conseqüência da semelhança de triângulos, que costuma aparecer nos livros didáticos, podemos demonstrar o Teorema de Pitágoras de várias maneiras. No terceiro ciclo, podemos utilizar materiais concretos, como o Tangram, para comprovar demonstrações de matemáticos famosos e, assim, resgatar a História da Matemática. Além disso, os ternos pitagóricos, números naturais que satisfazem à relação $a^2 + b^2 = c^2$, podem ser explorados numericamente, incorporando interessantes relações algébricas e aritméticas no currículo.

## ATIVIDADE FINAL

Pense em novas atividades, utilizando outros recursos, como o geoplano (Aula 3). Como você sabe, atribui-se aos pitagóricos a descoberta dos números irracionais. Crie uma atividade no geoplano, utilizando triângulos retângulos, para encontrar alguns desses números. Se faltar inspiração, consulte http://www.somatematica.com.br/irracionais.phtml. Coragem, irmão!

***COMENTÁRIO***

*Comece com catetos de uma unidade para encontrar a hipotenusa $\sqrt{2}$. A partir disso, crie outros triângulos e, tente encontrar hipotenusas $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$... Depois dessa atividade converse com seus colegas e com o tutor.*

## AUTO-AVALIAÇÃO

Ter realizado as Atividades 2, 3 e 7 é primordial para o entendimento da relação pitagórica. Entender a identificação e construção de ternos pitagóricos (Atividade 8) também enriquecerá o seu conhecimento à medida que você pode realizar descobertas aritméticas e algébricas relevantes. Se você conseguiu resolver as atividades com facilidade e não lhe restaram dúvidas, siga em frente. Caso contrário, retome o estudo do texto, visite a Plataforma Cederj ou consulte o tutor no pólo.

## INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você verificará que o Teorema de Pitágoras é válido também quando as figuras construídas sobre os catetos e a hipotenusa são semelhantes entre si. Você deve ter os modelos de quebra-cabeças disponíveis no Módulo Prático e utilizá-los.

# O Teorema de Pitágoras e sua relação com polígonos semelhantes

AULA 19

## Meta da aula

Instrumentalizar o ensino do Teorema de Pitágoras.

## objetivos

Esperamos que, após esta aula, você seja capaz de:

- Verificar a validade do Teorema de Pitágoras na soma das áreas de figuras semelhantes, não apenas quadrados.
- Utilizar quebra-cabeças como recursos para ensinar o Teorema de Pitágoras.

## Pré-requisitos

Para um bom desempenho nesta aula, é importante você rever a definição de figuras semelhantes (Aula 2) e ter entendido o Teorema de Pitágoras (Aula 16). Você deve ter à mão cartolina, papelão ou material emborrachado, para construir alguns quebra-cabeças e acrescentá-los ao seu laboratório de Geometria.

## INTRODUÇÃO

Convencionalmente, o Teorema de Pitágoras é apresentado nos livros didáticos da 8ª série do Ensino Fundamental, nos últimos capítulos. Tal fato decorre da visão estanque e seqüencial dos conteúdos matemáticos, em que um é visto como pré-requisito para o outro. Tradicionalmente, como ressaltaram Kindel, Bairral e Oliveira (2000), acreditava-se que para ter o domínio deste conceito, era preciso que o aluno tivesse trabalhado o conceito de equação do 2º grau. Pesquisas em Educação Matemática mostram que a construção do conhecimento matemático ocorre de maneira caótica, ou seja, de forma não-linear e em diferentes momentos e contextos de nossa experiência, seja ela cotidiana ou matemática. Na aula de hoje, você verificará, em especial, que o Teorema de Pitágoras pode ser generalizado para figuras quaisquer, construídas sobre os catetos e sobre a hipotenusa, desde que elas sejam semelhantes entre si.

**!**

Para os pitagóricos, os estudos fundamentais eram a Geometria, a Aritmética, a Música e a Astronomia. O elemento básico de todos esses estudos era o número, não em seus aspectos práticos, computacionais, mas como a própria essência de sua natureza. Os pitagóricos supunham que os princípios básicos do número fossem os princípios básicos de todas as coisas, e que todo o céu fosse uma escala musical e um número.

### Conversando sobre o seu laboratório de Geometria

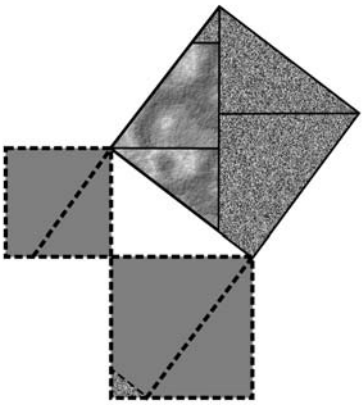
Recursos audiovisuais também podem ser uma importante ferramenta em suas aulas de Geometria. Por exemplo, você conhece o filme *Donald no país da matemágica*? Trata-se de uma interessante aventura, contada em 25 minutos, sobre vários episódios da História da Matemática. Acompanhando a viagem do Pato Donald no fascinante Mundo da Matemática, você pode saber mais sobre a Escola Pitagórica, a relação entre Matemática e Música, o Pentagrama e um curioso método de jogar bilhar.

Como na Aula 9, você também poderá encontrar um interessante livro paradidático sobre o Teorema de Pitágoras, escrito por Luiz Márcio Imenes, em 1988. Os livros paradidáticos da série *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula*, da Atual Editora, também devem compor o seu acervo.

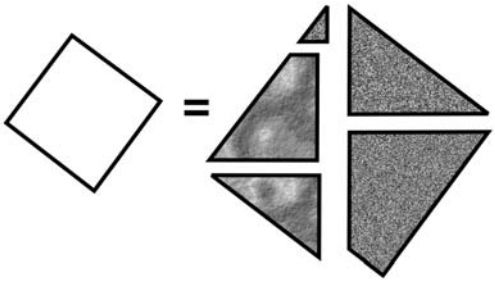
## AMPLIAÇÃO DO ESTUDO DO TEOREMA DE PITÁGORAS: O CASO DAS FIGURAS SEMELHANTES

Conforme ilustrado na **Figura 19.1**, você pode visualizar a relação pitagórica, ou seja, pode perceber que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos resulta no quadrado maior, construído sobre a hipotenusa.

Ao encaixar as cinco peças no quadradão, você cobriu-o por completo:



Podemos então concluir que a área do quadradão é a soma das áreas das cinco figuras.



Repare que as figuras 1, 2 e 3 formam o quadrado médio e que as figuras 4 e 5 formam o quadrado pequeno.

**Figura.19.1**

área do quadradão= área da figura + área da figura + área da figura + área da figura + área da figura + área da figura

área do quadradão= área do quadrado médio + área do quadrado pequeno

Uma questão quase nunca explorada nos livros didáticos e nas aulas de Geometria é o fato de que a relação entre as áreas de figuras desenhadas sobre os lados do triângulo retângulo pode continuar verdadeira para outras figuras planas diferentes do quadrado. Isso é o que veremos nas atividades subseqüentes.

***ATIVIDADES***

1. Como no exemplo da **Figura 19.1**, vamos formar octógonos sobre os lados do triângulo retângulo (**Figura 19.2.a**). Para isso, vamos trabalhar com as oito peças recortadas da **Figura 19.2.b** para preencher os octógonos formados sobre os lados do triângulo retângulo da **Figura 19.2.a**. Utilizando apenas três peças, forme o octógono que tenha como um de seus lados o cateto menor. Com as outras cinco peças, forme outro octógono sobre o cateto maior. Utilizando todas as peças, é possível formar um octógono em que um de seus lados seja a hipotenusa do triângulo? O que você observa em relação às áreas das figuras? Justifique suas respostas.

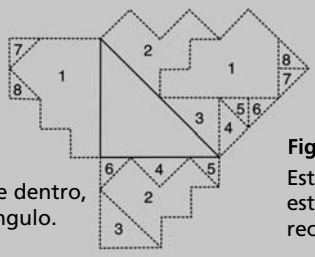


**Figura 19.2.a:**
Tirar as linhas de dentro, deixando o triângulo.

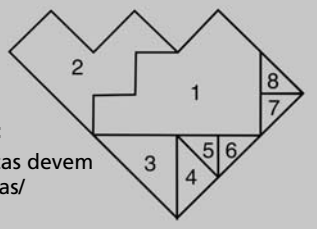


**Figura 19.2.b:**
Estas oito peças devem estar separadas/ recortadas.

_____

_____

_____

_____

***COMENTÁRIO***

*Você deve ter verificado que os três octógonos são semelhantes. Além de sobrepô-los e compará-los, para verificar que de fato são semelhantes entre si, há outra maneira de constatar a semelhança, que é desenhar cada octógono e analisar a medida de seus lados e de seus ângulos. Lembre-se de utilizar o Módulo Prático.*

2. A partir dos quebra-cabeças seguintes, elabore atividades semelhantes à anterior. Em todas elas lembre-se de que o objetivo principal é associar a relação pitagórica com áreas de polígonos semelhantes, construídos sobre os lados (cateto menor, cateto maior e hipotenusa) de triângulos retângulos.

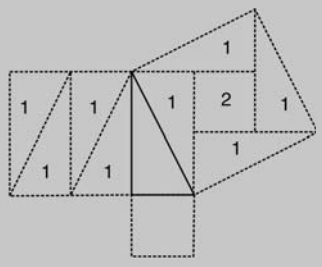


**Figura 19.3**

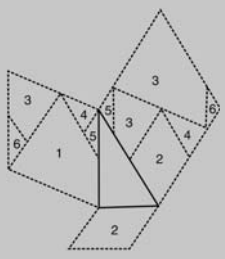


**Figura 19.4**

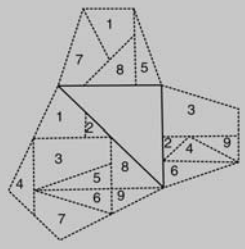


**Figura 19.5**

***COMENTÁRIO***

*Lembre-se de que esses quebra-cabeças estão disponíveis no Módulo Prático. Você deverá recortá-los e utilizá-los!*

3. Recorte a **Figura 19.6**, que você encontrará no Módulo Prático, e construa os triângulos eqüiláteros utilizando os mesmos procedimentos da Atividade 1. Agora, mostre que a área do triângulo eqüilátero, desenhado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo, é igual à soma da áreas dos triângulos eqüiláteros, desenhados sobre seus catetos.

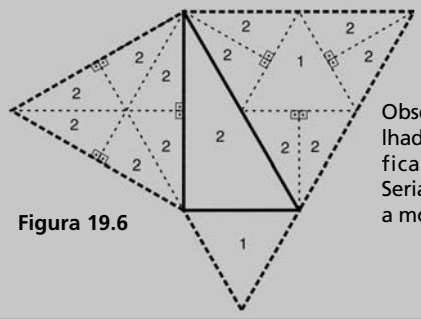



Figura 19.6

Observe que são figuras (as pontilhadas) + o triângulo. Todas devem ficar recortadas (em separado). Seria bom também deixar somente a moldura (contorno) triangular.

***COMENTÁRIO***

*Utilize o Módulo Prático, reproduza o desenho e faça o seu próprio Tangram. Você verá que é muito fácil montar o quebra-cabeça e mostrar esse fato a seus alunos.*

4. A propriedade da atividade anterior continuaria válida se os triângulos não fossem eqüiláteros? E se fossem semicírculos, no lugar de triângulos? E se fossem retângulos? Qual deve ser a propriedade das figuras sobre os lados do triângulo retângulo, para que a propriedade das áreas continue válida?

***COMENTÁRIO***

*É fácil dar exemplos de triângulos quaisquer ou de retângulos que contrariem a propriedade. Você deve ter percebido que a forma da figura não é o fundamental; o que importa é que elas sejam semelhantes. Se alguma dúvida persistir, consulte as referências bibliográficas ou o endereço: http://www.keypress.com/sketchpad/sketchdemo.html*

5. No estudo dos polígonos inscritos e circunscritos, também faz-se necessária a aplicação do Teorema de Pitágoras. Por exemplo, você sabe que todo triângulo retângulo pode ser inscrito em um semicírculo cujo diâmetro é a hipotenusa **(Figura 19.7)**. Sendo assim, observando a figura, responda: Qual a relação existente entre a hipotenusa e a mediana relativa a ela? Justifique sua resposta.

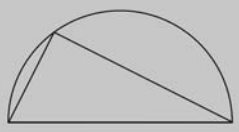


Figura 19.7

***COMENTÁRIO***

*Lembre-se de que a mediana é o segmento que une o vértice ao ponto médio do lado oposto. Construir uma demonstração para sua observação será importante. Outras interessantes extensões e generalizações do Teorema de Pitágoras podem ser encontradas em Barbosa (1993).*

**ETNOMATEMÁTICA**
Ainda não existe uma definição precisa do campo de atuação da Etnomatemática. Trata-se de uma recente área de pesquisa multidisciplinar (Matemática, Antropologia, História, Sociologia) que estuda a Matemática como um fenômeno cultural produzido por uma determinada etnia ou grupo social.

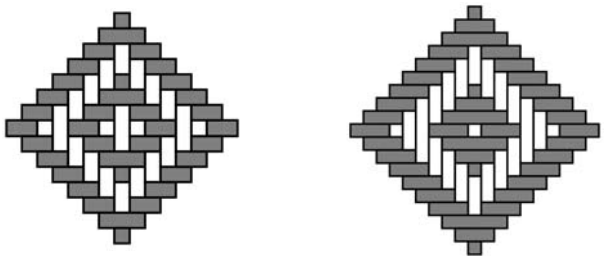
**PAULUS GERDES**

Holandês, é professor da Faculdade de Educação de Maputo, em Moçambique. Visitou o Brasil, pela primeira vez, em 1988.

## MATEMÁTICA E DIVERSIDADE CULTURAL

A diversidade cultural surge como um dos temas transversais, isto é, como um dos assuntos de relevância contemporânea que devem ser objetos de atenção constante pelos educadores, inclusive pelos professores de Matemática. Os temas transversais (Saúde, Meio Ambiente, Ética, Pluralidade Cultural, Orientação Sexual, Trabalho e Consumo) não constituem disciplinas; devem ser desenvolvidos continuamente em todas as disciplinas do currículo escolar.

O trabalho do famoso ETNOMATEMÁTICO **PAULUS GERDES** é um grande referencial de utilização da Matemática como produção cultural. No caso concreto do Teorema de Pitágoras, Gerdes estudou o modo como diversos ornamentos e artefatos africanos podem ser usados para criar um contexto atraente para a descoberta e demonstração desse teorema. Os quadrados entrelaçados e dentados (**Figura 19.8**) são exemplos dessa produção cultural.



Mbangala (Angola) Índios Krikati (Brasil)

**Figura 19.8**

Podemos ver, nos padrões de entrelaçamento da **Figura 19.9**, o caso mais simples do Teorema de Pitágoras.

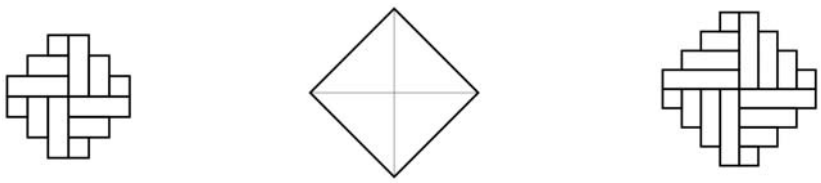


**Figura 19.9**

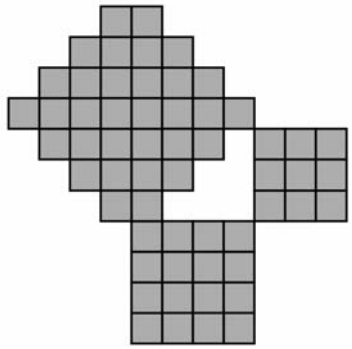


Figura 19.10

Nos trabalhos de Gerdes, encontramos o "quadrado dentado". Nele, também podemos ver (**Figura 19.10**) que o quadrado da "hipotenusa dentada" é igual (em área) à soma dos quadrados dos catetos.

Para mais detalhes, conheça Gerdes (1992).

***ATIVIDADE***

6. Na aula anterior, você viu que os ternos pitagóricos são números inteiros positivos a, b e c, tais $a^2 + b^2 = c^2$. O recíproco do Teorema de Pitágoras afirma que, se temos um tal terno de números, um triângulo que tenha números correspondentes como comprimentos dos lados terá um ângulo reto oposto ao lado maior. Uma fórmula atribuída a Pitágoras (540 a.C.), por Proclus (470 d.C.), resultava da propriedade dos números figurados: qualquer quadrado perfeito pode ser representado geometricamente por um arranjo quadrado de pontos. Podemos ver isto na **Figura 19.11.a**. O acréscimo de uma configuração, em forma de ângulo reto a esse quadrado, produz outro quadrado **(Figura 19.11.b)**.

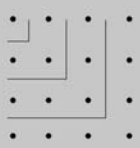


Figura 19.11.a

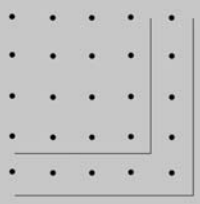


Figura 19.11.b

Seguindo com as configurações, encontre uma fórmula geradora de ternos pitagóricos, justificando sua resposta.

_____

_____

_____

***COMENTÁRIO***

*Caso tenha dúvida para encontrar a fórmula, lembre-se de que na Atividade 8 da aula anterior você a demonstrou. O tipo de configuração ilustrada nesta atividade é denominada "gnômon". Embora a designação dos ternos pitagóricos remeta-nos imediatamente a Pitágoras, é bom lembrar que os babilônios conheciam, pelo menos, quinze conjuntos de ternos diferentes. Tais ternos foram encontrados na tábua cuneiforme Plimptom 322, que data do período entre 1900 a.C. e 1600 a.C.*

## CONCLUSÃO

A partir de diferentes quebra-cabeças, podemos dinamizar o trabalho com o Teorema de Pitágoras, deixando assim de explorá-lo apenas algébrica e aritmeticamente. Desta forma, os conteúdos passam a ter dinâmica e integração mais significativas.

## RESUMO

É possível explorar, antes da 8ª série, o Teorema de Pitágoras, integrando-o ao trabalho com áreas e buscando resgatar a sua evolução histórica. Com isso, o recurso à História da Matemática (escola pitagórica, grega, egípcia, hindu etc.) pode ser um excelente motivador para os alunos no processo ensino-aprendizagem deste teorema. Você viu também que o trabalho com o Teorema de Pitágoras deve explorar relações entre áreas de figuras semelhantes, relações numéricas (ternos pitagóricos), relações algébricas e funcionais.

## AUTO-AVALIAÇÃO

Se você realizou e concluiu, sem dúvidas, todas as atividades desta aula, parabéns! Caso contrário, converse com o tutor e esclareça suas dúvidas. Também esperamos que você tenha descoberto e verificado, através de configurações geométricas variadas, a fórmula para a construção de ternos pitagóricos (Atividade 6).

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Você tem visto que a internet e seus aplicativos possibilitam-nos uma nova e diferente alternativa de aprender. Assim, se tiver oportunidade, acesse os endereços seguintes, conheça novas informações sobre o Teorema de Pitágoras e converse com o tutor.

PYTHAGOREAN theorem. Disponível em: <http://www.frontiernet.net/~imaging/pythagorean.html>. Acesso em: 18 jun. 2004.

THE PYTHAGOREAN theorem. Disponível em: <http://scidiv.bcc.ctc.edu/math/Pythagoras.html>. Acesso em: 18 jun. 2004

YOSHIOKA-MAXWELL, Seth. Phythagorean Dalculator. Disponível em: <http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Launchpad/3740/calculator.html. Acesso em: 18 jun. 2004.

## INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula você continuará estudando e conhecendo possibilidades de inserção das construções geométricas em suas aulas.

Os seus módulos de Geometria Básica, e de Construções Geométricas, devem estar à mão, para que você relembre algum conceito, se necessário. Pegue também o seu material de desenho (régua, compasso, transferidor e esquadros), cartolina, papelão ou material emborrachado, para construir alguns quebra-cabeças do tipo Tangram, ampliando os recursos do seu laboratório pessoal.

## SUGESTÃO DE LEITURAS COMPLEMENTARES

BARBOSA, Ruy M. *Descobrindo padrões pitagóricos*. São Paulo: Atual, 1993.

STRATHERN, Paul. *Pitágoras e seu teorema em 90 minutos*. Rio de Janeiro: Zahar, 1998.

# Construindo, jogando e aprendendo com quebra-cabeças

AULA 20

## Meta da aula

Instrumentalizar o ensino de construções geométricas elementares, por meio de quebra-cabeças.

## objetivos

Esperamos que, após estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Reconhecer a pertinência do uso de quebra-cabeças na atividade matemática.
- Criar e construir alguns quebra-cabeças para utilização em aulas de Geometria.
- Avaliar e explorar o potencial de determinado quebra-cabeça no desenvolvimento de construções geométricas.
- Refletir sobre a utilização de outros recursos (softwares e internet) nas aulas de Matemática.

## Pré-requisitos

Para um bom desempenho nesta aula, basta que você se lembre de alguns conceitos elementares de Geometria e de algumas técnicas, também elementares, de desenho geométrico.

Os seus módulos de Geometria Básica e o de Construções Geométricas devem estar à mão, para que você relembre algum conceito, se necessário. Pegue também o seu material de desenho (régua, compasso, transferidor e esquadros), cartolina, papelão ou material emborrachado, para construir alguns quebra-cabeças do tipo Tangram, ampliando os recursos do seu laboratório pessoal.

**!**

Lembre-se de acessar a página da disciplina e seu conjunto de aulas na Plataforma Cederj. Há interessantes animações que auxiliam o desenvolvimento da visualização e representação. Ao acessar também os *sites* sugeridos nesta aula, você terá diferentes motivações para a utilização de quebra-cabeças nas aulas de Matemática.

## INTRODUÇÃO

Diferentemente das aulas anteriores, não vamos ancorar esta aula em nenhum conteúdo específico. Nas atividades, construindo e utilizando alguns quebra-cabeças, você fará uma viagem lúdica por vários conceitos geométricos que permeiam todo o Ensino Fundamental.

É importante que você veja a atividade matemática como lúdica e desafiadora. Essa observação e compreensão do fazer matemático com atividades lúdicas se verifica, por exemplo, em inúmeros quebra-cabeças construídos com base em estratégias matemáticas variadas.

Certamente, os quebra-cabeças ainda não invadiram as aulas de Matemática por força da crença de que o saber matemático se revela apenas nas relações numéricas, na capacidade de cálculo de áreas, volumes, estatísticas etc. na resolução de problemas intrincados. No entanto, as pessoas escolarizadas, mesmo tendo esquecido como calcular uma área ou resolver uma equação do 2º grau, continuam interpretando formas, descobrindo simetrias, admirando mosaicos, resolvendo problemas, interpretando gráficos etc.

Nesta aula, você poderá construir e analisar alguns quebra-cabeças geométricos, conhecidos como Tangram, bastante divulgados nos meios matemáticos, com o principal objetivo de despertar o seu interesse pelo assunto. Você deve ampliar seus conhecimentos visitando os ***sites*** e lendo as referências indicadas.

**!**

Por que não usar e abusar dos quebra-cabeças na construção de conceitos matemáticos? Na interpretação e descrição de formas geométricas? No desenvolvimento do raciocínio lógico?

***ATIVIDADE***

1. Você sabe que podemos encontrar muitos recursos e atividades na rede. Por exemplo, uma grande variedade de quebra-cabeças, não só geométricos, pode ser encontrada nos *sites* a seguir:

http://www.recursoseb1.com/ficheiros/quebra-cabeças/domino.xls
http://www.recursoseb1.com/ficheiros/quebra-cabeças/domino2.doc
http://www.recursoseb1.com/ficheiros/quebra-cabeças/jogo12.doc
http://www.terravista.pt/bilene/5169/pagina/jogosmatematicos/jogosmatematicos.html
http://ludicum.org/games/geom/poliedricos/fotos/fotos_poli?b_start:int=10
http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT669583-2680,00.html
http://www.sectma.pe.gov.br/notitia/administracao/espacociencia/mat/conteudo/pitagoras.htm
http://www.sectma.pe.gov.br/notitia/administracao/espacociencia/mat/conteudo/cubosoma.htm
http://planeta.terra.com.br/educacao/calculu/Diversao/calendario.htm
http://www.pegar.com.br/pegar_arquivo.asp?link_id=10758
http://www.scipione.com.br/sceduca/assessoria/vivendo/pitagoras/pitagoras.htm#1
http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/atividades/ativ6/ativ6.htm
http://ludomatematica.tripod.com/PCM.htm

***COMENTÁRIO***

*Esta atividade, apesar de importantíssima, é opcional, uma vez que você necessitará da internet. Mesmo não tendo acesso fácil à rede, vale o esforço de fazer esta atividade; você só tem a ganhar!*

Como já conversamos em aulas anteriores, o Tangram, de origem chinesa, é um dos mais antigos quebra-cabeças de peças planas. Muito utilizado em aulas de Geometria, existem vários tipos de Tangram à venda, mas consideramos que a construção do próprio material oferece interessantes oportunidades de aprendizagem, tanto para os professores como para os estudantes.

## CONSTRUINDO E UTILIZANDO O TANGRAM QUADRADO

O Tangram quadrado é o mais popular. Ele tem origem e data de concepção desconhecidas e, em chinês, é chamado de *Ch'i Ch'iao T'u*, que quer dizer: as sete peças inteligentes. Existem vários tipos de Tangram: o quadrado, o pitagórico, o triangular, o pentagonal, o oval e o coração partido.

Segundo Lopes (1994, p. 136, v.1),

Conversando sobre a história do Tangram quadrado.

> esse jogo tem uma origem lendária, supõe-se que a parte inicial do nome do jogo, TAN, esteja relacionada à dinastia Tang, que governou a China por um longo período. A parte final do nome, GRAM, vem do latim e significa ordenar, dispor. Conta uma lenda que um mensageiro deveria levar uma pedra de jade, de formato quadrado, ao imperador. Mas, no meio do caminho a pedra partiu-se em sete pedaços. Preocupado, o mensageiro foi juntando as sete peças, a fim de remontar o quadrado. Enquanto tentava resolver o problema, o mensageiro criou centenas de formas até conseguir montar um quadrado.

A construção do Tangram quadrado é bastante simples. Acompanhe!

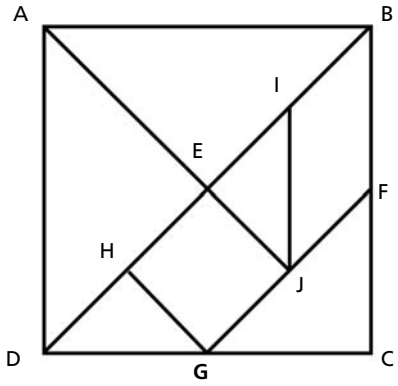



**Figura 20.1:** Tangram quadrado.

Veja que:

a) "E" é o ponto de intersecção das diagonais.

b) "F" e "G" são pontos médios dos respectivos lados.

c) "H" , "I" e "J" são, também, pontos médios.

***ATIVIDADES***

2.

a) Faça uma lista dos conceitos de Geometria e das técnicas de desenho geométrico que podem ser explorados na construção do Tangram Quadrado.

b) Construa o Tangram quadrado, por dobraduras.

c) Faça, também, uma lista de atividades que podem ser realizadas utilizando as peças do Tangram quadrado.

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

***COMENTÁRIO***

*Você não deve ter dificuldade em compreender a construção!*

*Talvez a dobradura represente um desafio, pois depende de certa prática. Insista!*

*Na sua lista de conceitos e técnicas utilizadas na construção, não podem faltar: polígono, quadrado, diagonal, construção de perpendiculares, pontos médios. Entre as atividades que podem ser planejadas, destacamos as que foram recomendadas na aula passada, quando conversamos sobre seu laboratório de Geometria:*

- *formar figuras que lembrem animais, objetos quaisquer, figuras abstratas;*
- *construir e identificar figuras geométricas;*
- *compor e decompor figuras;*
- *trabalhar com ângulos: comparação e congruência;*
- *formar polígonos convexos e não-convexos;*
- *trabalhar com comparação, semelhança e congruência;*
- *trabalhar com perímetros e áreas de figuras.*

*Observe, ainda, que essas atividades podem ser exploradas em diversos momentos e níveis de dificuldade, ao longo do Ensino Fundamental.*

3. Utilize todas as peças do Tangram quadrado para montar três trapézios retângulos sobre os lados de um dos triângulos maiores.

a) Os trapézios construídos são semelhantes? Congruentes?

_____

_____

_____

_____

b) A área do trapézio maior é igual à soma das áreas dos outros dois?

_____

_____

_____

_____

***COMENTÁRIO***

*Você deve ter notado que essa atividade pode ser utilizada para mostrar a extensão do Teorema de Pitágoras, como fizemos na Aula 16.*

## Conversando sobre o seu laboratório de Geometria

No Ensino Fundamental, o professor pode apresentar, aos seus alunos por escrito, o procedimento de construção da dobradura do Tangram quadrado. A compreensão, através do texto, acrescenta desafios cognitivos e desenvolve a linguagem geométrica dos alunos. Verifique se, ao resolver o item b da Atividade 2, você o fez de acordo com a descrição a seguir:

Material: folha de papel A4.

1. Obtenha, da folha A4, um quadrado de tamanho máximo. Para isso, tome um dos vértices da folha (retangular, no caso) e faça com que ele toque no lado maior da folha, oposto a esse vértice, até que o lado menor, adjacente a esse vértice, se sobreponha totalmente ao lado oposto.

2. Mantendo esse alinhamento, vinque o papel, de modo que surja uma diagonal do quadrado que obteve ao cortar a sobra da folha que não foi utilizada.

3. Divida o quadrado em dois triângulos, fazendo um corte sobre a diagonal.

4. Tome um dos dois triângulos obtidos e, no intuito de dividi-lo em dois menores, junte os vértices dos dois ângulos agudos e vinque novamente, cortando em seguida.

5. Dos dois triângulos menores obtidos, tome novamente um deles; repita etapa anterior, dividindo-os em dois, ainda menores.

6. No outro, marque os dois pontos médios dos lados iguais e, unindo-os por um segmento, vinque sobre este segmento, de modo que o vértice do ângulo reto (oposto ao lado maior) toque no lado maior depois, corte.

7. Daí, surgirão um outro triângulo, menor, e um trapézio!

Está pronto o seu Tangram quadrado!

***COMENTÁRIO***

*Você deve ter observado que, ao desenvolver essa atividade com seus alunos, o professor pode aproveitar o momento para trabalhar vários conceitos geométricos como, por exemplo, quadrado, diagonal do quadrado, reta, triângulos retângulos, isósceles, ângulos agudos, obtusos e retos, perpendicularidade, paralelismo e pontos médios.*

## TANGRAM CORAÇÃO PARTIDO

Para construir o Tangram conhecido como "Coração Partido", siga os procedimentos seguintes:

1. construa um quadrado ABCD de lado 10cm;

2. marque os pontos médios de BC, CD e AD, chamando-os de E, F e G, respectivamente;

3. trace duas semicircunferências centradas em E (com raio EB) e F (com raio FC);

4. construa o quadrado ECFO (interno a ABCD);

5. prolongue OE e OF até tocar nas semicircunferências correspondentes;

6. crie os segmentos AO e FG;

7. trace por F uma perpendicular a FG até tocar o arco de circunferência (F, D).

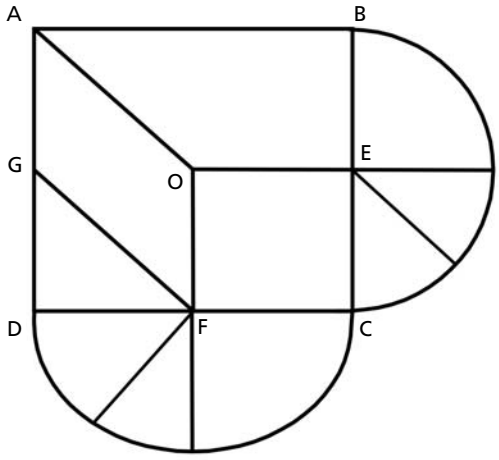



**Figura 20.2:** Tangram coração partido.

***ATIVIDADE***

4. Recorte o seu Tangram coração partido e realize as seguintes atividades exploratórias:

a) Que polígono(s) pode(m) ser formado(s) com duas peças? E com três peças? E com cinco peças?

_____

_____

_____

b) Utilizando todas as peças, monte a figura abaixo.

c) Crie outras figuras com o seu coração partido.

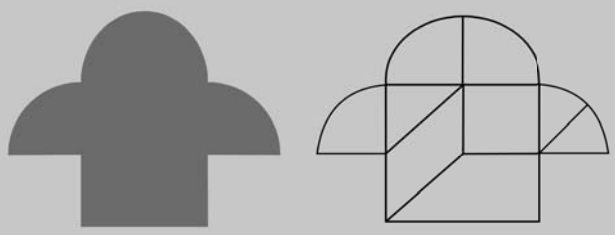


**Figura 20.3:** Construção com as peças do coração partido.

***COMENTÁRIO***

*Reflita sobre os conceitos geométricos e técnicas de desenho utilizadas na construção do Coração Partido. Pense também sobre as possibilidades de exploração desse Tangram em sala de aula. Você pode construir quadrados, retângulos, triângulos e trapézios, combinando as peças do coração partido.*

## TANGRAM OVAL

O Tangram oval é recortado a partir de uma oval irregular (óvulo) de quatro centros, conforme você estudou no seu curso de Desenho geométrico, Aula 19.

1. trace um segmento AB;

2. tomando AB como diâmetro, construa a circunferência de centro O e raio em B;

3. por O, trace uma reta perpendicular a AB. Chame as intersecções deste com a circunferência de I (ponto abaixo) e de H (ponto acima);

4. trace semi-retas AH e BH;

5. trace o arco centrado em A, com raio em B. A intersecção deste com AH chame D;

6. trace o arco centrado em B, com raio em A. A intersecção deste com BH chame C;

7. com centro em H, trace o arco de C a D.

A oval está pronta!

Para concluir o seu Tangram oval, basta:

8. encontrar sobre IH o ponto E, intersecção com o arco de centro H e raio em B;

9. trace a circunferência de centro E e raio em I. Os pontos de interseção desta com o segmento AB denomine F e G;

10. construir o triângulo FGE;

11. recortar seu Tangram nas direções: AD, BC, AB, FE, EG e IE.

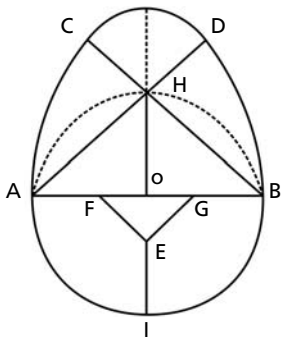



**Figura 20.4:** Tangram oval.

***ATIVIDADE***

5.

a) Quantos triângulos isósceles podemos formar com as peças do Tangram oval? E eqüiláteros?

_____

_____

_____

b) Utilizando todas as peças, monte a figura abaixo.

c) Crie outras figuras com o seu Tangram oval.

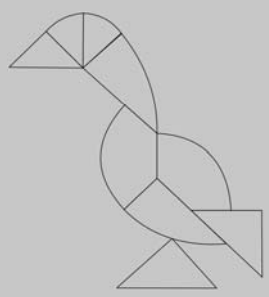


**Figura 20.5**

***COMENTÁRIO***

*Converse com seus colegas e com o tutor sobre as atividades que você criou com o seu Tangram oval.*

**!**

Nas referências ou na internet, você encontrará várias sugestões de atividades exploratórias dos seus diversos modelos de Tangram.

## TANGRAM TRIANGULAR

O Tangram também pode ser triangular. Confira:

1. trace um segmento AB;
2. a partir de AB, construa o triângulo eqüilátero ABE;
3. divida AB em três segmentos congruentes (AI, IJ e JB);
4. sobre o segmento AE, crie um ponto D, de medida AJ e trace o segmento DJ;
5. sobre o segmento BE, crie o ponto F, de medida BI e trace o segmento FI;
6. crie o ponto O, intersecção entre DJ e FI;
7. encontre o ponto médio de JB e de FO, unindo-os;
8. trace a semi-reta paralela a AB de origem em O. A intersecção dessa semi-reta com AE chame C;
9. marque os pontos médios de AC, CO, OI, AI e OJ. Denomine esses pontos P, Q, R, S e T, respectivamente;
10. trace OS, QR e RT;
11. apague OR;
12. recorte o seu Tangram triangular em todos os segmentos desenhados.

Seu Tangram triangular está pronto!

Veja o modelo no Módulo Prático.

***ATIVIDADES***

6. Realize as atividades:

a) Que polígono(s) pode(m) ser formado(s) com duas, três ou cinco peças?

_____

_____

_____

b) Construa um paralelogramo, utilizando cinco peças.

c) Crie outras atividades com o seu Tangram triangular.

***COMENTÁRIO***

*Esteja atento ao uso das técnicas de desenho que podem ser exploradas nessas atividades, tais como: construção de triângulo eqüilátero, ponto médio, divisão de segmento em parte iguais. Observe que a precisão do desenho é fundamental para que a justaposição do material fique perfeita, ao manipulá-lo.*

7. Podemos, também, construir o Tangram pentagonal e o Tangram retangular, recortando as linhas das figuras a seguir. Observe as figuras!

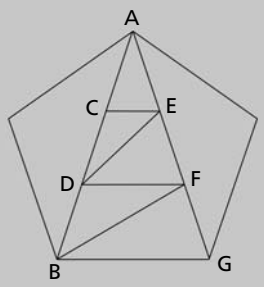



**Figura 20.6:** Tangram pentagonal.

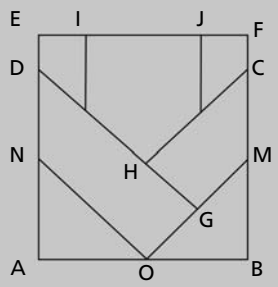



**Figura 20.7:** Tangram retangular.

7.1. Desenhe e descreva os detalhes das construções das figuras.

7.2. Utilizando seu Tangram pentagonal,

a) Construa triângulos com três peças, com quatro peças e com cinco peças;

b) Que polígono(s) pode(m) ser construído(s) com duas, três, cinco ou todas as peças?

7.3. Utilizando seu Tangram retangular:

a) construa um retângulo, utilizando três peças;

b) comprove o Teorema de Pitágoras.

7.4. Crie outras atividades exploratórias que possam ser usadas em sala de aula.

***COMENTÁRIO***

*Para construir o seu Tangram pentagonal, depois de construído o pentágono regular, basta observar que AC, CD e DB são congruentes, e que CE, DF e BG são paralelas. No caso do Tangram retangular, observe os seguintes detalhes: ABCD é um quadrado; M, N e O são pontos médios dos lados do quadrado; DG e CH estão contidos nas diagonais do quadrado; ED, EI, JF e FC são todos congruentes a DN/2. Observe que várias técnicas de construções geométricas podem ser exploradas nessas construções, inclusive a própria construção do pentágono regular. Não perca a oportunidade de relembrar o seu curso de Construções Geométricas. Discuta com seus colegas e com o tutor as possibilidades de exploração desses quebra-cabeças.*

## CONCLUSÃO

Os modelos de Tangram descritos nas atividades anteriores são, apenas, os mais comuns; nada nos impede de criarmos outros modelos com objetivos específicos, como fizemos nas Aulas 16 e 17, para explorar o Teorema de Pitágoras e suas possibilidades de uso em sala de aula. Para tanto, basta você observar as figuras daquelas aulas.

## RESUMO

Atividades que envolvem a utilização de quebra-cabeças contribuem para o desenvolvimento da autonomia dos alunos, pois, por meio delas, eles aprendem a trabalhar em equipe, respeitar e fazer-se respeitados; cooperar, tomar decisões, formular hipóteses, descobrir seus próprios erros e corrigi-los.

Em Geometria, os diversos modelos de Tangram (quadrado, oval, pentagonal, triangular, retangular) são especialmente utilizados quando se deseja explorar conceitos, como polígonos, área, perímetro, simetrias, translações, Teorema de Pitágoras etc. Muitos outros quebra-cabeças podem ser encontrados na literatura e na internet. O importante é que você esteja sempre atento à possibilidade de enriquecer suas aulas. Seus alunos merecem!

## AUTO-AVALIAÇÃO

Como auto-avaliação, você deve propor outras atividades com quebra-cabeças, como foi solicitado durante esta aula, além de conversar com seus colegas e com o tutor, sobre suas propostas. Por exemplo, voltar à Aula 18 e refazer a Atividade 8 (Tangram circular), utilizando dobraduras e construções, será um exercício auto-avaliativo imprescindível para sua aprendizagem. Para cada recurso utilizado, lembre-se de escrever os procedimentos que devem ser seguidos. Proponha, também, duas atividades com o Tangram circular. Apresente esta auto-avaliação ao seu tutor. Lembre-se, inclusive, de inserir, em sua reflexão, respostas ao quadro proposto na auto-avaliação da Aula 9.

## INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula estudaremos as relações métricas nos triângulos retângulos.

## SUGESTÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR PARA APROFUNDAMENTO SOBRE A UTILIZAÇÃO DOS DIFERENTES TIPOS DE TANGRAM EM SALA DE AULA

SOUZA, Eliane R. de *et al*. *A matemática das sete peças do Tangram*. São Paulo: CAEM/IME/USP, 1995.

## *SITES* RECOMENDADOS

Centro de recursos para os 1º ciclos. *Dominó 1*. Disponível em: <http://www.recursoseb1.com/jogos.htm>. Acesso em: 9 jul. 2004.

Centro de recursos para os 1º ciclos. *Dominó 2*. Disponível em: <http://www.recursoseb1.com/jogos.htm>. Acesso em: 9 jul. 2004.

Centro de recursos para os 1º ciclos. *Jogo 12*. Disponível em: <http://www.recursoseb1.com/jogos.htm>. Acesso em: 9 jul. 2004.

TEIXEIRA, Sérgio Cláudio Gaspar. *Alguns jogos matemáticos*. Disponível em: <http://www.terravista.pt/bilene/5169/pagina/jogosmatematicos/jogosmatematicos.html>. Acesso em: 9 jul. 2004.

LUDICUM.org: fotos poliédricas. Disponível em: <http://ludicum.org/games/geom/poliedricos/fotos/fotos_poli?b_start:int=10>. Acesso em: 9 jul. 2004.

CAMANHO, Alexandre. *O quebra-cabeça de Arquimedes*. Disponível em: <http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT669583-2680,00.html>. Acesso em: 9 jul. 2004.

Universidade Federal de Pernambuco. Laboratório de Matemática. *Matemática*: Pitágoras 1 e 2. Disponível em: <http://www.sectma.pe.gov.br/notitia/administracao/espacociencia/mat/conteudo/pitagoras.htm>. Acesso em: 9 jul. 2004.

Universidade Federal de Pernambuco. Laboratório de Matemática. *Cubo da soma*. Disponível em: <http://www.sectma.pe.gov.br/notitia/administracao/espacociencia/mat/conteudo/cubosoma.htm>. Acesso em: 9 jul. 2004.

LANIUS, Cynthia. A álgebra: divertimento com calendários. Disponível em: <http://planeta.terra.com.br/educacao/calculu/Diversao/calendario.htm>. Acesso em: 9 jul. 2004.

A 1ª Jornada v3.11. Disponível em: <http://www.pegar.com.br/pegar_arquivo.asp?link_id=10758>. Acesso em: 9 jul. 2004.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. *Descobrindo o teorema de Pitágoras*. Disponível em: <http://www.scipione.com.br/sceduca/assessoria/vivendo/pitagoras/pitagoras.htm#1>. Acesso em: 9 jul. 2004.

CAMBOIM, Cristiane Edna; QUADROS, Cristiano da Silva; RIBEIRO, Luciane Rittes. *Tangram e o cabri geometry*. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/atividades/ativ6/ativ6.htm>. Acesso em: 9 jul. 2004.

SANTOS, Fernando Luís. *Ateliê de construção e prática de jogos: situações e instrumentos de evolução cognitiva [S] II:* programa da disciplina. Disponível em: <http://ludomatematica.tripod.com/PCM.htm>. Acesso em: 9 jul. 2004.

AULA 21

# Triângulo retângulo: de Tales à Trigonometria

## Meta da aula

Instrumentalizar o ensino de relações no triângulo retângulo.

## objetivos

Esperamos que, após estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Realizar medições indiretas usando o triângulo retângulo.
- Enunciar e demonstrar as relações métricas no triângulo retângulo.
- Definir as relações trigonométricas no triângulo retângulo.
- Definir as relações trigonométricas no círculo trigonométrico.

## Pré-requisitos

Para um bom desempenho nesta aula, basta que você lembre definições e propriedades elementares do triângulo retângulo e de semelhança de triângulos. Acreditamos que não seja necessário, mas se você sentir alguma dificuldade durante a aula, recorra aos materiais de Geometria Básica ou de Construções Geométricas.

**!**

Lembre-se de acessar a página da disciplina e seu conjunto de aulas na Plataforma Cederj. Há interessantes animações que auxiliam o desenvolvimento da visualização e representação.

Você deve ter à mão papel A4, cartolina, papelão ou material emborrachado e transparência para construir mais alguns recursos didáticos visando a seu laboratório pessoal de Geometria. Você encontrará, no Módulo Prático, alguns modelos que o ajudarão. Se for possível, tenha à mão, também, uma calculadora científica ou um computador para calcular senos, cossenos e tangentes.

## INTRODUÇÃO

Tamanha é a importância do Teorema de Pitágoras, que corremos o risco de pensar que ele é a única propriedade importante do triângulo retângulo. Na verdade, a presença do ângulo reto no triângulo, combinada com outros resultados da Geometria, como semelhança, resulta em várias propriedades interessantes, como medições indiretas, média geométrica, secção áurea, razões trigonométricas, lei dos cossenos, lei dos senos etc.

Nesta aula, faremos um passeio por alguns desses resultados.

## UM POUCO DE HISTÓRIA

TALES DE MILETO

Como você sabe, **TALES DE MILETO** (aproximadamente 611-545 a.C.), um dos sábios da Grécia antiga, foi um próspero mercador e seus negócios o levaram a muitos lugares, mas, provavelmente, foi o contato com a Matemática e a Filosofia de outros povos que o fizeram, ainda jovem, abandonar o comércio e dedicar-se à Geometria, Filosofia e Astronomia. De suas descobertas, podemos destacar a resolução de dois problemas práticos: calculou a altura da pirâmide de Quéops, no Egito, e determinou a distância de uma embarcação até um ponto na costa.

Tales impressionou os egípcios ao calcular a altura da pirâmide sem escalá-la, utilizando apenas seus passos como unidade de medida. Veja a seguir como ele procedeu. Você pode usar o mesmo procedimento para que seus alunos calculem a altura de outros objetos, como árvores, postes e mastros.

Para calcular a altura da pirâmide, Tales usou a semelhança de triângulos retângulos imaginários, formados pela projeção das sombras da pirâmide e da sombra de uma estaca de altura conhecida, fincada na perpendicular, perto da base do monumento.

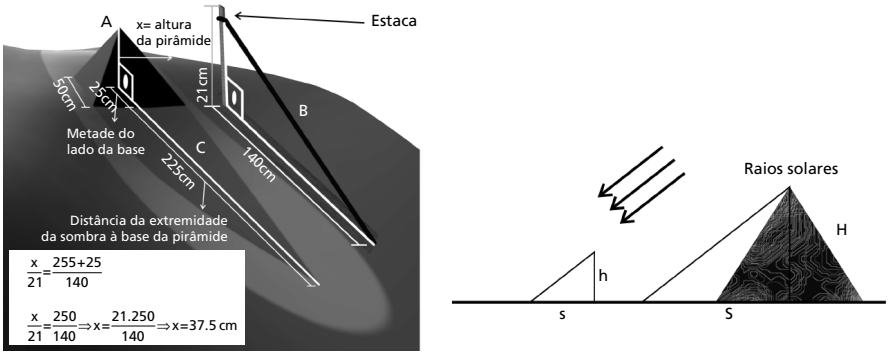



**Figura 21.1:** Cálculo da altura da pirâmide.

O primeiro triângulo é formado pelo topo da pirâmide, a extremidade da sombra e o centro da base (**A**). A altura da pirâmide (que se quer encontrar) é um dos catetos desse triângulo. O outro pode ser medido na superfície. Basta adicionar o comprimento da sombra com a metade do lado da base da pirâmide. O segundo triângulo é formado pelo topo da estaca, o ponto de contato dela com o solo e a extremidade da sombra (**B**). Os dois catetos podem ser facilmente medidos. Como os lados desses dois triângulos são proporcionais, é possível encontrar a medida procurada utilizando uma regra de três simples (**C**).

Para calcular a distância da embarcação, Tales criou o esquema da **Figura 21.2**. Veja:

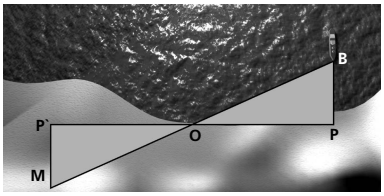



**Figura 21.2:** Medidas indiretas.

Colocando um observador em P, em frente à embarcação que está em B, e outro observador em M, avistando o ponto B, podemos determinar os triângulos retângulos OPB e MOP'. Como os ângulos MOP' e POB são opostos pelo vértice, os triângulos retângulos são semelhantes. Então, podemos estabelecer a seguinte proporção: $\frac{PB}{P'M} = \frac{OP}{OP'}$.

Podemos escrever também que $PB = distância = P'M\,\frac{OP}{OP'}$

**!**

Teorema de Tales
Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra (Geometria Básica, Aula 9).

Além do famoso Teorema de Tales, são também atribuídas a ele as primeiras demonstrações geométricas utilizando uma linguagem lógica. Por exemplo: "Todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto"; "Ângulos opostos pelo vértice são iguais".

***ATIVIDADES***

**1. Utilizando apenas a semelhança de triângulos, como você faria para calcular a largura de um rio sem atravessá-lo?**

***COMENTÁRIO***

*Em primeiro lugar, é preciso que você consiga avistar a outra margem do rio. A largura do rio Amazonas, por exemplo, chega a 80km em alguns trechos, e nós vemos a linha do horizonte somente até cerca de 5km.*

*Um esquema que resolveria o problema é o que foi usado por Tales, trocando a embarcação por algum ponto na outra margem do rio (uma árvore, por exemplo). Pense em outra solução!*

*Você deve estar supondo que teria dificuldade em medir os triângulos construídos por Tales, na areia da praia. Teríamos de mirar o ponto B, a partir de M, para localizar com precisão o ponto O. Embora não pareça, esta é uma tarefa bem simples de ser executada com auxílio de um canudo de mamão ou objeto semelhante. O resultado é de uma precisão impressionante. Experimente!*

**2. A técnica de Tales para calcular a altura da pirâmide poderia ser usada para calcular a altura de uma árvore? Proponha outra solução.**

**Figura 21.3:** Calculando a altura da árvore.

**COMENTÁRIO**

*Uma outra solução, também atribuída a Tales, é marcar o tamanho de uma vara no chão, fincá-la em uma das extremidades da marca e esperar que a sombra fique do mesmo tamanho da vara. Neste momento, é só medir o tamanho da sombra da árvore, pois a sombra terá seu tamanho.*

*No campo, quando as pessoas precisam derrubar uma árvore, costumam usar um recurso interessante. Para determinar a área onde a árvore vai cair, eles se afastam dela, dando-lhe as costas, e tentam avistar o seu topo por baixo das próprias pernas, ainda de costas para ela. Quando avistam o topo, estão a uma distância segura para derrubar a árvore e não serem atingidos por ela. O que eles talvez não saibam é que, da incômoda posição, avistam o topo da árvore sob um ângulo de aproximadamente 45°, isto é, a altura da árvore é igual à distância que estão dela.*

**3. Na prática, a solução de Tales para medir a altura da pirâmide não poderia ser usada para medir a altura de uma montanha. Por quê? Como você faria para medir a altura de uma montanha?**

_____

_____

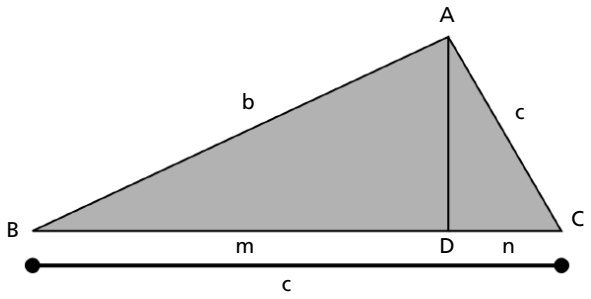
_____

**COMENTÁRIO**

*Agora complicou! Discuta com seus colegas e com o tutor sobre isso!*

## SEMELHANÇA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Sob o título de relações métricas no triângulo retângulo, os livros didáticos apresentam uma série de resultados que são conseqüências diretas da semelhança nos triângulos retângulos, inclusive o Teorema de Pitágoras. Vejamos!




1. $b^2=am$
2. $c^2=an$
3. $h^2=mn$
4. $a^2=b^2+c^2$

**Figura 21.4:** Relações métricas no triângulo retângulo.

***ATIVIDADES***

4. Resista à preguiça e enuncie, formalmente, cada uma das relações métricas num triângulo.

***COMENTÁRIO***

*Enunciar as definições e os resultados matemáticos com elegância e precisão é uma habilidade necessária ao professor de Matemática. Muitos estudantes resistem a desenvolver esta habilidade, alegando tratar-se de mera* decoreba*. Na verdade, trata-se de adquirir o vocabulário da área e desenvolver um alto grau de atenção a detalhes absolutamente relevantes para a Matemática. Por exemplo, para enunciar corretamente os resultados acima, você deve observar que eles são válidos apenas quando se trata de um triângulo retângulo e sua altura relativa à hipotenusa. Para dar elegância ao seu enunciado, você deve lembrar que m e n são as projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.*

*Não aconselhamos que você exija de seus alunos esse tratamento formal, mas a partir do momento em que eles constroem o conceito, você deve se referir a esse conceito com precisão e elegância, para que eles também desenvolvam o vocabulário adequado.*

5. Proponha uma atividade para que alunos de oitava série do Ensino Fundamental cheguem sozinhos às conclusões da **Figura 21.4**.

***COMENTÁRIO***

*Uma alternativa pode ser dividir a turma em pequenos grupos de três alunos e solicitar que cada grupo dobre e recorte dois triângulos congruentes, usando os cantos de uma folha de papel. Em seguida, identifique os lados dos triângulos com as mesmas letras da* **Figura 21.4**. *Também por dobradura, cada grupo deve determinar a altura relativa à hipotenusa de um desses triângulos. Oriente os alunos a dividir esse triângulo em dois, cortando a dobra da altura. Denomine "h", "m" e "n" os novos lados dos dois triângulos obtidos, conforme a* **Figura 21.4**. *A partir daí, o professor deve levar os alunos a observar que os três triângulos são semelhantes; chamar atenção para o fato de que a semelhança acontece apesar de os triângulos de cada grupo serem diferentes;*

*estabelecer as razões de semelhança entre essas figuras; destacar do elenco de relações aquelas relacionadas anteriormente; perguntar aos alunos por que, entre tantas relações, apenas aquelas são destacadas; chamar atenção dos alunos para o fato de que as igualdades que foram destacadas são suficientes para determinar qualquer elemento do triângulo, sendo conhecidos apenas outros dois elementos. Para finalizar, o professor pode solicitar que os alunos repitam todo o procedimento para triângulos não-retângulos e verificar o que acontece.*

*Note que a última relação é o Teorema de Pitágoras, já visto na Aula 18 e que agora pode ser demonstrado por semelhança de triângulos, a partir da soma das duas primeiras relações ($b^2 = am$; $c^2 = na$).*

**!**

As três primeiras relações se referem à chamada *média geométrica* ou *média proporcional*. De acordo com as duas primeiras, os catetos do triângulo retângulo são médias geométricas entre suas projeções ortogonais sobre a hipotenusa e a própria hipotenusa. A terceira diz que a altura do triângulo retângulo é a média geométrica entre as projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.

6. Dados dois segmentos, descreva uma possível solução para encontrar a média geométrica entre eles.

_____

_____

_____

***COMENTÁRIO***

*Esse problema é tratado na Aula 4 de Construções Geométricas. Lá você estudou dois métodos: o primeiro busca construir o cateto de triângulo retângulo, conhecendo-se a hipotenusa e a projeção do cateto sobre ela, isto é, utilizando as duas primeiras relações anteriores; o segundo busca construir a altura de um triângulo retângulo, conhecendo-se as projeções de seus catetos sobre a hipotenusa, isto é, utilizando a terceira relação. Neste segundo método, é importante lembrar que o triângulo inscrito num semicírculo é retângulo. Tente redescobrir os dois métodos sozinho! Se não der...*

**!**

O triângulo retângulo também é usado para dividir um segmento em média e extrema razão. Neste caso, dado um segmento de comprimento a, desejamos encontrar um segmento de comprimento x, tal que $\frac{a}{x} = \frac{a+x}{a}$.

Esta é a famosa divisão áurea; o segmento x é denominado áureo. Você já conhece essa divisão de nossas aulas e das aulas de Geometria Básica e de Construções Geométricas. Lembra?

7. Use o Teorema de Pitágoras para provar que a construção feita na **Figura 21.5** determina o segmento "x" que divide o segmento "a" na razão áurea.

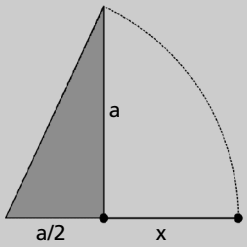



**Figura 21.5:** Segmento áureo.

***COMENTÁRIO***

*Basta, simplesmente, usar o Teorema de Pitágoras e escrever a igualdade como a razão áurea.*

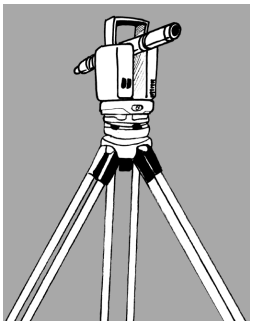


**Figura 21.6:** Teodolito.

**TEODOLITO**
É um equipamento óptico muito utilizado na agrimensura e na construção civil para trabalhar com medidas indiretas. Sua utilização permite:
- Medir ângulos verticais e horizontais.
- Medir a altura de objetos perpendiculares ao chão.
- Verificar congruência e semelhança de triângulos.

## MEDINDO ÂNGULOS

Como sabemos, o Teorema de Pitágoras, apesar das suas diversas aplicações, resolve apenas um problema: determinar um dos lados de um triângulo retângulo, sendo os outros dois conhecidos.

Em muitas situações práticas, as condições impostas permitem conhecer apenas um dos lados do triângulo e um de seus ângulos. Por exemplo, se você precisa calcular a área de um terreno triangular, normalmente os lados do triângulo serão conhecidos. Você precisaria determinar sua altura; como fazê-lo?

Outro problema simples seria determinar a altura de um poste. Nesse caso, você pode medir facilmente a sua distância em relação ao poste, mas não teria como determinar os demais lados do triângulo formado por seu pé, o pé e o topo do poste. Se pudesse determinar o ângulo sob o qual vê o topo do poste, você teria um lado e um ângulo do triângulo retângulo.

Mas, como medir ângulos?

Os agrimensores utilizam um instrumento chamado **TEODOLITO**.

## CONVERSANDO SOBRE O SEU LABORATÓRIO PESSOAL DE GEOMETRIA

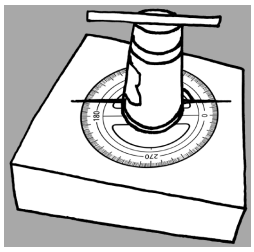


**Figura 21.7:** Teodolito de baixo custo.

Você pode equipar o seu laboratório pessoal com um teodolito construído com material de baixo custo. O mais interessante é que o seu teodolito terá uma precisão surpreendente. Veja como é fácil!

Materiais necessários:

• Copo plástico com tampa de encaixe.

• Cópia de um transferidor circular (pode fazer uma montagem com dois semicirculares).

• Quadrado de papelão, ligeiramente maior que o transferidor.

• Pedaço de arame fino de aproximadamente 15cm de comprimento.

• Pedaço de tubo de antena de TV ou assemelhado, com cerca de 30cm.

Como construir:

• Cubra o quadrado de papelão, colando a cópia do transferidor, no centro do quadrado; posicione o ângulo zero na direção do ponto médio de um lado.

• Cole a tampa do copo no interior da figura do transferidor, centralizada.

• Perpasse o arame pela boca do copo numa posição diametral, deixando que suas pontas atinjam as extremidades do transferidor.

• Cole o pedaço do tubo de antena no fundo do copo, também em posição diametral, na mesma direção do arame.

• Encaixe o copo na tampa.

Está pronto o seu teodolito! Para utilizá-lo, basta apoiar o quadrado numa posição em que o ângulo zero aponte na direção horizontal; girando o copo na tampa, localize, através do canudo, o ponto desejado: o ângulo será marcado pelo arame sobre o transferidor.

Saiba mais sobre o teodolito, consultando a revista *Nova Escola* 127, novembro de 1999, p. 54-55, ou no *site* http://www.novaescola.com.br/

## RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Na Aula 17 de Geometria Básica, você estudou as principais relações trigonométricas: **SENO, COSSENO E TANGENTE.**

A origem da palavra **SENO** é curiosa. Os indianos, no século V, usavam as palavras *ardhã-jyã* (semi-corda) e *jyã-ardhã* (corda metade). Para simplificar, escreviam e falavam apenas *jyã* (corda). Os árabes, por sua vez, entenderam *jîba* e abreviavam *jb*. Porém, *jîba*, não tem significado na língua árabe. Outros escritores associaram a abreviatura *jb* à palavra *jaib*, que existe na língua árabe e significa enseada ou baía. Mais tarde, no século XII, *jaib* foi traduzida para o latim como *sinus*, de mesmo significado. As palavras **TANGENTE** e secante têm origem na própria Geometria, por serem segmentos das retas tangente e secante ao círculo. **COSSENO**, cotangente e cossecante se referem ao seno, tangente e secante dos arcos complementares.

O Teorema de Tales está na origem da visão moderna das linhas trigonométricas.

Observando a **Figura 21.8**, você nota que, dado um ângulo $\alpha$, podemos construir uma família de triângulos retângulos.

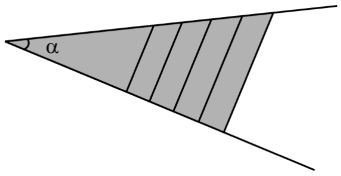



**Figura 21.8:** Família de triângulos retângulos com ângulo $\alpha$.

Pelo Teorema de Tales, todos os triângulos são semelhantes, o que significa dizer, por exemplo, que a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa de qualquer um desses triângulos é sempre a mesma, isto é, essa razão que chamamos seno do ângulo $\alpha$ é um número que está associado a esse ângulo. Se, na **Figura 21.8** , mudarmos o ângulo $\alpha$, a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa mudará, atribuindo outro valor para o seno de $\alpha$.

***ATIVIDADE***

8. Determine o seno do ângulo de 23°.

***COMENTÁRIO***

*Talvez você nunca tenha calculado diretamente o seno de um ângulo. Experimente! Você verá que o resultado é muito parecido com os fornecidos por máquinas ou tabelas. Com o auxílio de um transferidor, desenhe o ângulo de 23°; escolha um valor inteiro para a hipotenusa (para facilitar, 10cm); desenhe o triângulo retângulo com bastante capricho; meça com uma boa régua (ou escalímetro) o cateto oposto; agora divida.*

*Compare o seu resultado com o valor dado por uma calculadora ou por uma tabela. Verifique com seus colegas os valores que eles encontraram.*

*Esta atividade faz com que alunos do Ensino Fundamental e Médio acreditem que, apesar de dar algum trabalho, é perfeitamente possível calcular senos, cossenos e tangentes. Divida a turma em pequenos grupos e depois compare os resultados de cada grupo para vários ângulos; isso lhes ajudará a desmistificar a Trigonometria.*

!

Considerando que os valores de seno, cosseno e tangente estão disponíveis em tabelas ou calculadoras, basta conhecermos um dos lados do triângulo e um de seus ângulos agudos para determinarmos os outros lados.

## UM POUCO DE HISTÓRIA...

Babilônios e egípcios introduziram os rudimentos da Trigonometria, como revelam os problemas envolvendo cotangente que aparecem no Papiro de Rhind (1650 a.C.) e a tabela de secantes da tábula cuneiforme babilônica Plimpton 322 (entre 1900 e 1600 a.C.).

A Trigonometria Esférica teve suas origens já nos séculos IV e V a.C., época de grande desenvolvimento da Astronomia babilônica. Os gregos estudaram intensamente as razões entre arcos e cordas quando surgiram as primeiras tabelas utilizadas nos estudos de Astronomia. Atribui-se a Arquimedes (287 a.C.) *o teorema da corda quebrada* que, adaptado para a linguagem de hoje, resulta nas fórmulas do seno da soma e da diferença de dois ângulos.

O primeiro matemático a definir as funções trigonométricas como razões entre os lados de um triângulo retângulo foi Georg Joachi Rhaeticus (1514-1576), discípulo de Copérnico; o primeiro a utilizar o nome trigonometria foi o clérigo alemão Bartholomaus Pitiscus (1561-1613), quando publicou uma versão aperfeiçoada da tábua de senos de Rhaeticus; em 1626, o holandês Albert Girard (1595-1632) usou pela primeira vez as abreviações *sin*, *tan* e *sec* para seno, tangente e secante.

Podemos dizer que a consolidação da Trigonometria, como subárea de conhecimento da Matemática, se deu no século XVI d.C. Considerando que Tales viveu no século V a.C., verificamos que, nesta aula, estamos fazendo uma viagem por nada menos que 21 séculos, ou 2100 anos, de história da construção do conhecimento matemático. Se tomarmos como referência o Papiro de Rhind, serão 33 séculos. Não podemos permitir que nossos alunos achem que tudo isso aconteceu num passe de mágica, na sua forma pronta e acabada. Na melhor das hipóteses, eles se sentirão incapazes de aprendê-la.

***ATIVIDADES***

9. Utilizando o seu teodolito, calcule a altura de um poste.

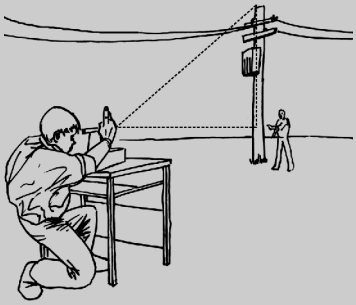


**Figura 21.9:** Medindo a altura do poste.

***COMENTÁRIO***

*Essa é uma atividade que pode ser desenvolvida com alunos do Ensino Fundamental. Eles adoram!*

*Imagine um triângulo formado entre o poste e o teodolito (**Figura 21.9**).Posicione o aparelho numa mesa plana e aponte o 0° do transferidor para o poste. Em seguida, coloque o ponteiro do teodolito em 0° e, olhando na mira, peça para alguém marcar um ponto no poste. Essa linha de mira forma 90° com o poste. Levante a mira até avistar a ponta do poste e anote o ângulo indicado no transferidor. Depois, meça o cateto que representa a sua distância até o poste. Para maior precisão, peça aos alunos que façam de três a cinco medições e tirem a média. Agora basta multiplicar esse valor pela tangente do ângulo determinado pelo teodolito. Observe que, na prática, você pode se afastar ou aproximar do poste para ver o seu topo sob um ângulo notável, como 30°, 45° ou 60°. Para mais detalhes, veja* Nova Escola*, novembro de 1999, p. 54-55.*

10. Usando o seu teodolito, calcule a altura de uma montanha.

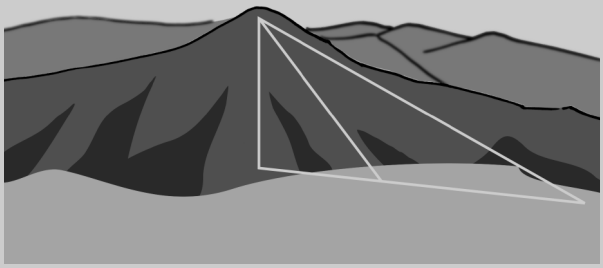


**Figura 21.10:** Calculando a altura da montanha.

**COMENTÁRIO**

*Mesmo com o teodolito, não é fácil calcular a altura de uma montanha, dadas as dificuldades de medir os catetos. Uma solução pode ser a seguinte:*

*a) Com o seu teodolito, encontre uma posição em que o cume da montanha seja visto sob um ângulo de 45°. Observe que, nesse ponto, a altura "h" da montanha é igual à distância entre ela e o ponto de projeção do seu cume, dentro da montanha.*

*b) A partir desse ponto, afaste-se a uma distância "x", conhecida, por exemplo, 10m.*

*c) Verifique, com seu teodolito, o ângulo "α" de visão do cume.*

*d) Teremos:* $tg\alpha = \dfrac{h}{h+x}$.

*Como você conhece tgα e x, pode determinar h, que é a altura da montanha.*

## A EXTENSÃO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Grande parte do desenvolvimento da Matemática se deve a soluções encontradas em outras áreas de conhecimento. Especialmente a Física e a Astronomia deram grandes contribuições ao progresso da Matemática. Um fato relativamente simples justifica a extensão da trigonometria do triângulo retângulo para ângulos quaisquer.

Os físicos conseguem provar em laboratório que se duas crianças puxarem um mesmo carrinho em direções diferentes, o carrinho se desloca segundo uma terceira direção que seria determinada pela resultante das forças aplicadas ao carrinho. Para simplificar: se duas crianças puxarem um carrinho com a mesma força, mas em direções que formam um ângulo de 60°, o carrinho percorrerá a direção da bissetriz. Veja a **Figura 21.11**.

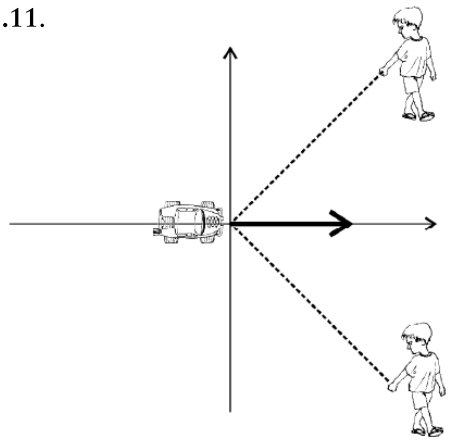


**Figura 21.11:** Crianças puxando um carrinho.

Esse experimento precisa ser interpretado matematicamente em uma solução numérica encontrada que corresponda aos resultados experimentais. O que os físicos nos fizeram saber é que, interpretando as forças como vetores, encontraremos a resultante geometricamente. Veja a **Figura 21.11**.

Para facilitar, os físicos introduziram um sistema ortogonal no ponto onde estão aplicadas as forças; projetaram essas forças (decomposição de forças) nos eixos coordenados; calcularam a resultante em cada eixo.

Observe (**Figura 21.12**) que no nosso caso, bastante simples, as forças $F_{1y}$ e $F_{2y}$ se anulam, ficando $R = F_{1x} + F_{2x}$, como resultante. Como este resultado confirma o experimento, fica caracterizado que o modelo matemático é adequado ao problema.

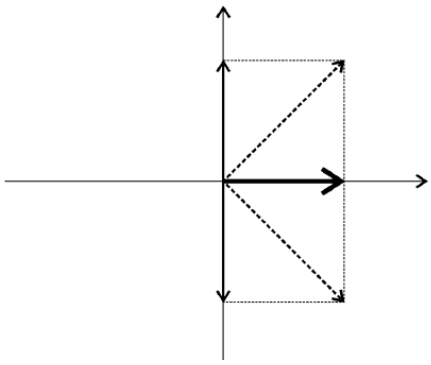


**Figura 21.12:** Interpretação geométrica das crianças puxando o carrinho.

Quantitativamente, é fácil calcular o módulo das forças: $F_{1x} = F_1 . \cos 30°$, $F_{1y} = F_1 . \text{sen } 30°$, $F_{2x} = F_2 . \cos 30°$ e $F_{2y} = F . \text{sen } 30°$, como você estudou na Física.

Imaginemos, agora, uma situação mais complexa. Vamos supor que cinco crianças estejam disputando o mesmo carrinho, puxando-o em diversas direções. Poderíamos ter uma situação bem mais complicada. Veja a **Figura 21.13**.

Para onde vai o carrinho?

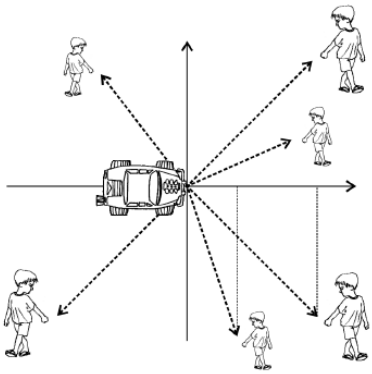


**Figura 21.13:** Interpretação geométrica de várias crianças puxando um carrinho.

Geometricamente, não seria tão complicado assim: bastaria fazer as projeções nos eixos; obter a resultante em cada eixo; encontrar a resultante dos dois eixos, que será a diagonal de um retângulo. Lembra?

Numericamente, teríamos que calcular cada uma das projeções; encontrar a resultante em cada eixo e depois a resultante entre os eixos: $R = \sqrt{R_x + R_y}$.

Aqui começou a dificuldade prática. Para calcular as projeções, você precisa escolher um dos ângulos formados entre a força e um semi-eixo, e multiplicar, convenientemente, a força pelo seno ou cosseno desse ângulo.

Porém, normalmente são conhecidos os ângulos que as forças fazem entre si. Seria interessante usar esse dado, mas teríamos, eventualmente, ângulos maiores que 90°, que não tinham seno nem cosseno. A solução para isso foi atribuir a esses ângulos os mesmos valores de seno e cosseno dos ângulos agudos que determinam as projeções corretamente. Nesse sentido, seria interessante que o ângulo de 120° tivesse o mesmo seno e o mesmo cosseno que 60°, por exemplo. Além disso, seria muito interessante que o cosseno de 120° fosse negativo, para que a projeção $F_x = F.\cos 120°$ já ficasse com sinal negativo, como convém pelo desenho. Assim, os físicos passaram a usar tabelas em que, para cada ângulo, de 0° a 360°, é atribuído um valor de seno e cosseno correspondente a um ângulo agudo, com um sinal conveniente para que tudo desse certo. Aí tudo ficou mais fácil: bastava dizer que as projeções são $F_x = F.\cos\alpha$ e $F_y = F.\ \text{sen}\alpha$, qualquer que seja o ângulo $\alpha$ que a força F faça com o semi-eixo positivo x.

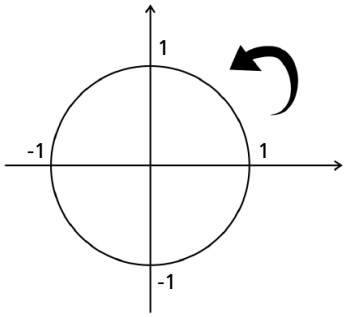
A Matemática incorporou essa extensão dos conceitos de seno e cosseno e a organizou de maneira conveniente no que chamamos "círculo" ou "ciclo" trigonométrico. Evidentemente, hoje existem muitas outras aplicações desse recurso.

Outra expansão desses conceitos veio com a utilização das funções trigonométricas que, por motivos óbvios, interessam que sejam definidas para todos os números reais. Para isso, torna-se importante considerar ângulos maiores que 360°, além de ângulos negativos. Também foi necessário introduzir uma unidade de medida de arco que seja representada por um número real, o que não acontece com o grau, que é representado no sistema sexagesimal. Para facilitar, em inúmeras aplicações a unidade escolhida foi o próprio raio do círculo que contém o arco. Essa unidade é denominada radiano (rd).

## O CICLO TRIGONOMÉTRICO

O ciclo trigonométrico é, na verdade, um recurso didático. Como você verá, ele foi construído cuidadosamente para que você possa visualizar todos os resultados importantes da Trigonometria.

Para começar, escolhemos um círculo de raio unitário e traçamos eixos cartesianos com origem no centro do círculo. Os ângulos positivos são medidos, a partir do eixo x, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio (sentido trigonométrico). Se tomarmos o outro sentido, o ângulo será dito negativo.




**!**

Os ângulos podem ser medidos em qualquer unidade, mas daremos preferência ao radiano, conforme você estudou na Aula 18 de Geometria Básica. Repare que o ciclo permite marcar ângulos positivos e negativos, com valores de $-\infty$ a $+\infty$. Como comentamos antes, essas possibilidades existem para que as funções trigonométricas tenham domínio em IR, como, em geral, acontece com qualquer função. O ciclo fica dividido em quatro partes, que chamamos quadrantes. Estes são numerados no sentido trigonométrico.

***ATIVIDADES***

11. Marque no ciclo trigonométrico os seguintes ângulos: $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, 3\pi, \frac{7\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{-\pi}{5}, \frac{-\pi}{2}, \frac{-4\pi}{3}$ e $\frac{7\pi}{8}$, todos em radianos.

Marque também os ângulos: 1rd, 2,35 rd, 1,57 rd, 23°, $\pi$°, 0rd, 0° e $\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{o}$.

Para facilitar, use o ciclo trigonométrico desenhado no Módulo Prático.

***COMENTÁRIO***

*Muitos desses ângulos serão marcados de forma aproximada. A segunda lista é especialmente importante de ser trabalhada com alunos do Ensino Médio. Eles acham que todo ângulo em radianos tem de ser uma fração de $\pi$ – o que não é verdade. Os alunos também ficam em dúvida sobre o valor de $\pi$: ele vale 180 ou 3,14? Na verdade, $\pi$ só tem um valor: 3,14, isto é, 3,14rd equivale a um ângulo de 180°. É também importante desenvolver a habilidade de localizar ângulos em radianos, sem transformá-los, mentalmente, em graus.*

12. Calcule, no ciclo trigonométrico, o seno e o cosseno de $\frac{\pi}{3}$.

Qual a conveniência de o raio do ciclo trigonométrico ser igual a um?

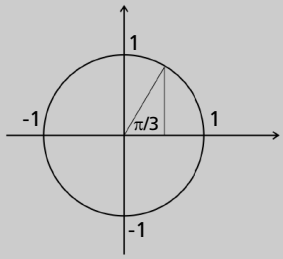



**Figura 21.14:** Ângulo de $\frac{\pi}{3}$ rd.

***COMENTÁRIO***

*Observe que até este momento só temos uma forma de calcular senos e cossenos: dividindo os catetos pela hipotenusa.*

*Como estamos no ciclo trigonométrico, construído o triângulo retângulo, a hipotenusa será o raio do círculo, que vale 1. Portanto, o seno será o próprio cateto oposto, e o cosseno, o adjacente. Na verdade, o raio do círculo trigonométrico poderia ter qualquer valor, mas o fato de ser igual a 1 facilitou bastante nossas contas. Como o raio é 1, você deve ter concluído que $\cos\frac{\pi}{3} = 0,5$ e $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 0,8$ (divida o raio em 10 partes para facilitar). Comemore: o cosseno é, de fato, 0,5 e o seno é o número irracional $\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,8660254$. Como você pode ver, mesmo "no olho", o ciclo trigonométrico fornece resultados bem próximos da verdade.*

**!**

A essa altura, o ciclo trigonométrico proporciona uma oportunidade de mudança nos conceitos de seno e cosseno de um ângulo $\alpha$. Podemos definir: No ciclo trigonométrico, o seno de um ângulo $\alpha$ é a projeção ortogonal de sua extremidade no eixo y; além disso, o cosseno de um ângulo $\alpha$ é a projeção ortogonal de sua extremidade no eixo x.

13. Utilize suas novas definições de seno e cosseno para determinar, aproximadamente, todos os senos e cossenos dos ângulos da Atividade 11. Confira seus resultados com uma calculadora.

***COMENTÁRIO***

*Apesar de cansativa, essa atividade serve para nos convencer da eficiência do ciclo trigonométrico. Não deixe de confirmar seus resultados.*

14. Observando a **Figura 21.15**, prove que o segmento AT representa a tangente do ângulo $\alpha$. Redefina tangente de um ângulo $\alpha$, no ciclo trigonométrico.

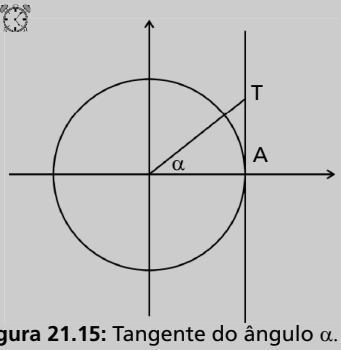



**Figura 21.15:** Tangente do ângulo $\alpha$.

***COMENTÁRIO***

*Basta lembrar que tangente, no triângulo retângulo, é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente que, neste caso, é igual a 1. A reta auxiliar que contém o segmento AT é chamada de reta das tangentes; ela é numerada com a mesma unidade dos eixos, sendo positiva acima do eixo x e negativa abaixo. Você pode determinar a tangente de qualquer ângulo: basta prolongar o seu lado até atingir a reta das tangentes, mesmo quando a tangente for negativa, como no 2° quadrante.*

15. Observando a **Figura 21.16**, prove que BT' é a cotangente de $\alpha$ ; OT é a secante de $\alpha$; OT' é a cossecante de $\alpha$. Redefina essas razões trigonométricas em relação ao ciclo trigonométrico.

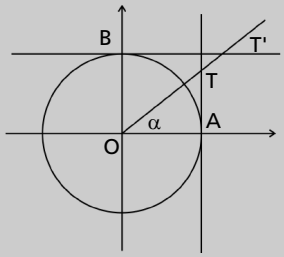



**Figura 21.16:** Cotangente, secante e cossecante do ângulo $\alpha$.

**COMENTÁRIO**

*Basta lembrar as definições:* $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$; $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$; $\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}$

*No caso da cossecante, é importante que você observe que o ângulo BT'O é igual a α.*

*A reta auxiliar que contém BT' é denominada eixo das cotangentes; é numerada com a mesma unidade dos eixos, sendo positiva à direita do eixo y e negativa à sua esquerda.*

*Como você deve ter percebido, podemos visualizar e calcular, aproximadamente, todas as linhas trigonométricas, inclusive com seus sinais. Por falar nisso, invente você mesmo uma maneira prática de determinar os sinais da secante e cossecante.*

## CONVERSANDO SOBRE O SEU LABORATÓRIO PESSOAL DE GEOMETRIA

O professor J. B. Leite da Unesp de Rio Claro –(SP) (Revista do Professor de Matemática – RPM, N° 9, p. 45-46), apresenta um interessante recurso para visualizar o seno, o cosseno e a tangente no ciclo trigonométrico. Você encontrará os desenhos em tamanho ideal no Módulo Prático. Veja como é simples!

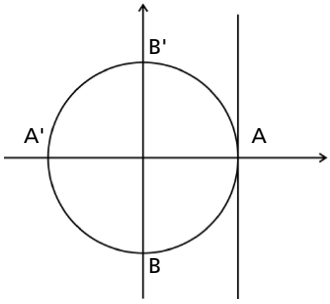



**Figura 21.17:** Círculo trigonométrico.

1. Desenhe numa folha de papel tamanho ofício uma cicunferência de centro O e raio R (digamos R=20cm). Gradue esta circunferência em graus e os diâmetros perpendiculares A'A (eixo dos cossenos) e B'B (eixo dos senos) em milímetros (**Figura 21.17**).

2. Sobre uma transparência, desenhe uma circunferência de raio r=R/2 e uma reta que contenha um diâmetro PQ desta circunferência (**Figura 21.18**).

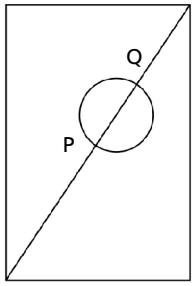



**Figura 21.18:** Transparência.

3. A seguir, coloque um alfinete em O, juntando-o ao ponto P da transparência, de modo que esta se assente inteiramente sobre a **Figura 21.17**.

4. Deslizando a transparência da **Figura 21.18** sobre a **Figura 21.17**, vemos que o ponto Q descreve a circunferência maior enquanto a circunferência menor intercepta A'A (eixo dos cossenos) e Q' intercepta B'B (eixo dos senos) em Q".

Considerando OQ de medida 1, temos que OQ' é o cosseno do ângulo AOQ, OQ" é o seno e AT é a tangente. Na **Figura 21.19** apresentamos duas posições diferentes da transparência da **Figura 21.18**.

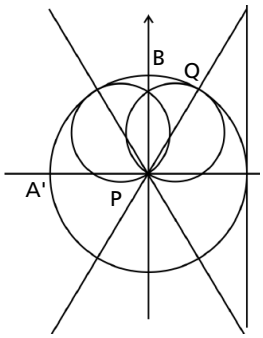



**Figura 21.19:** Seno, cosseno e tangente.

Se no lugar do papel ofício (**Figura 21.17**) usarmos algo transparente, então o conjunto pode ser posto num retroprojetor, resultando num agente altamente motivador da sua aula.

***ATIVIDADE***

16. Construa o seu material e confirme os senos, cossenos e tangentes calculados nesta aula; justifique por que o instrumento determina, de fato, o seno e o cosseno.

_____

_____

_____

***COMENTÁRIO***

*Você pode usar um papel mais resistente para desenhar o círculo maior e unir os dois desenhos com um pequeno ilhós. Isso dará maior durabilidade ao seu material, e para justificar a eficiência dele, basta lembrar que o triângulo OQ'Q está inscrito num semicírculo, portanto, é retângulo.*

## CONCLUSÃO

Além do famoso Teorema de Pitágoras, o triângulo retângulo é responsável por várias e importantes aplicações da Matemática, inclusive pelo desenvolvimento de uma subárea de conhecimento matemático: a Trigonometria.

## RESUMO

O estudo do triângulo retângulo vai além da determinação de seus lados, a partir do Teorema de Pitágoras. Várias relações métricas podem ser deduzidas em função da presença do ângulo reto, a saber: cada cateto é a média geométrica entre a sua projeção sobre a hipotenusa e a própria hipotenusa; a altura do triângulo retângulo é a média geométrica das projeções dos catetos sobre a hipotenusa e outras – que não estudamos nesta aula –, como a lei dos cossenos e a lei dos senos. Outras implicações do triângulo retângulo são as medições indiretas, a divisão áurea e o desenvolvimento da Trigonometria.

## AUTO-AVALIAÇÃO

O ponto alto desta aula é compreender que só pelo fato de um triângulo ser retângulo, podemos deduzir várias conseqüências. É também importante compreender o processo de extensão das razões trigonométricas. Você deve ter percebido que, do ponto de vista geométrico, bastam os ângulos entre 0° e 180°. A extensão a outros ângulos, inclusive negativos ou maiores que 360°, é uma artificialidade que interessa à Física e a outros campos da própria Matemática. O professor deve ter todo o cuidado de explorar materiais e situações concretas para que seus alunos não considerem a Trigonometria uma arbitrariedade sem sentido.

## SUGESTÃO DE ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Como atividade complementar, você pode fazer um cartaz com todas as linhas trigonométricas num mesmo círculo trigonométrico e incorporar ao seu laboratório pessoal de Geometria.

Se você tiver acesso à internet, pode fazer uma pesquisa sobre recursos de Geometria Dinâmica utilizados em Trigonometria.

## INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você estudará as unidades de medida, em especial as de comprimento e área. Conhecerá vários recursos de ensino e utilizará: papel quadriculado, seu material de desenho e o escalímetro, uma espécie de régua que você pode comprar em papelarias. Até lá!

AULA 22

# Unidades de medida

## Meta da aula

Instrumentalizar o ensino de unidades de medida.

## objetivos

Esperamos que, após o estudo desta aula, você seja capaz de:

- Entender medida como um processo de comparar.
- Identificar ações (compor, decompor, comparar, estimar, verificar equivalências e diversificar unidades) no trabalho com as unidades de medida.
- Entender a diferença entre unidade de medida padrão e não-padrão.
- Perceber que entre a unidade de medida e o número que a expressa há uma relação proporcional.
- Compreender o potencial de cada atividade no desenvolvimento do conceito de medida.
- Manusear instrumentos de medida, em especial, o escalímetro.

## Pré-requisitos

Para que você acompanhe esta aula, é preciso que revise os conceitos de medida, área, perímetro e volume estudados em Geometria Básica. Além disso, para realizar as atividades propostas, você deverá ter à mão instrumentos de medida variados, tais como escalímetro, papel quadriculado, papel milimetrado.

## INTRODUÇÃO

Se há uma coisa que você faz cotidianamente é medir. Medir é comparar. Para tal, você pode utilizar unidades de medida variadas, por exemplo, pé ou palmo, passo, lápis, jarda etc.

**!**

Não se esqueça de que administrar diariamente o seu dinheiro ou o seu tempo também envolve a noção de medida.

São consideradas unidades de medida padrão (ou convencional): o metro (seus múltiplos e submúltiplos), a hora, o grau (medida de ângulo), a polegada, os *bites* etc. Quando utilizamos palmo, lápis, passo etc., dizemos estar utilizando unidade de medida não-padronizada.

Você deve saber que a necessidade de comunicação fez com que se convencionasse o uso de unidades de medida. Daí o surgimento do **metro (m)** como unidade de medida de comprimento; o **metro quadrado ($m^2$)** como unidade de medida de área; o **metro cúbico ($m^3$)** como unidade de medida de volume; o **litro (l)** como unidade de capacidade; o **quilograma (kg)** como unidade de massa; **graus (°), grados (gr) e radianos (rd)** como unidades de medida de ângulos. Existem outras medidas, como por exemplo as usadas na computação (o ***bit***), na construção civil e mecânica (a **polegada**), na arte digital (o **mega-pixel**). Podemos citar ainda as **milhas** marítimas e aéreas, os **alqueires** usados para medir grandes áreas de terra etc.

A exploração dessas medidas em diferentes atividades permite relacionar as unidades com as quantidades numéricas expressas e vice-versa.

Se uma criança brinca de bola de gude, como medir a distância entre o triângulo traçado no chão e a linha de onde se inicia o jogo? Essa distância pode ser medida com **passos.** Uma costureira, ao medir o tamanho que vai ser necessário para aumentar ou diminuir uma saia, usa seu **palmo**. É comum as pessoas dizerem que a *distância* entre duas cidades é, por exemplo, de duas *horas*. Neste caso, mesmo usando unidade de tempo para medir distância, todo mundo entende.

Na Antigüidade, o homem usava **partes do corpo** como referenciais de medida. Em muitas situações são realizadas medidas nas quais não é utilizada uma unidade de medida padrão. O que as pessoas fazem é comparar o passo, ou o palmo, ao objeto ou distância que desejam medir.

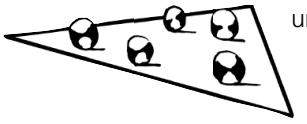


**Figura 22.1:** Crianças jogando bolas de gude.

## CONVERSANDO SOBRE O LABORATÓRIO DE GEOMETRIA

Como o geoplano e os vários tipos de *tangram* existentes, outros recursos que podem ser utilizados no trabalho com unidades de medida são os diferentes tipos de malhas: quadriculadas, triangulares, hexagonais.

**!**

Uma folha de jornal aberta possui um metro quadrado? Você sabe a relação entre um azulejo e um metro quadrado? O que significa 0,33cl? Como entender que 1l é igual a $1dm^3$?

Esperamos que, através do passeio pelas diferentes atividades desta aula, você possa responder a perguntas como as anteriores.

## CONVERSANDO SOBRE EPISÓDIOS DA HISTÓRIA DAS ÁREAS

Há milênios, no Egito, existia um faraó chamado Sesóstris, que repartiu o Egito entre sua população em pedaços retangulares de terra. Cada habitante que recebia sua parte pagava-lhe um imposto anual. Com as cheias constantes do rio Nilo, as demarcações de terra desapareciam. O dono do terreno então reclamava com o faraó e este mandava efetuar nova demarcação. Como isso era freqüente, surgiu a necessidade de calcular o quanto mediam aqueles terrenos.

Mas como os egípcios fariam isso? Diante da situação, eles inventaram sua própria medida! Os agricultores foram os primeiros a utilizá-la: eles mediam o tamanho do terreno pela quantidade de arroz ou cevada semeada. Quem plantava mais tinha o terreno maior e quem plantava menos possuía o menor. Até que apareceram os chamados "esticadores de cordas". Eles mediam toda a volta do terreno com uma corda que era dividida por nós; assim, sabiam a medida do terreno.

Com o passar do tempo, os egípcios, que já construíam os seus templos, pirâmides e casas, perceberam que o ladrilho poderia substituir os grãos na hora de medir o tamanho do terreno, o que facilitaria muitíssimo a contagem; então, eles passaram a medi-lo, repartindo-o em quadradinhos do mesmo tamanho e contando-os. Por exemplo, observe o quadro a seguir:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

Terreno com 18 quadradinhos de área

É importante que você conte esse episódio de forma descontraída e que envolva os alunos. Uma sugestão seria fazer uma encenação com os próprios estudantes. Também pode usar ilustrações, ou até mesmo trazer uma corda com nós, para que o aluno, além de um ladrilho, possa manipular uma cartolina para representar o terreno etc.

Hoje, continua sendo necessário "medir a terra" por motivos semelhantes aos dos povos da Antigüidade: tributação, demarcação de terrenos, construções de galinheiros e currais etc. Além dessas atividades do cotidiano, existem problemas matemáticos considerados passatempos ou desafios, envolvendo a decomposição de uma determinada figura em partes variadas.

Segundo a professora **Rosana de Oliveira** (2004), o trabalho com medida e suas unidades não pode reduzir-se a colocar, ao lado do número que expressa a medida, o sinal de m (metro), $m^2$ (metro quadrado) ou $m^3$ (metro cúbico). Se nosso aluno não compreender o que significam e o porquê de tais símbolos, não há valor cognitivo em sua aprendizagem.

**Rosana de Oliveira**

É professora da UERJ e atuante educadora matemática brasileira. É docente, lotada na Secretaria Municipal de Educação-SME de Angra dos Reis, vice-presidente do Gepem (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática): www.gepem.ufrrj.br e, também, conteudista das disciplinas Matemática e Educação e Instrumentação para o ensino de Álgebra.

***ATIVIDADE***

1. O que é um metro (m)? E um metro quadrado ($m^2$)? E um metro cúbico ($m^3$)?
Tenha um barbante de 1m, uma folha de jornal de $1m^2$ e construa um cubo de $1m^3$.

_____

_____

_____

***COMENTÁRIO***

*Esse tipo de atividade pode ser proposto de diferentes modos e com diferentes recursos. Por exemplo, utilizando giz, desenhe uma área de um metro quadrado no chão da sua sala de aula. Quantas cerâmicas (de um mesmo tipo, por exemplo, as do piso da sala de aula) serão necessárias para preencher a área desenhada? Caso considere que o cubo (de $1m^3$) tenha dimensões muito grandes, dificultando o manuseio, construa um outro com a dimensão que queira. O importante é visualizar concretamente cada medida e, posteriormente, estabelecer comparações. O uso de garrafas variadas e demais envazes enriquecerão, sem dúvida, os processos comparativos.*

Considerando que o trabalho com unidades de medida não-convencionais não constitui tarefa complicada, priorizaremos, nesta aula, atividades que exploram as unidades convencionais. No entanto, você sabe que o trabalho com unidades padronizadas pressupõe uma abordagem anterior (na mesma série ou em outra), explorando unidades de medida variadas.

**!**

No trabalho com área, perímetro ou volume, a escolha da unidade de medida é fundamental, assim como a distinção entre uma medida linear de comprimento (perímetro), a medida de área e a de volume. Lembre-se de que área, perímetro e volume são conceitos independentes e, desta forma, não precisam ser trabalhados conjuntamente. O que há de comum no trabalho com tais conceitos é o estabelecimento da unidade de medida a ser utilizada.

***ATIVIDADES***

2. Calcule as áreas, em **centímetros quadrados**, das seguintes figuras e complete a tabela. Depois, calcule as áreas das mesmas figuras utilizando outras unidades, por exemplo: o "triangulito" e o "trapezito":

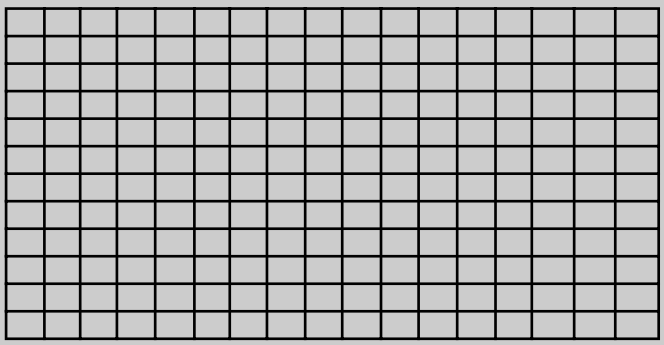
triangulito trapezitos

| | | | |
|---|---|---|---|
| Área de M | | | |
| Área de N | | | |
| Área de O | | | |
| em | $cm^2$ | triangulitos | trapezitos |

***COMENTÁRIO***

*Diversos questionamentos podem ser feitos com esse tipo de tarefa como, por exemplo, interrogar qual das três unidades utilizadas ($cm^2$, triangulitos, trapezitos) é a mais cômoda e rápida para calcular áreas. Um círculo de 1cm de raio seria uma boa unidade de área? Por quê?*

3. Faça os exercícios seguintes utilizando o papel quadriculado e o milimetrado, que estão disponíveis no Módulo Prático.



a) Pinte um **centímetro quadrado** na folha quadriculada e na milimetrada. Coloque, abaixo de cada desenho, a expressão "**centímetro quadrado**".

b) Denominaremos **decímetro quadrado** (**dm²**) um quadrado que ...

_____

_____

_____

c) Desenhe 1 **decímetro quadrado** na parte superior e outro na parte inferior da folha.

d) Denominaremos **milímetro quadrado** (**mm²**) um quadrado que ...

_____

_____

_____

e) Pinte de vermelho 1 **milímetro quadrado** na parte inferior da folha.

f) Observando o que você desenhou, complete:

$1 dm^2 =$ _____ $cm^2$

$1 cm^2 =$ _____ $mm^2$

$1 dm^2 =$ _____ $mm^2$

g) Podemos dizer que as medidas de área também aumentam e diminuem de 10 em 10? **As medidas de área** aumentam e diminuem de

_____

h) Complete:

$38\ dm^2 =$ _____ $cm^2$

$7000\ cm^2 =$ _____ $dm^2$

$45\ cm^2 =$ _____ $mm^2$

$40000\ mm^2 =$ _____ $dm^2$

4. Assinale com um X a unidade mais apropriada para medir a área de:

| | $m^2$ | $dm^2$ | $cm^2$ | $mm^2$ |
|---|---|---|---|---|
| Um cartão postal | | | | |
| O chão da sala | | | | |
| Uma cerâmica | | | | |
| Uma folha A4 | | | | |
| Um selo de correio | | | | |
| O que ocupa esta letra A | | | | |
| Uma quadra de basquete | | | | |
| Uma nota de 10 reais | | | | |

**COMENTÁRIO**

*Como você pode observar, as quatro atividades anteriores possibilitam-nos um trabalho que integra os seguintes blocos de conteúdo matemático: números e operações, grandeza e medida, espaço e forma. Mais do que mera transformação de unidades (a tradicional "escadinha"), é importante que o aluno perceba a relação entre a unidade utilizada e o número que expressa a quantidade total nessa unidade. Se há compreensão de tal relação proporcional, o entendimento sobre a transformação e equivalência de unidades, posteriormente, ficará mais fácil.*

**!**

Lembre-se: trabalhar o conceito de área não significa trabalhar simultaneamente o conceito de perímetro. Ambos são independentes, ou seja, podemos ter uma figura com área e perímetro diferentes, bem como figuras diferentes com a mesma área e perímetros, ou vice-versa. Na próxima aula, você verá atividades que comprovam esta observação.

## Conversando sobre o seu laboratório de Geometria: livro paradidático e as sucatas de caixa

O autor Luiz Márcio Imenes também publicou o livro paradidático "*Medindo comprimentos*", da Editora Scipione. Nele, você conhecerá diferentes abordagens para a questão da medida, além de outros episódios históricos.

Você sabe que as unidades de medida de volume (padronizadas e não-padronizadas) devem também estar incluídas no currículo. A utilização de sucatas de caixas, de outros tipos de recipientes etc. são ótimos recursos para o trabalho com volumes. Nesta aula, não vamos desenvolver atividades desse tipo, pois você poderá encontrar idéias nas aulas em que desenvolvemos tópicos de sólidos (a partir da Aula 7). Embora nossa ênfase lá tenha sido outra, você poderá, tranqüilamente, buscar inter-relações e pensar novos tipos de tarefas que preconizem a questão da medida. Optamos por apresentar, a seguir, um interessante episódio histórico.

## CONVERSANDO SOBRE A HISTÓRIA: ARQUIMEDES E O VOLUME E A ÁREA DA ESFERA

**PAULO ANTONIO ESQUEF**
É professor da Faculdade de Filosofia de Campos, localizada no norte do Estado do Rio de Janeiro.

No Boletim 43 do Gepem, o professor **PAULO ANTONIO ESQUEF** conta-nos como Arquimedes determinou o volume e a área da esfera. Veja!

Época provável: 212 a.C., durante a Segunda Guerra Púnica entre Roma e Cartago. Local: cidade de Siracusa, colônia grega no sul da Sicília. Cenário: após um sítio de 2 anos, a cidade é subjugada pelo poderoso exército romano comandado pelo general Marcelo. Durante o saque da cidade, um senhor com aproximadamente 75 anos, tentando resolver um problema de Matemática, ignora a intimação de um soldado romano para acompanhá-lo. Irritado, o soldado traspassa-o com uma espada. Assim morreu Arquimedes de Siracusa, a vítima mais ilustre da batalha final.

Arquimedes nasceu por volta de 287 a.C., em Siracusa, filho do astrônomo Fidéas. Alguns historiadores admitem que ele tenha estudado com sucessores de Euclides, em Alexandria, centro de toda atividade matemática durante a Idade Helenística, uma vez que ele era totalmente familiarizado com a Matemática lá desenvolvida. Arquimedes é considerado o maior gênio da Antigüidade por algumas autoridades modernas, como o alemão Felix Klein, que o colocam ao lado de Newton e Gauss, como um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Arquimedes foi simultaneamente físico e matemático, usando suas habilidades e conhecimentos na construção de engenhosas máquinas. Os achados de suas obras mostram seus estudos nos campos da Aritmética, Geometria, Mecânica e Hidrostática. Sua grande paixão era a Matemática e nela produziu trabalhos de rara beleza e originalidade, idéias que nenhum de seus antecessores ousaram pensar. Criou e aperfeiçoou um método de integração que lhe permitia determinar áreas de figuras planas e áreas superficiais e volumes de sólidos. O método de exaustão usado por Arquimedes é uma forma primitiva de integração; desse método, ele obteve uma série de resultados importantes, dos quais muitos chegaram aos nossos dias. Deu os primeiros passos na noção de limite, ao considerar a circunferência como limite para o qual tendem duas famílias de polígonos inscritos e circunscritos a ela, cujo número de lados crescem indefinidamente. Começando com um polígono de 6 lados, um inscrito e outro circunscrito, Arquimedes foi determinando seus perímetros até chegar aos polígonos de 96 lados; constatou então

que π encontra-se entre $3\frac{10}{71}$ *e* $3\frac{10}{70}$, uma precisão fantástica, considerando o inadequado sistema grego de numeração da época.

Entre os textos originais de suas obras que chegaram até nós, estão: **Sobre a esfera e o cilindro, Sobre os corpos flutuantes, A medida do círculo, A quadratura da parábola, Sobre as espirais, O contador de grãos de areia, Sobre conóides e esferóides, Sobre o equilíbrio das figuras planas e O método.**

Na Física, estudou as polias e os parafusos, construindo o parafuso de Arquimedes, usado para elevar água; formulou as leis que regem as alavancas, chegando a pronunciar a célebre frase: "Dê-me um ponto de apoio fora de Terra e um lugar para me firmar que eu moverei a mesma." Na hidrostática, ao estar envolvido na solução da falsificação da coroa do rei Hierão, descobriu a lei do empuxo; "Todo corpo mergulhado em um fluido sofre uma força vertical, de baixo para cima e igual ao peso do volume do fluido deslocado". Conta a história que essa lei foi descoberta quando Arquimedes mergulhou em sua banheira cheia de água. Eufórico com a descoberta (que iria salvar o seu pescoço), saiu correndo nu pelas ruas da cidade, gritando: "*Eureka, Eureka*", "Achei, Achei".

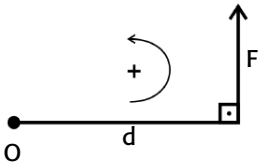
Até o início do século XX, sabia-se que Arquimedes chegara aos resultados corretos para as fórmulas da área e do volume da esfera, mas não se conheciam os métodos empregados pelo sábio de Siracusa nas respectivas demonstrações.

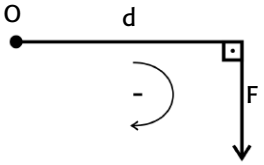
Em 1906, um estudioso dinamarquês, Johan Ludvig Heiberg, que dedicara sua vida à Matemática Grega, em especial à edição completa e comentada dos Elementos, de Euclides, teve sua perseverança recompensada ao encontrar, perdido na biblioteca de um monastério de Constantinopla, um pergaminho datado do século X, contendo a transcrição da obra *O Método*, de Arquimedes. Nela estavam as provas exaustivamente procuradas. O que ali continha foi surpreendente: *o sábio de Siracusa adotara uma abordagem física para a questão, aplicando conceitos de momentos de pesos suspensos sobre barras para chegar às suas conclusões.*

Para entender melhor a abordagem física de Arquimedes na determinação do volume da esfera, vamos recordar os conceitos de momento de uma força e de equilíbrio.

*Define-se momento ou torque de uma força em relação a um ponto de rotação como sendo o produto da força pela distância que vai do ponto de rotação à força.*

$$\boxed{M_F^O = \pm Fd} \quad (1)$$



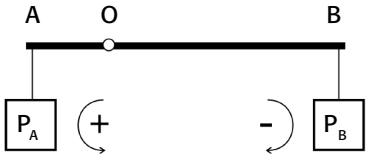

Os sinais + e – que aparecem na expressão (1) do momento indicam que o efeito de giro da força em relação ao ponto O pode ocorrer no sentido horário (–) ou no sentido anti-horário (+).

Se um sistema em que atuam forças está em equilíbrio de rotação relativo a um ponto, a soma dos momentos das forças que produzem a rotação no sentido horário deve ser igual à soma dos momentos das forças que produzem a rotação no sentido anti-horário. Em outras palavras:

*Quando um sistema está em equilíbrio de rotação, a soma algébrica dos momentos das forças em relação a um ponto deve ser nula.*

$$\boxed{\textit{Equilíbrio de rotação} \Leftrightarrow \sum M_F^O = 0} \quad (2)$$

Considere uma barra AB ideal (sem peso) articulada no ponto O. Nas extremidades A e B estão pendurados os pesos $P_A$ e $P_B$, de modo a manter a barra em equilíbrio e na posição horizontal.




Aplicando a condição de equilíbrio de rotação em relação ao ponto O, temos: $+P_A \text{x} \overline{OA} - P_B \text{x} \overline{OB} = 0$ (3), onde $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são os braços da alavanca.

Se os corpos A e B forem homogêneos e constituídos do mesmo material, eles terão o mesmo peso específico ρ (peso específico de uma substância homogênea é a relação entre o seu peso e o respectivo volume: $\rho = \frac{P}{V}$). Sendo $V_A$ e $V_B$ os respectivos volumes dos corpos A e B, temos:

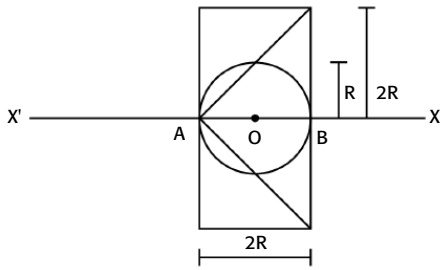
$$\rho V_A \text{x} \overline{OA} - \rho V_B \text{x} \overline{OB} = 0 \text{ ou } \boxed{V_A \text{x} \overline{OA} - V_B \text{x} \overline{OB} = 0} \quad (4).$$

Para aumentar a praticidade da demonstração de Arquimedes, vamos denominar o produto do volume do corpo pendurado pelo braço da alavanca "momento de volume".

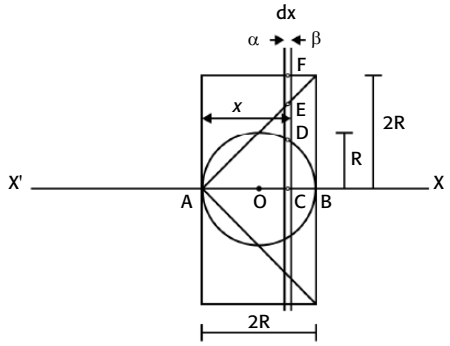
Usando a nova definição e a relação (4), podemos afirmar que: *se vários corpos homogêneos estão pendurados numa barra ideal articulada num ponto O, de modo a manter a barra em equilíbrio de rotação, a soma algébrica de seus "momentos de volume" em relação ao ponto O deve ser nula.*

A conclusão anterior será usada para demonstrar como Arquimedes chegou à formula do volume da esfera.

Imagine uma esfera de raio R, um cone de altura 2R e raio da base igual a 2R parcialmente inscrito e parcialmente circunscrito a ela, e um cilindro de altura 2R e raio da base igual a 2R com base concêntrica com a base do cone, ambos coaxiais e cujo eixo comum contém o centro da esfera. A figura a seguir representa um corte do conjunto por um plano passando pelo centro da esfera e contento X'X, os eixos comuns do cilindro e do cone.




Considere agora, dois planos a e b, paralelos entre si e perpendiculares ao eixo X'X e separados por uma distância muito pequena (dx), cortando os três sólidos em "fatias" extremamente finas, conforme a figura a seguir.



As "fatias", semelhantes a três moedas bastante finas, têm raios:
Cilindro: CF Cone: CE Esfera: CD

Seus volumes aproximados são:

Cilindro: $dV_{ci} = \pi\,(CF)^2\,dx$ (5)

Cone: $dV_{co} = \pi\,(CE)^2\,dx$ (6)

Esfera: $dV_e = \pi\,(CD)^2\,dx$ (7)

Para o cilindro temos: CF = 2R.

Para o cone temos: CE = CA = x

Imaginando o triângulo ADB, vemos que o mesmo é retângulo uma vez que a hipotenusa é o diâmetro da circunferência da secção da esfera e o ponto D pertence a essa circunferência. Pela propriedade da altura relativa à hipotenusa do triângulo, podemos escrever:

$(CD)^2 = (AC)\times(CB)$ ou $(CD)^2 = x.(2R - x) = 2Rx - x^2$

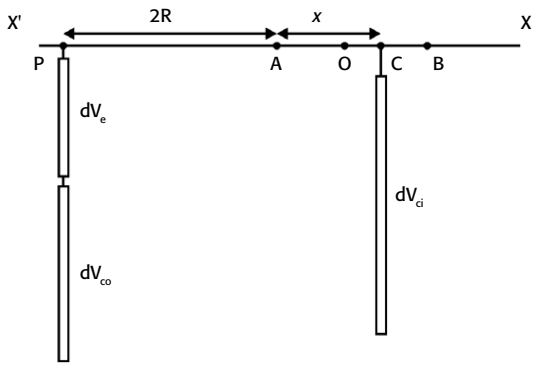
Substituindo os valores de CF, CE e CD nas relações (5), (6) e (7), respectivamente, temos:

$dV_{ci} = \pi\,(2R)^2dx = 4\pi R^2dx$ (8)

$dV_{CO} = \pi x^2dx$ (9)

$dV_e = \pi\,(2Rx - x^2)dx = 2\pi Rxdx - \pi x^2dx$ (10)

Considere o ponto P, localizado no eixo X'X e distante 2R de A e à esquerda do mesmo. Vamos pendurar as "fatias" do cone e da esfera no ponto P e a "fatia" do cilindro fica pendurada no ponto C (a uma distância x de A).



Vamos determinar os "momentos de volume" das "fatias" do cone e da esfera em relação ao ponto A.

$$M^{A}_{dV_{co},dV_e} = +(dV_{co} + dV_e)2R$$

$$M^{A}_{dV_{co},dV_e} = (\pi x^2 dx + 2\pi Rxdx - \pi x^2 dx)2R$$

$$\boxed{M^{A}_{dV_{co},dV_e} = 4\pi R^2 xdx \quad (11)}$$

Vamos calcular o "momento de volume" da "fatia" do cilindro em relação ao ponto A:

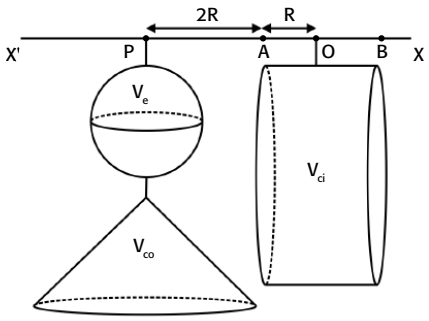
$$M^{A}_{dV_{ci}} = -(dV_{ci}).x = -(4\pi R^2 dx).x$$

$$\boxed{M^{A}_{dV_{ci}} = -4\pi R^2 xdx \quad (12)}$$

Comparando os resultados obtidos em (12) e (11), vemos que o módulo do "momento de volume" da "fatia" do cilindro é igual ao módulo do "momento de volume" das "fatias" do cone mais a esfera, qualquer que seja a posição em que se faça o corte pelos planos α e β (distância x).

Deslocando-se continuamente os planos α e β desde o ponto A até o ponto B, e repetindo-se o procedimento de se pendurar as "fatias" da esfera e do cone em P, ao fim do procedimento, teremos pendurados em P todas as partes que compõem a esfera e o cone, e a soma de todas essas partes constituirão estes dois sólidos.

As "fatias" do cilindro (todas iguais) estarão simetricamente distribuídas em relação à vertical que passa pelo ponto O. A figura a seguir mostra o final da operação.



O "momento de volume" em relação ao ponto A produzido pelo conjunto esfera-cone (anti-horário) é igual ao momento do cilindro (horário) relativo ao mesmo ponto.

Aplicando a condição de equilíbrio dos momentos em relação a A, na figura anterior, temos

$(V_{co} + V_e).2R - .V_{ci}.R = 0$
$V_{co} + V_e = ½V_{ci}$
$Ve = ½.V_{ci} - V_{co}$ **(13)**

Os volumes do cilindro e do cone já eram conhecidos na época de Arquimedes. Seus volumes são:

$$V_{ci} = Área_{base}\ x\ altura = \pi(2R)^2\ 2R = 8\ R^3$$

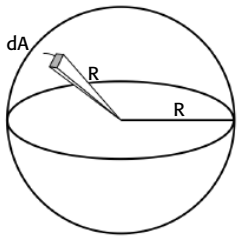
$$V_{co} = \frac{1}{3}\ Área_{base}\ x\ altura = \frac{1}{3}\pi\left(2R\right)^2\left(2R\right) = \frac{8\pi R^3}{3}$$

Substituindo os valores de $V_{ci}$ e $V_{co}$ na relação (13), temos:

$$V_e = \frac{1}{2}(8\pi R^3) - \frac{8\pi R^3}{3} = 4\pi R^3 - \frac{8}{3}\pi R^3$$

$$\boxed{V_e = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

Numa correspondência enviada a Eratóstenes, Arquimedes relatou que, após deduzir o volume da esfera, foi fácil calcular a área da mesma. Arquimedes imaginou a esfera composta de uma infinidade de pequenas pirâmides, cujas alturas eram o raio da esfera e cujas bases eram pequenos elementos da superfície.



Cada pequena pirâmide tem como volume (dV) um terço do pequeno elemento de superfície (dA) multiplicado pela altura (que é o raio da esfera). Somando-se todos os volumes das pequeninas pirâmides, obtém-se o volume da esfera que também será um terço da soma das pequenas áreas multiplicado pelo raio da esfera.

$$\frac{1}{3}\left(\sum dA\right)\cdot R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Mas, $\sum dA$ é a própria área da esfera ($A_{esfera}$). Logo:

$$\frac{1}{3} A_{esfera} \cdot R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\boxed{A_{esfera} = 4\pi R^2}$$

Incrível, fantástica, extraordinária, prodigiosa, admirável, singular, arrepiante, sensacional! Teria você adjetivo apropriado para qualificar a inusitada demonstração do volume da esfera? E da área da esfera?

**!**

Lembre-se das dificuldades enfrentadas por Arquimedes naquela época: não existia o papel, papiros e pergaminhos eram escassos, os instrumentos de escrita eram rudimentares, a simbologia complexa etc. Converse com seu tutor e com colegas sobre essa descoberta arquimediana.

## Conversando sobre o laboratório de Geometria: o escalímetro

Você sabe que são diversos os recursos que podem nos auxiliar nos procedimentos de medida: papel milimetrado, barbante, trena, escalímetro, régua, compasso, esquadro, prumo, pantógrafo, calculadora, papel quadriculado etc.

Nesta aula, apresentaremos a você o **escalímetro**. O pantógrafo você conhecerá na Aula 28. Os escalímetros são instrumentos de medida muito interessantes e úteis. Constituem um tipo de régua muito utilizado pelos arquitetos e podem ser encontrados em qualquer papelaria. Com seu manuseio constante podemos ir desenvolvendo melhor compreensão das variações da escala.

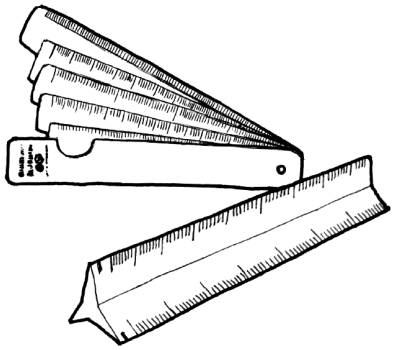


**Figura 22.2:** Escalímetros.

**!**

As experiências que temos desenvolvido com os alunos mostram-nos que eles ficam encantados com as descobertas que fazem com a utilização de escalímetros.

## CONVERSANDO UM POUCO SOBRE ESCALAS

A representação de figuras e objetos grandes ou muito pequenos encontrados em nosso cotidiano, às vezes não pode ser feita, no papel, com as dimensões reais da figura, pois exigiriam uma folha do tamanho daquilo que pretenderíamos desenhar. No caso de uma planta baixa, a folha de papel precisaria ser tão grande que, além de difícil manuseio, necessitaria de um espaço enorme para sua leitura.

Sendo assim, torna-se necessário desenharmos aquilo que pretendemos *reduzindo (ou ampliando) todas as suas dimensões, proporcionalmente, segundo uma escala*. Podemos, por exemplo, reduzir todas igualmente em 20 vezes; neste caso, utilizamos uma escala de 1:20 (lê-se: 1 para 20). Então, a escala é a razão entre a dimensão usada para representar um objeto no desenho e sua dimensão real, representada assim:

$$\text{Escala} = \frac{\text{comprimento no desenho}}{\text{comprimento real}}$$

Diz-se que estamos trabalhando com uma *escala de ampliação* quando a representação possui medidas maiores que as da figura original. Se a representação tem as mesmas medidas que a original, a escala recebe o nome de *escala natural*; se a representação gráfica tem medidas menores, denomina-se *escala de redução*. Assim, como exemplos, temos:

- Escala natural – 1:1
- Escala de ampliação – 2:1, 5:1, 10:1
- Escala de redução – 1:2, 1:10, 1:50, 1:100, 1:1000

A figura seguinte ilustra o triângulo universal de escalas.

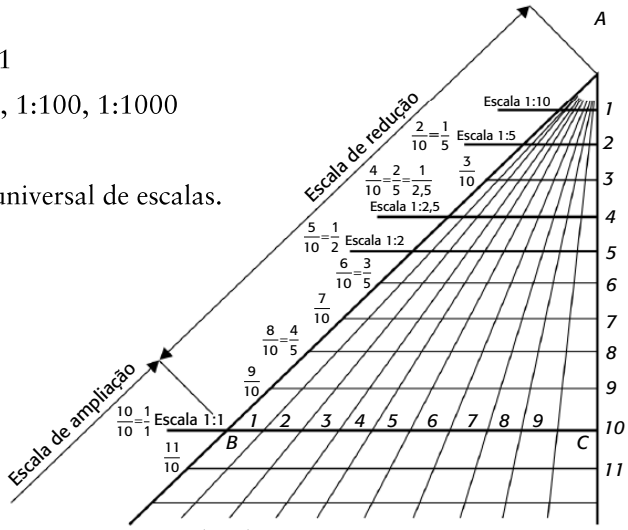



**Figura 22.3:** Triângulo universal de escalas.

As escalas mais utilizadas na leitura e interpretação de plantas baixas, mapas etc. são a **numérica** e a **gráfica**. Esta última consiste num tipo de régua que permite calcular as medidas reais com maior facilidade. Ambas devem ser fornecidas no desenho.

***ATIVIDADE***

5. Nesta atividade, você vai medir, representar no papel e comparar segmentos. Responda, então, às seguintes perguntas:

(a) Vamos medir a largura da sala e representá-la numa folha de papel. Fica muito difícil arrumarmos uma folha de papel do comprimento da sala. Como podemos representar sua largura no nosso caderno?

_____

_____

_____

(b) Estamos representando essa largura através de uma ampliação ou de uma redução? Justifique.

_____

_____

_____

(c) Se desenharmos (utilize papel milimetrado) esta largura na escala de 1:100, quanto medirá no desenho? E se utilizarmos a escala de 1:50? E na escala 1:200? Em qual escala a largura da sala ficou representada pelo menor segmento? O que você pode concluir?

_____

_____

_____

***COMENTÁRIO***

*Representar um segmento em escalas diferentes, comparar segmentos de comprimentos diferentes, explorar a noção de ampliação e redução de segmentos, construir o conceito de escala e desenvolver a estrutura multiplicativa são objetivos deste tipo de tarefa. Vários recursos, tais como barbante, papel milimetrado, régua, trena e calculadora também podem ser utilizados.*

**!**

Caso você tenha alguma dificuldade nesta atividade, continue a leitura e realize a Atividade 6, pois a mesma o ajudará.

***ATIVIDADES***

6. Nesta atividade, você irá comparar suas respostas com as respostas dos alunos do professor Marcelo. Veja como ele propôs a atividade e a analisou.

**!**

Para mais detalhes, leia Bairral (1998), Boletim do Gepem, n°34.

Foram distribuídas folhas de papel milimetrado para cada aluno e se pediu que representassem a largura da sala (5m, aproximadamente) nas seguintes escalas: 1:50, 1:100 e 1:200 (conforme a figura seguinte), indicando todos os cálculos. Após o exercício individual, colocaram as respostas de um mesmo grupo numa única folha e se pediu que cada grupo fizesse a(s) devida(s) correção(ões) e observasse as relações entre as diferentes representações.

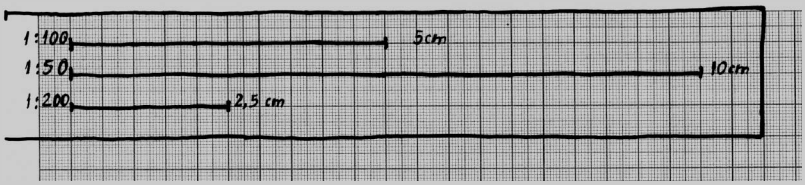



**Figura 22.4:** Largura da sala em diferentes escalas.

No primeiro instante, os alunos não sabiam como fazer. Percebeu-se mais uma vez que questionar era uma inovação na sala de aula; resolveu-se, portanto, sugerir alguns caminhos, tais como: *Os cálculos, as indicações e o traçado de cada segmento estão corretos? Como você pode comparar o tamanho de cada segmento? Que relação existe entre o tamanho do segmento e a escala utilizada para representá-lo?*

A dificuldade que os alunos apresentaram também estava ligada à falta de prática de escrever suas observações. Essa atividade revelou dados que, sem ela, seriam impossíveis de ser coletados, já que é difícil para um professor entrevistar 27 alunos a cada aula. Como as questões foram grupadas por objetivos temáticos, foi possível encontrar padrões que remetessem a esta ou àquela estrutura de pensamento. Veja dois tipos de resposta:

**!**

Lembre-se de que o trabalho em grupo enriquece a aprendizagem.

**Grupo 1**: "Observamos que, quando a escala diminui, o tamanho aumenta; quando a escala aumenta, o tamanho diminui".

| | | |
|---|---|---|
| ↓ 1:50 = 10cm | 1:50 = 10cm | ↑ |
| ↓ 1:100 = 5cm(x2) | 1:100 = 5cm(:2) | ↑ |
| ↓ 1:200 = 2,5cm(x4) | 1:200 = 2,5cm(:4) | ↑ |

Este grupo percebeu que, dependendo da escala utilizada, o tamanho do desenho muda. A direção das setas para baixo e para cima, feitas por eles, indica a reversibilidade com que o grupo trabalhou com a operação de multiplicação e divisão. De acordo com sua justificativa, pareceu que os alunos não "falaram", mas indicaram (nos cálculos) as relações "dobro", "quádruplo", "metade" e "quarta parte". Isso nos leva a crer que eles perceberam, mas ainda não formalizaram.

**Grupo 5:** "O segmento que representa a escala 1:200 cabe duas vezes dentro da de 1:100. O segmento da escala 1:200 cabe quatro vezes dentro da de 1:50".

**Grupo 6:** "A escala 1:100 cabe duas vezes na escala 1:50. A escala 1:200 cabe quatro vezes na escala 1:50 e duas vezes na escala 1:100".

**Grupo 7:** "O segmento 1:50 é o dobro do segmento 1:100, que é o dobro do segmento da escala 1:200".

Estes três últimos grupos demonstraram fazer confusão entre a escala e o segmento que a representa quando, por exemplo, o grupo 5 diz que "cabe duas vezes dentro da de 1:100". Tal justificativa leva a pensar que, para o grupo, pode não estar claro que o segmento é uma representação da escala. Pensamos que uma resposta do tipo "cabe duas vezes dentro do segmento que representa a escala de 1:100" estaria mais completa.

**!**

A pesquisa do professor Bairral (1998) mostrou que a compreensão do conceito de escala não é tão simples como imaginamos.

Agora que você conheceu possíveis respostas de alunos, compare-as com as suas. Converse com colegas e com seu tutor. O que esse tipo de atividade trouxe de novo para você sobre o conceito de medida?

_____

_____

_____

***COMENTÁRIO***

*Esta atividade objetivou trabalhar mais um aspecto do conceito de escala; entretanto, ampliou e reduziu um segmento (largura da sala de aula da própria turma), trabalhando apenas com a medida linear.*

**!**

Os alunos gostam muito e se empenham bastante na realização desse tipo de tarefa, porque eles são os protagonistas. Não há apenas o certo ou o errado, mas uma discussão coletiva do que é feito.

7. Com o auxílio de uma régua, meça, no mapa, a distância em centímetros entre as cidades indicadas na tabela e, a seguir, calcule a distância real em quilômetros.

| Cidades | Distância em cm | Distância em km |
|---|---|---|
| Belo Horizonte – Fortaleza | | |
| Fortaleza – Boa Vista | | |
| Boa Vista – Porto Velho | | |
| Porto Velho – Campo Grande | | |
| Belo Horizonte – Brasília | | |
| Brasília – Manaus | | |
| Brasília – Porto Alegre | | |

**!**

Lembre-se de que a distância encontrada é a menor, e não a real, pois estamos aproximando, ou seja, delimitando um segmento.

***COMENTÁRIO***

*Nesta atividade, você pode observar que utilizando mapas também podemos desenvolver objetivos relacionados à medida, tais como: ampliar e reduzir segmentos, trabalhar unidades de medida de comprimento, comparar unidades de medida e desenvolver o conceito de proporcionalidade. Além do mais, a possibilidade de integração com a Geografia é outra alternativa didática importante.*

**!**

Lembre-se de que há relação entre a unidade de medida utilizada e a quantidade que a expressa.

Na Aula 3, através de uma simples dobradura e um corte, você pôde perceber que o comprimento da diagonal do quadrado é maior que a medida do lado. Muito bem; utilizamos a medida, pois estabelecemos uma comparação, chamada *comparação qualitativa*. No entanto, podemos analisar quantitativamente essa relação. Para isso, vamos precisar entender o que significa medir em outros campos numéricos. Nesse processo, aparecerá a idéia de incomensurabilidade.

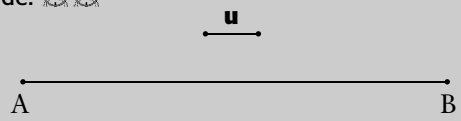
## CONVERSANDO SOBRE SEGMENTOS INCOMENSURÁVEIS

Medir um segmento é, em princípio, uma coisa muito simples: basta fixar uma unidade de medida e verificar quantas vezes essa unidade cabe no segmento.

Dá para imaginar que uma tarefa tão simples como essa tenha sido responsável por uma das maiores crises filosóficas da Matemática?

***ATIVIDADES***

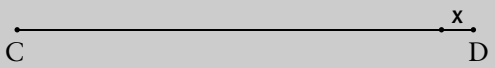
8. Com o seu compasso, meça o segmento AB, considerando ***u*** como unidade.




***COMENTÁRIO***

*Você deve ter descoberto que AB = 8**u**, sem maiores dificuldades.*

9. Ainda com a unidade ***u***, meça, agora, o segmento CD, a seguir.




***COMENTÁRIO***

*Agora não foi tão fácil! O segmento CD é maior que 8**u**, não chegando a 9**u**.*

*Para medir o segmento CD, você precisa descobrir quanto o último pedacinho de CD (vamos chamá-lo de **x**) representa da unidade **u**.*

*Se você descobriu, seu problema está resolvido. Terá respondido que CD = 8,6**u**.*

*Acreditamos que não tenha chegado a essa resposta utilizando apenas o seu compasso. Só com muita sorte você teria descoberto que, ao dividir a unidade **u** em cinco partes iguais, encontraria um pedacinho **u'** que cabe três vezes em **x**. Isto é,* $\mathbf{x} = \frac{3}{5}\mathbf{u}$. *Sendo assim,* $CD = 8\mathbf{u} + \frac{3}{5}\mathbf{u} = 8{,}6\mathbf{u}$.

*Observe que o pedacinho **u'** funciona como um máximo divisor comum entre **x** e **u**. Ele divide ambos em partes iguais.*

*Volte lá e confirme: divida **u** em cinco partes (a mão livre mesmo) e verifique que esta parte cabe três vezes em **x** (também a mão livre). Deu para acreditar?*

*Parece que o nosso problema de medir um segmento está bem resolvido. Duas coisas podem acontecer: a unidade **u** cabe um número inteiro de vezes no segmento ou faltará um pedacinho **x**, menor que a unidade **u**.*

*Na segunda hipótese, bastará dividir a unidade **u** em um número inteiro "n" de partes, de modo que a parte encontrada caiba um número inteiro "m" de vezes no pedacinho **x**. Isto é, devemos encontrar números inteiros "n" e "m" tais que* $\frac{\mathbf{u}}{n} = \frac{\mathbf{x}}{m}$.

*Feito isso, teremos* $\mathbf{x} = \frac{m}{n}\mathbf{u}$.

*Tudo estaria perfeito, se esse problema fosse fácil de resolver... Observe que, do ponto de vista algébrico, temos uma proporção em que dois termos são desconhecidos: n e m. Do ponto de vista geométrico, temos dois segmentos, **u** e **x**, e sabemos que m e n representam segmentos desconhecidos. Se você voltar à Aula 4 de Construções Geométricas, verá que não conseguiremos encontrar m e n.*

*Na verdade, esse problema pode ser indeterminado; podemos resolvê-lo por tentativas. Pelo menos, no caso dessa atividade, temos uma solução: basta fazer n=5 e m=3.*

*Mas, será que sempre encontraremos uma solução?*

*Quer dizer, sempre encontraremos aquele pedacinho **u'** capaz de dividir **u** e **x** em partes iguais?*

*O que você acha? Pense!*

*Você, como toda pessoa normal, deve ter pensado num **u'** bem pequenininho e, por isso, capaz de dividir qualquer segmento em partes iguais. Numa coisa você está certo, quanto menor for o **u'**, maior será a nossa chance de dividir os segmentos em partes iguais.*

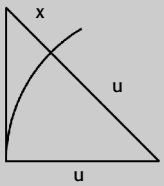
*Até o século VI a.C., todos pensavam como você. Porém, os pitagóricos descobriram que nem sempre isso é verdade. Eles descobriram que existem segmentos que não conseguimos medir:* os segmentos incomensuráveis.

*Dá para imaginar isso?! O segmento está ali, na sua frente. Você tem uma unidade de medida; porém, por mais que se esforce, jamais conseguirá medi-lo.*

*Essa descoberta foi um golpe mortal na filosofia pitagórica. Eles a esconderam enquanto puderam...(você conhece essa história!).*

*Veja na atividade seguinte, como os pitagóricos estudaram a incomensurabilidade no triângulo retângulo, concluindo a existência dos números irracionais.*

**10. Desenhe um triângulo retângulo e um isósceles. Considerando um cateto como unidade *u*, quanto mede a hipotenusa do triângulo?**




***COMENTÁRIO***

*Esse ingênuo problema não tem solução!*

*Teríamos de encontrar n e m inteiros, tais que:* $\frac{u}{n} = \frac{x}{m}$ *, isto é,* $x = \frac{m}{n}u$.

*Neste caso, teremos que a hipotenusa mede* $u + \frac{m}{n}u = \left(\frac{m+n}{n}\right)u$.

*Pelo teorema de Pitágoras* $\left(\frac{m+n}{n}\right)^2 u^2 = u^2 + u^2$ *, ou seja,* $\left(\frac{m+n}{n}\right)^2 = 2$ *ou* $(m+n)^2 = 2n^2$.

*Porém, se fizermos a decomposição em fatores primos, o número* $(m+n)^2$ *terá todos os seus fatores repetidos (está ao quadrado); portanto, esses fatores aparecem um número par de vezes. Por outro lado, no número* $2n^2$*, o fator primo 2 aparece um número ímpar de vezes. Pela unicidade da decomposição em fatores primos, esses números não podem ser iguais; assim, não existem números inteiros n e m que satisfaçam o problema.*

*Os pitagóricos descobriram que o cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo e isósceles são grandezas incomensuráveis.*

## CONVERSANDO SOBRE A HISTÓRIA: O NÚMERO ÁUREO

O **NÚMERO DE OURO** é representado pela letra grega $\phi$ devido ao escultor grego Phidias, que utilizou muito a razão áurea em suas obras.

Quando falamos em incomensurabilidade, pensamos em números irracionais. Há um número irracional, o $\phi$ (fi), chamado **NÚMERO DE OURO** que, embora muito presente em nosso cotidiano, é pouco conhecido.

As proporções humanas foram objeto de estudo sistemático por parte de arquitetos, escultores, pintores e matemáticos. No início do Renascimento, o monge italiano Luca Pacioli, publicou seu livro *Divina Proporção* (Veneza, 1509), no qual aparece a figura de um homem inscrito em um quadrado, feita por Leonardo da Vinci. Leonardo disse: "se abrires a perna até reduzires a tua altura em uma décima quarta parte, e se estenderes e levantares os braços até que o dedo central de cada mão chegue ao nível de cima da cabeça, verás que o centro dos membros estendidos estará no umbigo e que o espaço entre as pernas formará um triângulo eqüilátero. Leonardo da Vinci não realizou apenas experiências empíricas, mas também estudos anatômicos que incluíram a secção de membros. Basicamente, considerou que a altura humana aos três anos de idade era a metade da altura adulta, à qual correspondia (em situação ideal) umas "*3 braccias*", uns 185cm, 9 vezes o comprimento da mão, ou 9 vezes o comprimento vertical do rosto. Por sua difusão e prestígio, as idéias de Leonardo prevaleceram até o século XIX, sem que surgissem outros estudos alternativos aos cânones. Durante o século XIX, foram desenvolvidos novos estudos sobre o tema, especialmente por Fechner e Zeising. Em 1855, Zeising comprovou que o umbigo divide o corpo humano na secção áurea; portanto, no desenho de Leonardo da Vinci, o corpo do homem está inscrito em uma circunferência cujo raio é sua *secção áurea*.

Ao longo de sua história, os gregos também utilizaram os números para buscar proporções harmoniosas nas esculturas humanas. Tais proporções ideais foram denominadas *cânon*. Um desses cânones foi o do escultor grego Lisipo, que considerava que a estatura completa de um homem era de oito cabeças. Os babilônios consideravam o *pentagrama* símbolo de saúde física e espiritual. Suas propriedades estão relacionadas à *Divina Proporção* (*Razão Áurea*). Devido às suas proporções, o pentagrama adquiriu imensa, embora misteriosa, importância através dos tempos. Entre os primeiros a usarem o pentagrama como símbolo de reconhecimento estavam os pitagóricos. Faça uma revisão na Aula 20 de Construções Geométricas; lá é feita uma boa discussão das secções áureas.

## RESUMO

Compor, decompor, comparar, estimar, verificar equivalências e diversificar unidades são importantes para o trabalho com a medida. A determinação e escolha da unidade a ser utilizada, a comparação qualitativa e quantitativa de unidades e o desenvolvimento de procedimentos de estimativa são processos geométricos imprescindíveis. As situações cotidianas devem ser levadas em consideração como objeto de estudo e de concretização de atividades sobre a medida. No entanto, devemos ter consciência de que as mesmas não são suficientes. Devemos problematizar, continuamente, o uso da medida, bem como questionar e relativizar sua exatidão, como no caso dos segmentos incomensuráveis.

## AUTO-AVALIAÇÃO

Você é capaz de responder às perguntas que fizemos anteriormente? Ou seja: *Uma folha de jornal aberta possui um metro quadrado? Você sabe qual é a relação entre um azulejo e um metro quadrado? O que significa 0,33cl? Como entender que 1l é igual a 1dm$^3$? O que significa medir? Qual a diferença entre unidade de medida convencional e não convencional? Há relação entre a unidade que utilizamos e a quantidade numérica expressa pela mesma? Quando nos convém utilizar determinada unidade de medida, e não outra?*

Consideramos que, se você consegue refletir sobre esses questionamentos, alcançou os objetivos desta aula. Nossos parabéns!

Não se preocupe, porém, se você achou o episódio histórico sobre Arquimedes muito complexo. Esse tema continua tão complexo como o era ao tempo de Arquimedes. No entanto, esse tipo de leitura fornece informações imprescindíveis à formação dos professores de Matemática do nosso tempo.

AULA 23

# Áreas de figuras planas

## Meta da aula

Instrumentalizar a construção do conceito de área.

## objetivos

Esperamos que, após estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Conceituar área.
- Utilizar variados recursos didáticos para construir o conceito de área.
- Deduzir, de diversas maneiras, as fórmulas para o cálculo das principais figuras planas.

## Pré-requisitos

Basicamente, a introdução ao conceito de área estudado na Aula 13 do Módulo de Geometria Básica é suficiente para acompanhar, com sucesso, nossa aula de hoje. Além disso, utilizaremos vários recursos que já compõem o seu laboratório pessoal de Geometria, tais como: Tangram e o geoplano. Utilizaremos também papel quadriculado e construiremos minós, utilizando cartolina, emborrachado, PAPEL PLUMA ou similar. Mantenha à mão seu material de desenho.

**!**

Lembre-se de acessar a página da disciplina e seu conjunto de aulas na Plataforma Cederj. Há interessantes animações que auxiliam o desenvolvimento da visualização e representação. Se puder, acesse também os *sites* sugeridos nesta aula.

**Papel pluma**
É um material relativamente recente que pode ser encontrado em boas papelarias. Trata-se de um material muito apropriado para construir quebra-cabeças, Tangram, poliedros etc.

## INTRODUÇÃO

Mesmo que você não tenha estudado muita Geometria na escola, com certeza, você calculou áreas planas. Suas experiências pessoais com o cálculo de áreas de figuras planas, principalmente aquelas realizadas fora do contexto escolar, devem ser suficientes para convencê-lo de que essa é uma atividade simples, que não representa um grande desafio. Estranhamente, porém, pessoas escolarizadas costumam ter dificuldade para calcular áreas de figuras simples como triângulos ou trapézios. Mais surpreendente ainda é o fato de pessoas não escolarizadas, mas que exercem profissões como as de pedreiro ou vidraceiro, conseguirem calcular, muitas vezes por estimativa, áreas completamente atípicas, até mesmo, curvilíneas.

Cabe, então, uma reflexão: *o que fez diferença na formação dessas pessoas?* Acreditamos que as pessoas escolarizadas têm como recurso apenas um formulário. Uma vez esquecida a fórmula, nada podem fazer. Certamente, se você lhes lembrar a fórmula da área do triângulo e lhes disser quanto valem a base e a altura, elas calcularão a área corretamente.

Por outro lado, a formação do pedreiro ou do vidraceiro aconteceu de modo a desenvolver nessas pessoas o conceito de área em lugar de fórmulas. Desse modo, conhecendo apenas a área do retângulo e utilizando composição e decomposição das figuras, esses profissionais se tornam capazes de determinar outras áreas, conseguindo, inclusive, fazer estimativas com razoável precisão.

Isso coloca um desafio: que atividades você deve desenvolver para que seus alunos construam o conceito de área e se tornem capazes de deduzir as áreas mais comuns e estimar as áreas de figuras não poligonais? Tais perguntas hão de nortear o desenvolvimento desta aula.

**Conceito de área**

Como você aprendeu na Aula 13 de Geometria Básica, o conceito de área está relacionado a três propriedades:
**$P_1$:** A toda figura plana limitada está associado um número real positivo, chamado área dessa figura.
**$P_2$:** Figuras planas congruentes têm a mesma área (por exemplo, dois triângulos congruentes ou dois círculos de mesmo raio).
**$P_3$:** Se uma figura plana F é a união de duas figuras $F_1$ e $F_2$, onde $F_1$ e $F_2$ se intersectam somente em linhas, então a área de F é a soma das áreas de $F_1$ e $F_2$.

!

Existem vários atributos relacionados com esse conceito. Você deve implementar atividades apropriadas que permitam a seus alunos desenvolver várias habilidades, tais como:
1. Reconhecer a conservação da área.
2. Compor uma figura por outras.
3. Decompor uma figura em outras.
4. Reconhecer que figuras com a mesma área podem ter perímetros diferentes.
5. Reconhecer que figuras com formas e dimensões diferentes podem ter a mesma área.
6. Reconhecer que o número que representa a área depende da unidade escolhida.
7. Calcular áreas por estimativas.
8. Deduzir as fórmulas mais comuns.

Você pode e deve utilizar recursos variados para atingir seus objetivos.

Nesta aula, daremos sugestões para utilizar alguns recursos, tais como: geoplano, papel quadriculado, minós, Tangram, plantas baixas e mapas.

Não temos a pretensão de esgotar as possibilidades. Com certeza, você terá outras idéias, inspiradas nessas sugestões. Além disso, nas referências recomendadas nesta aula, você encontrará inúmeras sugestões.

!

O importante é que você crie ou escolha a tarefa adequada aos seus objetivos. Assim, em cada atividade proposta nesta aula, você deverá apresentar pelo menos uma das habilidades anteriores. A identificação, em cada atividade, de tais habilidades, o ajudarão na atividade final desta aula.

## GEOPLANO

Utilizando seu geoplano quadrado (construído na Aula 3), você pode desenvolver várias atividades, como veremos a seguir.

!

Você viu, na aula anterior, a importância da unidade de medida. Dessa forma, fique atento à unidade que está sendo considerada em cada atividade que se segue.

***ATIVIDADES***

1. Um fazendeiro, interessado em comprar um terreno, encontrou à venda os dois lotes representados a seguir:

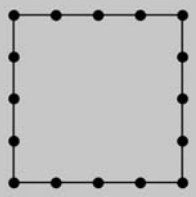


**Figura 23.1.a:** Terreno A.

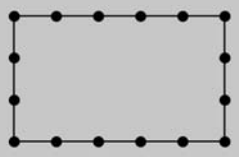


**Figura 23.1.b:** Terreno B.

a. Reproduza os dois lotes no geoplano.
b. O fazendeiro gostaria de cercar o terreno. Para gastar menos, deveria escolher o lote A ou o B? _____
c. Se os dois terrenos custam o mesmo preço e o fazendeiro pretende semear feijão, qual dos dois é mais vantajoso? _____
d. Que habilidades são desenvolvidas nesta atividade?

_____

_____

_____

2. Desenhe a **Figura 23.2** no seu geoplano.

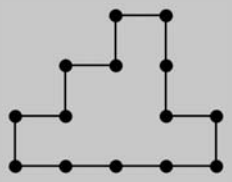


**Figura 23.2**

a. Quantas unidades de área e perímetro possui essa figura?

_____

b. Desenhe outras figuras que possuam as seguintes unidades:
• 5 de área e 20 de perímetro.
• 6 de área e 10 de perímetro.
• 7 de área e 12 de perímetro.
• 6 de área e 13 de perímetro.

c. O que você conclui da relação entre área e perímetro de uma figura qualquer?

_____

_____

_____

d. Que habilidades são desenvolvidas nesta atividade?

_____

_____

_____

**COMENTÁRIO**

*Esta atividade permite que o aluno faça a distinção entre área e perímetro, inclusive verificando que figuras com o mesmo perímetro têm áreas distintas e vice-versa.*

3. Construa no geoplano um retângulo com 20 unidades de área.
a. Existem outras maneiras de construí-lo? Relacione alguns resultados.

| Retângulo | Medida da base | Medida de altura |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |

b. Escreva suas conclusões sobre esses números.

_____

_____

_____

c. Que habilidades são desenvolvidas nesta atividade?

_____

_____

_____

4. Utilizando o seu geoplano circular, desenhe um hexágono regular.
a. É possível decompor seu hexágono em triângulos congruentes?

_____

_____

_____

b. Desenhe outros polígonos regulares e os decomponha em triângulos, se possível.

c. Por suas observações, crie uma estratégia para calcular a área de polígonos regulares.

d. Deduza uma fórmula para calcular a área de um polígono de "n" lados.

e. Que habilidades são desenvolvidas nesta atividade?

_____

_____

_____

***COMENTÁRIO***

*A primeira coisa a observar é que as atividades anteriores podem ser utilizadas desde o início do terceiro ciclo. O desafio para você é observar quais são os atributos que elas desenvolvem em seus alunos. Volte ao boxe de atenção e verifique se as suas observações foram pertinentes. Comente suas conclusões com seus colegas e com o tutor.*

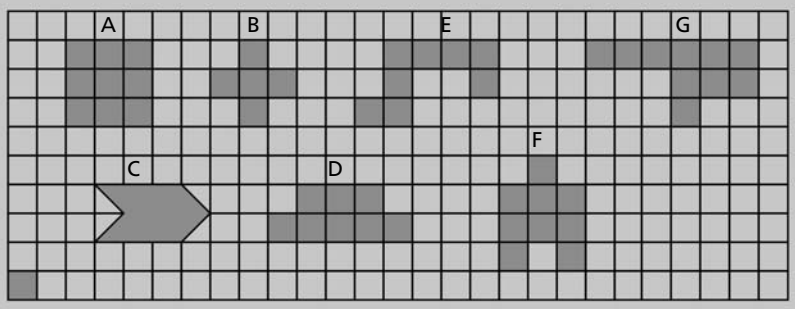
*Questões como o primeiro item da Atividade 2 objetivam ressaltar que aumentamos o perímetro de uma figura quando "quebramos" bastante os seus lados. Num primeiro momento, os alunos ficam presos em formar polígonos. Aos poucos, eles vão percebendo que podem formar figuras quaisquer. Esse também é outro tipo de potencialidade desta tarefa: explorar formas variadas, não apenas as poligonais. Lembre-se de que não é possível construir uma figura com 6 unidades de área e 13 de perímetro. É importante discutir o porquê dessa impossibilidade no geoplano. Analise as outras atividades!*

## Conversando sobre o laboratório de Geometria: O papel quadriculado

No lugar do geoplano, poderíamos ter realizado algumas atividades anteriores utilizando uma folha de papel quadriculado (ou triangulado, ou sextavado, conforme a malha que desejarmos). Outras atividades serão mais apropriadas em papel. Você será capaz de avaliar, mas aconselhamos variar os recursos, ainda que tenha o mesmo objetivo.

***ATIVIDADES***

5. Observe as figuras a seguir e compare:



a. Quais são as figuras que têm a mesma área da figura A?

b. Que figuras têm o mesmo perímetro da figura A?

c. Que conclusões você tirou? Relate por escrito e justifique.

d. Que habilidades são desenvolvidas nesta atividade?

6. No papel quadriculado, construa todos os retângulos que você puder, indicando em cada item quantos retângulos conseguiu formar:

| Nº de quadradinhos | Nº de figuras |
|---|---|
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 9 | |
| 10 | |
| 13 | |
| 25 | |
| 29 | |
| 36 | |

Responda às seguintes perguntas:

a. Que dimensões você obteve para os lados dos retângulos construídos com 9 e 10 quadradinhos?

b. Com quais números de quadradinhos foi possível construir quadrados? O que você conclui dessa observação?

c. Para que um quadrado possua 100 unidades de área (quadradinhos), qual deve ser a medida de seu lado?

d. Como podemos calcular a área de um quadrado qualquer?

e. Em alguns casos, você só conseguiu construir um retângulo. Cite outros números para os quais aconteceria o mesmo. Justifique sua resposta.

f. Que habilidades são desenvolvidas nesta atividade?

7. Observe as unidades especificadas na **Figura 23.4.b** e preencha o quadro a seguir, determinando as áreas das regiões da **Figura 23.4.a** nas diversas unidades.

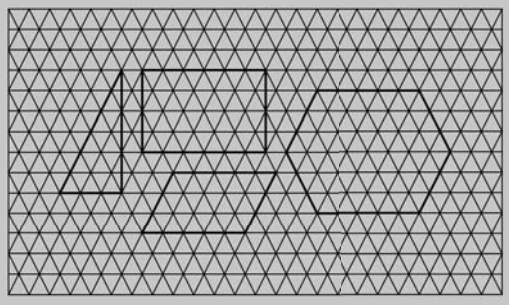


**Figura 23.4.a:**
Regiões no papel triangulado.

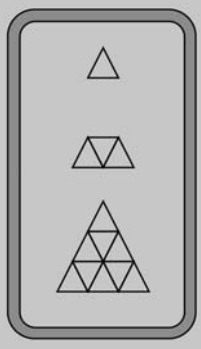


**Figura 23.4.b:**
Unidades de medida de área.

| Região | Área | | |
|---|---|---|---|
| | Na unidade u | Na unidade v | Na unidade t |
| A | | | |
| B | | | |
| C | | | |
| D | | | |

f. Que habilidades são desenvolvidas nesta atividade?

8.

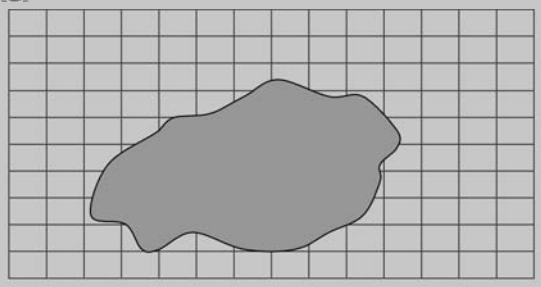


**Figura 23.5:** Representação de um lago.

Faça um cálculo aproximado da área do lago desenhado na **Figura 23.5**. Que habilidades são desenvolvidas nesta atividade?

_____

_____

_____

***COMENTÁRIO***

*As atividades com papel quadriculado permitem várias abordagens conceituais. Como você deve ter percebido, os exemplos dados nessas atividades permitem explorar a variação de unidades, estimativa de cálculo, dedução de fórmulas, além de outras habilidades que você deve ter listado enquanto as analisava. O papel quadriculado permite também explorar a composição e decomposição de figuras e calcular a área de objetos do cotidiano, como folhas de plantas ou penas de pássaros. Idéias não faltarão; agora é com você!*

**!**

O papel quadriculado, além de permitir trabalhar o cálculo estimado, propicia-nos pensar em atividades que analisem áreas de figuras pouco convencionais, porém muito comuns em nosso dia-a-dia. Assim, propor tarefas que analisem essa variedade de formas deve ser uma prática docente constante.

## CONVERSANDO SOBRE O LABORATÓRIO DE GEOMETRIA: OS MINÓS

Os minós constituem um interessante recurso criado pelo matemático americano Solomon W. Golomb, nascido em 1932. Seu livro *Poliminós*, escrito em 1965, descreve inúmeros desafios e suas soluções.

Trata-se de um conjunto de peças formadas pela junção de dois ou mais quadrados iguais (aqui denominados minós), de modo que dois minós fiquem com um lado em comum, como pode ser observado na **Figura 23.6.a**.

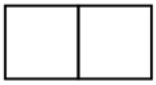


**Figura 23.6.a:**
Junção correta de minós.

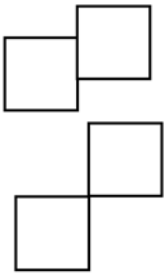


**Figura 23.6.b:**
Junção errada de minós.

Quando juntamos dois minós, chamamos dominó; se são três, triminós; se são quatro, tetraminós; se são cinco, pentaminós; generalizando, acima disso, poliminós.

***ATIVIDADES***

9. Utilizando papel quadriculado, desenhe todas as peças do dominó, triminó, tetraminó e pentaminó. Relacione o número de peças encontrado na tabela a seguir:

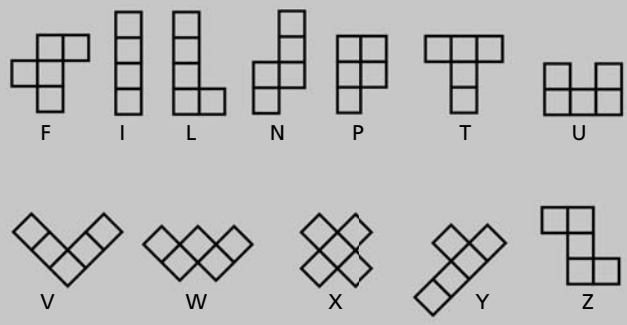



**Figura 23.7:** As 12 peças do pentaminó.

| Poliminó | Nº de peças |
|---|---|
| Dominó | |
| Triminó | |
| Tetraminó | |
| Pentaminó | |

***COMENTÁRIO***

*Para alunos do Ensino Fundamental, essa atividade deve ser aplicada aos poucos, um poliminó de cada vez.*

*Você deve ter encontrado as 12 peças do pentaminó, mas os alunos do Ensino Fundamental costumam encontrar mais peças. Eles consideram diferentes as peças que foram desenhadas em posições diferentes. É preciso alertá-los de que as peças que podem ser sobrepostas por meio de reflexão ou rotação são iguais.*

*No Módulo Prático, há modelos dos poliminós em tamanho ideal para serem manuseados. Você deve utilizá-los para construir peças de papelão, cartolina, emborrachado, papel pluma ou outro material. Esse será um item importante para seu laboratório pessoal.*

*Os poliminós, desenhados ou recortados, ensejam várias atividades como, por exemplo, determinar as áreas e perímetros das peças, montar figuras diversas com mesma área e perímetros diferentes, montar figuras com o mesmo perímetro e áreas diferentes etc.*

*Particularmente, os pentaminós oferecem maiores possibilidades de trabalhar os conceitos da Geometria, como veremos a seguir.*

*As 12 peças do pentaminó são associadas a letras do alfabeto, como se pode observar na* ***Figura 23.7****.*

10. Utilizando os pentaminós:

a. Construa uma figura com 18 unidades de perímetro.

b. É possível construir outras figuras com o mesmo perímetro?

c. É possível construir um retângulo com esse perímetro?

d. Determine a área de cada uma das figuras que você conseguiu construir.

e. Que conclusões você pode tirar?

f. Que habilidades são desenvolvidas nesta atividade?

***COMENTÁRIO***

*Com alguma paciência, você construiu umas duas ou três figuras. Uma possibilidade é usar as peças N e T. Apesar de as figuras terem o mesmo perímetro, podem ter áreas diferentes. O retângulo pode ser construído utilizando-se as peças F, P, U e Y. Experimente! O conceito mais fortemente trabalhado nesta atividade é o da composição de figuras.*

11. Utilizando o papel quadriculado, verifique o que acontecerá com o perímetro de cada peça do pentaminó, se dobrarmos a medida do lado do minó. E com sua área, o que acontecerá? E se dividirmos por dois? Que habilidades são desenvolvidas nesta atividade?

***COMENTÁRIO***

*Esta atividade normalmente surpreende os alunos do Ensino Fundamental, provocando uma reflexão sobre a noção intuitiva de* tamanho *das figuras.*

**!**

Além do trabalho com áreas, os pentaminós podem ajudar na compreensão dos conceitos de semelhança, simetria, perímetro e volume. Também podem ser utilizados no estudo de análise combinatória (quantas peças teria um hexaminó?).

## TANGRAM

Em diversas aulas já utilizamos o Tangram quadrado para construir conceitos em Geometria. Veja algumas atividades específicas para o conceito de área.

***ATIVIDADES***

12. Qual é a área da peça quadrada (Q), do triângulo médio ($T_m$) e do paralelogramo (P), considerando-se como unidade o triângulo pequeno ($T_p$)? Que habilidades são desenvolvidas nesta atividade?

13. Considerando $T_m$ como unidade, qual a área do quadradão formado com todas as peças do Tangram?
Que habilidades são desenvolvidas nesta atividade?

14. Utilizando todas as peças do Tangram:
a. Forme um hexágono, um triângulo e um paralelogramo não-retangular.

b. O que você pode concluir sobre a área dessas figuras?

c. Os perímetros são iguais?

d. Utilizando o quadrado Q como unidade, determine a área das figuras.

e. Que habilidades são desenvolvidas nesta atividade?

**COMENTÁRIO**

*Você deve ter observado que, para alunos do Ensino Fundamental, as atividades propostas anteriormente podem, e devem, ser desdobradas em várias. Nesse nível, o professor teria de intervir, provocando reflexões sobre os vários conceitos envolvidos, como ângulo, congruência, semelhança, unidades de medida, convexidade, além de perímetro e área. No caso do trabalho com áreas, os objetivos maiores do uso do Tangram são a composição e decomposição de figuras e a variação da unidade de área.*

*Além disso, podemos variar as figuras, representando animais ou imagens abstratas; podemos também variar o modelo do Tangram. Uma atividade interessante seria calcular, aproximadamente, a área de um coração partido ou de um Tangram oval, utilizando como unidade o $T_p$ do Tangram quadrado.*

*Certamente você está cheio de idéias. Anote-as e depois comente com seus colegas e com o tutor no pólo.*

## CONVERSANDO SOBRE O LABORATÓRIO DE GEOMETRIA: MAPAS E PLANTAS BAIXAS

Como você sabe, o trabalho com mapas e plantas baixas permite uma combinação dos conceitos de área, unidades de medida e escala. Veja outras atividades a seguir.

***ATIVIDADES***

15. A superfície do Brasil é, aproximadamente, de 8 511 996 km$^2$.

**Figura 23.8:** Mapa do Brasil.

a. Calcule, aproximadamente, a área dos estados de Roraima e do Rio Grande do Sul.

_____

_____

b. Considerando que a escala do mapa é de 1:1.000, qual é o lado do quadradinho da malha?

_____

c. Qual é o maior estado, o Acre ou Pernambuco?

_____

d. Quantos "Pernambucos" cabem no Rio Grande do Sul?

_____

_____

16. Observe a planta de um consultório médico:

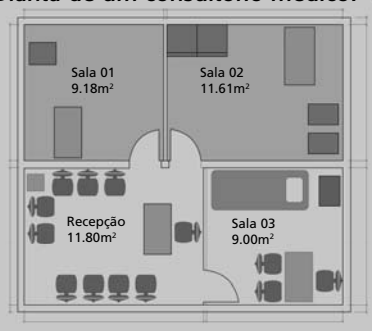



**Figura 23.9:** Planta de consultório médico.

a. Considerando que a sala 1 é quadrada, calcule as dimensões das demais salas.

b. Em que escala está desenhada a planta?

_____

c. Quais são as dimensões reais da maca que está na sala 3?

_____

**COMENTÁRIO**

*Obviamente, convém que as atividades com mapas e plantas sejam realizadas com calculadora e que os cálculos sejam aproximados. Por outro lado, esse tipo de recurso dá uma boa idéia de como os conceitos geométricos são utilizados na vida real. Certamente, você saberá propor outras atividades. Discuta suas idéias com seus colegas e com o tutor.*

*Para finalizar nossa aula, vamos discutir as fórmulas de áreas das principais figuras planas. Como dissemos no início da aula, não convém que essas fórmulas sejam apresentadas aos alunos como milagrosas e únicas soluções para o cálculo de áreas. Alunos que tenham oportunidade de construir o conceito de área e desenvolver habilidades relacionadas com este conceito podem deduzir as fórmulas mais comuns a partir da área do retângulo, apenas compondo e decompondo os polígonos. Claro que a área do círculo é uma exceção a essa regra. Mas, como será visto na próxima aula, a área do círculo pode, também, ser deduzida por decomposição.*

**!**

Como você viu na aula anterior, de nada adianta colocar um número seguido de uma unidade, 5km, por exemplo; também não há valor cognitivo para o aluno quando ele apenas decora as fórmulas para o cálculo de áreas sem compreendê-las.

17. Utilizando as peças Q e $T_p$ do Tangram quadrado, construa um paralelogramo. Movimente um $T_p$ para formar um retângulo. Separando os dois triângulos, forme dois quadriláteros.

a. O que você pode dizer sobre as áreas do paralelogramo e do retângulo?

_____

_____

_____

b. O que você pode dizer sobre as áreas do paralelogramo e a soma das áreas dos dois quadriláteros?

_____

_____

_____

c. Representando por letras diferentes os lados diferentes e por letras iguais os lados iguais, tanto Q como os de Tp, deduza, de duas maneiras, uma fórmula para calcular a área do paralelogramo: uma pela sua transformação em retângulo; outra pela sua transformação em dois quadriláteros.

_____

_____

_____

**!**

Lembre-se de que no Tangram quadrado temos dois paralelogramos: o quadrado (Q) e o não-quadrado (P).

18.

a. Apresente três idéias para compor ou decompor um trapézio, utilizando triângulos e paralelogramos.

_____

_____

_____

b. Representando por letras diferentes os lados diferentes e por letras iguais os lados iguais de todas as figuras, deduza, em cada caso, uma fórmula para calcular a área do trapézio.

_____

_____

_____

**!**

Compor e decompor figuras são procedimentos geométricos imprescindíveis para o entendimento e dedução de fórmulas.

19.

a. Apresente três idéias para compor ou decompor um losango, utilizando triângulos e paralelogramos.

_____

_____

_____

b. Representando por letras diferentes os lados diferentes e por letras iguais os lados iguais de todas as figuras, deduza, em cada caso, uma fórmula para calcular a área do losango.

_____

_____

_____

***COMENTÁRIO***

*Essas atividades já não seriam tão simples para alunos do Ensino Fundamental. Podem ser usados dobraduras e recortes de papel para ajudar. Outra alternativa é o professor fazer os recortes necessários, em cartolina ou emborrachado, e apresentá-los como um quebra-cabeças. O importante é o aluno perceber que ele pode, a qualquer momento, deduzir as fórmulas sozinho.*

## RESUMO

A construção do conceito de área, pelo aluno, depende, num *primeiro momento*, do desenvolvimento de atividades que o levem a comparar áreas de figuras variadas (tanto em forma como em dimensões), até que ele perceba que figuras congruentes têm a mesma área; que se uma figura cabe dentro da outra, sua área é menor; que figuras com formatos diferentes podem ter a mesma área; que há distinção entre área e perímetro.

Num *segundo momento*, o aluno deve desenvolver a habilidade de medir áreas com variadas unidades de medida até perceber que o número que representa a medida da área depende da unidade escolhida; que devemos ter uma unidade padrão; que o quadrado unitário é esta unidade de medida.

Num *terceiro momento*, o aluno deverá ser capaz de observar a conservação da área na composição e decomposição das figuras, além de calcular áreas, por estimativa, com o quadrado unitário.

O trabalho fica completo quando, num *quarto momento*, o aluno consegue deduzir as fórmulas mais simples.

Para atingir esses objetivos, o professor deve utilizar variados recursos como: geoplano, Tangram, papel quadriculado, poliminós, mapas, plantas de arquitetura etc. O mais importante é a adequação da atividade ao desenvolvimento conceitual do aluno, lembrando van Hiele (Aula 1). Os momentos apresentados devem ser observados continuamente, em diferentes séries. O quarto só terá êxito quando os anteriores forem efetivamente atingidos.

## ATIVIDADE FINAL

Nesta aula, você conheceu e realizou 19 atividades com o objetivo de identificar procedimentos e atributos relacionados ao conceito de área de figuras planas. Você deve implementar atividades apropriadas que permitam que seus alunos desenvolvam tais habilidades. Para isso, propomos que avalie sua compreensão, ou seja, preencha o quadro seguinte, identificando em cada atividade a(s) habilidade(s) envolvida(s) em seu objetivo.

| Habilidades | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | A13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Reconhecer a conservação da área | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Compor uma figura por outras | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Decompor uma figura em outras | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Reconhecer que figuras com a mesma área podem ter perímetros diferentes | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Reconhecer que figuras com formas e dimensões diferentes podem ter a mesma área | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Reconhecer que o número que representa a área depende da unidade escolhida | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Calcular áreas por estimativas | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Deduzir as fórmulas mais comuns | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Você também pode preencher este quadro tendo como referência algumas atividades realizadas na aula anterior.

**!**

Apresente seu quadro preenchido ao tutor. Compare-o também com o quadro de um colega.

## AUTO-AVALIAÇÃO

Você tem dois grandes desafios ao final desta aula: o primeiro é perceber que a construção do conceito de área se dá por etapas; o segundo é ver que existem atividades apropriadas para cada etapa. Além disso, você trabalhou com os poliminós. Deve explorar as suas possibilidades e acrescentá-los ao seu laboratório pessoal de Geometria.

Você pode ter sentido dificuldades nas últimas atividades que se referem à dedução das fórmulas. Se foi esse o caso, volte a elas e observe que, na Atividade 18, o trapézio se transformou num retângulo quando prolongamos a base menor, isto é, quando acrescentamos dois triângulos; transformar-se-ia num paralelogramo, se juntássemos a ele sua cópia, de cabeça para baixo; uma terceira possibilidade seria traçar duas alturas pelas extremidades da base menor, dividindo-o em dois triângulos e um retângulo. Descreva as possibilidades da Atividade 19!

!

Uma boa maneira de se auto-avaliar é conversar com seus colegas e com o tutor sobre as idéias que você teve durante a aula. Anote-as para não esquecer.

## INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você estudará retas, círculos e circunferências, utilizando, como principal recurso, as construções geométricas. Tenha à mão a Aula 8 de Geometria Básica, os módulos de Construções Geométricas e seu material de desenho. Se puder, faça uma rápida revisão.

AULA 24

# Estudando retas, círculos e circunferências

## Meta da aula

Instrumentalizar o ensino de retas, círculos e circunferências por meio de construções geométricas.

## objetivos

Esperamos que, após esta aula, você seja capaz de:

- Encontrar a fórmula para calcular a área de um círculo.
- Localizar o centro de uma circunferência qualquer.
- Construir mediatrizes e localizar pontos estratégicos.
- Inscrever polígonos regulares em geoplanos.
- Comparar a medida do ângulo inscrito e do ângulo central correspondente.
- Conhecer a utilização de recursos de Informática (*softwares* e internet) nas aulas de Matemática.

## Pré-requisitos

Para o seu bom rendimento nesta aula, sugerimos que revise o conteúdo da Aula 8 de Geometria Básica, sobre círculos, circunferências, posições relativas entre retas e círculos, e entre dois círculos, medida de ângulos inscritos etc. Ter às mãos o Módulo de Construções Geométricas será importante para a revisão de conceitos, propriedades ou procedimentos de construção. O acesso à internet também o ajudará, pois você poderá ver as construções geométricas em *softwares*, em que o movimento trará novas alternativas para descobertas conceituais.

**!**

Lembre-se de utilizar as figuras disponíveis no Módulo Prático e de acessar as atividades da disciplina na Plataforma Cederj.

## INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, a disciplina de Desenho Geométrico deixou de constar dos currículos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio; professores e livros didáticos de Matemática não incorporaram seus conteúdos ao ensino da Geometria. Acreditamos que o trabalho com as construções deve ser inserido sempre que possível, nas aulas de Geometria. O fato de as construções geométricas terem sido trabalhadas isoladamente das aulas de Matemática, muitas vezes nas aulas de Artes (Educação Artística), fez com que a análise dos conceitos matemáticos ficasse em segundo plano. Outro fator negativo que contribui para esse aligeiramento foi a ênfase dada apenas aos procedimentos de construção, sem a devida sustentação nas propriedades da Geometria.

Na aula de hoje e na seguinte, você verá que pode trabalhar com as construções geométricas a partir de diferentes perspectivas didático-metodológicas, incluindo-as em atividades matemáticas variadas. Assim, durante a realização das atividades propostas, esperamos também que você reflita sobre a exploração dos conceitos da Geometria Plana desde os primeiros ciclos do Ensino Fundamental, em especial, da 5ª à 8ª série.

Como estratégia metodológica principal, iremos apresentar e utilizar alguns quebra-cabeças matemáticos e sugerir procedimentos para sua construção. As atividades que desenvolveremos serão sugestões de utilização para diversas séries do currículo escolar, explorando vários conceitos matemáticos. A você caberá adequá-las à sua realidade de trabalho.

**!**

Sempre que possível, você deve realizar as atividades coletivamente com seus colegas e apresentá-las ao tutor. É importante que as atividades seguintes sejam realizadas em grupo; isso pode ser imprescindível para sua aprendizagem e, conseqüentemente, auxiliará sua avaliação. Não se esqueça de justificar cada resposta. Entender cada procedimento, registrar o desenho etc. serão também estratégias importantes para sua aprendizagem.

## Conversando sobre o seu laboratório de Geometria

**Régua e compasso**

Régua e compasso são instrumentos clássicos para a construção geométrica. Na **Figura 24.1**, você pode ver a construção da mediatriz do segmento AB.

**Figura 24.1:** Construção da mediatriz.

A utilização de régua, compasso etc. permite-nos, por exemplo:

• Construir e identificar figuras geométricas.

• Reconhecer propriedades geométricas.

• Desenvolver habilidades de desenho.

• Conhecer, descrever e analisar procedimentos variados de desenho e construção.

Caso você tenha acesso à internet e queira conhecer algumas páginas sobre construções geométricas, procure os endereços seguintes:

http://wfs.vub.ac.be/schools/timeline/geometric/upphaf.html

http://www.geometria.com.br/lastpage.html

http://www.cut-the-knot.com/do_you_know/compass.html

***ATIVIDADES***

1. Descreva o processo de construção da mediatriz da **Figura 24.2**.

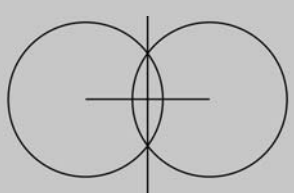


**Figura 24.2:** Determinação da mediatriz.

***COMENTÁRIO***

*Atividades que visem a reconhecer e descrever processos de construção de figuras devem ser continuamente desenvolvidas nas aulas de Geometria e de Construções. A resposta a essa atividade é aberta; o que importa é a discussão sobre as diferentes descrições feitas. Por exemplo, é importante observar que a abertura do compasso na construção das circunferências pode ser qualquer uma, desde que seja maior que a metade do segmento.*

2. Pegue o seu compasso e construa uma circunferência qualquer. É possível que você tenha marcado o ponto onde colocou a ponta seca do compasso. Esse ponto é o centro da circunferência que você desenhou. Fácil, não é mesmo? Agora, pegue uma moeda de cinqüenta centavos ou de um real e trace a circunferência determinada pela moeda. Como você faria para localizar o centro desta circunferência?

***COMENTÁRIO***

*Para encontrar o centro de uma circunferência você precisará traçar, pelo menos, duas cordas quaisquer, com suas mediatrizes. O resto é com você!*

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR

A seguir, divulgamos outros *sites* em que você poderá encontrar conteúdos relacionados à Geometria e, em alguns deles, às construções geométricas. Acesse-os:

http://www-cabri.imag.fr

www.cabri.com.br

http://www.keypress.com/sketchpad/java_gsp/dr1_sketches/jsp_demo_9pts.htm

http://teleline.terra.es/personal/joseantm

http://wfs.vub.ac.be/schools/timeline/geometric/upphaf.html

http://www.geometria.com.br/lastpage.html

http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec

http://www.cinderella.de

http://www.matematica.br/igeom

***COMENTÁRIO***

*Esta atividade é complementar. Lembre-se de realizá-la quando estiver conectado. Procure realizá-la no pólo; acesse também a Plataforma Cederj e converse com seu tutor sobre os recursos encontrados.*

## CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO COTIDIANO: ENCONTRANDO O CENTRO GEOGRÁFICO DO BRASIL

O professor Luiz Márcio Imenes, na **Revista do Professor de Matemática** nº 6, descreve-nos um exemplo para determinar o centro geográfico do Brasil. Segundo ele, em alguns mapas do Brasil, podemos observar, em Mato Grosso, no município de Barra do Garças, a uns 100km da divisa com Goiás, um ponto chamado centro geográfico do Brasil.

Vejamos como se define esse centro geográfico, considerando:

**N**: ponto mais setentrional do país, isto é, o ponto mais ao norte, que é o Monte Caburaí (Roraima);

**S**: ponto mais meridional, ou seja, o ponto mais ao sul do país, que é a Barra do Chuí (Rio Grande do Sul);

**O**: ponto mais ocidental, mais a oeste, que fica em Acampamento (Acre);

**L**: ponto mais oriental, mais a leste, a Ponta do Seixas, em Cabo Branco (Paraíba).

Veja a localização citada anteriormente na **Figura 24.3.**

**!**

Antes de continuar a leitura, pense onde você localizaria o centro geográfico do Brasil.

A **Revista do Professor de Matemática** é uma publicação quadrimestral da Sociedade Brasileira de Matemática. Você deve conhecê-la e, se possível, assiná-la.

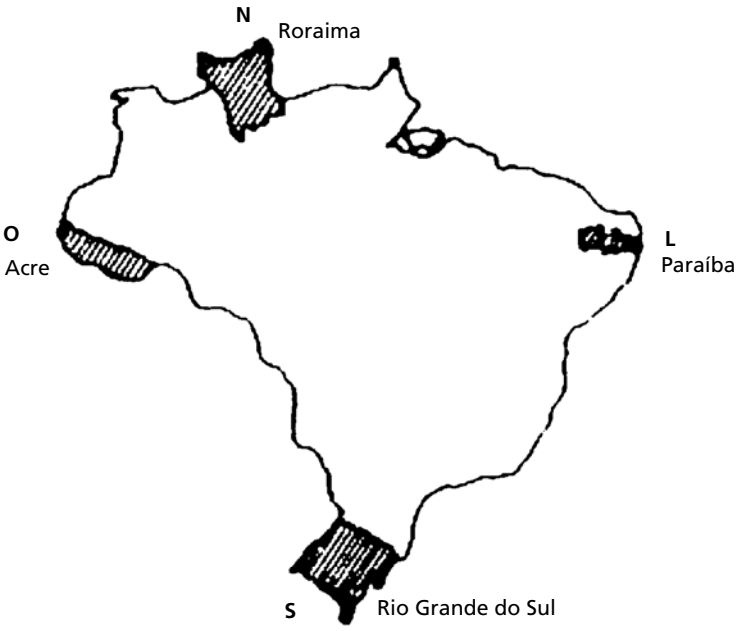



**Figura 24.3:** Mapa do Brasil.

A seguir, construímos a reta "r", que é mediatriz do segmento NS, e a reta "s", que é a mediatriz do segmento OL. A intersecção dessas mediatrizes forma o ponto C, que é o centro geográfico do Brasil (**Figura 24.4**).

**Figura 24.4:** Localização do centro geográfico do Brasil.

**!**

Quando escrevemos sobre conteúdos matemáticos, muitas vezes utilizamos aspas ou outros recursos apenas para chamar atenção ou para evitar que o leitor confunda um ente matemático com uma letra qualquer. De modo geral, esse procedimento contraria as regras do bom Português. Saiba reconhecer essas peculiaridades para não maltratar sua língua materna. Afinal, o bom Português é uma qualidade inerente à boa Matemática!

Lembrando que todos os pontos da mediatriz de um segmento de reta são eqüidistantes das extremidades desse segmento, podemos afirmar que o ponto C eqüidista de N e S, bem como eqüidista de O e L, o que não significa que eqüidiste dos quatro pontos. Aliás, dados quatro pontos coplanares, nem sempre existe um ponto eqüidistante dos quatro. Em outras palavras, nem sempre existe uma circunferência que passe por quatro pontos coplanares. Entretanto,se tal circunferência existir, seu centro será obtido por intersecção das mediatrizes.

Segundo o professor Imenes, a idéia que está por trás do conceito de centro geográfico do Brasil surge a partir da tentativa de se localizar um ponto que seja, tanto quanto possível, eqüidistante dos quatro extremos do nosso território. E, ressalta ainda, devido às características do território brasileiro, podemos verificar que o ponto C é quase eqüidistante de N, O, S e L. Concluindo, o autor destaca que, para um país como o Chile, por exemplo, essa metodologia não fornece resultado adequado em função da silueta de seu território. Veja num mapa!

## CONVERSANDO SOBRE A MATEMÁTICA A INTEGRAÇÃO CURRICULAR

Uma boa alternativa de desdobramento da situação anterior é pegar o mapa do Chile e analisar a observação do professor Imenes. Neste momento, você pode fazer uma interessante integração curricular com a Geografia.

**!**

Lembre-se de que, quando falamos da integração curricular, não estamos nos referindo apenas àquela feita com outras disciplinas. Também avaliamos que a integração pode acontecer na própria Matemática, por exemplo, estudando as construções geométricas e desenvolvendo a competência métrica e o senso numérico, o raciocínio geométrico e a análise da forma. Para conhecer mais detalhes, acesse em www.mec.gov.br em Parâmetros Curriculares Nacionais para 3º e 4º ciclos.

## Conversando sobre o laboratório de Geometria

**Softwares educativos**

Na Aula 4, você tomou conhecimento das aplicações do Cabri (*sigla que significa Caderno de Desenho Interativo*) *Géomètre, software* de Geometria que trabalha com as construções geométricas dinamicamente. No *site* http://www.cabri.com.br, você pode trabalhar com o Cabri por aproximadamente 15min em cada acesso. Trata-se de uma versão demonstrativa gratuita do *software*.

No Brasil, esse *software* é comercializado pela PUC-SP; você também poderá acessar a página dos idealizadores do programa, na França (Grenoble), no endereço: http://www.cabri.imag.fr/a-propos/triangle.html. Lá, você verá animações simples de como construir um triângulo, traçar alturas, mediatrizes, definir macroconstruções etc.

A seguir, você poderá realizar quatro atividades complementares para se familiarizar um pouco com o Cabri. Se as realizar, converse com seus colegas e com o tutor sobre suas descobertas.

## ATIVIDADES COMPLEMENTARES

1) Clique no menu criar e desenhe um triângulo. Meça seus lados e ângulos. Clicando, agora, no menu construir, construa e meça todas as suas alturas. Localizando o cursor sobre um dos vértices, clique (aparece a mãozinha) e arraste, obtendo diferentes triângulos. Das observações que você fará ao modificar seu triângulo, relate três.

_____

_____

_____

2) Crie um segmento e construa sua mediatriz. Marque um ponto sobre a mediatriz e ligue-o a cada extremo do segmento. Meça os segmentos formados. Movendo o ponto sobre a mediatriz, o que observa?

_____

_____

_____

3) Construa um quadrado. Mova os vértices e faça observações. Se o quadrado se deformou, houve problemas em sua construção. Descubra-os e faça uma nova construção. Faça o mesmo para o triângulo eqüilátero.

4) Desenhe um segmento qualquer. Seguindo as instruções do *software*, construa a macroconstrução de um triângulo eqüilátero cujo lado seja o próprio segmento. Reflita sobre o poder das macroconstruções com o *Cabri* para desenvolver processos matemáticos não-habituais.

***COMENTÁRIO***

*O tempo de realização das atividades anteriores irá depender da familiaridade que você irá adquirir com o software. Viaje por ele antes de começar sua experiência; o importante é conhecer o programa, ainda que superficialmente.*

*Sensibilizar-se pelo uso da Informática e pensar nas contribuições do Cabri nas aulas de construções geométricas devem ser os objetivos principais na realização das quatro atividades anteriores. Essas atividades podem ser feitas através de construções com régua e compasso. No entanto, não teremos a possibilidade de movimento (Atividades 1, 2 e 3), ou seja, clicar e arrastar, e de inserção das macroconstruções (Atividade 4). Nas Atividades 1, 2 e 3, você deve ter notado que, mesmo modificando as figuras, algumas propriedades se mantêm inalteradas como, por exemplo, a intersecção das alturas num mesmo ponto.*

!

Para mais atividades com o Cabri, em Português, acesse http://www.cabri.com.br/atividades.htm. Além do Cabri, você pode encontrar outros *softwares* de Geometria Dinâmica e Construções Geométricas, por exemplo, o *Cinderella* e o *Geometricks*. Encontre-os na Internet, por meio de um buscador da rede (Google, Cadê etc.).

## Conversando sobre o seu laboratório de Geometria

**Quebra-Cabeças**

Para as atividades desta aula e da seguinte, utilizaremos também quebra-cabeças como recurso didático. Esses recursos lúdicos podem ser construídos em madeira, cartolina ou emborrachado etc. A sua construção – por dobraduras ou construções geométricas –, juntamente com os alunos em sala de aula, pode propiciar momentos de discussão e aprendizagem de conceitos matemáticos, relacionando Geometria e números como, por exemplo, composição e decomposição, área, fração e polígonos. A utilização de quebra-cabeças nos permite:

- formar figuras que lembrem animais, objetos quaisquer, formas abstratas;
- construir e identificar figuras geométricas;
- compor e decompor figuras;
- trabalhar com ângulos: comparação e congruência;
- formar polígonos convexos e não-convexos;
- utilizar medidas não padronizadas para comparar figuras;
- trabalhar com perímetros e áreas de figuras etc.

***ATIVIDADES***

3. **Na Figura 24.5** apresentamos o Tangram circular. Que conceitos geométricos podem estar envolvidos na construção deste quebra-cabeça? Justifique sua resposta para cada conceito apresentado.

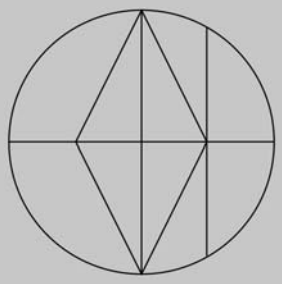


**Figura 24.5:** Tangram circular.

***COMENTÁRIO***

*Realizar esta atividade é muito simples. Será muito importante, pois na auto-avaliação da Aula 19 a utilizaremos. Por exemplo, o conceito de ponto médio está na sua lista?. Se necessário, utilize o modelo disponível em seu Módulo Prático.*

**Hipócrates** de Chios, que viveu em Atenas, por volta de 430 a.C., dedicou-se à resolução dos três problemas famosos da Grécia antiga: duplicação do cubo, quadratura do círculo e trissecção do ângulo. Embora não tenha conseguido avanços no último problema, credita-se a ele notável sucesso nos estudos dos dois primeiros.
Por seus resultados, os matemáticos da época acreditavam que a quadratura das lunas, figuras em forma de lua limitada por dois círculos de raios diferentes, levaria à quadratura do círculo. Acredita-se, também, ter sido Hipócrates o primeiro matemático a utilizar o método de demonstração indireta ou redução ao absurdo.

4.Você sabia que **Hipócrates**, um contemporâneo de Pitágoras, verificou que a área de A mais a de B é igual à de T, e achou que era fácil deduzir essa curiosidade? Pois, realmente, é fácil! Verifique e demonstre-a você também!

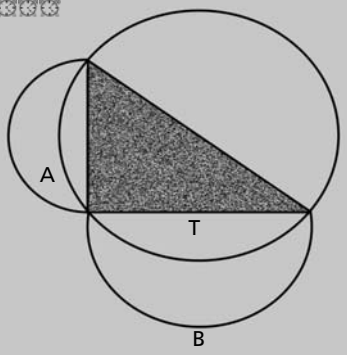



**Figura 24.6:** O problema da lunas de Hipócrates.

***COMENTÁRIO***

*Para responder a esta atividade, você pode utilizar a relação pitagórica, envolvendo áreas, propriedade estudada nas duas aulas anteriores. Não precisa utilizar construções geométricas. Sem dúvida, se o fizer, será também importante. Lembre-se de conversar com seus colegas e com o tutor.*

*Você sabe como mostrar aos seus alunos a área do círculo? Veja, a seguir, uma possibilidade de recurso didático que concretiza esse conceito.*

## Conversando sobre o laboratório de Geometria

Com 12 peças iguais de madeira, triângulos isósceles equivalentes a 1/12 do semicírculo e um pedaço de metal flexível, onde fixaremos estas peças, podemos formar um semicírculo, fechado ou aberto, em 12 setores circulares (**Figura 24.7**).

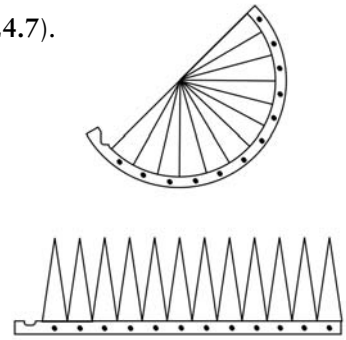


**Figura 24.7**

***ATIVIDADE***

5. Utilizando o recurso anterior, encontre a fórmula que nos permite calcular a área do círculo.

***COMENTÁRIO***

*Este tipo de recurso possibilita-nos obter a fórmula da área do círculo, a partir do triângulo ou do losango formado por dois triângulos. Também permite-nos obter a área do setor circular, estudar a triangulação aproximada de outras figuras poligonais e ver que a área total independe dessa triangulação.*

Na Aula 3, você conheceu e trabalhou com o geoplano quadrado (**Figura 24.8**). Temos também o geoplano circular (**Figura 24.9**), que viabiliza o estudo de: raios, cordas, tangentes, secantes, ângulos na circunferência, polígonos inscritos e circunscritos, polígonos estrelados (Aula 14), dentre outros.

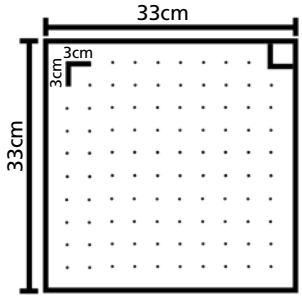



**Figura 24.8:** Geoplano quadrado.

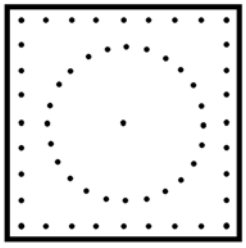


**Figura 24.9:** Geoplano redondo.

***ATIVIDADE***

6. Você consegue construir polígonos regulares no geoplano quadrado? Exemplifique e justifique sua resposta. E no geoplano circular? Exemplifique, justifique sua resposta e compare-a com a anterior.

_____

_____

_____

***COMENTÁRIO***

*Lembre-se de que todo polígono regular é inscritível na circunferência. Essa propriedade permitirá a você responder à pergunta sobre polígonos regulares construídos no geoplano circular. Lembre-se de que esses modelos de geoplano estão disponíveis no Módulo Prático.*

## CONVERSANDO UM POUCO SOBRE HISTÓRIA

A divisão da circunferência em arcos iguais constitui um dos movimentos mais antigos de nossa civilização. Você se lembra da trissecção do círculo, um dos problemas clássicos da Geometria?

Os sumerianos e acadianos (3000 a.C.), povos que habitaram a região superior da Baixa Mesopotâmia, hoje parte do Iraque, apresentavam as rodas de seus carros com seis raios opostos diametralmente, formando ângulos centrais iguais. Como exemplo, você pode imaginar a roda gigante de um parque de diversões. Tal apresentação leva-nos a concluir que os mesopotâmios, já naquela época, sabiam dividir a circunferência de círculo em seis partes iguais. Seus descendentes, assírios e caldeus, foram os que nos ensinaram a dividir a circunferência em 360 graus, os graus em minutos e os minutos em segundos.

***ATIVIDADE***

7. Qual a relação existente entre o ângulo inscrito num círculo e o ângulo central correspondente? Faça essa atividade por meio de construção com régua e compasso,utilizando o geoplano circular. O que você pode concluir?

_____

_____

_____

***COMENTÁRIO***

*Você já deve conhecer essa relação, pois foi estudada em Geometria Básica. Se houver dúvida para perceber a relação, utilize o transferidor e meça os referidos ângulos em cada recurso. Observe que a atividade com material concreto prepara o aluno de Ensino Fundamental para a demonstração formal.*

## RESUMO

As técnicas de construções geométricas permitem explorar inúmeras propriedades da Geometria plana, principalmente se combinarmos essas técnicas com os recursos de Geometria dinâmica, hoje disponíveis. *Softwares*, como o *Cabri Géomètre*, *Cinderella* e o *Geometricks*, criam novas alternativas para descobertas conceituais. O professor de Matemática pode, também, introduzir as construções geométricas em suas aulas de Geometria a partir de quebra-cabeças ou outros recursos como o geoplano, quadrado ou circular.

## AUTO-AVALIAÇÃO

Você deve ter entendido como se pode construir uma mediatriz (Atividade 1) e localizar o centro de uma circunferência qualquer (Atividade 2). Foram objetivos importantes da aula ter identificado conceitos e procedimentos na construção de quebra-cabeça (Atividade 3), demonstrado a fórmula para o cálculo da área do círculo (Atividade 5), inscrito polígonos regulares no círculo (Atividade 6) e compreendido que o ângulo inscrito num círculo é a metade do ângulo central correspondente (Atividade 7). A relação pitagórica e sua utilização na resolução de problemas históricos (Atividade 4) também deve ter sido revista e corretamente aplicada. A conclusão da Atividade 8 (Tangram circular) será proposta na auto-avaliação da aula seguinte. Dessa forma, você poderá esclarecer, se for o caso, alguma dúvida sobre suas respostas para essa atividade. Se você realizou as atividades extras, sem dúvida enriqueceu o seu conhecimento com dinâmicas diferentes sobre as construções geométricas, uma vez que a internet e os *softwares* devem tê-lo ajudado.

## INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você continuará estudando e conhecendo possibilidades de inserção das construções geométricas em suas aulas.

Os seus módulos de Geometria Básica e de Construções Geométricas devem estar à mão, para que você relembre algum conceito, se necessário. Pegue também o seu material de desenho (régua, compasso, transferidor e esquadros), cartolina, papelão ou material emborrachado, para construir alguns quebra-cabeças do tipo Tangram, ampliando os recursos do seu laboratório pessoal.

AULA 25

# Estudando simetrias

## Meta da aula

Instrumentalizar o ensino
das transformações no plano.

## objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Conceituar simetria axial.
- Construir e utilizar o livro de espelhos.
- Utilizar a simetria na resolução de problemas.
- Entender conteúdo curricular como articulação de conceitos, procedimentos e atitudes.

## Pré-requisitos

Para que você acompanhe esta aula, é importante que reveja:
Conceito de eixo de simetria (Aula 10).
Conceito de ângulos (Aula 4) e sua identificação em polígonos e compreenda os processos de construção de polígonos regulares.

**!**

Lembre-se de utilizar as figuras disponíveis no Módulo Prático e de acessar as atividades da Disciplina na Plataforma Cederj.

## INTRODUÇÃO

Os PCN de 3º e 4º ciclos abordam o tema das isometrias em apenas uma página e associam este trabalho às primeiras noções de congruência, uma vez que as transformações isométricas conservam as propriedades métricas das figuras. Também referem-se à aplicação deste tópico às situações do cotidiano, citando as diversas criações do homem, como por exemplo, desenhos de aeronaves, edifícios e móveis. Desenvolvo este tema com alunos do 2º ciclo, abordando apenas a simetria de reflexão e translação. Profª Elizandra

No Brasil, a Professora Martha Maria de Souza Dantas, da Universidade Federal da Bahia(UFBA), foi uma das pioneiras no desenvolvimento de propostas curriculares de Geometria, enfatizando o uso das transformações geométricas.

O **Projeto Fundão**, do Instituto de Matemática da UFRJ, desenvolve pesquisas no campo da formação de professores de Matemática.

A fala anterior da professora mostra-nos uma de suas preocupações com a incipiente presença das transformações geométricas no currículo atual do Ensino Fundamental. Apesar disso, no contexto educacional brasileiro, desde a década de 1970 já podemos identificar propostas que visam à inserção de tal conteúdo no currículo.

Recentemente, trabalhos do **Projeto Fundão**, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, ratificam essa perspectiva e acrescentam contribuições de atividades, segundo o modelo de van Hiele (Nasser e Santana, 1998).

Corroborando com as perspectivas anteriormente apresentadas, nossa intenção na aula de hoje e nas duas seguintes é mostrar que o trabalho com as **transformações geométricas** precisa ser realmente implementado no currículo do Ensino Fundamental e Médio, tendo como ponto de partida os conhecimentos prévios dos estudantes, desenvolvendo-os, gradativamente, ao longo do seu processo de escolarização.

*O que pensam professores do Ensino Fundamental e Médio e associam ao conceito de simetria?* O esquema conceitual seguinte pode ser um instrumento muito útil na sondagem dos conhecimentos prévios de nossos estudantes.

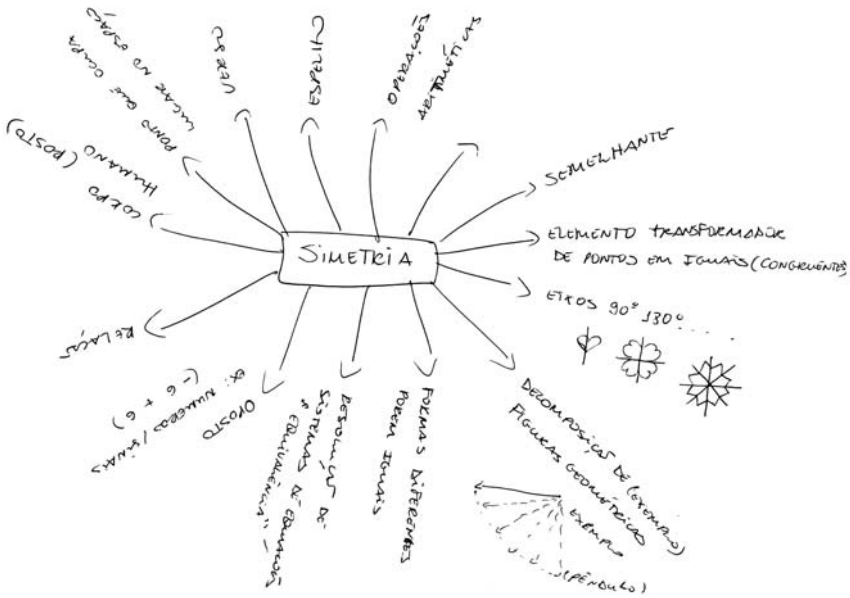



**Figura 25.1**

Antes de dar prosseguimento à leitura desta aula, utilize o esquema anterior e reflita sobre os seus conhecimentos e idéias associadas à simetria. *Como você o reorganizaria? Que idéias (palavras, exemplos, frases, desenhos etc.) você acrescentaria ou retiraria?* Converse com colegas e com o tutor.

Feita a reflexão, guarde seu esquema, pois você necessitará dele na auto-avaliação desta aula. Vamos continuar com a leitura.

Você sabe que as **ISOMETRIAS** (reflexão, rotação ou giros, translação) são transformações no plano que mantêm a forma e as medidas (comprimentos, ângulos).

Essas transformações nos possibilitam, por exemplo, apreciar qualidades estéticas, criativas e geométricas inerentes às decorações artísticas do plano; elas são baseadas em repetições e nos ajudam a resolver problemas de classificação, traçado ou combinação de formas poligonais. Enfim, estudar variantes e invariantes de uma figura ou de sua transformada é uma contribuição importante ao estudo das transformações geométricas no currículo.

Dadas as numerosas propriedades da reflexão, a identificação de um eixo de simetria interna numa figura é importante na investigação de suas propriedades e na resolução de problemas.

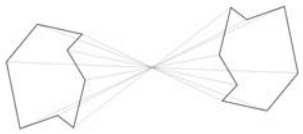
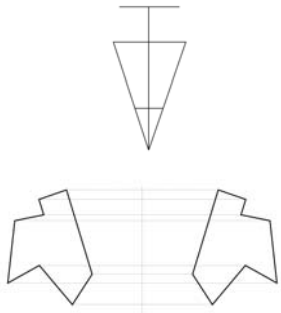
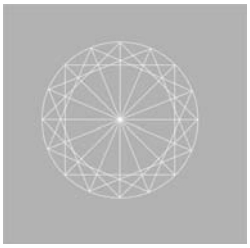
Conforme ilustrado a seguir, existem três tipos de simetria: a central, a axial e a radial.

Chama-se **ISOMETRIA** toda transformação do plano que conserva as distâncias. A reflexão, a rotação e a translação são as transformações mais importantes do grupo de isometrias do plano.

**!**

Em nossas aulas sobre as transformações no plano, não nos deteremos em propriedades e aprofundamentos teóricos. A preocupação com aspectos da construção conceitual estará em primeiro plano.

A isometria dada pela transformação que leva cada ponto P do plano em seu simétrico P' em relação a uma reta r é chamada *reflexão na reta r* ou *simetria de reflexão na reta r.*

| Simetria central | Simetria axial | Simetria radial |
|---|---|---|
|  |  |  |
| Dois pontos A e A' são simétricos em relação a um terceiro ponto C, quando estão sobre a mesma reta e ambos eqüidistam do ponto central C. Essa simetria é denominada central ou simetria em relação ao ponto C. | Dois pontos são simétricos em relação a um eixo quando estão situados sobre a mesma reta, perpendicular a esse eixo e à mesma distância dele. | A superposição das distintas posições que fazemos em um polígono regular, girando-o ao redor de um eixo que passa por seu centro, caracteriza o que denominamos simetria radial. Na Figura 25.4, você observa a simetria radial do quadrado. |

Nesta aula, realizaremos atividades envolvendo a **simetria axial**.

**!**

Existem figuras que podem ser vistas como a união de uma figura F com a sua imagem F' pela reflexão numa reta que intersecciona essa figura. Dizemos, então, que essa figura (F U F') é uma figura simétrica em relação à reta. Por exemplo, o quadrilátero AA"B"B com o A'A"B"B' (Figura 25.3a). Neste caso, dizemos que essa figura possui simetria de reflexão, simetria axial ou rebatimento. Particularmente, consideramos que a reflexão é uma simetria axial interna e r é o eixo de simetria interna ou, simplesmente, eixo de simetria da figura.

**Ana Maria Kaleff** é professora da UFF. É pesquisadora em Geometria e muito atuante na formação de Professores de Matemática.

Iniciaremos com o jogo *Queimada com obstáculos*, sugerido pela **Professora Ana Maria Kaleff** (1999).

***ATIVIDADES***

1. Para esta atividade, você precisará de uma folha retangular branca e duas canetas do tipo hidrocor de cores diferentes. Leia com atenção a apresentação, as regras e a pontuação e jogue.

***Preparação e apresentação do jogo***

1. Solicita-se à dupla de alunos que divida a folha de papel ao meio, de modo que o segmento de dobra seja perpendicular ao comprimento da folha. Cada parte da folha será o campo de jogo de cada jogador.
2. Pede-se a cada jogador que desenhe, no seu campo, três obstáculos (uma pedra, uma árvore, um canteiro etc.) e seis bonecos, sendo que um deles deve ser desenhado dentro de um círculo. Esse boneco será o chefe do campo.

***Regras do jogo***

1. A bola do é jogada de um campo para outro da seguinte maneira:
   a)Marca-se um ponto com caneta hidrocor no campo do atirador.
   b) Dobra-se o papel sobre o segmento de reta divisório dos campos.
   c)Transporta-se o ponto, por meio de decalque, para o campo adversário.

Quando o ponto transportado atingir um dos bonecos, diz-se que esse boneco foi queimado.

2. O objetivo do jogo é queimar todos os bonecos do adversário; o chefe deve ser queimado em último lugar.

***A pontuação de cada jogada é feita da seguinte maneira:***

- 1 ponto ganho para cada boneco queimado.
- 1 ponto perdido para cada obstáculo atingido no campo adversário.
- 3 pontos perdidos quando o círculo do chefe for atingido sem que os demais bonecos estejam queimados.

**!**

Essa atividade deve ser feita, preferencialmente, em dupla. O tempo de realização dependerá da motivação do grupo. O mais importante, no momento, é compreender o objetivo, dessa tarefa que poderá ser feita sem o ato de jogar.

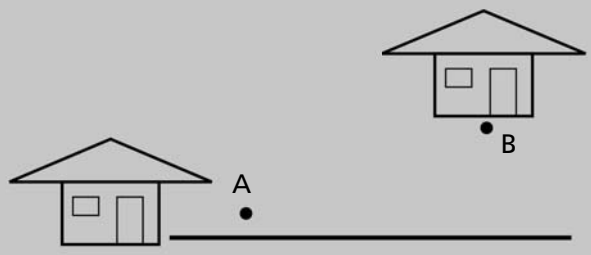
Os exemplos mais importantes de isometrias são as reflexões em retas. Toda isometria pode ser vista como um produto de reflexões em retas.

***COMENTÁRIO***

*Essa é uma simples atividade. Com ela você pode perceber que, dependendo do objetivo do professor, determinado conceito matemático pode ser trabalho em diferentes séries e com o aprofundamento devido. Lembra-se das aulas iniciais em que discutimos a diferença entre conceito e definição? Eis uma outra oportunidade para você perceber que, com esse tipo de tarefa, o aluno pode ir desenvolvendo o seu conceito intuitivo de conservação de distância, perpendicularidade e oposto (simétrico em relação a uma reta). No processo de comentar os procedimentos construídos e utilizados no jogo, o aluno vai formando o próprio repertório (que o ajudará na construção contínua da definição de simetria), que não precisa ser, necessariamente, o que foi detalhado no boxe explicativo anterior. Sobre as formas de dobrar a folha ao meio, embora tenhamos sugerido a dobra perpendicular, conhecemos as diferentes maneiras (posições) de realizá-la. Assim, como ressaltou Kaleff (1999), esta discussão é importante para que possamos perceber as situações geométricas envolvidas e suas conseqüências.*

*As isometrias também nos permitem encontrar caminhos diferentes para a resolução de determinados problemas de construções geométricas.*

2. Uma mulher mora na casa A, quer buscar água no rio r e levá-la à casa B, do mesmo lado do rio. Determine graficamente o menor caminho a ser feito por ela.




***COMENTÁRIO***

*Lembre-se de localizar um ponto P na reta r, de tal modo que P pertença à intersecção de r com o segmento AB'. Utilizando também a congruência de triângulos retângulos, você demonstrará que a menor caminho será APB.*

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR 1

O retângulo ABCD representa uma mesa de bilhar e os pontos P e Q, na diagonal BD, representam duas bolas. Desenhe a trajetória da bola P, que deve atingir a bola Q, depois de chocar-se sucessiva e ordenadamente com os lados AD, AB, DC E BC.

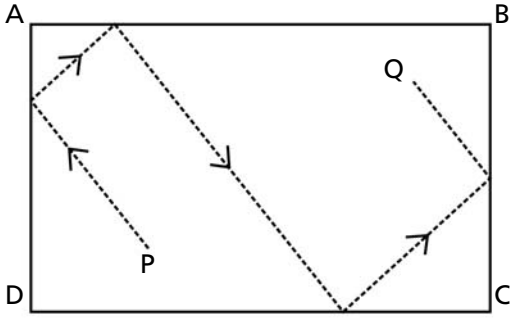


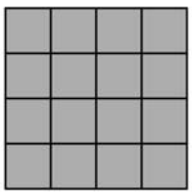

**Figura 25.2:** Meia de bilhar

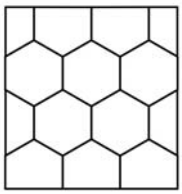
***COMENTÁRIO***

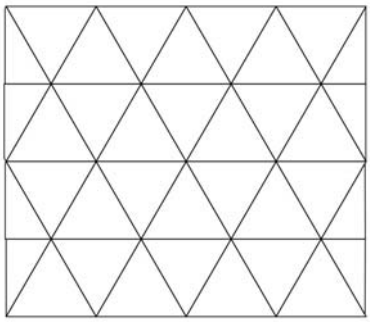
*Não deixe de utilizar isometrias na resolução deste problema. Caso não consiga resolvê-lo, não se preocupe, tente novamente quando terminar a Aula 27. Na Aula 15, de Construções Geométricas, você poderá encontrar mais aplicações das tranformações (simetria axial, translação e homotetia) na resolução de problemas.*

## Conversando sobre o laboratório de Geometria: As malhas

As malhas nada mais são do que variações e deformações possíveis do papel quadriculado. Podem ser utilizadas para: construir e explorar figuras diversas, ampliar e reduzir figuras, identificar regularidades, trabalhar com transformações no plano, elaborar mosaicos. Veja alguns exemplos de malhas quadrada, hexagonal e triangular.

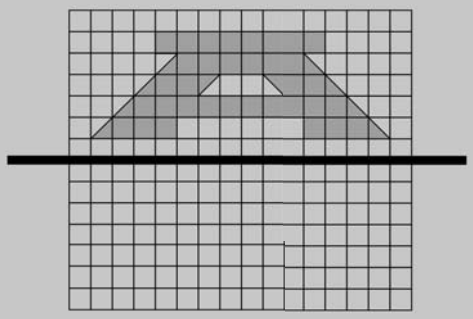






***ATIVIDADE***

**3. Desenhe a figura simétrica em relação à reta; se quiser, utilize também o espelho.**



***COMENTÁRIO***

*Você percebeu que este é também outro tipo de tarefa que objetiva trabalhar a simetria em relação a uma reta. Alunos mais novos comumente desenham imagens iguais, mas não simétricas. Essas dificuldades iniciais podem ser sanadas gradativamente através de uma variedade de situações. Por exemplo, outro tipo de tarefa similar pode ser desenvolvida com os próprios alunos e seus movimentos: coloca-se um aluno de frente para outro e pede-se que, alternadamente, cada um vá "repetindo" os movimentos feitos pelo outro.*

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR 2

Nesta atividade, você conhecerá o *jogo simétrico*. Utilizando um papel quadriculado, delimita-se uma zona de jogo constituída por uma quadrícula 10 x 12, dividida por uma linha, como na **Figura 25.3**. Na metade dessa linha encontra-se o ponto de partida.

**!**

Este tabuleiro está disponível no Módulo Prático.

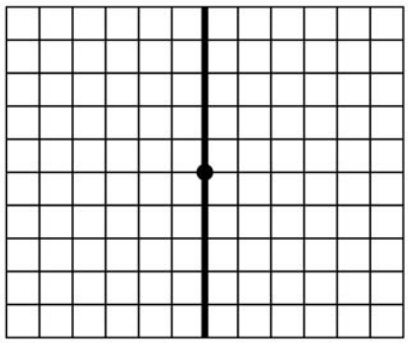


**Figura 25.3:** Tabuleiro do jogo simétrico

Regras

1. Antes de começar o jogo, cada um dos dois jogadores escolhe um dos dois campos. Cada um em seu campo, alternativamente, inutiliza (preenche) cinco casas, segundo as orientações seguintes: (a) nenhuma casa preenchida pode ser simétrica em relação à linha de separação de uma casa já marcada pelo outro jogador; (b) nenhuma casa preenchida pode tocar a linha de separação ou os bordos da quadrícula.

2. Uma vez marcadas as dez quadrículas, o desenvolvimento do jogo consiste no desenho de traços, que são lados ou diagonais das casas do tabuleiro, e deve ocorrer da seguinte maneira: o primeiro jogador marca um traço em seu campo a partir do ponto central; em seguida, por turno, cada jogador marca dois traços consecutivos, em relação à linha de separação, sendo que o primeiro deve ser simétrico, ao último marcado por seu adversário, e o segundo prolonga o primeiro em qualquer direção (livre).

3. Podem ser marcados traços nos bordos da quadrícula, porém está proibido fazê-lo sobre a linha de separação.

4. Pode-se tocar por um ponto a linha formada com a sucessão de traços, porém é proibido atravessá-la ou voltar a marcar um traço já desenhado.

5. A partida finaliza quando um jogador está bloqueado. Cada jogador conta, então, seus pontos, de acordo com as normas seguintes, e ganha o que obtiver maior número de pontos.

• Se um jogador marca um traço sobre um lado de uma casa preenchida, seu adversário soma um ponto.

• Se um jogador marca um traço sobre uma diagonal de uma casa preenchida, seu adversário soma dois pontos.

• Se um jogador fica bloqueado antes de ter realizado 30 traços, seu adversário soma cinco pontos.

Veja, a seguir, o exemplo de uma jogada concluída.

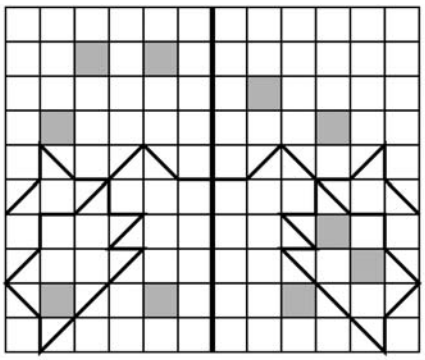


**Figura 25.4:** Exemplo de uma jogada.

***COMENTÁRIO***

*Antes do início do jogo, é importante o professor esclarecer, as regras para pontuação, de maneira que o aluno não pense que para ganhar basta bloquear o colega, o que nem sempre acontecerá. Uma vez que se tenha praticado bastante o jogo anterior, pode-se passar para uma versão mais complicada. Por exemplo, usar com as mesmas regras, um tabuleiro quadriculado 10 x 10 e considerar como linha de separação a diagonal do quadrado. Mais detalhes sobre o jogo simétrico podem ser encontrados em Corbalán (1994).*

**!**

Você deve ter percebido que este jogo é um possível desdobramento da Atividade 1. Além de jogar, que constitui um importante fazer pedagógico, devemos propor aos nossos alunos que eles registrem por escritos as descobertas sobre a atividade realizada e justifiquem.

## Conversando sobre o seu laboratório de Geometria: O livro de Espelhos

Os espelhos são recursos básicos para o trabalho com isometrias. O livro de espelhos é um material que pode ser construído unindo com fita adesiva dois espelhos retangulares (por exemplo, de 15x10cm) de maneira que, ao ser aberto/fechado, muitas imagens sejam, formadas. Podemos também colocá-lo sobre uma folha de papel ofício com algum desenho, em malhas quadriculadas etc. e, ao abri-lo e fechá-lo, apreciar as interessantes imagens que se formam.

Sua utilização possibilita, dentre outras explorações:

• Identificar variantes e invariantes em movimentos.

• Gerar polígonos regulares e estudar relações entre ângulos e eixos de simetria e número de lados.

Um trabalho detalhado sobre o uso de espelhos como recurso didático pode ser encontrado em *Murari et al*. (2002).

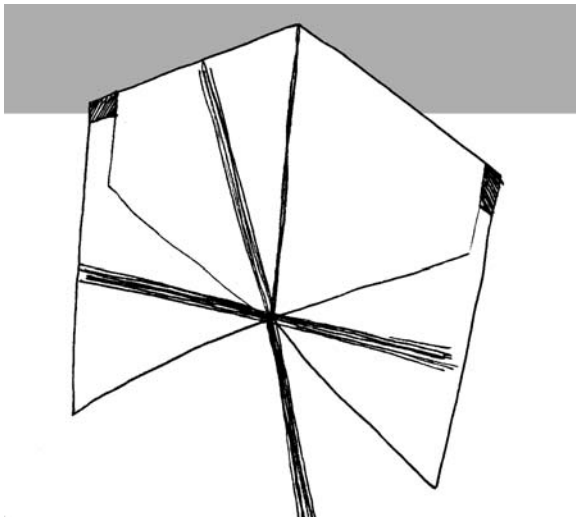


**Figura 25.5:** Livro de Espelhos.

**!**

É imprescindível dispor do livro de espelhos. Você pode construir o seu! Vá a uma vidraçaria (ou a uma loja de R$1,99) e consiga dois espelhos de mesmo tamanho.

***ATIVIDADES***

4. Utilizando o livro de espelhos, realize o seguinte exercício:

1. Abrir o livro de espelhos num ângulo aproximado de 120º. Colocar sobre sua linha divisória (bissetriz) um pequeno objeto (uma borracha, por exemplo) e contar o número de imagens observadas.

2. Colocar, ortogonalmente à linha divisória, um lápis com os extremos em ambos os espelhos. Observe a figura representada.

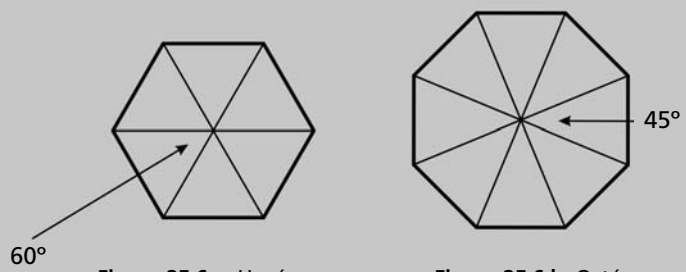



**Figura 25.6.a:** Hexágono **Figura 25.6.b:** Octógono

***COMENTÁRIO***

*Você deve estar se perguntando: onde aparece a simetria nessa atividade? Realmente, não há. No entanto, é importante ter percebido que nesse tipo de tarefa aparecem, integradamente, uma série de conceitos relacionados à simetria, tais como: ângulos, medidas de ângulos, polígonos, posições de retas. Inicialmente, é comum contarmos apenas as imagens formadas (refletidas) e esquecermos de olhar a figura como um todo (reflexão + o objeto real). Quando fechamos o espelho, o ângulo central altera. O somatório dos ângulos centrais é sempre 360º. Nessa atividade, o trabalho inicial deve ser fundamentalmente visual, levantando observações diversas. Após isso, sugerimos aprofundar as observações, cujo desenho no papel pode ser bastante útil. Lembre-se de contactar o tutor ou um colega do curso para comparar e analisar, conjuntamente, as suas descobertas; sem dúvida alguma, isso enriquecerá bastante sua aprendizagem.*

5. Uma descoberta muito freqüente é percebermos que quanto mais fechamos os espelhos, mais aumenta o número de lados da figura. Com isso, os alunos ficam curiosos em identificar o número de eixos de simetria do círculo. E você, sentiu-se desafiado também? Saberia responder quantos eixos possui um círculo?

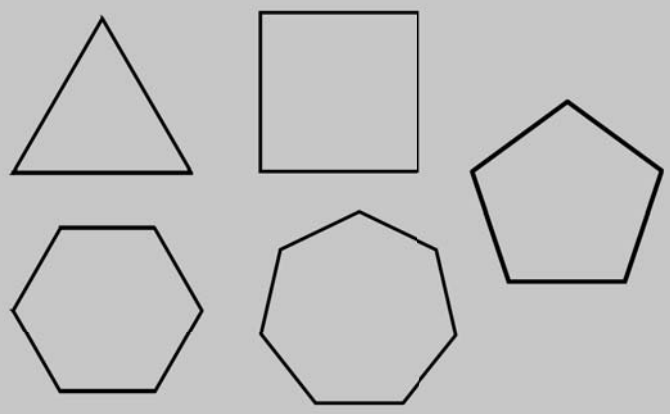
**!**

Algumas figuras geométricas possuem um ou mais eixos de simetria interna. Na atividade anterior, você viu que o círculo possui infinitos eixos (todos os diâmetros) de simetria.

***COMENTÁRIO***

*O desenvolvimento desta atividade pode acontecer naturalmente na Atividade 4. Inicialmente, é comum os alunos pensarem que serão muitos eixos, mas não infinitos, pois dizem:* "a figura acaba, ela se fecha e os eixos de "simetria" também terão um fim". *A confusão aparece devido ao fato de o estudante ficar preso ao que observa com o movimento. O fato de fecharmos e não podermos mais visualizar não significa que acabou. Assim, lembre-se de que o círculo possui infinitos eixos de simetria.*

6. Nesta atividade, vamos estudar eixos de simetria em polígonos regulares. Para facilitar o manuseio, você poderá utilizar apenas um espelho. No conjunto de figuras geométricas a seguir disponibilizamos alguns polígonos regulares. Utilizando um espelho, identifique os eixos de simetria interna em cada polígono.



***COMENTÁRIO***

*Pode ser uma interessante descoberta geométrica verificar que todo polígono regular tem tantos eixos de simetria como vértices e, quando o número de vértices for ímpar, todos os eixos de simetria passam por um vértice e pela metade do lado oposto. Lembre-se de que a inserção da construção de polígonos regulares, seja por meio de régua e compasso seja por um software específico, também pode ser uma estratégia didática muito enriquecedora.*

A construção de um polígono simétrico a outro é feita mediante a obtenção dos lados simétricos do polígono, o que é a mesma coisa que obter os pontos simétricos dos vértices.

**!**

O uso de logotipos variados constitui outro tipo de atividade que nos possibilita identificar eixos de simetria. Para saber mais, veja Nasser e Santana (1998).

## CONSTRUINDO CALEIDOSCÓPIOS E FORMANDO BELAS IMAGENS

### ATIVIDADE COMPLEMENTAR 3

A utilização de caleidoscópios é comumente feita nas aulas de Física. Com pedaços (estiletes) de espelho você pode formar(caleidoscópios do tipo prismas triangulares), com três espelhos colados; caleidoscópios do tipo prismas quadrangulares) com quatro espelhos etc. Os caleidoscópios mais sofisticados são fechados em suas bases, após o acréscimo de algumas missangas coloridas. O movimento das missangas dá um visual diferente às imagens caleidoscópicas. No entanto, não se preocupe! Feche (os espelhos devem ficar todos virados para o interior) com cola, visualize objetos variados e vá girando seu caleidoscópio. Você verá belas imagens sendo formadas. Analise-as. O mesmo pode ser feito com espelhos maiores. Por exemplo: situando o(s) aluno(s) próximos (lateralmente ou no interior) do(s) espelho(s), peça aos demais estudantes que verifiquem e analisem os tipos de imagens que podem ser formadas de acordo com os movimentos e ângulos perto do espelho.

## AMPLIANDO A PERSPECTIVA DO CONTEÚDO CURRICULAR

Tradicionalmente, quando pensamos na construção do conhecimento matemático é comum prestarmos atenção apenas aos conceitos. Consideramos ser importante ampliarmos essa visão, de modo que procedimentos, diferentes contextos e significados associados, bem como atitudes do aluno, também se tornem nosso foco de atenção. Desse modo, o conteúdo curricular deve ser visto em termos de **CONCEITOS, PROCEDIMENTOS E ATITUDES.**

Um **CONCEITO** designa um conjunto de objetos, fatos, acontecimentos ou símbolos que possuem certas características comuns. A **ATITUDE** constitui uma tendência a comportar-se de forma consistente e persistente frente a determinadas situações, objetos, fatos, acontecimentos ou pessoas. Por exemplo, as atitudes para a Matemática referem-se ao valor, apreciação e interesse por esta Disciplina e seu processo ensino-aprendizagem. Tais atitudes, de cunho mais afetivo que cognitivo, são manifestadas em termos de interesses, satisfação, respeito, curiosidade, partilha, cooperação, valorações, abertura etc. Um **PROCEDIMENTO** é um conjunto de ações ordenadas e orientadas para atingir um determinado objetivo. Para que um conjunto de ações constitua um procedimento, é necessário que ele esteja orientado para alcançar determinado fim e que as ações ou passos se sucedam com uma certa ordem. Um trabalho procedimental na aula de Matemática não pode se resumir apenas ao aluno aplicar rotineiramente processos e algoritmos de cálculos, por exemplo.

***ATIVIDADE***

7. Nesta atividade, você pode verificar se realmente compreendeu as diferenças entre conceito, procedimento e atitude. Veja o comentário que a Professora Patrícia fez sobre como ela tem desenvolvido seu trabalho em uma turma de 6ª série.

| Conteúdos | Professora Patrícia | O que fez / faz Patrícia na 6ª série |
|---|---|---|
| **Conceituais** | Tenho como objetivos a compreensão do conceito de simetria e eixos de simetria, ou seja, que meus alunos reconheçam a presença de um ou mais eixos de simetria numa figura ou mesmo que possam afirmar que há figuras que não possuam eixos de simetria. Desenvolver o olhar para o reconhecimento desta propriedade em figuras planas e tridimensionais significa explorar a capacidade de visualizar, onde habilidades como percepção da posição no espaço, percepção dasrelações espaciais e coordenação viso-motora são desenvolvidas. | "Em geral, utilizamos muito papel e tesoura. Para fazer a bandeirinha da festa junina, percebem que uma dobra de papel é suficiente. Daí para frente, começam a dobrar o papel mais vezes e a descobrir o que acontece. Percebem que quanto mais dobram o papel, mais o mesmo motivo aparecerá.Na verdade, as dobras são uma forma de gerar imagens simétricas de uma mesma figura muitas vezes. Ao invés de usarmos os termos refletir ou transladar, falamos simplesmente em repetir.Com esta idéia, criam "toalhinhas" de papel para bandeja (fazem questão de dar às mães!). É interessante que após esta análise das dobras e dos cortes, passam a planejar os cortes no papel, tendo em mente (criando a imagem mental – prevendo) o resultado. Dobram o papel de acordo com o que querem produzir. Aos poucos percebo que há um planejamento do trabalho, que as dobras e os cortes deixam de ser aleatórios". |
| **Procedimentais** | "Procedimento está diretamente relacionado a um "saber fazer". Estarei desenvolvendo a habilidade prática de construção de figuras simé-tricas. Por exemplo: como confeccionar uma máscara para o Carnaval de modo a garantir a simetria de um rosto? Como construir uma faixa decorativa para as paredes da sala de aula? Como recortar uma bandeirinha de festa junina de modo que ela fique "certinha"? Como reproduzir, no menor tempo, a mesma forma várias vezes?" | |
| **Atitudinais** | "Prevalece a sensibilização do olhar para as formas que nos rodeiam. Olhar para o mundo de um jeito diferente, procurando a BELEZA da simetria nos objetos e na própria natureza é um "valor"a ser construído no interior da escola". | |

**COMENTÁRIO**

*Você deve ter percebido que o* conteúdo conceitual *está caracterizado pelas relações e conexões distintas em âmbito cognitivo; o procedimental, que está composto pela linguagem formal ou sistema de representaçao simbólica da Matemática, também compreende os algoritmos ou regras necessárias para resolver tarefas e suas estratégias. Evidentemente, alguns procedimentos, principalmente os que fazem referência aos algoritmos, podem ser memorizados, e ele não são objetos de uma aprendizagem significativa, o que não acontece com os conceitos, que já o são. Assim, além dos conceitos e dos procedimentos, a aprendizagem de conteúdos atitudinais também constitui um elemento importante, à medida que o aluno desenvolve atitude positiva frente a seu processo ensino-aprendizagem e constrói suas estruturas pessoais para apreciar a Matemática.*

## CONVERSANDO UM POUCO SOBRE HISTÓRIA: MAURITIS CORNELIS ESCHER

O holandês M.C. Escher (1898-1972) foi um dos artistas que desenvolveram uma série de estudos sobre a divisão regular do plano com figuras diversas. Nessas divisões regulares, que fazem parte de muitos de seus ornamentos, Escher utilizou simetrias de reflexão, de rotação, de translação e composição. Dedicou uma grande parte da sua obra à representação realística, ou seja, à figurativa e construída,de situações espaciais irreais. Além de dispor de uma fantasia genial, Escher também era um excelente desenhista e a Geometria foi a chave dos efeitos assombrosos de suas imagens. Para saber mais sobre a obra de Escher, acesse http://www.artico.com/escher/

**!**

Lembre-se de consultar constantemente os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em www.mec.gov.br

## CONVERSANDO SOBRE A INTEGRAÇÃO CURRICULAR COM OUTRAS DISCIPLINAS

Sabemos que o desenvolvimento da atividade matemática também deve preconizar a integração curricular. Tal integração, em alguns momentos, pode acontecer nos próprios **blocos de conteúdo** (grandeza e medida, números, operações com números, tratamento da informação, espaço e forma) ou com **diferentes disciplinas do currículo**. No caso das isometrias, podemos pensar em algumas possibilidades de integração (Bairral, 2003).

### ATIVIDADE COMPLEMENTAR 4

Para cada idéia apresentada a seguir, você deverá propor uma tarefa específica. Lembre-se de verificar como os livros didáticos de 5ª a 8ª séries e do Ensino Médio abordam cada temática.

| | **Exemplo de tarefa a ser utilizada** |
|---|---|
| A utilização de caleidoscópios, de dobraduras e cortes, de mosaicos diversos (construção e estudos) também pode enriquecer a aula e ajudar na construção de outros significados. | |
| O uso de espelhos também possibilita um trabalho integrado no laboratório de Ciências, por exemplo, com atividades de reflexão da luz. | |
| Você estudou em aulas anteriores que uma das características mais importantes dos poliedros é o seu alto grau de simetria. A simetria pode ser um método utilizado para classificar formas. Assim, a análise dos modelos poliédricos com outras estruturas (de átomos, de cristais etc.) pode constituir uma atividade interessante. | |
| Na linguagem corrente, a palavra *simetria* significa *com a mesma medida* e está associada à harmonia e ao ritmo. Por outra parte, simetria também pode ser associada a uma idéia de repetição, uma repetição de um mesmo motivo, que confere sua unidade a motivos tão diversos como os muitos tipos de vitrais em catedrais, o desenho sobre telas, pisos, pavimentos e paredes ladrilhadas, que são exemplos de mosaicos e exibem regularidades geométricas. Em Cristalografia, essas idéias são utilizadas para classificar propriedades da matéria e, em Psicologia, são utilizadas nos processos de identificação e imitação. | |

| | Exemplo de tarefa a ser utilizada |
|---|---|
| E o nosso corpo? Ele é realmente simétrico? Há simetrias aparentes? Há formas "bem determinadas"? Não valeria a pena inserir este tipo de observação e discussão em nossas aulas?. | |
| Outra integração curricular possível é estudar os mosaicos na História da Arte: bizantina, mosaicos romanos, mosaicos arabes etc. | |
| Você estudou em aulas anteriores que uma das características mais importantes dos poliedros é o seu alto grau de simetria. A simetria pode ser um método utilizado para classificar formas. Assim, a análise dos modelos poliédricos com outras estruturas (de átomos, de cristais etc.) pode constituir uma atividade interessante. | |
| Sabemos da diversidade cultural do nosso país. Com certeza, em cada cidade/região existem elementos culturais (artesanatos, estruturas variadas, logotipos etc.) que podem ser utilizados como objetos de estudo e dinamizadores no trabalho com as isometrias. | |

***COMENTÁRIO***

*O enriquecimento desta atividade deve ser feito por meio da conversa e troca de idéias com o tutor e com colegas. Este quadro deve ser concluído e apresentado ao tutor quando você terminar a Aula 27. O preenchimento, com vários exemplos de tarefas, também o ajudará em cada auto-avaliação deste conjunto de aulas. Reserve uns 5 minutos, ao final de cada aula, para pensar no quadro.*

## CONCLUSÃO

A utilização de uma tarefa "bem planejada" ou de um recurso "didaticamente elaborado" não implica aprendizagem. A inovação das aulas através de uma variedade de atividades e materiais didáticos é importante, porém não será a mera adoção disso que resolverá a problemática e a complexidade da construção do conhecimento. Por exemplo, você tem visto que cada recurso possui suas limitações, suas potencialidades e, assim, contribui, diferentemente, na construção dos conceitos matemáticos. Analisar conjuntamente com os alunos as respostas que eles dão a determinada atividade também constitui uma função docente importante.

## RESUMO

O ensino das isometrias envolve conceitos, procedimentos e atitudes. Como *objetivos conceituais*, podemos identificar e analisar a presença (ou não) de isometrias em formas variadas. Nesse processo, é possível favorecer a construção de procedimentos diversos, tais como: manuseio de figuras planas para a comprovação de conjecturas; confecção e uso do livro de espelhos e de malhas (quadrada, triangular, hexagonal) para a obtenção de mosaicos etc. Desenvolver atitudes favoráveis para apreciar a beleza derivada da repetição; a valorização das qualidades artísticas dos mosaicos e de sua utilização no estudo da História da Arte, bem como despertar a curiosidade e interesse para investigar as configurações e formas construídas são exemplos de contribuições que um trabalho com as isometrias pode propiciar.

## AUTO-AVALIAÇÃO

Esperamos que você tenha cada atividade proposta. As atividades complementares, à exceção da quarta, podem ser realizadas de acordo com o seu tempo. Identificar e compreender o(s) objetivo(s) de cada atividade complementar é, neste momento, mais importante do que desenvolvê-las.

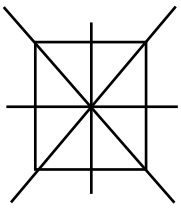
Como dissemos anteriormente, para a auto-avaliação desta aula você precisará do esquema conceitual que elaborou no início dela. A utilização deste tipo de esquematização tem sido muito incentivada nos processos de avaliação da aprendizagem matemática. Você deve ter percebido que a organização do seu esquema não foi uma atividade simples. Muitas das dificuldades que temos são fruto de um trabalho que não desenvolvemos como discentes. Agora, como professores, precisamos implementá-lo.

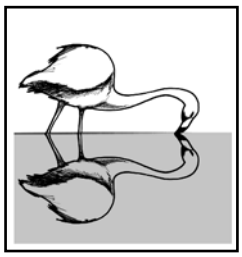
Uma sugestão para organizarmos esquematicamente nossas associações conceituais é partirmos de idéias-chave, de caráter mais geral, para casos mais particulares (exemplos). Entre essas idéias vamos utilizando palavras ou expressões que nos possibilitam interpretar e melhor compreender como foi feita a organização. A seguir, sugerimos a você, em duas colunas, algumas idéias-chave (coluna da esquerda) e possíveis palavras ou conexões (coluna da direita) que poderão ser utilizadas na reorganização do seu esquema conceitual. Você não precisa utilizar todas e pode inserir outras.

**Idéias-chave para serem relacionadas pelas conexões**

movimentos no plano e analisar distâncias

rebatimento





invariantes

reflexão

eixo de simetria

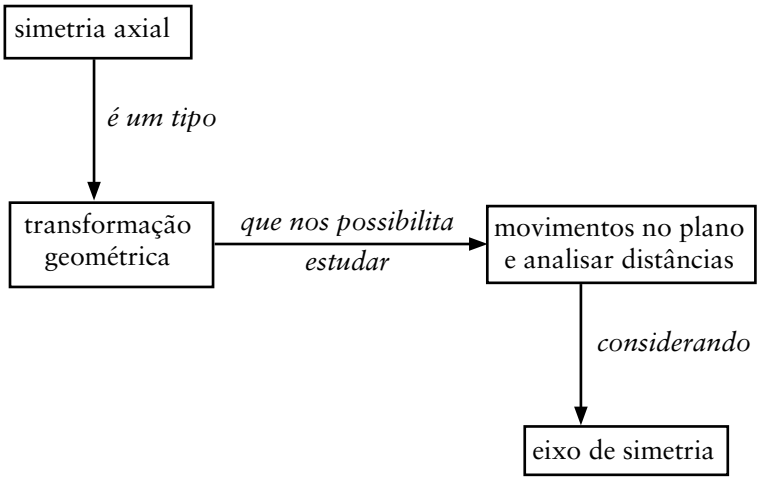
transformação geométrica

simetria axial

**Sugestão de palavras ou expressões para serem utilizadas nas conexões**

*aparece*
*ou*
*é um tipo*
*onde aplicamos*
*considerando*
*exemplo na Matemática*
*exemplo na Natureza*
*identificar*
*que nos possibilita estudar*

Caso você ainda esteja com dúvidas para começar o esquema de auto-avaliação desta aula, iniciamos um para você.




**!**

Também podemos utilizar desenhos e figuras ilustrativas em nossos mapas. O quadrado que colocamos na coluna idéias-chave é um exemplo.

A organização de um esquema como este, também denominado mapa conceitual, é pessoal, isto é, subjetiva. Apesar disso, como professores, podemos avaliar sua construção, considerando, por exemplo: relações conceituais estabelecidas através das conexões, das hierarquias priorizadas e dos exemplos. Dessa forma, podemos ir identificando a ausência de conceitos ou expressões importantes, a ausência de expressões em algumas conexões, a ausência de indicação de exemplos e outras características, as incorreções verbais nas conexões ou na utilização de palavras inadequadas.

Uma estratégia que também pode nos ajudar na montagem de um esquema é criar frases explicitando o que queremos colocar nos quadros e suas conexões. Evidentemente, a elaboração de um parágrafo sobre o esquema também constitui uma maneira importante de comunicar as idéias organizadas.

Finalizando, é bom lembrar que o mapa conceitual deve ser utilizado continuamente na avaliação; assim, ela passará a assumir um papel interpretativo, pelo qual o professor vai animando cada aluno a reorganizar seu esquema conceitual, por meio de questionamentos ou de novas situações de aprendizagem.

Não há um único modo de elaborar um mapa conceitual. À medida que muda sua compreensão sobre as relações entre conceitos, ou à medida que você aprende, seu mapa também muda. Um mapa conceitual é um instrumento dinâmico, que reflete a compreensão de quem o faz no momento em que o faz.

**!**

Lembre-se de elaborar o seu mapa conceitual e discuti-lo com seu tutor e colegas.

## AUTO-AVALIAÇÃO COMPLEMENTAR

Você sabia que existe um software para construção de mapas conceituais? É o Cmap Tools. Foi desenvolvido pelo Institute for Human and Machine Cognition, da University of West Florida. Os requisitos mínimos de máquina para utilizá-lo são: computador pessoal com monitor capaz de apresentar imagens; programa Paint para abrir o mapa salvo como figura e conexão com a internet para importar links, figuras e adicionar mapas a um servidor. O software está disponível em: http://cmap.coginst.uwf.edu/

## INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você vai estudar a rotação. Para agilizar seu precioso tempo, tenha à mão tesoura, papel A4 ou ofício, papel transparente e instrumentos de medida (régua, transferidor, esquadro).

AULA 26

# Estudando rotações

## Meta da aula

Instrumentalizar o ensino
das transformações no plano: rotações.

## objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Conceituar rotação.
- Conceituar e identificar simetria rotacional em polígonos regulares.
- Analisar composições de isometrias.
- Realizar giros por meio de dobras e cortes em papel.
- Utilizar diferentes alternativas didáticas no trabalho com rotações.

## Pré-requisitos

Para o melhor desenvolvimento desta aula, sugerimos que você relembre os conceitos de *ângulos* (Aula 5), o de *simetria de rotação* (Aula 10), o de *isometria* (Aula 25) e o de *eixo de simetria* (Aula 25). Dispor de *material para recorte* (tesoura, papel A4 ou ofício, papel transparente) e de *medida* (régua, transferidor, esquadro) será imprescindível.

**!**

Lembre-se de utilizar as figuras disponíveis no Módulo Prático e de acessar as atividades da disciplina na Plataforma Cederj.

## INTRODUÇÃO

A Natureza, suas formas e regularidades têm despertado a imaginação criadora do ser humano. Observando e registrando certos fenômenos naturais, o homem foi desenvolvendo, gradualmente, diferentes alternativas de estudo e de representação. Tais alternativas têm tido implicações diretas também nas propostas curriculares. Na aula anterior, você viu que com a simetria podemos obter uma forma de outra, preservando suas características, tais como ângulos, comprimento dos lados, distância de um eixo e tamanhos. Nesta aula, você irá estudar a rotação, um outro tipo de isometria.

***ATIVIDADE***

1. Faça um contorno da **Figura 26.1** numa folha de papel. Fixe um ponto O (no calcanhar, por exemplo) e gire num sentido (horário ou anti-horário); faça novo contorno com o papel girado.

**Figura 26.1:** Posição original.

Por exemplo, se girou no sentido anti-horário, resultou na **Figura 26.2**. Que tipo de movimento é esse?

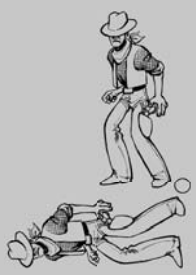


**Figura 26.2:** Giro no sentido anti-horário.

De que forma a figura original foi girada? Você poderia informar, aproximadamente, de quantos graus foi esse giro? Você se lembra de como se chama esse tipo de movimento? Se não, continue; adiante você saberá!

**!**

Lembre-se de que o tempo destinado à realização de cada atividade é apenas uma estimativa. Não se preocupe se o fizer em mais tempo do que o previsto. O importante é que você compreenda o desenrolar de cada tarefa!

!

Rodar uma figura sobre um mesmo eixo ou ponto supõe um conhecimento de medida de ângulo.

Fazendo o contorno do molde sobre cada um dos eixos (vertical e horizontal) imaginários, completaremos a seqüência representada na **Figura 26.3**:

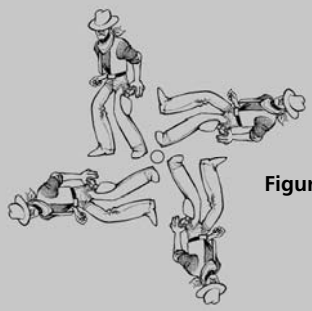


**Figura 26.3:** Quatro giros no sentido anti-horário.

O que você observa de diferente, com relação ao movimento da figura anterior? A partir da primeira imagem, você poderia informar, aproximadamente, em quantos graus cada figura foi girada? Esse ângulo tem alguma relação com o do giro anterior? As figuras estão sendo giradas segundo um mesmo tipo de movimento (transformação) no plano?

**ROTAÇÃO**
É o giro de uma forma ao redor de um ponto, chamado centro de rotação (ou de giro). A distância de rotação se mantém constante e a medida do giro é chamada ângulo de rotação.

***COMENTÁRIO***

*Há uma variação constante no ângulo de cada giro. A transformação feita em cada giro é denominada* **ROTAÇÃO**.

Em outras palavras, podemos dizer que uma rotação ou giro de centro C e ângulo *a* é um movimento no qual um ponto e seu homólogo (correspondente) (**1**) estão à mesma distância de C, e (**2**) o ângulo que formam, ao uni-los com C, é o próprio *a*.

## Conversando sobre o seu Laboratório de Geometria

Além da utilização de caleidoscópios, da construção e estudo de mosaicos diversos, inclusive os de Escher, do material de medida e de desenho, da utilização de imagens e objetos de nosso cotidiano e do uso de malhas, podemos inserir, em nosso laboratório de Geometria, *material transparente* (papel vegetal, transparências etc.) e *material de recorte* (tesoura, papel A4 ou ofício, régua, transferidor etc.) para trabalhar as transformações no plano.

Nesta aula, em especial nas Atividades de 2 a 4, e na 9, assim como nas Atividades Complementares 1 e 2, você verá como pode trabalhar essas transformações.

***ATIVIDADES***

2. Veja, então, se você compreendeu os aspectos relevantes da definição de rotação, conferindo-os na figura seguinte. Verifique utilizando régua e transferidor.

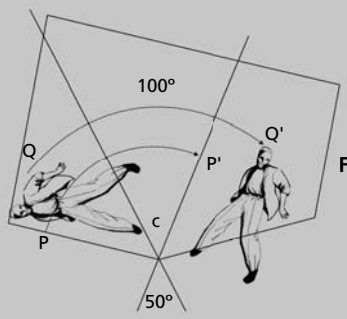
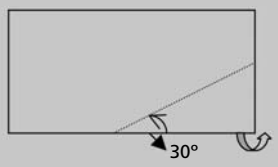


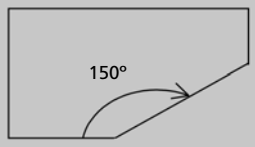

**Figura 26.4:** Representação da rotação.

Agora, vamos ensiná-lo a fazer esse tipo de construção e verificação através de dobras e recortes em papel. Imagine que queremos realizar um giro de 100º em uma figura. Vamos ao trabalho!

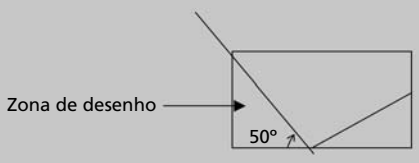
Pegue uma folha de papel A4 (ou de qualquer outro tipo). Localize o ponto médio do seu comprimento e dobre um de seus vértices num ângulo qualquer (por exemplo, 30º) e corte na dobra indicada.



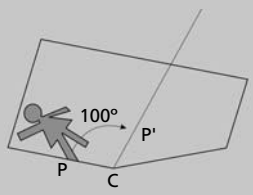

Desta forma, teremos um ângulo de trabalho de 150º.



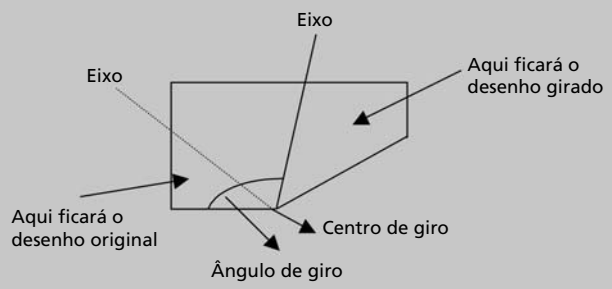

Como pretendemos construir um desenho e girá-lo 100º no sentido da seta, para que o desenho girado não fique fora do papel, será preciso que o original não supere um terço do espaço disponível, ou seja, 50º.




Veja, agora, como ficará:



Resumindo, veja a seguir a representação do que fizemos.




Observe que o ângulo de trabalho se dividirá em três partes. A primeira e a terceira para as figuras. O ângulo de giro pode ser a amplitude da primeira e da segunda parte, ou seja, dois terços do total.

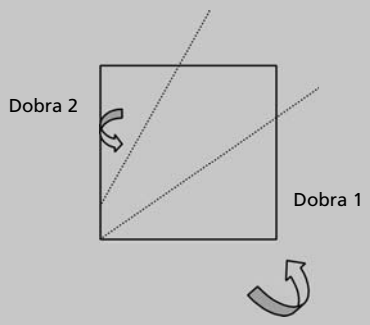
3. Agora que você entendeu esse procedimento de girar figuras, faça e comprove a rotação exemplificada na ilustração anterior.

***COMENTÁRIO***

*Veja que os eixos correspondem à bissetriz e ao homólogo do ponto de referência (Q'). Você deve ter percebido que podemos fazer a dobra num ângulo qualquer, inclusive tirando um dos vértices do retângulo. Este procedimento, porém, não é aconselhável, pois o ângulo de manuseio será de 30º, ou seja, pequeno. No entanto, lembre-se de que essa restrição é apenas para manipulação. Faça-a e verifique você mesmo.*

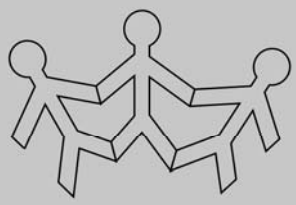
Vamos trabalhar um pouco mais, fazendo giros com material recortável.

4. Nesta atividade faremos giros. Você precisará de papel A4 ou ofício, régua, tesoura, fita adesiva e transferidor. Pegue uma folha de papel ofício e dobre-a ao meio, verticalmente, sem cortar. Agora, dobre seguidamente o papel em três partes.



Desenhe um boneco no lado do papel cuja face é um triângulo (verso da dobra 2) . As mãos e pés do boneco devem tocar os lados do triângulo, conforme ilustramos a seguir.

Agora, sem desdobrar, recorte o seu boneco e abra-o. O que aconteceu? Se tudo deu certo, você construiu dois grupos de três bonecos cada. Veja!



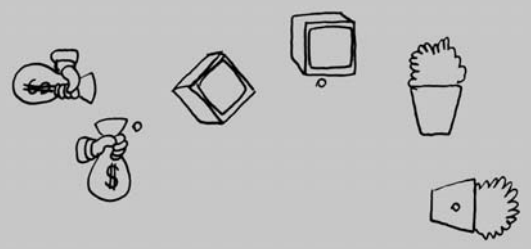
Considere apenas um desses grupos e numere os bonecos. Apenas um deles deu um giro. Qual? Qual o centro e o ângulo de giro? Que transformação você identifica nos outros dois?

***COMENTÁRIO***

*Além de identificar a medida do ângulo de giro, é importante você ter percebido que o giro saiu da composição de duas simetrias axiais. Quando não estamos acostumados com esse tipo de recortes, essa atividade, apesar de interessante e desafiadora, não é simples. No entanto, nossa experiência mostra que os alunos ficam encantados com as seqüências de figuras que geram. É possível que você tenha gerado diferentes seqüências, pois, deve ter percebido, de acordo com a maneira com que fazemos a dobra e cortamos, alteramos a disposição da seqüência. Este tipo de análise é extremamente importante de ser feita com nossos estudantes em diferentes séries. Você deve ter visto, também, que há relação entre o número de dobras e o de figuras geradas. Desta forma, numa fase inicial com esse tipo de recurso, é importante iniciarmos utilizando menos dobras.*

Para praticar um pouco mais, agora sem fazer dobras e recortes, nas atividades seguintes você irá identificar centros e ângulos de giro.

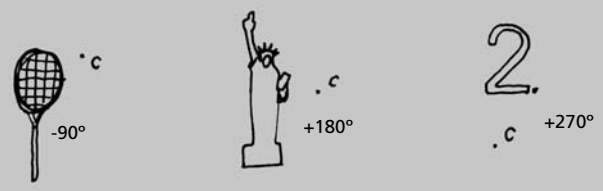
5. Localize o centro e ângulos de giro em cada par de figuras.



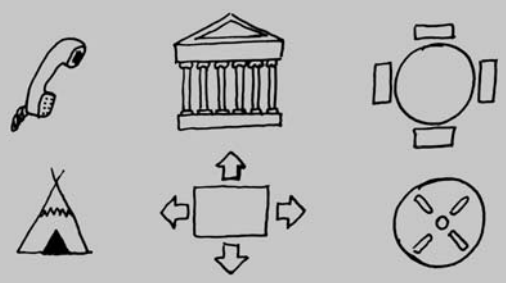
**COMENTÁRIO**

*Para você ter certeza do ângulo de giro que deve realizar em uma figura, podemos, além da observação do desenho e do centro de giro, pode marcar também um ponto do desenho, traçar uma reta que passe por ele e pelo centro de giro e prolongá-la, aproximadamente, nessa mesma medida. Ao girar, faça com que a reta passe pelo ponto de referência e pelo centro. O resultado será exato.*

6. Gire cada figura a seguir, de acordo com o ângulo indicado.




7. Localize, quando existir, o centro de giro e o ângulo que deixa cada figura seguinte invariante.



**!**

Veja que além de ângulos, vamos falando, naturalmente, de mediatriz, bissetriz, perpendicular etc. Se o aluno não estudou tais conceitos, esta é uma boa oportunidade para desenvolvê-los.

**COMENTÁRIO**

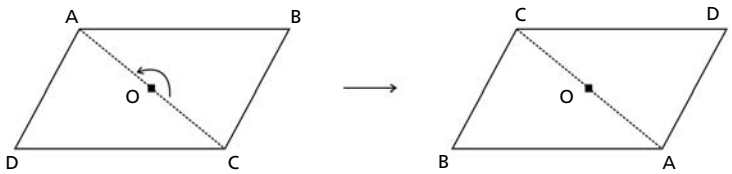
*É importante realizar as atividades anteriores com apoio visual, seguido de verificação com régua e compasso, se for o caso. Caso considere necessário, você também pode praticar fazendo dobras e recortes.*

Uma figura possui **SIMETRIA ROTACIONAL** de um ângulo θ, ou tem simetria θ-rotacional, quando coincide com sua imagem pela rotação do ângulo θ ao redor de seu centro.
Uma figura possui simetria θ-rotacional se, e somente se, possui simetria – θ-rotacional.

## ESTUDANDO SIMETRIAS ROTACIONAIS

Uma figura possui **SIMETRIA ROTACIONAL** de um ângulo quando coincide com sua imagem pela rotação desse ângulo ao redor de seu centro.

Um exemplo de polígono que possui simetria de rotação é o paralelogramo (180-rotacional). Ele não possui simetria de reflexão. Veja!




**!**

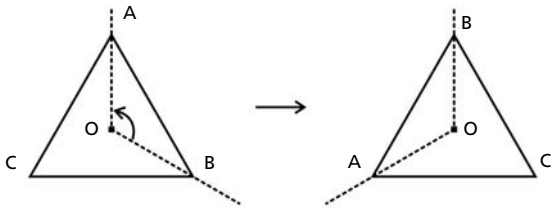
Vamos considerar sempre θ em valor absoluto, não importando o sentido da rotação.

O que acontece com os polígonos regulares? Qual a simetria rotacional do quadrado, do triângulo eqüilátero e do pentágono?

**!**

Lembra-se das interessantes descobertas feitas na aula passada com o livro de espelhos? Elas podem ajudá-lo nesta atividade! Sugerimos a utilização daquele recurso nas atividades seguintes. Lembre-se de que os polígonos regulares estão disponíveis no Módulo Prático.

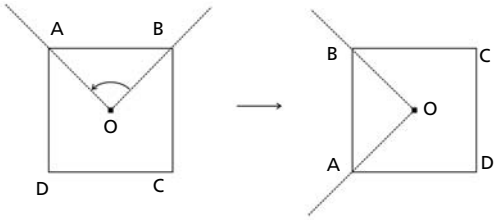
O triângulo equilátero possui simetria 120-rotacional




**!**

Lembre-se de que na Atividade 6, da Aula 25, você já trabalhou com os polígonos regulares, disponíveis também no Módulo Prático, identificando eixos de simetria interna. No entanto, utilize-os novamente para verificar a simetria rotacional.

Há polígonos que possuem diferentes simetrias rotacionais. Por exemplo, o quadrado possui simetria 90-rotacional e também 180-rotacional. Veja!




Vamos ver se você realmente compreendeu o que significa simetria rotacional.

***ATIVIDADE***

8. Estude a simetria rotacional no pentágono regular.

***COMENTÁRIO***

*É importante perceber que o pentágono possui duas simetrias rotacionais. Fazer o desenho de cada uma delas é fundamental. Lembre-se de que construir um pentágono regular por meio de construções geométricas ou trabalhar com o* Cabri Gèomètre *podem ser outras alternativas didáticas.*

## COMO PODEMOS IDENTIFICAR A SIMETRIA ROTACIONAL DE UM POLÍGONO QUALQUER?

Qualquer polígono regular de n-lados possui simetria θ-rotacional, em que $\theta = i\left(\frac{360}{n}\right)$, $i$ um número inteiro positivo, sendo $i = 0, \ldots, \frac{n}{2}$ para n par, ou $i = 0, \ldots, \frac{(n-1)}{2}$ para n ímpar. Agora você pode voltar às suas descobertas anteriores e conferir as simetrias rotacionais no pentágono e nos demais polígonos regulares.

Finalizando, gostaríamos de lembrar-lhe que, na última aula, você estudou eixos de simetria interna nos polígonos regulares. É possível que a observação do ângulo formado tenha surgido naturalmente. O importante é que aqui você conheceu como denominar a simetria fixando-se neste ângulo.

Lembra-se de que na Aula 25 explicamos que a simetria pode ser central, **AXIAL** ou radial?

**AXIS**
Em inglês, significa eixo; oblíqua, em português, quer dizer inclinada em relação a um objeto (reta, plano etc.).

**!**

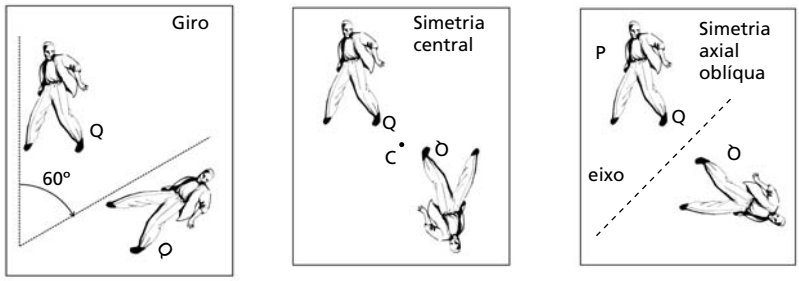
Veja que o dicionário pode ser também um recurso importante nas aulas de Matemática.

**!**

A simetria axial pode ser vertical, horizontal ou oblíqua.

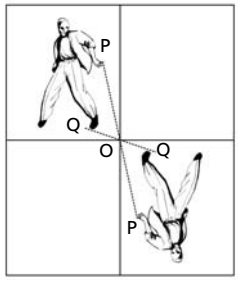
É possível que você esteja se perguntando: em que difere o giro da simetria central? Vejam as seguintes ilustrações, pois elas podem ajudá-lo a entender.

Observe:




Muito bem; após analisar atentamente, você deve ter verificado que a simetria central equivale a um giro de 180º. Parabéns!

No entanto, lembre-se de que a simetria central é um movimento no qual um ponto e seu homólogo estão unidos por um segmento que *passa pelo centro de simetria e este é o ponto médio*. Veja!




**!**

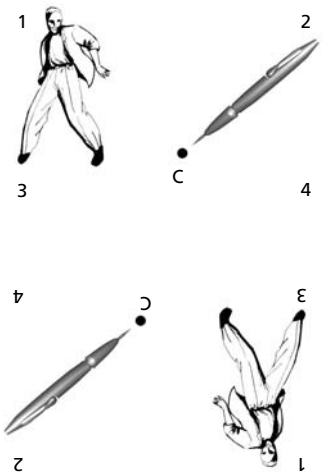
Os alunos, freqüentemente, dizem: "girar uma figura 180º significa que o que estava em cima fica embaixo".

No caso de uma simetria axial, seu eixo é a mediatriz de todos os segmentos que unem pontos homólogos entre si.

## CONTINUANDO A CONVERSA SOBRE O LABORATÓRIO DE GEOMETRIA

Você pode utilizar qualquer papel (ofício, A4 etc.) e papel carbono (folha de tirar riscos). Por exemplo, pegue uma folha de papel qualquer, dividindo-a, preferencialmente com dobras, em quatro partes de mesma área. Desenhe um figura na parte superior esquerda (parte 1). Marque um ponto no centro do papel. Utilizando papel carbono do mesmo tamanho da folha branca e fazendo riscos (cópias) sobre a figura desenhada, veja as transformações geométricas que você pode encontrar, segundo a dobra feita.

Veja uma possibilidade para a simetria central!




Caso você queira estudar um pouco mais simetrias axiais fazendo dobras e cortes em papel, faça as atividades seguintes.

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR 1

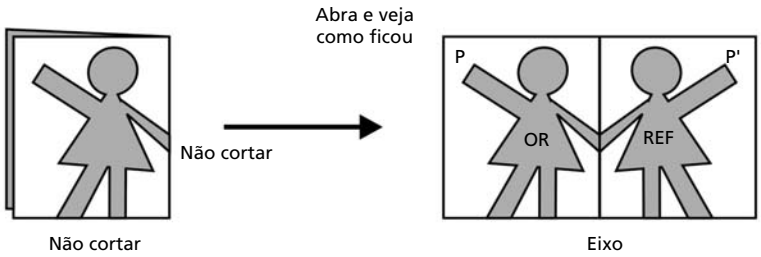
Faça o seguinte:

• Dobre a folha ao meio.

• Em uma das faces, desenhe uma figura qualquer junto à dobra da folha.

• Recorte-a, preservando a dobra da folha.

• Desdobre a figura, obtendo sua reflexão (REF). O que você pode dizer sobre as figuras OR e REF?




**!**

Observe que, como queremos que os bonecos saiam unidos, não podemos cortar os pontos conectados aos eixos.

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR 2

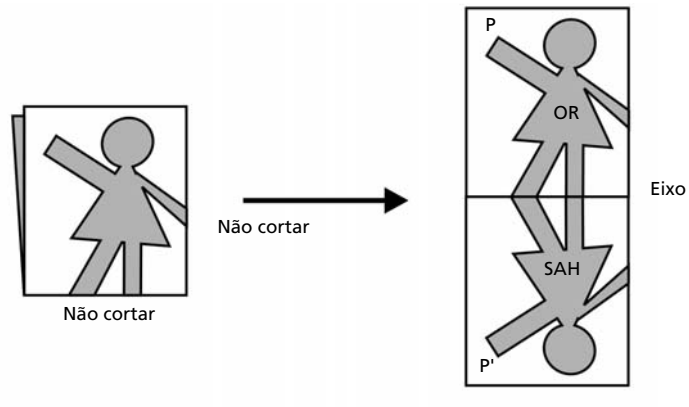
Faça o seguinte:

• Dobre uma folha ao meio.

• Desenhe em uma de suas faces externas uma figura junto a uma dobra pela mão e a outra pelo pé.

• Recorte-a, preservando a dobra da folha.

• Desdobre a figura. O que aconteceu com a figura original? Que tipo de movimento foi realizado?




***COMENTÁRIO***

*Este tipo de atividade é importante para percebermos que a transformação é a mesma (simetria), porém a posição do eixo é que muda. Como dissemos antes, é importantíssimo que você discuta com seus alunos o porquê dessas alterações que, nos dois exemplos anteriores, foram as posições dos eixos. No exemplo anterior, a figura original é OR e a sua transformada é a SAH (simetria axial horizontal).*

## TRABALHANDO COM ISOMETRIAS DIFERENTES

Nosso processo de visualização é muito mais dinâmico e integrado do que imaginamos. Por exemplo, quando olhamos uma figura com simetria central, como a mostrada anteriormente, será que não poderíamos encontrar, com eixo horizontal, a sua simétrica e, depois, deslocá-la paralelamente ao eixo? Muito bem! Nesse caso, estamos realizando uma **COMPOSIÇÃO** de movimentos no plano.

Denominamos **COMPOSIÇÃO** quando certa isometria é obtida a partir de outra(s).

***ATIVIDADE***

**9. Pegue uma folha e dobre-a em quatro partes de mesma área. Desenhe um boneco em uma de suas faces externas, fazendo tocar uma de suas mãos numa dobra e seus pés noutra. Recorte a figura e analise os movimentos feitos pela original.**

Não cortar

***COMENTÁRIO***

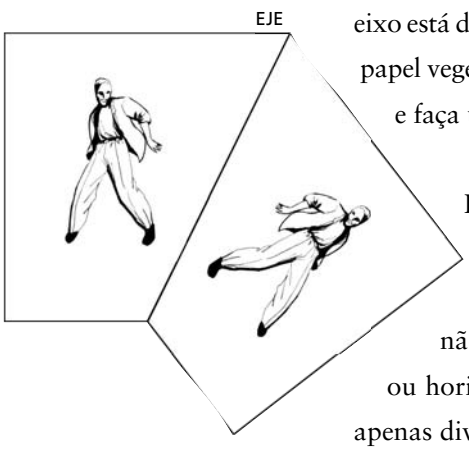
*É importante você perceber que cada dobra gera uma simetria axial. Fixar sua atenção nos movimentos da* ***figura original*** *é imprescindível para que nela você possa estudar as transformações. No exemplo visto, podemos encontrar simetrias axiais e central, ou seja, a figura no terceiro quadrante é o movimento (simetria central) da original por meio de duas simetrias axiais de eixos perpendiculares.* O que acontece se mudarmos a ordem das dobras? Há algum ponto que fica invariante por uma simetria central? *Estas são outras descobertas que você verificará e conversará com o tutor.*

A composição de duas simetrias axiais cujos eixos são perpendiculares entre si, é uma simetria central; o centro dessa simetria central é a intersecção dos eixos.

Não se preocupe, na aula seguinte estudaremos com mais detalhes outros tipos de composição no plano.

## CONVERSANDO SOBRE DIFICULDADES DOS ALUNOS QUANDO TRABALHAM COM MATERIAIS RECORTÁVEIS

Sabemos que uma das funções do eixo é atuar como elemento divisório do plano de trabalho. Assim, quando giramos o papel, não estamos apenas refletindo os pontos do desenho, mas também todos os pontos do papel. Dessa forma, é importante identificar a região em que o eixo está dividindo o plano. Por exemplo, pegue um papel quadrado e, em papel vegetal de menor área que do papel quadrado, desenhe um boneco e faça uma reflexão. Por exemplo, veja a ilustração seguinte.




Veja que o eixo divide o trapézio, e não o papel quadrado. Pode parecer óbvio, mas há alunos que confudem. Para alguns deles, a metade refere-se à folha quadrada, isto é não se refere a um de seus elementos internos. É comum estudantes não aceitarem facilmente metades cuja divisão não seja vertical ou horizontal. Há ainda aqueles que pensam que dividir ao meio é apenas dividir em duas partes.

## RELEMBRANDO CONTEÚDOS CURRICULARES E PENSANDO NA INTEGRAÇÃO CURRICULAR

Como confeccionar uma máscara para o Carnaval, de maneira a garantir as simetrias aparentes de um rosto? Como construir uma faixa decorativa para as paredes da sala de aula? Como recortar uma bandeirinha de festa junina, de modo que ela fique "certinha"? Como reproduzir, o mais rápido possível, a mesma forma várias vezes? Essas são perguntas que a professora Maria Amélia sugere, com base em sua experiência com alunos de 5ª série. Veja!

> Em geral utilizamos muito papel e tesoura. Para fazer a bandeirinha da festa junina, os alunos percebem que uma dobra de papel é suficiente. Daí para frente, começam a dobrar o papel mais vezes e a descobrir o que acontece. Percebem que quanto mais dobram o papel, mais o mesmo motivo aparecerá. Na verdade, as dobras são uma forma de gerar imagens simétricas de uma mesma figura muitas vezes. Ao invés de usarmos os termos reflexionar ou transladar, falamos simplesmente em repetir. Com esta idéia, criam "toalhinhas" de papel para bandeja (fazem questão de dar às mães!). É interessante que após esta análise das dobras e dos cortes, passam a planejar os cortes no papel, tendo em mente (criando a imagem mental – prevendo) o resultado. Dobram o papel de acordo com o que querem produzir. Aos poucos percebo que há um planejamento do trabalho, que as dobras e os cortes deixam de ser aleatórios.

Ainda complementa a professora:

> um *procedimento* está diretamente relacionado a um "saber fazer" e acredito que estas atividades estão voltadas aos conteúdos procedimentais que desejo desenvolver o conceito de isometrias. Quanto aos objetivos atitudinais, acredito que prevalece a sensibilização do olhar para as formas que nos rodeiam. Olhar para o mundo de um jeito diferente, procurando a *beleza* da simetria nos objetos e na própria natureza é um "valor" a ser construído no interior da escola.

***COMENTÁRIO***

*Converse com professores de sua cidade para conhecer suas experiências no trabalho com as isometrias. Veja também como os livros didáticos, de 5ª a 8ª séries, adotados em sua região estão desenvolvendo essa temática.*

## ATIVIDADE FINAL

A fala da professora esclarece algumas de suas dúvidas sobre conceitos, procedimentos e atitudes? O que achou do tipo de atividade que a docente desenvolveu? Além da integração com Artes, que outra disciplina você envolveria? Converse com colegas e com seu tutor sobre elas.

**!**

Há muitos ornamentos (frisos, mosaicos, rosetas etc.) cotidianos que são feitos baseados em composições de transformações no plano. Explorá-los pode constituir atividades geométricas interessantes.

## CONCLUSÃO

Estamos chegando ao final da disciplina. Esperamos que você tenha construído o seu laboratório de Geometria. A possibilidade de realizar giros por meio de dobras e cortes em papel, além de enriquecer o seu aprendizado, vem acrescentar novas alternativas didáticas e recursos a seu laboratório. É importante você ter percebido que Geometria Dinâmica não se faz apenas com o *Cabri Gèomètre* (Aula 18). Ela também pode ser feita com papel e lápis. O desafio é perceber suas potencialidades e limitações, pois, nesse tipo de Geometria, o que temos de diferente é a possibilidade de realizar movimentos.

## RESUMO

Entre as transformações isométricas do plano, as rotações ocupam lugar de destaque nas representações que acontecem cotidianamente. Identificar uma rotação consiste em determinar seu centro e ângulo de giro. Podemos, também, obter uma rotação pela composição de simetria axiais. Diremos que uma figura possui simetria rotacional quando coincide com sua própria imagem, após um giro em torno de seu centro. Os polígonos regulares são exemplos de figuras que possuem simetria rotacional. Atividades simples com dobradura e recorte de papel contribuem muito para desenvolver a construção de imagens mentais das rotações, simetrias rotacionais e a composição de simetrias.

## AUTO-AVALIAÇÃO

Das atividades propostas, não se preocupe se você teve dúvidas na nona. Na aula seguinte, você poderá revê-la. Se você não realizou as duas atividades complementares desta aula, sugerimos, como uma forma de avaliar seu aprendizado, que as faça e apresente ao tutor suas descobertas. Caso tenha feito, parabéns! Volte à Aula 4, utilize o roteiro do diário sugerido e faça um texto avaliando sua aprendizagem nesta aula. Lembre-se de que elaborar antes um esquema conceitual (Aula 25) pode ser um facilitador na construção do seu texto. Consideramos fundamental que você tenha percebido a diferença entre simetria e rotação.

## INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, estudaremos um outro tipo de isometria: a translação. Tenha à mão tesoura, papel A4 ou ofício, papel transparente e instrumentos de medida (régua, transferidor, esquadro).

AULA 27

# Estudando translações

## Meta da aula

Instrumentalizar o ensino
das transformações no plano: translações.

## objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Conceituar translação.
- Conceituar deslizamento.
- Diferenciar translação de deslizamento.
- Analisar composições de isometrias.
- Utilizar diferentes alternativas didáticas no trabalho com as isometrias.
- Aprofundar estudos sobre as rosetas, os mosaicos e os frisos.

## Pré-requisitos

Para melhor desenvolvimento desta aula, sugerimos que você relembre os conceitos de simetria (Aula 25) e rotação (Aula 26). Dispor de *material para recorte* (tesoura, papel A4 ou ofício, papel transparente) e de *medida* (régua, transferidor, esquadro) também será imprescindível.

## INTRODUÇÃO

No cotidiano, a palavra transformação é comumente associada à metamorfose e a deslocamento. O conceito matemático associado à palavra transformação é bastante complexo. Pode referir-se a coisas tão díspares como mudanças de coordenadas para representação de curvas ou deformações topológicas. No entanto, todas têm um elemento comum, que é o movimento, princípio básico da Geometria Dinâmica, e o estudo das propriedades que o conservam. Nesse espírito, continuaremos nossa discussão sobre um outro tipo de movimento no plano: a translação. Começamos, então, com um episódio histórico.

## CONVERSANDO SOBRE A HISTÓRIA: TRANSFORMAÇÕES NO PAPIRO DE AHMES E EM OUTROS DOCUMENTOS HISTÓRICOS

No Papiro de Ahmes (1650 a.C.) apareceu a maioria das primeiras transformações, nas quais se convertiam triângulos isósceles e trapézios em retângulos, para calcular sua área mais facilmente. No entanto, os egípcios não desenvolveram mais esses princípios.

Outro campo em que apareceu a idéia de transformação foi a Cartografia. No final do século I, Ptolomeu publicou a primeira projeção estereográfica da esfera e, no século XVI, Mercator introduziu a projeção, que leva seu nome. Neste mesmo século, apareceu, pela primeira vez impresso, o triângulo de Pascal.

Na segunda metade do século XIX, foi estudada uma grande variedade de transformações, dentre elas as mais populares foram as que definem a chamada Geometria Projetiva, devido, sobretudo, a Poncelet.

***ATIVIDADE***

**1. Utilizando uma figura qualquer. Contorne-a, criando um molde, sobre uma folha de papel. Dê uma "puxadinha" no molde e contorne-a novamente. Ligue dois de seus pontos. O que aconteceu com a figura? Você conhece outros movimentos desse tipo no seu dia-a-dia? Dê um exemplo. Você sabe como se chama esse tipo de movimento?**

_____

_____

_____

***COMENTÁRIO***

*Se você respondeu* **TRANSLAÇÃO**, *parabéns! Caso contrário, não se preocupe, pois, nesta aula, vamos estudar esse tipo de movimento no plano.*

**TRANSLAÇÃO**

Translação é um movimento em que todos os pontos da figura percorrem segmentos paralelos de mesmo comprimento;
ou seja, transladar uma figura é movê-la orientadamente.

A translação é a única isometria que, obrigatoriamente, está associada à mudança de lugar. Não mudamos a orientação, mas a posição no plano. Essa é a diferença fundamental entre translação e as outras isometrias. Por exemplo, a figura seguinte ilustra uma translação do coelho da esquerda. Para obtê-la, devemos apenas copiar a original e deslizar o papel para um ponto qualquer onde queremos desenhar a "nova" figura, porém mantendo o paralelismo com a posição original. Observe que AA' // BB'.

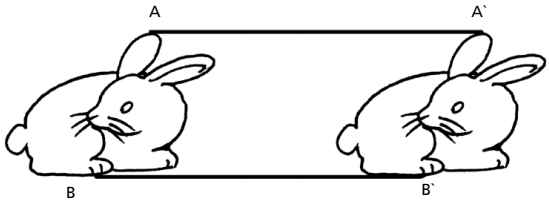



**Figura 27.1:** Representação da translação

**!**

As noções de segmento orientado e de paralelismo são imprescindíveis no estudo de translações.

É possível que você esteja pensando sobre o paralelismo e se perguntando se os vetores devem ser apenas horizontais. Muito bem! Ótimo questionamento! Na atividade seguinte, você poderá responder à sua interessante pergunta. Verá que é muito fácil!

**!**

Caso você tenha alguma dúvida sobre vetores, esta é uma boa oportunidade para revisar esse conceito no Módulo de Física.

***ATIVIDADE***

2. Identifique o vetor de translação em cada par de figuras a seguir.

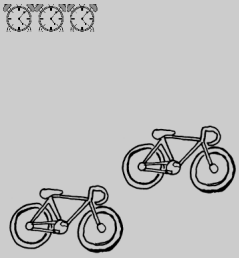


**Figura 27.2**

**Figura 27.3**

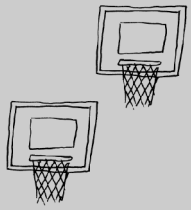


**Figura 27.4**

## CONVERSANDO SOBRE O QUE FAZEM OS ALUNOS

A translação é a isometria de mais simples compreensão, seja por alunos do Ensino Fundamental, seja pelos do Ensino Médio. Pesquisas (GUTIÉRREZ, 1996) mostram que estudantes do Ensino Fundamental compreendem com rapidez as características essenciais das translações, reconhecem-nas, desenham-nas; alunos do Ensino Médio ou Superior captam mais facilmente as características visuais e matemáticas das mesmas. Geralmente, as dificuldades mais freqüentes são:

1. Compreensão do conceito de vetor livre como vetor associado a uma translação. Alunos que não estudaram esse conceito na Física tendem a pensar que uma translação consiste em levar a figura até o extremo da flecha desenhada como representante do vetor.

Quando o vetor está separado da figura, os estudantes limitam-se a colocar o transladado em um dos extremos da flecha. É preciso ressaltar que o vetor não indica o lugar em que devemos tocar a figura original. Levar o vetor a um ponto da figura original pressupõe compreender a noção de vetor livre, que pode não ser tão simples para estudantes que ainda não têm claro o conceito de vetor.

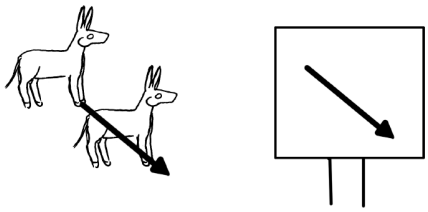


**Figura 27.5:** Translação.

**!**

O vetor não indica para que lugar transladaremos a figura original, mas indica apenas um ponto dela, aquele relacionado à sua origem.

2. Realização de translações quando a figura original tem forma poligonal (especialmente se é retangular) e o vetor da translação é paralelo a um de seus lados. É muito freqüente os alunos desenharem o vetor começando em um extremo do lado inicial e terminando no outro extremo do lado imagem (**Figura 27.6**).

**Figura 27.6:** Erro de translação.

!

É comum os alunos basearem-se apenas nas características visuais da translação para determinar a posição da figura-imagem, sem utilizar as propriedades matemáticas, particularmente, a de que a distância *entre um ponto e sua imagem deve ser igual ao comprimento do vetor.*

Você já sentiu alguma dessas dificuldades referidas anteriormente? Vamos, então, ver se você realmente compreendeu.

!

Lembre-se de que é na realização de diferentes atividades e na troca de idéias com colegas e com o tutor que esclarecemos dúvidas e enriquecemos nossa aprendizagem.

## CONVERSANDO SOBRE O SEU LABORATÓRIO PESSOAL DE GEOMETRIA: FAZENDO TRANSLAÇÕES COM CÓPIAS EM PAPEL VEGETAL

Como você viu na aula anterior, podemos estudar transformações no plano fazendo dobras e recortes em papel branco e transparente. O uso do papel vegetal vem enriquecer essa proposta. Por exemplo, para fazer qualquer translação com esse tipo de papel é necessário:

(1) desenhar uma figura numa folha,

(2) traçar o vetor,

(3) copiá-lo,

(4) levá-lo a um ponto da figura,

(5) copiar a figura e o vetor no papel vegetal,

(6) sem girar o papel, deslizá-lo até que coincidam os extremos do vetor original e a origem do vetor cópia, formando ambos uma mesma reta (direção),

(7) copiar na folha a figura do papel vegetal.

### ATIVIDADE COMPLEMENTAR 1

Pratique a construção sugerida anteriormente. Mostre ao tutor uma das translações que você realizou. Converse com ele sobre suas descobertas.

## FAZENDO TRANSLAÇÃO A PARTIR DE DOBRAS EM PAPEL

A realização de translação e rotação por meio de dobras em papel tem elementos comuns, isto é: (a) dobra-se por dois eixos; portanto, obtém-se três dobras; (b) considera-se como referência um dos pontos mais distantes da primeira dobra, para que a figura fique visível ao dobrar; (c) a primeira dobra está na mediatriz (bissetriz) do vetor de translação (do ângulo de giro) e a segunda no ponto homólogo ao ponto de referência. Veja a ilustração seguinte!

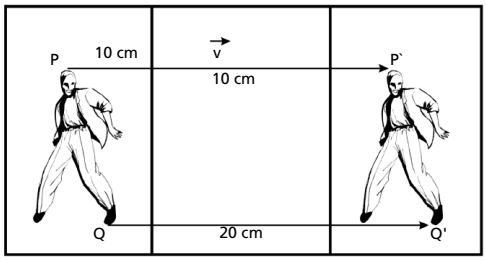



**Figura 27.7:** Translação por dobradura.

Como você pode verificar, a diferença entre ambos os movimentos é que, na translação, os eixos de dobra são paralelos entre si e, na rotação, são secantes com o centro de giro (reveja a **Figura 26.4** da Aula 26).

***ATIVIDADE***

3. Pratique a construção sugerida anteriormente, reproduzindo a translação ilustrada na **Figura 27.7**. Continue conversando e mostrando ao tutor suas descobertas.

A translação é um movimento no qual cada ponto e seu correspondente estão unidos por um vetor cujo (a):
1. módulo é o mesmo que o vetor de translação escolhido;
2. direção é paralela à do vetor de translação;
3. sentido é o mesmo que o do vetor de translação;

Na realização de translações e giros mediante dobras e cópias é importante relembrar que as medidas devem ser tais que a figura original não fique dividida quando fizermos a dobra e que não fique fora da folha em que vamos copiá-la. Assim, devemos prestar atenção e saber que: (1) o módulo do vetor deve ser maior que o dobro do desenho original, ou igual a ele para que a mediatriz não o corte, e (2) se o tamanho do desenho ou do espaço disponível depois de P' ultrapassa 1/3 da folha, seu transformado sairá do papel.

Você poderá observar também que, se escolher o ponto mais distante do vetor como referência, o transladado aparecerá depois do vetor desenhado e, se fizer o contrário, ou seja, se escolher o ponto mais próximo da primeira parte, a primeira dobra deverá ser feita nesse ponto e a segunda na mediatriz, de tal modo que a figura transladada esteja antes do vetor assinalado. Esse fato pode parecer estranho, mas é necessário para não pensarmos que a figura será obtida imediatamente depois do vetor. Veja!

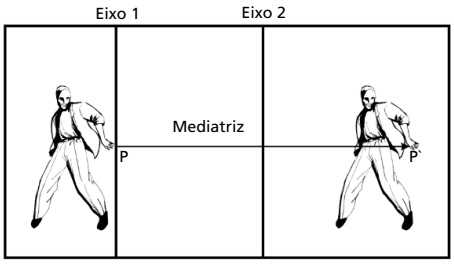



**Figura 27.8.a**

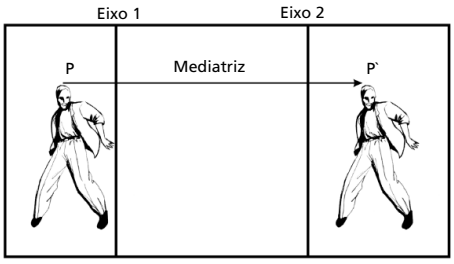



**Figura 27.8.b**

Translação por dobradura.

É bom lembrar que, se considerarmos como referência um ponto interior da figura, alguns dos eixos o cortariam ou a sua transformada. Vamos, agora, praticar um pouco a translação de figuras.

***ATIVIDADE***

4. Agora você deverá transladar cada figura de acordo com o vetor que a acompanha.

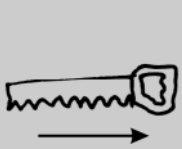


**Figura 27.9**

**Figura 27.10**

**Figura 27.11**

**Figura 27.12**

**Figura 27.13**

Casos de translação.

***COMENTÁRIO***

*Lembre-se de utilizar régua.*

## CONTINUANDO NOSSA CONVERSA SOBRE A COMPOSIÇÃO DE MOVIMENTOS NO PLANO

***ATIVIDADE***

5. Pegue uma folha e faça os seguintes procedimentos:
- Faça duas dobras na folha, em forma de "sanfoninha".
- Desenhe qualquer figura.
- Recorte-a, preservando as dobras laterais.
- Desdobre a figura.

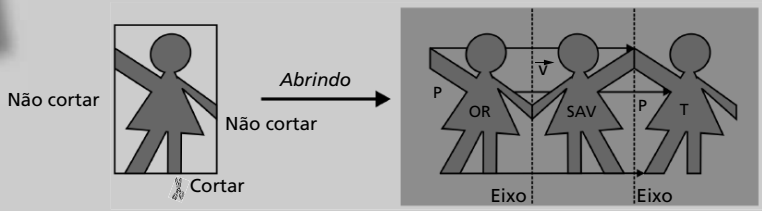



**Figura 27.14.a:** Sanfona fechada. **Figura 27.14.b:** Sanfona aberta.

O que você observa com a transformação final (T) que sofreu a figura original (OR)? Você sabe como se chama esse movimento? Qual o outro movimento presente na atividade?

_____

_____

_____

***COMENTÁRIO***

*A translação não possui pontos invariantes, uma vez que não há ponto que volte à sua posição original. Portanto, esta atividade objetiva estudar a composição das duas simetrias axiais verticais (SAV) e a comprovação de que o movimento obtido é uma translação. Lembre-se de que o sentido do vetor depende da posição em que é feita a dobra, ou seja, se é feita para a esquerda ou para a direita.*

**!**

A composição de duas simetrias axiais de eixos paralelos resulta numa translação de vetor perpendicular aos eixos, cujo módulo é o dobro da distância entre eles.

E agora, você poderia dizer que movimento sofreu o barco da esquerda?

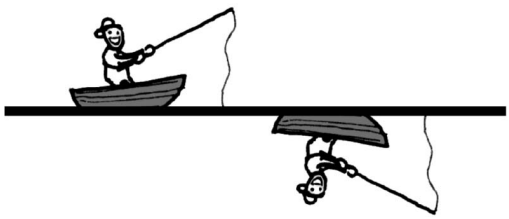


**Figura 27.15:** Caso de simetria.

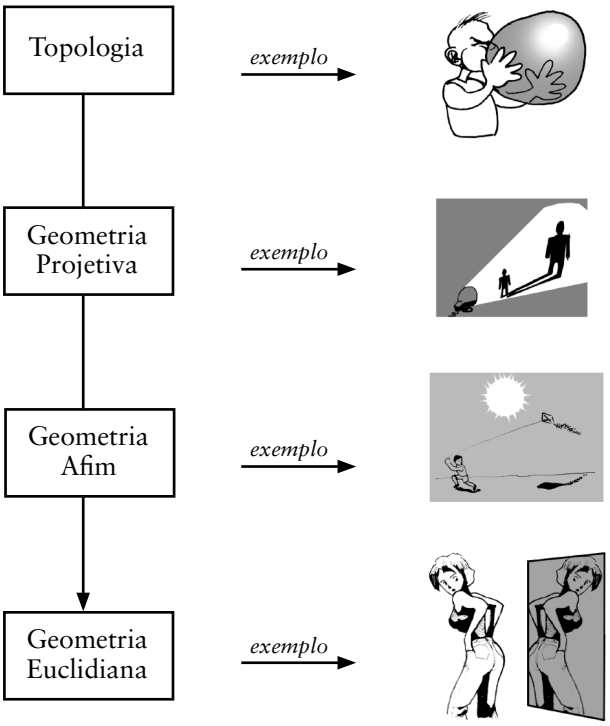
Embora esse tipo de transformação nos seja visualmente comum, ele é pouco estudado. Chama-se *deslizamento* e, como você pode observar, resulta da composição de uma reflexão e uma translação que mantêm certa relação: *o eixo da primeira é paralelo ao vetor da segunda*.

## CONVERSANDO SOBRE A HISTÓRIA: FÉLIX KLEIN E AS TRANSFORMAÇÕES PLANAS

Félix Klein (1849-1925), quando passou a ser professor em Erlangen, na Alemanha (1872), discursou mostrando como poderia ser aplicado o conceito de grupo para caracterizar as diversas "geometrias" que apareceram ao longo dos séculos. Em seu famoso pronunciamento, descreveu uma geometria como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes quando submetidas a ação de um grupo concreto de transformações. Dessa forma, qualquer classificação dos grupos de transformações se converte imediatamente numa classificação das "geometrias".

A idéia fundamental de Klein era que cada geometria podia ser caracterizada por meio de um grupo de transformações, e que as propriedades e os resultados de uma delas derivavam-se dos invariantes por referido grupo de transformações. A conseqüência imediata desse resultado foi a organização das diversas geometrias, inclusive das não-euclidianas. Segundo ele, se o grupo de transformações de uma geometria constituir subgrupo do grupo de transformações de outra, isto é, se a primeira for uma subgeometria da segunda, todos os teoremas demonstrados para a Geometria serão automaticamente válidos para a subgeometria.

No esquema seguinte, você pode ver as relações entre as geometrias mais conhecidas propostas por Klein. Observe que ele considerou a Topologia como uma das geometrias. Para facilitar o seu entendimento, ilustramos cada geometria com um exemplo.




**Esquema 27.1:** Relação entre diversas geometrias

A Geometria Euclidiana consiste no estudo das propriedades das figuras do plano, que permenecem inalteradas através do grupo das transformações que está sendo engendrado por simetrias, rotações e translações. Essas transformações são também denominadas rígidas ou movimentos.

A Geometria Euclidiana é um caso particular da Geometria Afim, que não conserva medidas nem áreas. Por exemplo, uma cônica de um certo tipo pode se transformar em outra do mesmo tipo. Esta, por sua vez, constitui um caso especial de Geometria Projetiva, já que uma cônica se transforma em outra.

Pappus conhecia as propriedades das transformações; no entanto, não elaborou o conceito de grupo, que dava à Geometria um caráter globalizador. Klein foi o artífice dessa inovação e dessa mudança.

Muito bem, agora que você conversou com colegas, com o tutor, conheceu um pouco mais da História da Matemática e está totalmente convencido da importância de estudarmos as transformações no plano, em diferentes séries, que tal realizarmos uma atividade para identificar a presença das mesmas em alguns movimentos de figuras? Mãos à obra!

**!**

As transformações que estudamos foram: Aula 25 (simetria central, simetria axial vertical, simetria axial horizontal); Aula 26 (rotação ou giro) e Aula 27 (translação e deslizamento).

***ATIVIDADE***

6. Identifique o movimento realizado em cada figura a seguir.

**Figura 27.16**

**Figura 27.17**

**Figura 27.18**

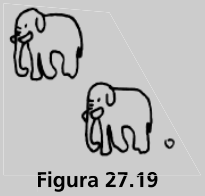


**Figura 27.19**

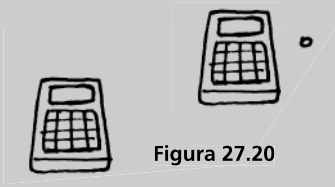


**Figura 27.20**

**Figura 27.21**

**Figura 27.22**

**Figura 27.23**

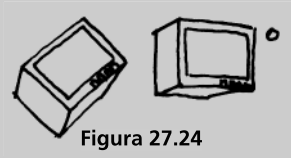


**Figura 27.24**

**Figura 27.25**

Exemplos de transformações.

***COMENTÁRIO***

*Além de identificar a rotação, procure também encontrar o ângulo de giro. Para as simetrias, localize os eixos, e nas translações, o vetor orientado.*

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR 2

Pense em atividades e formas de verificar as seguintes composições:

2.1. A composição de duas simetrias centrais de mesmo centro é a identidade e, de centros distintos, é a translação.

2.2. A composição de duas simetrias axiais resulta numa translação se os eixos forem paralelos e, numa rotação, se forem secantes.

2.3. A composição de um giro e uma translação constitui um giro de centro distinto, porém de mesmo ângulo.

***COMENTÁRIO***

*Converse com colegas e com o tutor sobre suas conclusões.*

## CONVERSANDO MAIS SOBRE PROCESSOS COGNITIVOS DOS ALUNOS

Os psicólogos dos anos 60 e 70, em sua maioria seguidores de Piaget, consideravam que a obra de Klein apoiava-se em suas propostas, pois, como vimos, a ordenação formal das diferentes estruturas, obtidas ao considerar os respectivos conjuntos de propriedades invariantes, coloca em primeiro lugar a Topologia que contém a Geometria Projetiva e a Euclidiana.

Como sabemos, os didatas daquela época tendiam a utilizar a teoria piagetiana para justificar o enfoque da Geometria fundamentado nas transformações. No entanto, não consideravam a teoria em sua totalidade, ou seja, pautavam-se nos aspectos que não eram contrários a seu ponto de vista. Tal fato também repercutiu na investigação da época, uma vez que as pesquisas naquele tempo estiveram fundamentadas em estudos clínicos, individualizados, de exercícios simples, muito controlados e com resultados meramente quantitativos.

Segundo Piaget, os alunos aprendem transformações na seguinte ordem: translações $\longrightarrow$ reflexões $\longrightarrow$ rotações. Ele afirmou que o fator de maior importância no início da aprendizagem das transformações é a orientação; a que menos dificuldade apresenta é a horizontal, seguida pela vertical e, depois, a oblíqua, considerada a que apresenta maior dificuldade.

Normalmente, as crianças possuem dificuldade em compreender uma composição de movimentos como um novo movimento. Assim, com grande dificuldade chegam à abstração de que ao compor duas simetrias de eixos paralelos obtém-se uma translação, transformação "que afeta" todos os pontos do plano. Analogamente, com um giro obtido pela composição de duas simetrias de eixos concorrentes, também se obtém uma translação.

Em um nível muito mais concreto, como o de dobrar e recortar papel, quando o número de dobras aumenta, aumentam também as dificuldades de fazer dobras adequadamente e/ou de recortar o papel dobrado.

Como você sabe, a noção de **GRUPO** também é muito importante na Geometria, pois pode ser utlizada para descrever as relações entre as diversas transformações geométricas.

Chama-se **GRUPO** um conjunto não-vazio, munido de uma operação estrela (*) que possui as seguintes propriedades: (i) associativa, (ii) elemento neutro e (iii) elemento simétrico.

### ATIVIDADE COMPLEMENTAR 3

Pense em atividades e formas de verificar as seguintes propriedades:

3.1. O conjunto das translações do plano, com a lei produto de aplicações, é um **GRUPO ABELIANO**.

Além das propriedades de um grupo, um **GRUPO ABELIANO** (ou Comutativo) admite a operação comutativa.

3.2. O conjunto das translações e os giros do plano, com a lei produto de aplicações, é um grupo não-abeliano.

3.3. O conjunto das isometrias no plano, com a lei produto de aplicações, é um grupo não-abeliano.

## ENRIQUECENDO O SEU LABORATÓRIO CONSTRUINDO MOVIMENTOS QUE COBREM O PLANO DIFERENTEMENTE: O EXEMPLO DAS ROSETAS

Existem três tipos de ornamentos que cobrem o plano: as rosetas, os frisos e os mosaicos. Como estão estritamente relacionados aos diferentes movimentos no plano, vamos apenas apresentá-los sucintamente, a título de curiosidade.

**!**

Esperamos que você se sinta extremamente motivado para aprofundar, posteriormente, seus estudos sobre cada um dos ornamentos e, também, pensar na possibilidade da integração curricular com as aulas de Artes. Veja que os artesanatos de sua região podem conter alguns deles.

As **rosetas** são ornamentos limitados, nos quais uma região plana é pavimentada (coberta) por polígonos regulares. Em outras palavras, uma roseta é um tipo de ornamento contido em uma circunferência. Veja, a seguir, um exemplo de roseta do artesanato paraense.

**Figura 27.26:** Roseta paraense.

Como você deve ter gostado, pegue papel e tesoura e vamos construir uma roseta que lhe é muito familiar.

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR 4

Siga os seguintes procedimentos:

1. Pegue uma folha de papel e recorte um círculo.

2. Dobre ao meio.

3. Repita o passo anterior, quantas vezes quiser, sempre dobrando ao meio.

4. Recorte-a na forma que melhor convier; abrindo-a, obterá uma roseta.

Esta é uma das maneiras de construir as conhecidas e bonitas toalhinhas de papel, que constituem um tipo de roseta. Veja um exemplo!

**Figura 27.27:** Exemplo de roseta.

É bom lembrar que, como o sistema gerador de uma roseta deve cubrir uma superfície finita, o conjunto de isometrias diferentes de uma roseta, ou seja, de isometrias não-equivalentes, deve ser finito. Isso significa que não pode haver translações nem simetrias em deslizamento. Podemos demonstrar que existem infinitas rosetas diferentes, porém todas elas têm um dos dois sistemas geradores seguintes: uma rotação R (O, 360º/$n$) ou duas simetrias cujos eixos formam um ângulo de 180º/$n$, sendo $n$ um natural não-nulo. Em outras palavras, as rosetas correspondem aos grupos cíclicos (**Figura 27.28**) e diédricos de ordem $n$ (**Figura 27.29**). A figura de base de uma roseta é o triângulo obtido da união do centro do polígono regular com dois vértices consecutivos (no caso das rosetas cíclicas) ou com um vértice e o ponto médio de um dos lados adjacentes (no caso das rosetas diédricas). Veja, a seguir, os dois tipos de roseta.

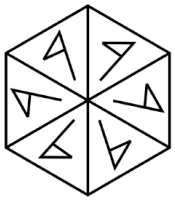


**Figura 27.28:** Roseta cíclica.

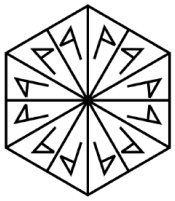


**Figura 27.29:** Roseta diédrica.

Chamamos *friso* a um recobrimento da região do plano limitada por retas paralelas. Os frisos são recobrimentos de regiões de comprimento infinito para largura finita. Por isso, as únicas isometrias que podem formar parte dos frisos são:

1. As translações de vetor paralelo aos bordos da região.
2. Os giros de 180º cujo centro eqüidista dos bordos da região.
3. As simetrias cujo eixo é a reta que eqüidista dos bordos da região ou é perpendicular à referida reta.
4. As simetrias em deslizamento cujo eixo é a reta que eqüidista dos bordos da região.

Assim, analisando as possíveis combinações desses movimentos, veja os sete tipos de friso que existem.

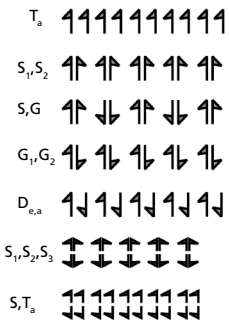



**Figura 27.30:** Exemplos de frisos.

Um *mosaico* é um tipo de ornamento que cobre todo o plano. Você deve vê-lo, normalmente, em muitos lugares que freqüenta. Por exemplo, nos pisos (**Figura 27.31.a**) e objetos de decoração (**Figura 27.31.b**).

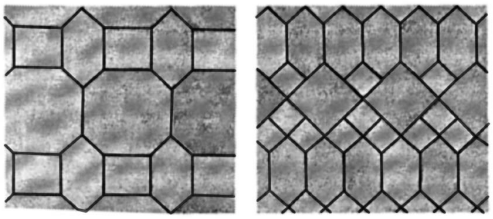


**Figura 27.31.a:** Exemplos de mosaicos.

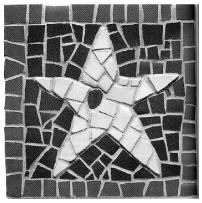


**Figura 27.31.b:** Exemplos de mosaicos.

Em Matemática, existem dois tipos de mosaicos: os regulares e os semi-regulares. De modo geral, os mosaicos são construídos a partir de uma **REDE** (malha) de triângulos eqüiláteros, quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos ou hexágonos.

As estruturas planas criadas por módulos poligonais são denominadas **REDES**. No seu Módulo Prático, você já viu exemplos de várias malhas formadas por polígonos regulares. Veja, agora, as **Figuras 27.32** e **27.33**.

Lembre-se de que os únicos polígonos que podem ser utilizados para construir mosaicos regulares são os triângulos eqüiláteros, os quadrados e os hexágonos regulares, pois são os únicos que possuem ângulo interno divisor de 360º.

Observe exemplos de estruturas criadas por diferentes formas planas: circulares (**Figura 27.32.a**), quadradas (**Figura 27.32.b** e **c**), triangulares (**Figura 27.32.d**).

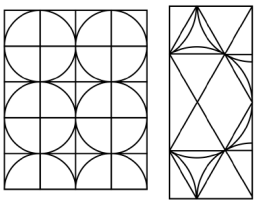


Figura 27.32.a

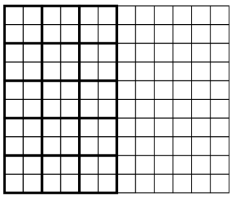


Figura 27.32.b

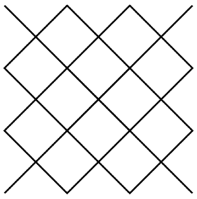


Figura 27.32.c

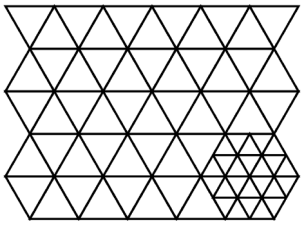


Figura 27.32.d

Exemplos de mosaicos.

**!**

Lembra-se da Aula 15, em que analisamos estruturas? Pois bem, os mosaicos são formados por estruturas planas, ou melhor, pela sua repetição. Aqui você vê outra possibilidade de inserção das construções geométricas no currículo.

Nos mosaicos *semi-regulares*, ainda que só possamos utilizar polígonos regulares, se compusermos adequadamente diferentes formas e tamanhos, obtemos uma variedade muito maior de combinações possíveis. Veja exemplos de estruturas de mosaicos semi-regulares.

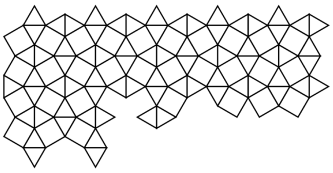


Figura 27.33.a

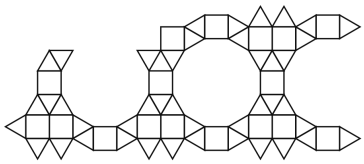


Figura 27.33.b

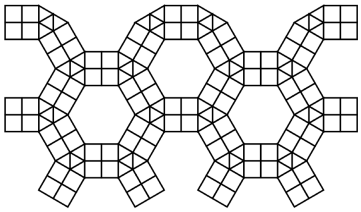


Figura 27.33.c

Exemplos de mosaicos semi-regulares.

## CONVERSANDO SOBRE CONTEXTOS E INTEGRAÇÃO CURRICULAR

Quando falamos em integração, é comum pensarmos em contexto. A contextualização é comumente associada ao cotidiano. Como você viu em algumas de nossas aulas, a integração curricular pode ocorrer na própria Matemática ou fora dela, quer dizer, pode ocorrer, em outras disciplinas e ramos do conhecimento, que podem ou não estar relacionados ao nosso dia-a-dia.

Há momentos em que a integração só é possível no próprio contexto matemático. Por exemplo, *que exemplos cotidianos você utilizaria para ilustrar produtos notáveis e fatorações?* Não existem! Muito bem! Os significados para tais conceitos vêm da própria Matemática.

Quando estudamos as transformações no plano, você viu diferentes integrações possíveis no campo da Geometria, objetivo principal desta disciplina. No entanto, consideramos importante ressaltar a presença das isometrias em outras áreas da Matemática. Veja!

**Quadro 27.1:** Integração curricular das isometrias com a Matemática

| | **Integração com áreas de Matemática** |
|---|---|
| **Aritmética** | A simetria aparece em muitas propriedades e tabelas numéricas, nas igualdades, no estudo das progressões, na representação de números complexos |
| **Álgebra** | A análise de regularidades em movimentos/ comportamentos é fundamental no estudo das relações e funções |
| **Geometria Analítica** | Para determinar nosso rumo no espaço, podemos utilizar um mapa ou sistema de referência. O estudo algébrico dos deslocamentos e das transformações é feito por tais sistemas de referência. Construção e interpretação de gráficos de funções |
| **Probabilidade** | Podemos identificar simetrias em algumas tábuas de distribuição e diagramas de árvore |

O quadro seguinte ilustra possibilidades de integração com outras áreas, sejam elas afins à Matemática, como a Astronomia, a Física e a Química, ou não, como a Medicina e a Literatura.

**Quadro 27.2:** Integração curricular das isometrias com outras áreas de conhecimento

| Outros ramos e áreas | Exemplos |
|---|---|
| **Tecnologia** | Estudo de mecanismos com movimento de giro ou translação |
| **Educação Física** | Exercícios físicos e movimentos (repetição, simetria, deslocamentos) |
| **Ciências Naturais** | Formas com simetria central ou radial de alguns seres vivos |
| **Astronomia** | Movimento dos planetas |
| **Física** | Álgebra vetorial e atividades de reflexão da luz |
| **Química** | Classificação de cristais, configurações atômicas |
| **História** | Períodos históricos e História da Arte |
| **Geografia** | Mapas e planos em geral |
| **Literatura** | Poemas com versos simétricos |
| **Música** | Partituras e melodias em forma de frisos |
| **Medicina** | Equipamentos médicos fundamentados em espelhos |
| **Jogos** | A maioria dos jogos de tabuleiro/mesa (xadrez, bilhar etc.) possui algum tipo de simetria. Outros exemplos podem ser vistos em alguns brinquedos e naqueles dos parques infantis |
| **Meios de Comunicação** | Propagandas, logotipos, *layout* de páginas |
| **Artes** | Mosaicos, frisos, rosetas etc. |
| **Arquitetura e História da Arte** | As formas simétricas são sempre harmônicas, equilibradas, grandiosas e solenes. Todas têm características do Classicismo |

Em todas elas, precisamos do olhar matemático. Esse quadro complementa suas respostas da Atividade Complementar 4 da Aula 25. Revise-a e converse com o tutor!

## CONCLUSÃO

Identificar e analisar transformações é um processo importante do pensamento geométrico. Não é tarefa fácil elaborar aulas sobre isometrias separadamente, pois, conforme dissemos, nossa percepção visual desses movimentos é muito mais dinâmica e integrada. Muitas vezes, fixarmos em apenas um deles não é simples. Nossas aulas de isometrias exploraram elementos curriculares (atividades, História, recursos, integração etc.) com diferentes abordagens. Essa estratégia foi proposital, pois pensamos que, dessa forma, além da construção conceitual, você vai desenvolvendo diferentes habilidades didático-pedagógicas para suas aulas.

## RESUMO

Nesta aula, você aprendeu a conceituar translação como um movimento no plano que obedece a um segmento orientado, denomidado vetor. Viu que um deslizamento é uma transformação que resulta da composição de uma reflexão e uma translação, em que o eixo da primeira é paralelo ao vetor da segunda. Finalmente, conheceu rosetas, mosaicos e frisos, e verificou que as transformações constituem conteúdos curriculares que nos possibilitam distintas abordagens na integração curricular.

## ATIVIDADE FINAL

Como você sabe, a compreensão conceitual e as formas de definir cada conceito, com suas propriedades associadas, foi nossa ênfase. Assim, gostaríamos que você escrevesse, com suas próprias palavras, o seu entendimento sobre cada transformação plana estudada nessas três últimas aulas. Antes de elaborar seu texto, é bom identificar conceitos envolvidos em cada movimento e ilustrar cada um.

| Transformação | Conceitos envolvidos | Exemplo (desenho) | Comentários |
|---|---|---|---|
| Simetria central | | | |
| Simetrial axial | | | |
| Rotação | | | |
| Translação | | | |
| Deslizamento | | | |

***COMENTÁRIO***

*Se você conseguiu preencher o quadro anterior sem recorrer a leituras e anotações, parabéns! Você alcançou nossos objetivos. Caso contrário, revise o conteúdo cuidadosamente.*

Complementando essa auto-avaliação, sugerimos que identifique os movimentos que cada figura original (O) sofreu. Depois de fazer isso, confira suas respostas ao final da aula.

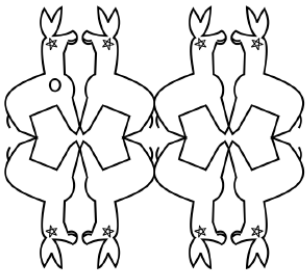


**Figura 27.34.a**

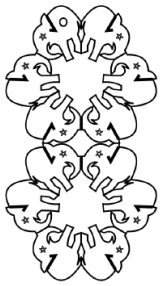


**Figura 27.34.b**

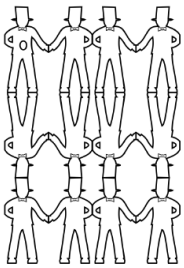


**Figura 27.34.c**

Exemplos de transformações isométricas.

## AUTO-AVALIAÇÃO

Depois de ter estudado, nas aulas anteriores, as simetrias e rotações, você completa seu estudo com as translações e as composições dessas isometrias. O importante é saber conceituar cada uma delas e identificar sua ocorrência em situações do cotidiano.

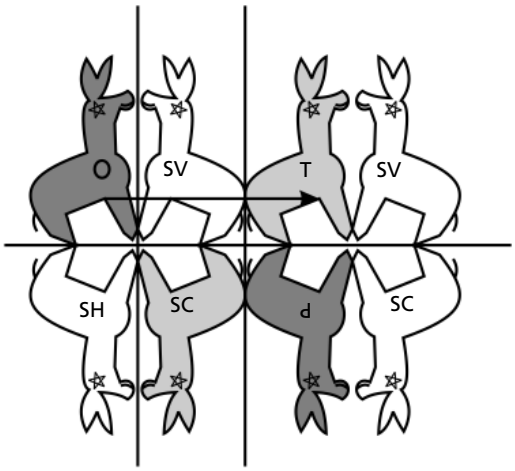
Se você entendeu como gerar cada movimento com recortes, dobras ou cópias em papel, terá diferentes possibilidades didáticas para enriquecer e tornar suas aulas mais dinâmicas e agradáveis. Ter entendido a diferença entre friso, roseta e mosaico é importante, porém isso não é imprescindível no momento. Nossa intenção foi apresentá-los e defini-los, ainda que resumidamente, para que você possa conhecer e sentir-se motivado para novos estudos e descobertas.

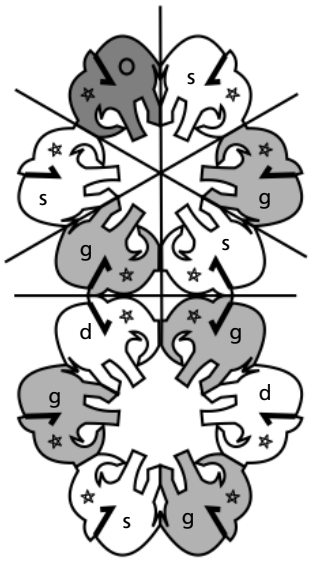
Finalmente, ter compreendido que a contextualização nas aulas de Geometria não se refere apenas ao cotidiano – e que esta também pode acontecer no âmbito da própria Matemática –, é um ponto importante em sua aprendizagem.

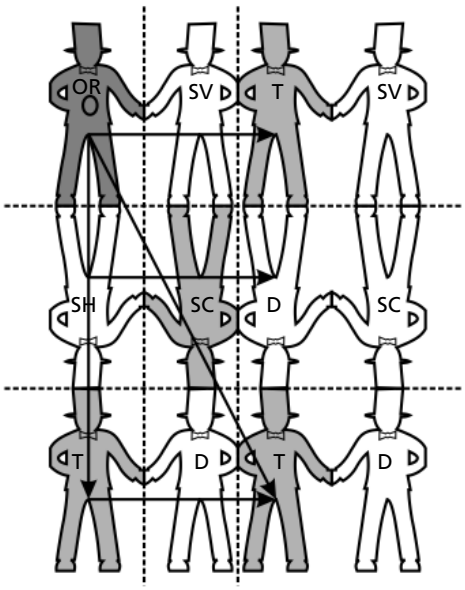
## INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você vai estudar um outro tipo de transformação no plano, que não preserva medidas: a semelhança. Tenha à mão tesoura, papel A4 ou ofício, papel transparente e instrumentos de medida (régua, transferidor, esquadro).

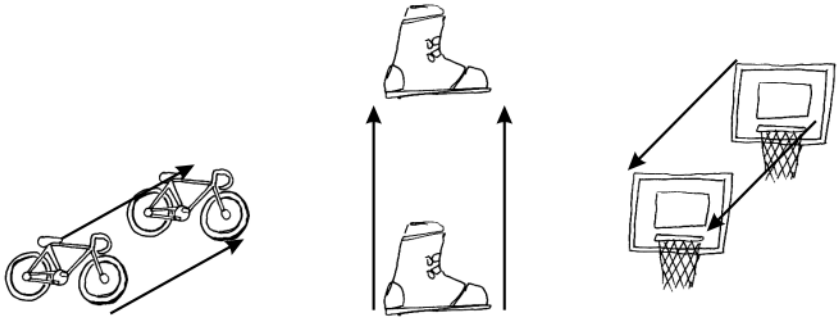
## RESPOSTA DA AUTO-AVALIAÇÃO



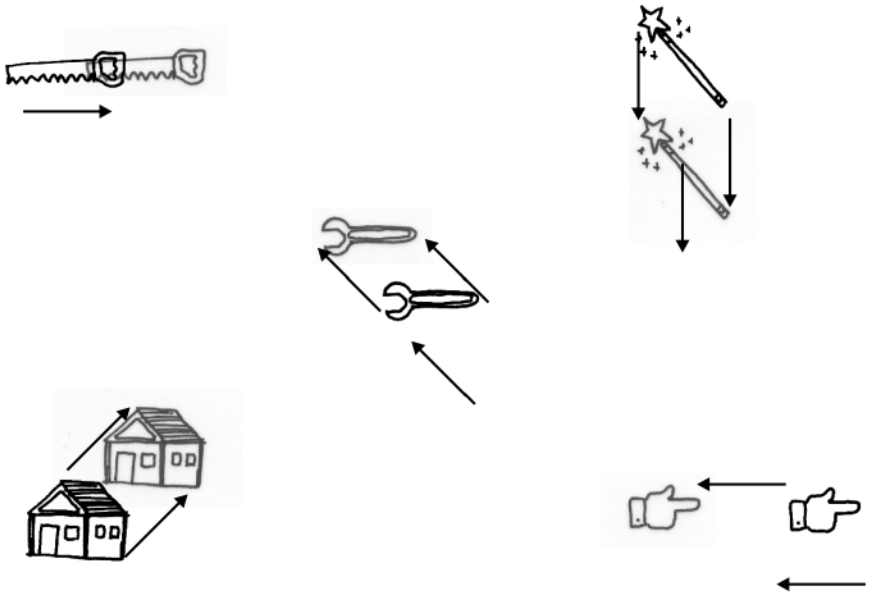



## RESPOSTA DA ATIVIDADE 2



## RESPOSTA DA ATIVIDADE 4



# Parecido ou semelhante? Estudando homotetias e semelhanças

AULA 28

**Meta da aula**

Instrumentalizar o ensino de Homotetia e Semelhança.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Definir figuras semelhantes.
- Definir figuras homotéticas.
- Compreender a semelhança e a homotetia como tipos de transformação no plano.
- Utilizar o pantógrafo para ampliações e reduções.
- Gerar famílias de figuras semelhantes e analisá-las.

**Pré-requisito**

Para um bom desempenho nesta aula, você deve rever a definição de figuras semelhantes (Aula 2) e as conseqüências da semelhança de triângulos (Aulas 11 e 12 de Geometria Básica).

!

Lembre-se de acessar as atividades da disciplina na Plataforma Cederj.

## INTRODUÇÃO

Na Aula 2, você percebeu que há diferenças entre conceito e definição. Para tal, realizou várias atividades que desenvolveram o conceito de figuras semelhantes. Viu também que, mesmo na 7ª série, os alunos podem comparar figuras observando os atributos relevantes da semelhança.

Nas três aulas anteriores, você estudou as isometrias, transformações que mantêm medidas. Nesta aula, vamos estudar outros tipos de transformações no plano que não conserva medidas e sim apenas a forma: a semelhança e a homotetia.

!

As crianças começam a aprender Geometria assim que são capazes de ver, sentir e se mover no espaço que ocupam. À medida que crescem, os alunos começam a perceber características dos objetos desse espaço, como forma, tamanho, posição, movimento, ordem e crescimento.

## O ENSINO DE SEMELHANÇA DE FIGURAS NO CURRÍCULO ESCOLAR

O conceito de semelhança de figuras é importante, porque desenvolve nas crianças a compreensão geométrica de seu meio e a idéia de proporcionalidade. Freqüentemente, elas encontram em seu dia-a-dia fenômenos que requerem o conhecimento de ampliação, redução, escala, projeção, crescimento de áreas e outros conceitos relacionados com semelhança. Em nosso currículo escolar atual, as idéias de semelhança estão incluídas em muitas partes, tais como:

• "Alguns modelos para o conceito de número racional baseiam-se na semelhança. Assim, as dificuldades dos alunos com números racionais podem estar parcialmente ligadas a problemas com a idéia de semelhança" (LAPPAN, 1994).

• Razão e proporção fazem parte do currículo escolar, pelo menos desde a 6ª série do Ensino Fundamental, e apresentam muitas dificuldades para o aluno.

• Figuras geométricas semelhantes fornecem uma imagem mental muito útil para outros tipos de situações que envolvem o conceito de proporção, facilitando o trabalho com as relações métricas no triângulo retângulo (Aula 21) etc.

• A importância de se estudar o conceito de semelhança também se justifica pelo fato de este estar relacionado ao cotidiano do aluno, através da ampliação e redução de fotos, da construção de maquetes e plantas-baixas etc.

Tradicionalmente, o ensino de semelhança de figuras vem sendo realizado sem aprofundar os aspectos nele envolvidos e sem relacioná-lo com os demais conteúdos; ou seja, as noções são apresentadas de forma condensada, com definições formais e alguns exemplos seguidos de exercícios, numa seqüência que não explora a riqueza e a complexidade que esse conhecimento pode propiciar.

**!**

O aluno vai conceituando, à medida que entende as figuras semelhantes. *Entender*, neste caso, pode significar comparar, reconstruir, buscar outros exemplos e redefinir.

Na maioria de nossas escolas, o professor só trabalha semelhança de figuras a partir da 8ª série do Ensino Fundamental, priorizando definições e propriedades; em alguns casos, esse ensino fica restrito ao estudo de triângulos. Surge, então, a necessidade de um trabalho exploratório e manipulativo, partindo da realidade e da vivência do aluno, visando a uma posterior fase de formalização e rigor do conceito em si.

**!**

É preciso que o aluno elabore os seus esquemas cognitivos, observando, manipulando, questionando, refletindo, formulando perguntas, relacionando os conceitos já aprendidos com os novos, de maneira a chegar a conclusões corretas e consistentes com seu alcance e compreensão. Sendo assim, um ensino de Matemática que desafie o aluno e desenvolva sua auto-estima para resolver uma tarefa despertará nele um sentimento positivo diante da disciplina, estimulando-o a resolver problemas.

Verificando alguns de nossos livros didáticos de Matemática, percebemos que a maioria ainda a apresenta de maneira estática, perfeitamente estruturada, em que os conhecimentos novos se baseiam em outros anteriores. Dos conceitos mais simples se passa, gradualmente, a outros mais elaborados, apoiando-se em axiomas, teoremas etc., da mesma maneira que se constrói um edifício sólido e harmonioso a partir de alicerces mais firmes. Por exemplo, acompanhando a direção das setas, a seguir, você observa a seqüência usada na apresentação do conteúdo de semelhança, tradicionalmente utilizada nos livros didáticos. Neste caso, o processo de construção do conhecimento é trabalhado como se fosse linear e seqüencial; o conteúdo é esgotado ao máximo em um determinado momento da vida escolar. Observe:

Proporcionalidade de segmentos ⟶ Retas paralelas cortadas por transversal ⟶ Teorema de Tales ⟶ Triângulos ⟶ Semelhança de triângulos ⟶ Relações métricas no triângulo retângulo

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR 1

Consiga três livros didáticos adotados em escolas de sua cidade e verifique se neles a seqüência anterior ainda é privilegiada. Identifique, também, elementos conceituais novos trazidos nos livros para o estudo da semelhança.

***COMENTÁRIO***

*Consideramos muito importante que você realize esse tipo de tarefa, pois, dessa forma, poderá ir conhecendo diferentes livros didáticos, recursos que serão indispensáveis em suas aulas.*

**!**

Construímos nossas definições por meio de exemplos negativos (contra-exemplos) e positivos. Propor aos alunos atividades que explorem não apenas os exemplos positivos de um conceito é uma tarefa docente importante.

## RELEMBRANDO A DEFINIÇÃO DE FIGURAS SEMELHANTES

**LADOS HOMÓLOGOS**
São os lados correspondentes de duas ou mais figuras semelhantes.

Você sabia que duas ou mais figuras são semelhantes quando possuem ângulos correspondentes congruentes e **LADOS HOMÓLOGOS** proporcionais?

**!**

Lembre-se de que lados homólogos proporcionais e ângulos correspondentes congruentes são atributos relevantes na definição de semelhança de figuras.

Por exemplo, os polígonos das figuras seguintes são semelhantes, pois $\hat{A} \cong \hat{A}'$, $B \cong B'$, $C \cong C'$ e $D \cong D'$ e os lados correspondentes AB e A'B', BC e B'C', CD e C'D', AD e A'D" são proporcionais ( $\frac{10}{5} = \frac{20}{10} = \frac{2}{1}$ ).

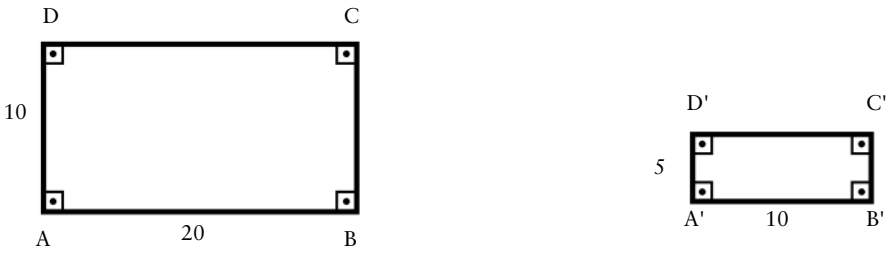



**Figura 28.1:** Retângulos semelhantes.

Esta definição leva-nos a observar que:

1. Dois polígonos quaisquer podem ter ângulos congruentes, mas podem não ter a mesma forma. Como exemplo, destacam-se os retângulos ABCD e PQMN (**Figura 28.2**) a seguir, que possuem ângulos correspondentes congruentes, mas não têm a mesma forma, uma vez que seus lados homólogos não são proporcionais ( $\frac{10}{30} \neq \frac{60}{40}$ ).

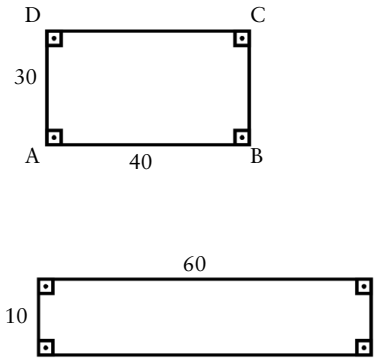



**Figura 28.2:** Retângulos não-semelhantes.

2. Podemos encontrar também polígonos, como o quadrado e o losango da **Figura 28.3**, que possuem lados proporcionais, mas que não têm a mesma forma.

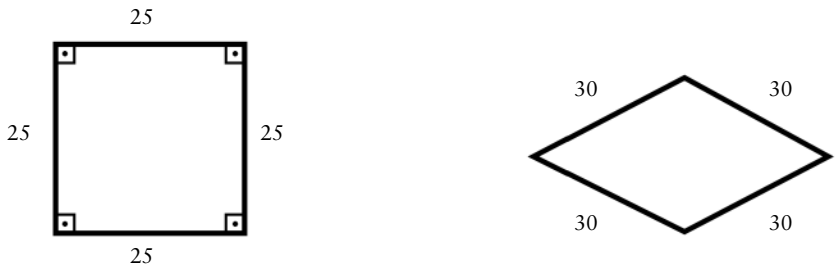



**Figura 28.3:** Polígonos não-semelhantes.

***ATIVIDADES***

1. A partir da definição de semelhança de figuras, analise a veracidade dos enunciados seguintes, justificando sua resposta para cada um deles.

a. Todos os polígonos regulares, de um mesmo tipo, são semelhantes.
b. Todas as circunferências são semelhantes.
c. Todos os quadrados são semelhantes.
d. Todos os retângulos são semelhantes.
e. Todos os triângulos são semelhantes.

***COMENTÁRIO***

*Lembre-se de que, neste caso, o processo de justificar envolve apresentar exemplos ou contra-exemplos.*

*Como você sabe, a semelhança de figuras é uma* relação de equivalência*, pois é reflexiva, simétrica e transitiva.*

2. Prove que a semelhança é uma relação de equivalência.

***COMENTÁRIO***

*Às vezes, falar de uma determinada demonstração é mais fácil do que escrevê-la. Sendo assim, é importante o ato de falar e buscar organizar o processo demonstrativo de determinada propriedade, ainda que mentalmente. Nesta atividade, você deve ter visto que a semelhança é* reflexiva *(todo polígono é semelhante a si mesmo), é* simétrica *(por exemplo, se um polígono ABCD ≅ A'B'C'D', então, o polígono A'B'C'D' ≅ ABCD), e é* transitiva *(se um polígono ABCD ≅ A'B'C'D' e o polígono A'B'C'D' ≅ EFGH, então, ABCD ≅ EFGH).*

No curso de Geometria Básica, você estudou a semelhança de triângulos. O estudo dos triângulos semelhantes tem uma diferença no que diz respeito aos retângulos, uma vez que nem todos os seus ângulos são congruentes.

## UM CASO ESPECIAL DE SEMELHANÇA: OS TRIÂNGULOS

Luengo (1990) sugere que o trabalho com semelhança de triângulos comece com os triângulos eqüiláteros, passando aos triângulos retângulos e, por último, ao caso geral. Ainda, segundo o autor,

> a primeira consideração que o aluno possivelmente perceberá, é que os ângulos nos triângulos semelhantes têm que ser iguais, aprendendo a identificar os ângulos correspondentes, mesmo que apareçam desenhados em posições diferentes. Interessa muito ao aluno, que conheça e maneje com desenvoltura a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer, isto é, 180º.

Dentre as diversas figuras planas, o estudo do triângulo é importante, uma vez que qualquer polígono pode ser decomposto em um conjunto de triângulos.

Dizemos que dois ou mais triângulos são semelhantes quando os seus ângulos correspondentes são congruentes ou seus lados homólogos proporcionais. Portanto, para verificarmos esta afirmação, não é preciso comprovar que os três ângulos correspondentes são congruentes e seus lados homólogos, proporcionais.

Existem três critérios para assegurarmos a semelhança de triângulos, que são:

1. Dois triângulos são semelhantes se têm um ângulo congruente e se os lados que o formam são proporcionais.

2. Dois triângulos são semelhantes se possuem dois ângulos congruentes.

3. Dois triângulos são semelhantes quando possuem seus lados homólogos proporcionais.

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR 2

Gostaríamos que você relembrasse três proposições estudadas no Módulo 2 de Geometria Básica. Ou melhor, além de revisar sua demonstração, que pensasse em alternativas de apresentá-las a alunos da 8ª série do Ensino Fundamental ou do 1º ano do Ensino Médio.

*Proposição 27*: Se um triângulo tem dois de seus ângulos correspondentes congruentes a dois ângulos de outro triângulo, então os dois triângulos são semelhantes.

*Proposição 28*: Se dois lados de um triângulo são proporcionais a dois lados de outro triângulo e os ângulos inclusos e esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

*Proposição 29*: Se os três lados de um triângulo são proporcionais aos três lados de outro triângulo, então esses triângulos são semelhantes.

***COMENTÁRIO***

*É fundamental que você pense em alternativas didáticas para desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo de seus alunos. Este tipo de proposição não pode ser trabalhado no currículo com meras "decorebas" e sem aplicação. Um processo de manipulação de cortes, recortes, sobreposições de figuras etc. pode também enriquecer o trabalho.*

**!**

Podemos triangular todos os polígonos (e, com grande aproximação, qualquer figura), de maneira que os critérios de semelhança de triângulos sirvam para averiguar se os polígonos são ou não semelhantes.

Suponhamos que os pentágonos ABCDE e A'B'C'D'E' a seguir sejam semelhantes.

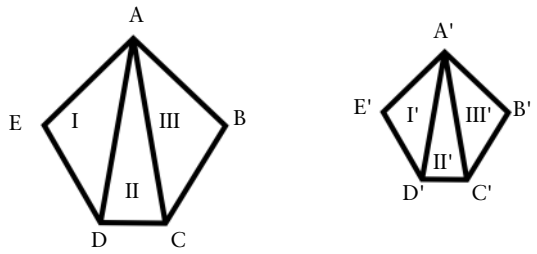



**Figura 28.4:** Triangulação de polígonos.

**!**

O processo de triangulação é importante também no estabelecimento de fórmulas para o cálculo de áreas planas (Aula 23).

Uma possível triangulação é a que se vê na **Figura 28.4**. Daí, para averiguarmos se os pentágonos são ou não semelhantes, basta sabermos se os seguintes pares de triângulos são semelhantes.

I~I'  II~II'  III~III'

Verificamos que:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = K$$

A razão comum entre os lados correspondentes em polígonos semelhantes é denominada **RAZÃO DE SEMELHANÇA**.

Com isso, podemos comprovar, também, que a razão entre os perímetros dos polígonos semelhantes é igual à **RAZÃO DE SEMELHANÇA.** Com efeito, somando-se os antecedentes e conseqüentes na série de razões iguais, obtém-se a razão dos perímetros. Assim, temos:

$$\frac{(AB + BC + CD + DE + EA)}{(A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A')} = \frac{P}{P} = K$$

## CONVERSANDO SOBRE A HISTÓRIA: O POLÍGONO ESTRELADO E O NÚMERO DE OURO

Como você viu na Aula 22, a razão áurea e suas aplicações despertaram e ainda despertam muita curiosidade matemática. Por exemplo, as proporções, a proporcionalidade de segmentos e o estudo das áreas estiveram presentes nos estudos pitagóricos. Um dos aspectos debatidos na Geometria pitagórica é o estudo do pentágono estrelado (Aula 14). Nele, as relações de semelhança, a proporção de segmentos e áreas podem ser estudadas e explicitadas.

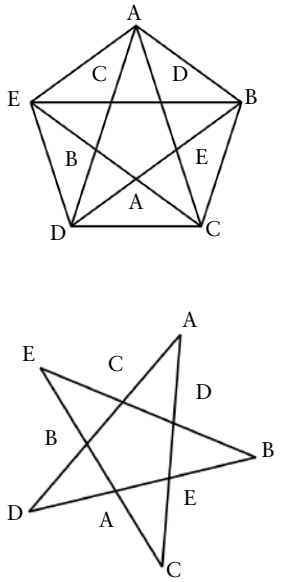



**Figura 28.5:** Pentágono estrelado.

Traçando as diagonais do pentágono regular (A, B, C, D, E) obtemos o seu semelhante A', B', C', D', E'. Tal procedimento pode ser feito indefinidamente, e a sua relação de semelhança foi denominada "divina proporção".

Com a mesma idéia, levando o lado menor *(a)* sobre a base *(b)*, podemos obter um retângulo e, assim, sucessivamente.

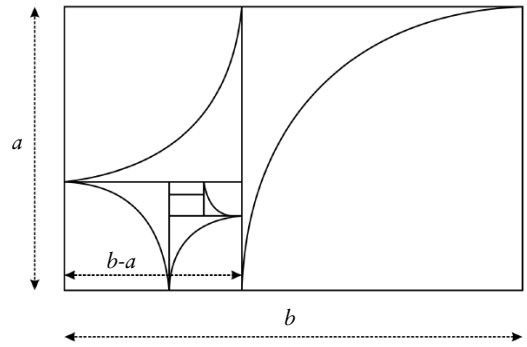



**Figura 28.6:** Retângulo áureo.

Um retângulo construído com os segmentos *a* e *b* está em proporção áurea, se vale a igualdade:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{(b-a)}$$

Ou seja, a relação entre o lado maior e o menor é a mesma que existe entre o lado menor e a diferença de ambos. Para que o retângulo seja áureo, basta-nos calcular a razão $\frac{b}{a}$:

$$b^2 - ab = a^2 \Rightarrow b^2 - ab - a^2 = 0$$

$$b = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{a(1 \pm \sqrt{5})}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{b}{a} \cong 1{,}62}$$

Finalizando, podemos ver que os lados do retângulo estão na proporção áurea: $\phi = \frac{b}{a} \approx 1{,}62$.

## ANALISANDO A RAZÃO DE SEMELHANÇA: COMPARANDO ÁREAS E VOLUMES

***ATIVIDADE***

3. Como você sabe, as plantas-baixas também podem constituir recursos para o trabalho com semelhanças no plano. Sendo assim, consiga uma planta-baixa em alguma revista ou jornal. Identifique a escala em que foi construída. Se desenharmos uma planta semelhante a esta na razão de semelhança $k = \frac{1}{2}$, quanto mediria o seu perímetro? E a sua área? A que escala corresponde a razão $\frac{1}{2}$? Faça o mesmo tipo de raciocínio para a razão $\frac{1}{4}$. Justifique suas respostas.

***COMENTÁRIO***

*Você verá que, por facilidade e comodidade, as plantas são feitas na escala 1:100 (lembre-se das nossas Aulas 22 e 23). Além de explorar conceitos relacionados à semelhança (polígonos, área, perímetro, medidas), este tipo de tarefa permite-nos entender o conceito de escala e relacionar a razão de semelhança com a razão entre as áreas e com a razão entre os perímetros.*

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR 3

Sejam os triângulos semelhantes ABC e A'B'C'. Chamaremos suas respectivas alturas de *h* e *h'* e k a razão de semelhança. Veja a seguir como você pode verificar a relação existente entre as áreas dos triângulos.

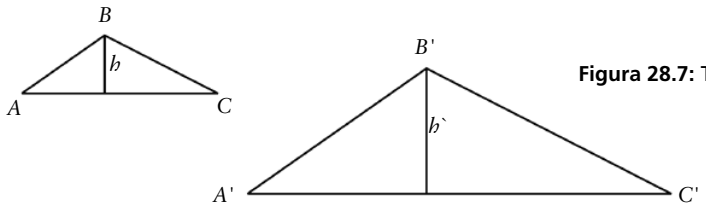



**Figura 28.7:** Triângulos semelhantes.

As áreas destes triângulo são, respectivamente:

$$\text{Área}_{[ABC]} = \frac{[AC] \times h}{2} : \text{Área}_{[A'B'C']} \frac{[A'C'] \times h'}{2}$$

Pelos triângulos serem semelhantes, verifica-se que:

$[A'C'] = [AC] \times K$ e $h' = k \times h$

E portanto:

$$\text{Área}_{[A'B'C']} = \frac{[A'C'] \times h'}{2} = \frac{[AC] \times k \times k \times h}{2} = k^2 \times \frac{[AC] \times h}{2}$$

$$\boxed{\text{Área}_{[A'B'C']} = k^2 \times \text{Área}_{[ABC]}}$$

***COMENTÁRIO***

*O objetivo principal das duas atividades anteriores é que você perceba que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.*

## CONVERSANDO SOBRE A HISTÓRIA: A DUPLICAÇÃO DO CUBO

Na Aula 5, você viu que a duplicação do cubo, que consiste em encontrar o lado cujo volume fosse o dobro de um cubo dado, foi um dos problemas clássicos da Geometria. Contam os historiadores que a morte de Péricles revolucionou Atenas, fezendo com que o oráculo de Apolo, em Delfos, sugerisse a duplicação do altar cúbico dedicado a Apolo. Os atenienses duplicaram todas as dimensões, porém perceberam que não alcançaram o objetivo desejado. A solução idealizada não podia ser encontrada com tais procedimentos. Tal anedota sugere-nos alguns questionamentos: *Quantas vezes os atenienes aumentaram o tamanho do altar? É possível obter um cubo cujo volume seja o dobro do volume de outro cubo? Tanto no plano como no espaço as relações de semelhança são as mesmas?*

***ATIVIDADE***

4. Analise e responda às perguntas anteriores e converse com seu tutor, no pólo.

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR 4

A seguir, compare e estabeleça a relação entre o volume dos tetraedros semelhantes 1 e 2.

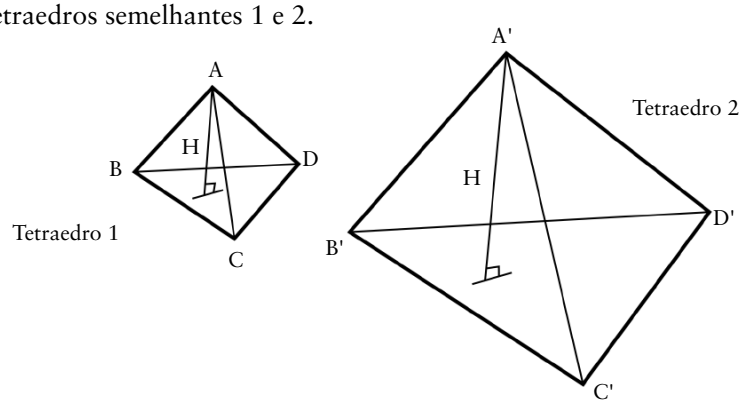



**Figura 28.8:** Tetraedros semelhantes.

***COMENTÁRIO***

*O objetivo principal desta atividade é perceber que a razão entre os volumes de figuras semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança. A demonstração desta relação é feita de modo similar à Atividade Complementar 3, porém, lembre-se de que o* volume do tetraedro *é* $\frac{1}{3}$ *da área da base multiplicado pela altura.*

Como você está vendo, as idéias de semelhança podem estar incluídas em várias partes do currículo escolar, e este tópico não deve mais ser trabalhado apenas na 8ª série, nem ficar reduzido ao estudo de triângulos. Tal ensino deve explorar e aprofundar os saberes matemáticos envolvidos (por exemplo, o de proporcionalidade), estabelecer relações com outros saberes e também levar em consideração o desenvolvimento da linguagem do aluno.

A atenção à linguagem, seja ela vista como forma de expressão escrita, falada ou gesticulada, deve ser uma constante também pelo professor de Matemática. Diversas pesquisas em Educação Matemática têm mostrado que uma série de significados e interferências entre a linguagem corrente e a Matemática deve ser levada em consideração.

## AFINAL: SEMELHANTE OU PARECIDO?

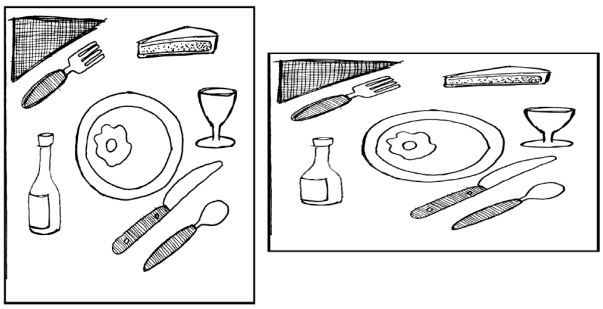


**Figura 28.9:** Figuras parecidas.

Na linguagem corrente, a palavra *semelhante* é sinônima de *parecido*. Porém, na linguagem matemática, somente quando duas figuras possuem a mesma forma, mesmo em tamanhos diferentes, elas são ditas semelhantes. Matematicamente falando, quando dizemos "a mesma forma" nos referimos a "exatamente a mesma forma", e não basta serem apenas parecidas; é necessário perceber que essa igualdade de forma implica igualdade de ângulos correspondentes simultaneamente com a proporcionalidade dos lados homólogos.

Diante dessa situação, torna-se imprescindível que o professor leve em consideração a linguagem de seus alunos e que ela seja, muitas vezes, o seu ponto de partida para explorar determinado conteúdo.

## CONTRIBUIÇÕES DA LÓGICA MATEMÁTICA À CONSTRUÇÃO DA DEFINIÇÃO DE FIGURAS SEMELHANTES

Como você estudou nas Aulas 2 e 3, a definição de figuras semelhantes envolve uma conjunção. Figuras semelhantes são definidas por meio de um enunciado que utiliza o conectivo *e*. No entanto, quando nos referimos ao triângulo, você viu que aparece o conectivo *ou*. Apesar de tais conectivos parecerem irrelevantes, os enunciados por eles formados podem gerar dificuldades na compreensão do conceito de semelhança de figuras.

**!**

Quando o professor desenvolve atividades explorando a definição de figuras semelhantes, torna-se imprescindível que fique atento ao fato de que essa definição é uma conjunção, pois para que duas ou mais figuras sejam ditas semelhantes é necessário que atendam às seguintes condições: *possuírem ângulos correspondentes congruentes* e *lados homólogos proporcionais.*

Sugerimos que o professor organize várias atividades em que os estudantes possam manipular e verificar a semelhança de figuras sob diferentes pontos de vista. Nesta perspectiva, você irá revisar três *métodos de construção de famílias de figuras semelhante*s: o método da diagonal, o da homotetia e o das quadrículas.

## CONSTRUINDO FAMÍLIAS DE RETÂNGULOS SEMELHANTES POR MEIO DO MÉTODO DA DIAGONAL

O método da diagonal consiste em sobrepor retângulos, de maneira que suas diagonais coincidam com os vértices correspondentes; neste caso, forma-se uma família de retângulos semelhantes. Como pode ser observado na **Figura 28.10**, estão sendo formadas duas famílias de retângulos semelhantes.

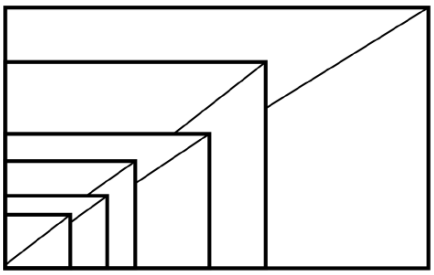


**Figura 28.10:** Famílias de retângulos semelhantes.

Nas Atividades 3 e 4 da Aula 3, você construiu retângulos no geoplano por meio do método da diagonal. Embora não tenhamos aprofundado o tipo de construção naquele momento, faremos a seguir.

***ATIVIDADES***

**5. Volte aos seus registros das Atividades 3 e 4 da Aula 3 e identifique as famílias de retângulos que são construídas.**

***COMENTÁRIO***

*É bom destacar que, dada a imprecisão do geoplano, as diagonais podem não ocorrer sobre a mesma reta suporte. Sendo assim, podemos pensar em outros tipos de atividade, como veremos a seguir.*

**6. Nas loja de revelação, é comum encontrarmos vários tamanhos de foto: 3x4, 9x12, 10x15 etc. Construa os retângulos determinados por cada um desses tamanhos e analise, por meio do método das diagonais, as famílias de retângulos semelhantes.**

***COMENTÁRIO***

*Tarefa similar pode ser proposta com a guilhotina. Neste instrumento de cortar papéis é comum aparecerem as dimensões dos retângulos. Você deve ter percebido que os retângulos são polígonos que possuem uma propriedade favorável para o estudo de semelhança em geral; ou seja, eles possuem todos os ângulos congruentes, bastando apenas verificarmos a proporcionalidade dos lados com o critério de semelhança.*

Em seus estudos, Bairral (1996) ressaltou que, ao trabalhar com retângulos, o professor deve estar atento para o fato de os alunos não se preocuparem em verificar a congruência dos ângulos, uma vez que todos os ângulos dessa figura geométrica são congruentes, o que não lhe permitirá verificar se o aluno percebe a natureza conjuntiva da definição de semelhança e, também, se já domina os atributos relevantes do conceito.

**!**

Os retângulos, apesar de parecidos, podem não ser semelhantes.

Como você sabe, o professor deve, a todo momento, explorar as diferenças entre a linguagem matemática e a linguagem corrente, e reconhecer a importância desta última para o trabalho com os conceitos matemáticos. Na diversidade de respostas dos alunos para esta questão, surgirão expressões que enriquecerão o trabalho com semelhança, cujo significado o professor deverá exercitar bastante, seja na linguagem corrente, seja na da Matemática. Alguns exemplos: *proporção, congruente, equivalentes, mudar de acordo, escalas, aumentar na mesma medida, aumentar na mesma proporção, proporcional, proporção diferente, estruturas parecidas e lados alterados etc.*

## CONSTRUINDO FAMÍLIAS DE FIGURAS SEMELHANTES POR MEIO DA HOMOTETIA

Utilizando o segundo método, o da *homotetia por um ponto*, para ampliar (ou reduzir) o polígono ABCD, como o da **Figura 28.11**, fixamos um ponto O (chamado centro de homotetia) qualquer e, a partir dele, traçamos semi-retas que passam pelos vértices do polígono. A redução (ou ampliação) é obtida traçando-se segmentos paralelos aos lados do polígono ABCD compreendidos entre as semi-retas, como pode ser verificado na figura seguinte.

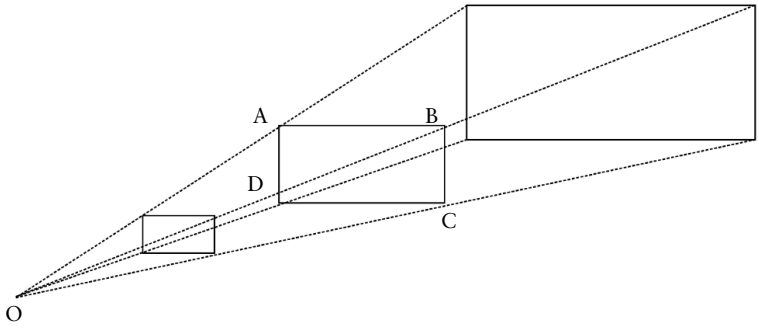



**Figura 28.11:** Retângulos homotéticos.

**!**

Observe que nas figuras homotéticas os lados correspondentes (homólogos) são paralelos.

A transformação que associa os polígonos A'B'C'D' e A"B"C"D" ao polígono ABCD é denominada homotetia. O centro de homotetia pode ser interno, externo ou pertencer à figura (é um de seus vértices, como na **Figura 28.14**). Na **Figura 28.11**, o centro é externo.

Veja a seguir o centro de homotetia em outras figuras.

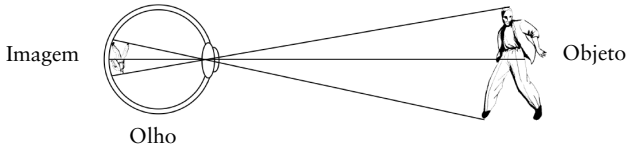



**Figura 28.12:** Homotetia no olho humano.

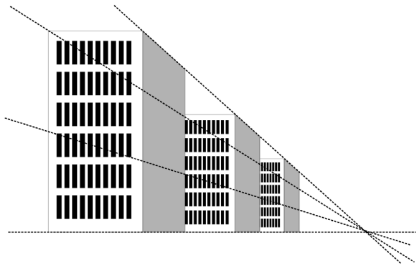


**Figura 28.13:** Homotetia em perspectiva.

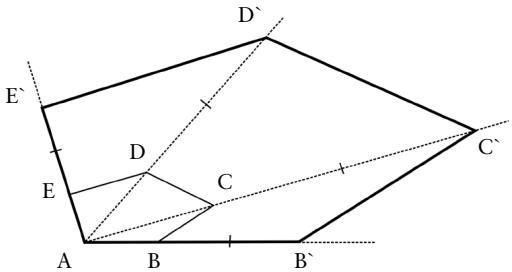



**Figura 28.14:** Pentágonos homotéticos.

***ATIVIDADE***

7. Encontrar o centro de homotetia em figuras é um procedimento importante. Construa figuras homotéticas considerando o centro de homotetia: *(a)* no exterior; *(b)* no interior; e *(c)* em um dos vértices da figura. Analise vantagens e desvantagens de cada procedimento que você utilizou e converse com seu tutor.

***COMENTÁRIO***

*Alguns termos matemáticos aparecem no estudo de homotetias, tais como: razão de homotetia, centro de homotetia, polígonos homotéticos, tangências etc. Tal terminologia nos possibita novas formas de definição de figuras semelhantes. Para você saber mais sobre homotetias, veja* **Pinheiro** *(1974, 1986).*

**Virgílio Athayde Pinheiro**
Professor da UFRJ, publicou dois importantes livros intitulados *Geometrografia*, com ênfase nas transformações geométricas.

!

O método da diagonal é um caso particular das homotetias.

As homotetias também são utilizadas na construção de figuras espaciais semelhantes. Embora não seja nosso propósito trabalhar, nesta aula, as relações no espaço, segue uma ilustração de dois octaedros homotéticos, a título de curiosidade.

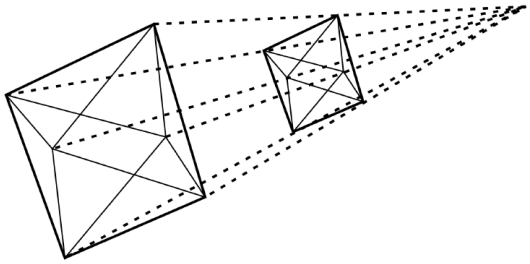


**Figura 28.15:** Octaedros homotéticos.

## CONVERSANDO SOBRE O SEU LABORATÓRIO DE GEOMETRIA

Materiais como o Tangram, o geoplano, a calculadora, a régua e o compasso, fotos, papel quadriculado, papel milimetrado, mapas, plantas-baixas, já descritos em aulas anteriores, também permitem-nos abordar diferentes aspectos da semelhança de figuras. A utilização de *recursos de projeção* (retroprojetor, diapositivas etc.), assim como o estudo experimental da formação de imagens nas *lentes*, pode constituir outro meio eficaz para a introdução ao estudo das homotetias e semelhanças, uma vez que propicia uma rica fonte de observação. Por exemplo, veja o esquema de funcionamento de um retroprojetor.

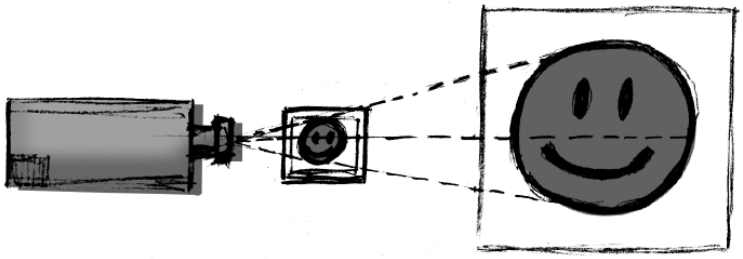


**Figura 28.16:** Esquema de retroprojetor.

Como é projetada a imagem? O objeto e sua imagem são semelhantes? Como temos que colocar uma transparência para que sua projeção esteja na posição correta, ou seja, não esteja de "cabeça para baixo"? Não seria interessante discutir como nossos alunos este tipo de funcionamento?

Como prometemos na aula anterior, vamos apresentar o pantógrafo.

**!**

Você deve ter visto ou ouvido falar em portas pantográficas, aquelas de elevador. Elas são construídas segundo o mesmo tipo de estrutura do pantógrafo.

Trata-se de um tradicional instrumento que pode ser utilizado para ampliar, reduzir e até mesmo copiar uma figura qualquer. A seguir, forneceremos algumas informações de como manusear o pantógrafo. Como *ampliar*, *reduzir* ou *copiar* um desenho qualquer?

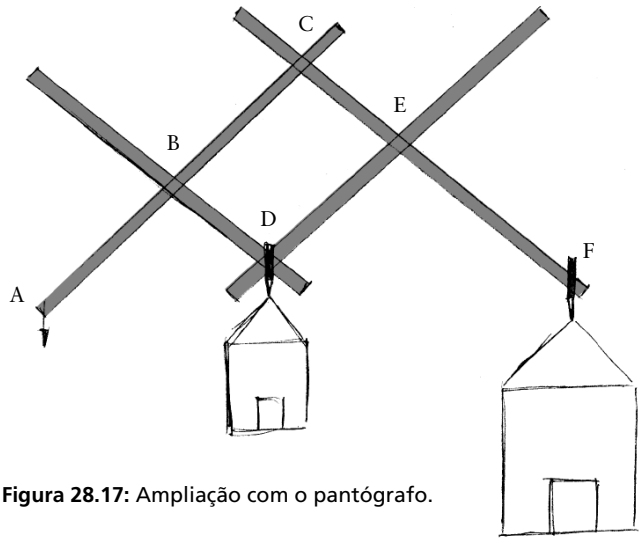



**Figura 28.17:** Ampliação com o pantógrafo.

## Ampliar

1) Fixa-se a morca na mesa e encaixa-se nela o pino da régua "A".

2) Coloca-se um grafite macio na pinça da régua "C".

3) Sob a agulha-guia (junção das réguas "B" e "D") coloca-se o desenho original a ampliar.

4) Contornando-se o desenho original com a agulha-guia, a ampliação será traçada pela pinça da régua "C".

## Reduzir

1) Inverte-se a posição da agulha-guia e da pinça, colocando-se a primeira na régua "C" e a pinça na junção das réguas "B" e "D".

2) Percorrendo-se o desenho original com agulha-guia da régua "C", a redução será traçada pela pinça na junção das réguas "B" e "D".

## Copiar

1) Substitua a morca pelo apoio plástico (peça redonda) que acompanha o pantógrafo, fixando-a com três percevejos mais ou menos no centro da mesa. Retire o pino da régua "A" e coloque-o na junção das réguas "D" e "B", enfiando-o no furo central do apoio plástico.

2) Coloca-se a agulha-guia na régua "A".

3) Coloca-se a pinça na régua "C".

4) Percorrendo-se o desenho original colocado sob a agulha-guia da régua "A", o desenho irá sendo traçado pela pinça da régua "C".

**!**

As escalas gravadas nos orifícios das réguas representam as possibilidades de ampliação e redução. Para se obter qualquer das escalas, deveremos fazer coincidir os furos. Exemplo: para ampliar ou reduzir em cinco vezes um desenho, é indispensável que o furo 5 da régua "A" coincida com o furo 5 da régua "D" e que o furo 5 da régua "B" coincida com o furo 5 da régua "C".

O pantógrafo é um dos instrumentos utilizados para trabalhar transformações no plano. A seguir, ilustramos dois tipos de pantógrafo: o de Schneider, que nos possibilita construir figuras homotéticas, e o de Sylvester, que nos permite fazer rotações.

Acesse http://www.museo.unimo.it/theatrum/inizio.htm e conheça um pouco mais sobre os pantógrafos, realizando ampliações e reduções.

Quando a *razão de homotetia é positiva*, temos uma homotetia direta; quando é *negativa*, temos a inversa.

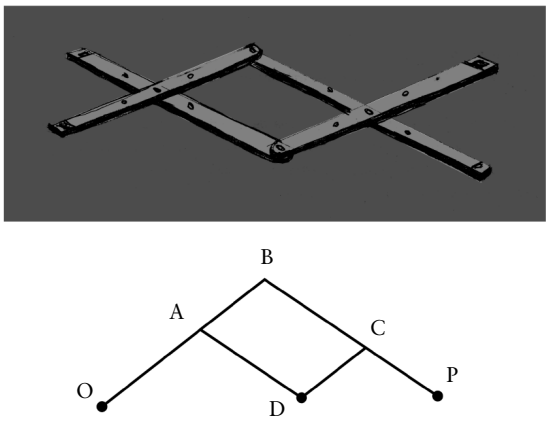



**Figura 28.18:** Pantógrafo de Schneider (homotetia).

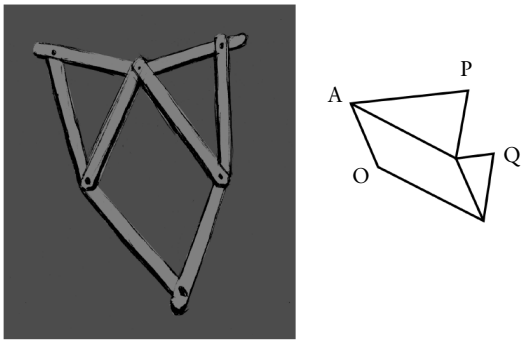



**Figura 28.19:** Pantógrafo de Sylvester.

**!**

A construção dos diferentes pantógrafos sugeridos por Pinheiro (1974, 1986) foi feita pelo professor Delson Lima Filho, do Departamento de Desenho e Construções da UFRJ.

***ATIVIDADES***

8. Construa figuras homotéticas direta e inversamente. O que você observa no que se refere às razões de homotetia?

***COMENTÁRIO***

*Tarefas envolvendo homotetias inversas são outras alternativas para ilustrar a multiplicação de números negativos. Por exemplo, qual é a inversa da inversa?*

9. Todas as figuras homotéticas são semelhantes? Todas as figuras semelhantes são homotéticas? Justifique suas respostas.

_____

_____

_____

***COMENTÁRIO***

*Lembre-se de que figuras homotéticas têm lados homólogos paralelos.*

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR 5

Nesta atividade, você deve comprovar: *(a)* que a homotetia de razão 1 é a identidade; *(b)* que as homotetias são bijeções; e *(c)* que as homotetias concêntricas formam um grupo.

***COMENTÁRIO***

*Esse tipo de atividade, que envolve deduções ainda não muito estruturadas, é bastante pertinente no Ensino Médio.*

**!**

Lembra-se dos níveis de van Hiele, com os quais trabalhamos na Aula 1?

Portanto, mesmo com toda essa gama de experiências que o conceito de semelhança propicia ao aluno, verifica-se que o ensino de tal conceito se faz de maneira totalmente desvinculada; infelizmente, não há articulação desse conceito com os demais conteúdos da Matemática e, até mesmo, de outras disciplinas.

## CONSTRUINDO FAMÍLIAS: A TÉCNICA DO QUADRICULADO

A técnica da quadrícula é uma antiga e original maneira de copiar, ampliar ou reduzir, proporcionalmente, uma figura qualquer. Os procedimentos são simples. Desenhamos a figura, a quadriculamos e escolhemos o quanto a reduziremos ou ampliaremos. Dessa forma, o quadradinho passa a ser nossa unidade de medida. Qualquer alteração, ampliação ou redução deverá ser feita considerando esta unidade como referência. Por exemplo, na ilustração seguinte você verá a figura original, sua redução e ampliação.

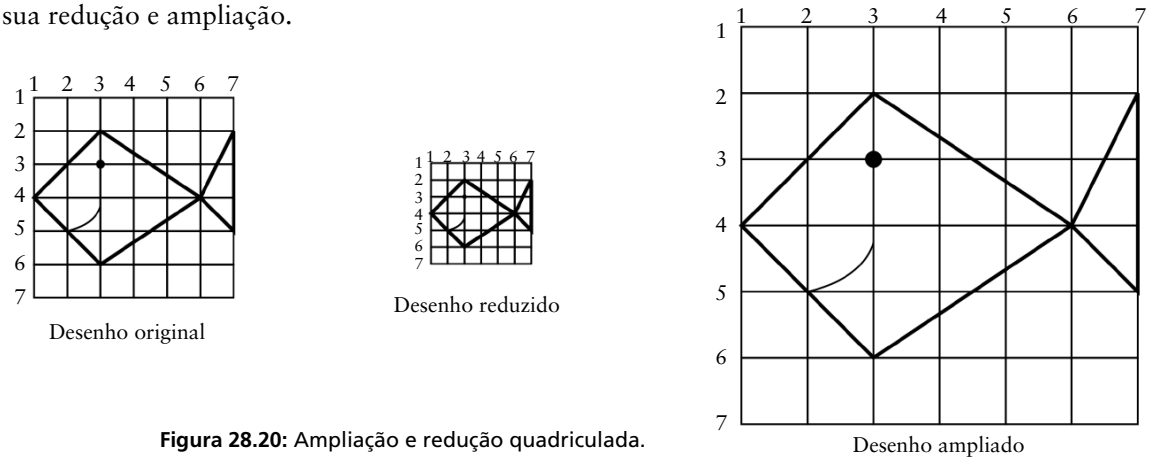



**Figura 28.20:** Ampliação e redução quadriculada.

***ATIVIDADE***

10. O professor Marcelo propôs aos seus alunos de 8ª série a seguinte tarefa: no desenho a seguir, digam (justificando suas respostas) qual(is) é(são) o(s) barco(s) semelhantes(s) ao barco B.

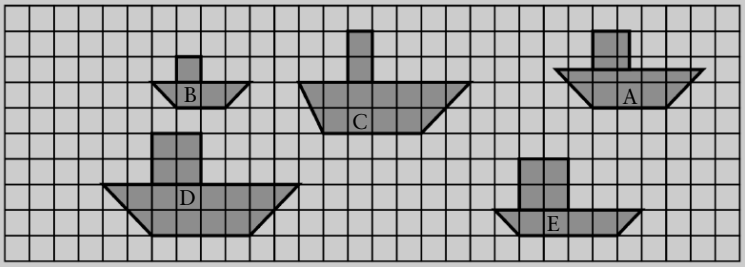



**Figura 28.21:** Figuras quadriculadas.

Veja as respostas dadas por alguns alunos:

1. *"D e F, o que mudou foi o tamanho, mas a figura é a mesma. A D cresceu 4 vezes , a F cresceu 2,5."*
2. *"Os barcos D e F. Porque o F ampliou o B em duas vezes e meia; o D ampliou o B em três vezes."*
3. *"C e E não são semelhantes porque não possuem ângulos correspondentes. D e F ⟶ porque possuem ângulos correspondentes."*
4. *"D e F ⟶ D aumentou 4 vezes e o F, 2 vezes e meia."*
5. *"O D é semelhante porque ampliou 2 vezes."*
6. *"Os barcos semelhantes são as letras C, E e F. Porque o barco E é o dobro do barco B e o barco F é o triplo do barco B e também o C é o triplo do barco B. O barco D possui apenas 19 quadradinhos, e para ser semelhante teria de ter 20. Obs.: Os lados foram alterados, mas os ângulos permaneceram."*
7. *"Os barcos D e F, porque no barco D o barco B foi aumentado 2 vezes, e no barco F o barco B foi aumentado 2,5 milímetros."*

Analise, como professor, as respostas anteriores.

***COMENTÁRIO***

*Apresente seus comentários ao seu tutor e converse com ele. Interaja também com seus colegas.*

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR 6

Desenhe uma figura qualquer. Utilizando o pantógrafo, amplie em três vezes e reduza em três vezes o tamanho dessa figura. Faça o mesmo utilizando papel quadriculado. Descreva o processo de construção em cada caso e faça duas observações notáveis.

***COMENTÁRIO***

*Este é um possível exemplo de atividade que nos possibilita integrar Matemática com outra disciplina: a Educação Artística. Enquanto nas aulas de Artes os alunos podem ir construindo figuras variadas, nas aulas de Matemática o professor vai desenvolvendo com seus alunos análises das formas construídas e seus respectivos procedimentos. Você verá que o conteúdo curricular (conceitos + procedimentos + atitudes) terá outra motivação para seus alunos.*

## CONVERSANDO SOBRE A INTEGRAÇÃO CURRICULAR: O SISTEMA SOLAR COMO EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DE ESCALAS

Um dos constantes esforços do Homem foi encontrar representações simples que reproduzissem determinada forma e mantivessem certa proporção no que se refere às medidas. Como sabemos, a proporcionalidade é freqüentemente aplicada nos estudos astronômicos (por exemplo, no cálculo da distância da Terra à Lua, do diâmetro da Terra e do diâmetro lunar). Atualmente, conhecemos, com bastante precisão, as distâncias entre os planetas e satélites que compõem o sistema solar, cuja representação gráfica aparece em diversas publicações. A seguir, ilustramos a distância entre os planetas e o Sol, a distância entre os demais planetas e a Terra e o diâmetro equatorial de todos eles.

**Tabela 28.1:** Distância entre planetas no sistema solar

| | Distância do Sol (em km) | Diâmetro Equatorial (km) |
|---|---|---|
| **Mercúrio** | 57,9 | 5.000 |
| **Vênus** | 108,2 | 12.400 |
| **Terra** | 149,6 | 12.740 |
| **Marte** | 227,9 | 6.780 |
| **Júpiter** | 778,3 | 142.000 |
| **Saturno** | 1.428,0 | 115.000 |
| **Urano** | 2.872,0 | 51.600 |
| **Netuno** | 4.498,0 | 44.600 |
| **Plutão** | 5.910,0 | Aproximadamente 6.400 |
| **Sol** | — | 1.392.000 |

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR 7

Considerando essas dimensões, construa em escala um sistema solar de bolas de isopor, ou outro material moldável, tendo como referência o nosso sistema. Obtenha, em escala, um desenho de nossos planetas vizinhos (da Terra).

***COMENTÁRIO***

*Este é um exemplo de atividade que nos possibilita integrar Matemática com outra disciplina: a Geografia.*

**!**

Caso você queira resolver mais exercícios sobre semelhanças, lembre-se de que poderá encontrá-los em seu Módulo 2 de Geometria Básica.

## CONCLUSÃO

Quanto maior a variedade de situações de aprendizagem sobre um conceito e discussão com os alunos sobre o desenrolar das mesmas, mais dinâmico ficará o processo de construção conceitual. Se os conceitos relacionados à noção de semelhança (proporcionalidade, razão, escalas, utilização e comparação de medidas variadas, construção e comparação de figuras diversas etc.) forem desenvolvidos, em diferentes momentos do currículo, desde as séries iniciais, o aluno poderá ir ampliando sua compreensão sobre os atributos relevantes da definição de semelhança.

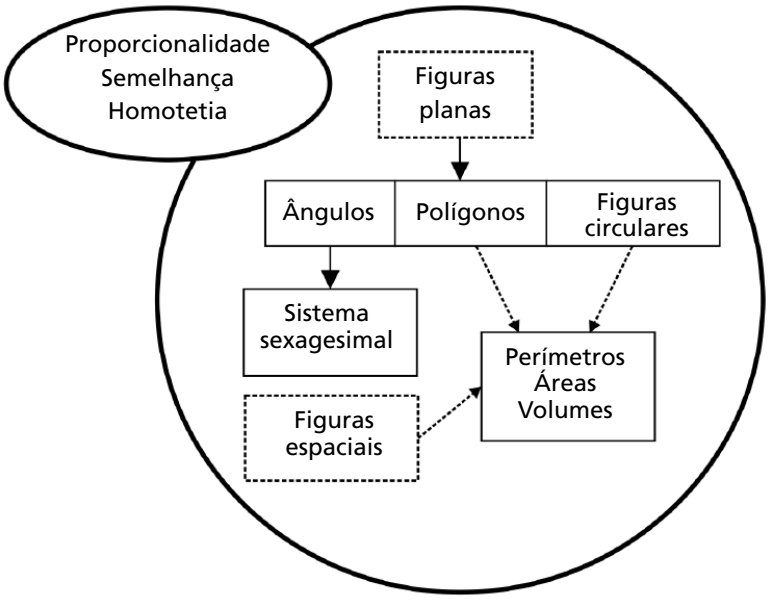
## RESUMO

A semelhança e a homotetia são transformações no plano que mantêm a forma, porém alteram medidas, proporcionalmente. Assim, enquanto figuras isométricas (Aulas 25, 26 e 27) têm a mesma forma e as mesmas dimensões, isto é, são *congruentes*, figuras homotéticas conservam apenas a mesma forma, sendo *semelhantes*. Particularmente, polígonos homotéticos possuem os lados correspondentes paralelos.

Existem muitas atividades que priorizaram o estudo da semelhança e da homotetia no plano. No entanto, podemos, também, inserir figuras espaciais. Além de trabalhar com o pantógrafo, podemos construir famílias de figuras semelhantes por meio do método da diagonal, fazendo homotetias ou quadriculando figuras.

## AUTO-AVALIAÇÃO

Consideramos fundamental que você esteja convencido da importância do estudo das semelhanças e homotetias no currículo do Ensino Fundamental. Ao contrário da Aula 25, em que solicitamos que você elaborasse um esquema, nesta sugerimos que redija um parágrafo explicativo sobre sua compreensão do esquema seguinte. Se você realizou as atividades propostas, à exceção das complementares, não terá problemas em escrever seu parágrafo auto-avaliativo. Uma estratégia inicial pode ser buscar as atividades que trabalhem cada parte do esquema. Pode existir algum item do esquema não trabalhado nesta aula.



## ATIVIDADE FINAL

A integração dos conteúdos pode ser feita na própria disciplina ou em outras. Além da integração na Matemática (aplicação no Teorema de Pitágoras, nas relações métricas no triângulo retângulo etc.), o trabalho com semelhanças e homotetias pode envolver, por exemplo, as disciplinas de Geografia, História, Artes e Português. Em Artes, o professor pode fazer toda a exploração inicial utilizando jornais, revistas e demais materiais, propondo a construção de plantas imaginárias, desenhos livres e fazendo ampliações/reduções utilizando pantógrafo, papel quadriculado etc. Em Língua Portuguesa, a proposta de redações e demais formas de comunicação e expressão enriquecerá o trabalho. Em História, o levantamento de informações sobre as medidas (metro, polegada, jarda, milhas, *bites* etc.), o seu surgimento e utilização pelas diferentes civilizações durante a história da humanidade. Em Geografia, a dinâmica e concretização do trabalho cartográfico com certeza motivará o aluno para o envolvimento no processo de ensino-aprendizagem e contribuirá para a construção de um saber menos compartimentalizado. Assim, o que propomos a você, como avaliação desta aula, é que pense e sugira uma atividade integradora que envolva conceitos de diferentes disciplinas. A série é você quem determinará.

| Exemplo de atividade | Objetivo(s) | Série | Disciplinas e conceitos envolvidos |
|---|---|---|---|
| | | | |

## INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você conhecerá outras possibilidades de tornar suas aulas de Geometria mais criativas e lúdicas. Aspectos da Teoria das Inteligências Múltiplas nortearão o desenvolvimento das atividades.

# Atividades lúdicas, estratégias geométricas e inteligências múltiplas

AULA 29

## Meta da aula

Instrumentalizar a elaboração de atividades geométricas lúdicas que desenvolvam as inteligências múltiplas.

## objetivos

Esperamos que, após o estudo desta aula, você seja capaz de:

- Distinguir cada tipo de inteligência múltipla.
- Reconhecer a importância das inteligências múltiplas e identificá-las em situações variadas.
- Conhecer novas alternativas didáticas para elaboração de tarefas geométricas.

## Pré-requisitos

O pré-requisito fundamental para a compreensão desta aula é que você tenha desenvolvido cada atividade obrigatória proposta nas aulas anteriores. Conhecer a teoria de Piaget sobre o desenvolvimento da inteligência humana também o ajudará a compreender a teoria de Gardner.

## INTRODUÇÃO

Você deve ter ouvido falar em inteligências múltiplas. Esse conceito refere-se a uma variedade de competências que cada indivíduo pode desenvolver. Por exemplo, a capacidade de comunicação e de relacionamento interpessoal, bem como dançar ou desenhar.

Diálogos e reflexões como os ilustrados anteriormente são exemplos de como classificamos nossas preferências, muitas vezes pelas competências que acreditamos ter mais desenvolvidas que outras. Apesar de reconhecermos que tal fato tem suas razões, ou seja, que temos mais pré-disposições para realizar determinados procedimentos que outros, devemos receber, também na escola, estímulos apropriados para que possamos desenvolver, diferentemente, porém, sem exclusividade, nossas diferentes potencialidades e inteligências.

O psicólogo americano **Howard Gardner** desenvolveu, na década de 1980, a chamada Teoria das Inteligências Múltiplas, segundo a qual, contrariando a teoria piagetiana, existem várias inteligências, harmônicas e independentes.

Segundo Jean Piaget, os talentos humanos se desenvolvem segundo uma única inteligência: a lógico-matemática. Para **Gardner** existem múltiplas inteligências situadas em diferentes locais do cérebro, que podem ser desenvolvidas separadamente. São elas: lingüístico-verbal, lógico-matemática, espacial, corporal-cinestésica, interpessoal, intrapessoal e musical. Veja a seguir a caracterização de cada uma delas.

**Quadro 29.1:** Inteligências múltiplas.

| INTELIGÊNCIA LINGÜÍSTICO–VERBAL | Características pessoais | Tipos de tarefa |
|---|---|---|
| Capacidade de comunicação escrita e verbal<br>Comum em poetas, apresentadores, políticos, advogados, repentistas etc. | • Gosta de ouvir<br>• Gosta de ler e escrever<br>• Gosta de poesia e de jogos com palavras<br>• Bom orador e debatedor<br>• Gosta de expor idéias por escrito | • Fazer leituras<br>• Produzir textos<br>• Produzir jornal<br>• Realizar debates e discussões<br>• Produzir materiais escritos (relatórios, livros etc.) |
| **INTELIGÊNCIA LÓGICO-MATEMÁTICA** | **Características pessoais** | **Tipos de tarefa** |
| Capacidade de entender e dominar seqüências de raciocínios lógicos. Comum em cientistas, advogados, vendedores, investigadores etc. | • Aprecia cálculos<br>• Gosta de ser preciso<br>• Aprecia resolver problemas<br>• Gosta de tirar conclusões<br>• Explica com clareza e precisão<br>• Argumenta bem<br>• Aprecia experimentações | • Resolução de problemas<br>• Jogos matemáticos<br>• Tratamento da informação<br>• Atividades que impliquem generalizações<br>• Atividades com números, medidas, Geometria, Estatística |
| **INTELIGÊNCIA ESPACIAL** | **Características pessoais** | **Tipos de tarefa** |
| Capacidade de entender, interpretar e dominar o espaço. Comum em pintores, escultores, atores, jogadores de futebol, arquitetos, bailarinos, motoristas, carpinteiros etc. | • Aprecia figuras e formas<br>• Facilidade para indicar trajetos<br>• Lê gráficos, plantas, mapas etc. com facilidade<br>• Gosta de construir maquetes<br>• Tem facilidade com Geometria<br>•Realiza transformações no espaço (decorações) | • Confecção de mapas, croquis, plantas, maquetes etc.<br>• Descrição de trajetos<br>• Resolução de quebra-cabeças<br>• Trabalho com Geometria<br>• Produção de gráficos |
| **INTELIGÊNCIA CINESTÉSICA** | **Características pessoais** | **Tipos de tarefa** |
| Capacidade de entender, interpretar e dominar os movimentos do próprio corpo. Comum em atores, bailarinos, mímicos, atletas, artistas de circo etc. | • Controle do corpo e de objetos<br>• Habilidade em esportes, teatro, dança, mímica etc.<br>• Preferência por manipulações e movimentos<br>•Lembra mais o que foi feito do que o que foi dito | • Dramatizações<br>• Brincadeiras<br>• Movimentação física<br>• Trabalho com materiais que possam ser manipulados<br>• Mímica<br>• Dança |
| **INTELIGÊNCIA MUSICAL** | **Características pessoais** | **Tipos de tarefa** |
| Capacidade de entender, interpretar e dominar sons. Comum em músicos, cantores, poliglotas, imitadores etc. | • Gosta de ouvir música<br>• Gosta de instrumentos musicais<br>• Gosta de cantar<br>• Gosta de imitar as pessoas<br>• Gosta de dançar<br>• Gosta de línguas estrangeiras | • Audição de música<br>• Trabalho com ritmos, sons, tempos musicais<br>• Composição de músicas<br>• Canto em coral<br>• Participação em bandas musicais<br>• Análise e produção de trilhas sonoras<br>• Reconhecimento de idiomas |

| INTELIGÊNCIA INTERPESSOAL | Características pessoais | Tipos de tarefa |
|---|---|---|
| É a capacidade de entender, interpretar e dominar as relações interpessoais<br>Comum em políticos, estadistas, líderes, administradores, professores, comunicadores, camelôs, vendedores etc. | • Relaciona-se e comunica-se bem<br>• Aprecia atividades em grupo<br>• Gosta de cooperar<br>• Influencia os outros<br>• Adapta-se a novos ambientes<br>• Percebe perspectivas sociais e políticas | • Atividades cooperativas<br>• Trabalho em grupo<br>• Jogos<br>• Comunicação oral e escrita |
| **INTELIGÊNCIA INTRAPESSOAL** | **Características pessoais** | **Tipos de tarefa** |
| Capacidade de entender, interpretar e dominar a si próprio<br>Comum em religiosos, monges, escritores, artistas, filósofos, psicólogos, mártires etc. | • Conhece seus sentimentos<br>• É motivado e possui metas<br>• Estabelece e percebe valores éticos<br>• Trabalha de modo independente<br>• Possui intuição<br>• Conhece seus limites | • Estabelecer metas pessoais<br>• Refletir sobre o seu próprio raciocínio<br>• Estudos independentes<br>• Analisar vivências e sensações<br>• Expressar pontos de vista |

A partir do que propôs Gardner (1993), **Machado** (1995) inseriu uma nova inteligência: a pictórica.

**Nilson José Machado**

É pesquisador da Universidade de São Paulo, doutor em Educação, e atuante na Educação Matemática. Também é autor de livros didáticos e paradidáticos de Matemática.

**Quadro 29.2:** Inteligência pictórica.

| INTELIGÊNCIA PICTÓRICA | Características pessoais | Tipos de tarefa |
|---|---|---|
| Capacidade de comunicar e expressar sentimentos através de desenhos.<br>Individualidades se revelam ou podem ser construídas mediante recursos pictóricos | A expressão pictórica associa-se naturalmente a manifestações artísticas de diversas naturezas, como a pintura e o desenvolvimento da linguagem | • Criações e desenhos em geral<br>• Trabalhos com ilusão de óptica.<br>• Trabalhos com mosaicos e outros tipos de pavimentação<br>• Produção e análise de movimentos no plano<br>• Atividades que preconizem variadas representações (gráfica, tabular etc.) |

A Teoria das Inteligências Múltiplas, de Gardner, causou um grande impacto entre os educadores na década de 1980. Na verdade, a escola, sempre esteve preparada para desenvolver as inteligências lógico-matemática e lingüístico-verbal enquanto as demais inteligências são desenvolvidas ao acaso, de acordo com as experiências e oportunidades vivenciadas pelas pessoas, fora da escola. Além disso, a escola tende a rejeitar e discriminar os outros talentos que as pessoas possam ter. Nesse sentido, não são poucas as histórias de jogadores de futebol, compositores populares, bailarinos, vendedores, políticos etc., de grande sucesso e talento que não conseguiram conviver com a escola.

Diante da teoria de Gardner, a nova escola tem pelo menos dois grandes desafios: reorganizar-se para criar oportunidades para o desenvolvimento de todas as inteligências; e realizar uma avaliação holística que faça justiça às pessoas pouco talentosas nas inteligências lógico-matemática e lingüístico-verbal, de modo a integrá-las na sociedade sem preconceitos e frustrações.

Vale a pena aprofundar seus conhecimentos sobre as inteligências múltiplas. Na pior das hipóteses, você se tornará um professor de matemática mais generoso e justo. Leia as referências bibliográficas ou faça uma pesquisa na internet.

Nesta aula, ilustraremos distintas situações de aprendizagem que podem ser impulsionadoras de um trabalho que contemple o desenvolvimento de diferentes inteligências, sem isolá-las. Você não precisa realizá-las, nosso maior objetivo é aproveitar essa penúltima aula para lhe apresentar mais alguns recursos e atividades que, por um motivo ou por outro, não tivemos oportunidade de usar nas aulas anteriores.

Acreditamos que depois de tantas experiências que fizemos durante o desenvolvimento da disciplina, você esteja devidamente preparado para adaptar essas sugestões às situações concretas de ensino-aprendizagem, que experimentará no seu dia-a-dia de professor. Por hora, solicitaremos apenas uma atividade final, em que você terá oportunidade de relacionar nossas sugestões com as diversas inteligências de Gardner, mas sugerimos também que durante a leitura, você reflita sobre como essas sugestões podem tornar significativo o aprendizado de seus futuros alunos.

Algumas das situações apresentadas a seguir constituem exemplos de tarefas já elaboradas. Ao lê-las, você também poderá pensar em novas alternativas para suas aulas de Geometria, tais como a utilização de atividades que explorem ilusão de óptica, histórias em quadrinhos, músicas e poemas matemáticos, jogos e desafios.

**!**

Lembre-se de acessar as atividades da disciplina na Plataforma Cederj.

## SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 1

### Ilusão de óptica

Quantas pernas tem o elefante? É possível construir o triângulo da **Figura 29.2**?

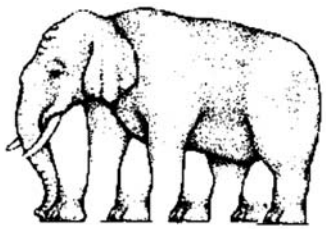


**Figura 29.1:** Elefante.

**Figura 29.2:** Triângulo de Penrose.

Para ver mais exemplos de figuras que apresentam ilusão de óptica, acesse:

http://www.alzirazulmira.com/ilusao/ilusao.htm

http://www.itajaionline.com.br/curiosidades/ilusao_otica/ilusoes.htm

http://netpage.estaminas.com.br/emmagic/ilusao.htm

## SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 2

### Desafio: O Problema da taxista

Conforme ilustrado a seguir, uma taxista percorre uma área determinada de uma cidade. Todas as corridas iniciam-se em um mesmo ponto. Em uma noite de poucos passageiros, a taxista fez apenas três corridas. Em cada uma delas, ela pegou os passageiros nos pontos A, B e C, assinalados na figura. Estudando o mapa cuidadosamente, ela analisou todos os caminhos que poderia fazer para chegar a cada passageiro e tentou encontrar a menor rota possível.

Qual o menor caminho entre o ponto de táxi e cada passageiro? Como você sabe que esta é a menor rota? Existe mais de uma possibilidade para a menor rota? Se afirmativo, quantas existem? Caso contrário, por que não existe? Discuta com seus colegas e registre sua resposta.

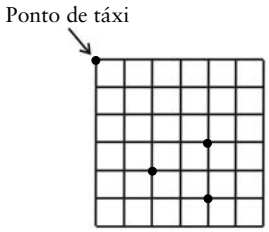



**Figura 29.3:** Ilustração do mapa da cidade.

## SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 3

### Dobraduras e *Origami*

Na Aula 9 você leu sobre dobraduras. Acesse http://rfoelker.sites.uol.com.br/ e conheça outras possibilidades.

**Figura 29.4:** *Origami*.

## SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 4

### Jogos dos erros

Acesse também http://www.g4net.pop.com.br

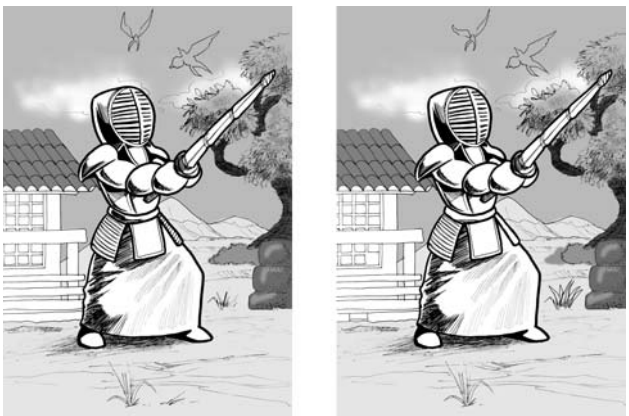


**Figura 29.5:** Jogo de erros.

## SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 5

### Batalha naval

Jogue batalha naval. Veja a imagem de um tabuleiro a seguir.

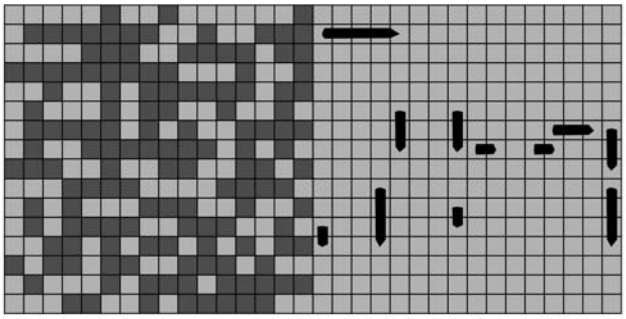


**Figura 29.6:** Tabuleiro.

Acesse http://www.g4net.pop.com.br/batnav/bat_nav.htm

## SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 6

### Deixe fluir sua imaginação matemático-musical!

Aquarela
Toquinho e Vinícius de Morais

Numa folha qualquer eu desenho um sol amarelo
E com cinco ou seis retas é fácil fazer um castelo
Com o lápis em torno da mão imitou uma luva
E se faço chover com dois riscos tem um guarda-chuva
Se um pinguinho de tinta cair num pedacinho azul do papel
Num instante imagino uma linda gaivota a voar no céu
(...)

## SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 7

### Fazendo sombras, formando figuras e analisando as inclinações, tamanho das sombras etc.

**Figura 29.7:** Exemplos de sombras.

Acesse e veja mais sombras interessantes:
http://www.ojodigital.net/data/media/7/Empedrado.jpg
http://www.loc.gov/exhibits/young/images/y30.jpg

## SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 8

### Compondo, analisando e interpretando poemas

Poesia Matemática
Millôr Fernandes

Um Quociente apaixonou-se
Um dia
Doidamente
Por uma Incógnita.
Olhou-a com seu olhar inumerável
E viu-a, do Ápice à Base,
Uma Figura Ímpar;
Olhos rombóides, boca trapezóide,
Corpo ortogonal, seios esferóides.
Fez da sua
Uma vida
Paralela à dela
Até que se encontraram
No Infinito.
"Quem és tu?" indagou ele
Com ânsia radical.
"Sou a soma do quadrado dos catetos.
Mas pode me chamar de Hipotenusa."
E de falarem descobriram que eram
– O que, em aritmética, corresponde
A alma irmãs
Primos-entre-si.
E assim se amaram
Ao quadrado da velocidade da luz (...)

Poesia Geométrica
Millôr Fernandes

Pontudo poliedro
Ao entrar numa equação
Encontrou um Rombóide exemplar
De ângulos sem par
E negra simetria linear
"Eureka!", estremeceu.
"Newton, me ajude de verdade,
Que perco a gravidade!"
Doido negreiro,
Roçou o seu cateto
Nas quinas do parceiro
E, ao se sentir enorme
Disse baixinho, ao preto:
"Meu Deus, que cuneiforme!"
"Sou teu isógono"
Disse o Rombóide, lacônico.
"Mas pode me chamar de isogônico."
E os dois propuseram
$\frac{360}{n}$ ou seja
Um teorema disforme
Em carícias ardentes,
Um amor trapeziforme
Bissectando linhas confluentes (...)

Para saber mais sobre a utilização de poemas em aulas de Geometria, veja Fonseca (2001).

## SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 9

### Criando histórias em quadrinhos

**Figura 29.8:** Exemplos de quadrinhos.

## SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 10

### Construindo, analisando e soltando pipas

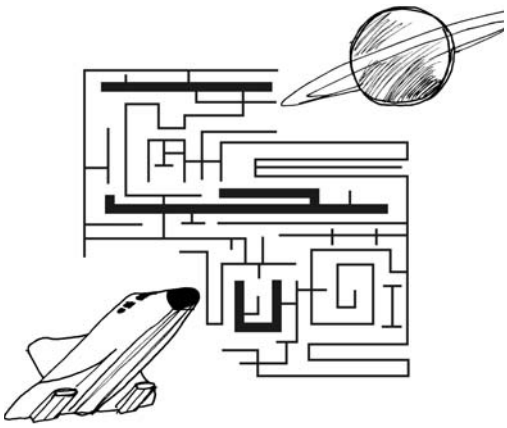
As pipas têm formas geométricas variadas. Algumas são planas, outras não (**Figura 29.9**). Veja!

**Figura 29.9:** Exemplos de pipas.

## SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 11

### Caminhando por labirintos

Os labirintos têm saída. Encontre-a em cada um deles.



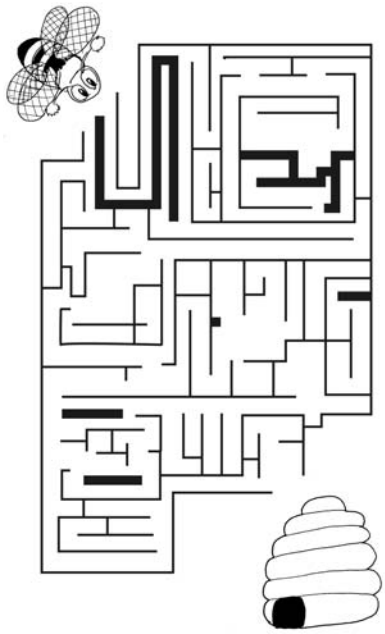
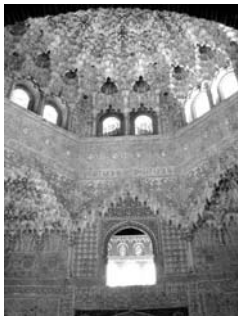


**Figura 29.10:** Exemplo de labirinto.

## SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 12

### Admirando e estudando arquiteturas e artes

Visite prédios, museus etc. e analise seus acervos e arquiteturas. Estas fotos foram retiradas do *site* http:// thelisbongiraffe.typepad.com/ photos/andalucia. Não deixe de acessar esse endereço.



**Fotos:** Maura Paoletti

**Figura 29.11:** Alhambra.

## SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 13

### Jogando com o Hex

**Quadro 29.3:** Jogo Rex

| | |
|---|---|
| **Conteúdo(s)** | Estratégias geométricas |
| **Objetivo(s)** | Desenhar uma seqüência contínua de símbolos (X, O) iguais de um lado do tabuleiro ao lado oposto |
| **Nível** | 2º e 3º ciclos |
| **Dinâmica da turma** | Pares |
| **Material** | Um tabuleiro em forma de losango (em anexo, no Módulo Prático), constituído por uma rede de hexágonos regulares. Lápis. |

**Regras**

1. Sorteio, para saber que jogador começa a partida.

2. Cada jogador – um de cada vez – desenha, sobre uma casa do tabuleiro, o símbolo que lhe corresponde (um círculo ou uma cruz).

3. Linhas de símbolos (círculos ou cruzes) não podem cruzar-se.

4. As quatro casas que formam os vértices do losango pertencem a ambos os lados.

5. Ganha a partida o jogador que primeiro conseguir unir dois lados opostos, mediante um alinhamento contínuo de símbolos feitos por ele.

Veja exemplo de um tabuleiro em que o jogador que utilizou círculos ganhou o jogo.

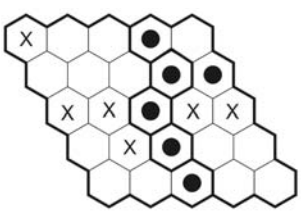



**Figura 29.12:** Hex. Exemplo de jogada concluída.

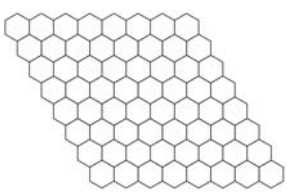


**Figura 29.13:** Tabuleiro 8x8.

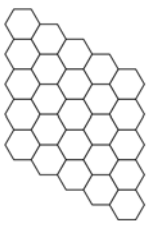


**Figura 29.14:** Tabuleiro 5x5.

**!**

Quanto mais casas, mais difícil fica o jogo. Lembre-se de que esses tabuleiros estão disponíveis no Módulo Prático.

***COMENTÁRIO***

*O Hex é um jogo de grafos inventado por Piet Hein. Entre as múltiplas disciplinas a que se dedicou, destacaram-se a Literatura e a Matemática.*

*À primeira vista, o jogo parece ser muito fácil, porém, com a prática, é importante o jogador perceber que uma estratégia é não ficar só seguindo ou tentando bloquear o jogador que inicia o jogo, mas buscar marcar outras casas que aumentem as possibilidades para o ¨traçado¨ de diversos caminhos contínuos.*

*Cada tabuleiro pode possuir quantidade variável de casas, sendo aconselhável, na fase de familiarização com o jogo, utilizar tabuleiros que contenham número reduzido de casas; por exemplo, tabuleiros de cinco por cinco ou de seis por seis.*

## SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 14

### Jogando com o *Bridg-it*

**Quadro 29.4:** Jogo *Bridg-it*

| | |
|---|---|
| **Conteúdo (s)** | Compreensão e representação do plano, composição de movimentos. |
| **Objetivo (s)** | Traçar um caminho contínuo, unindo os dois lados do tabuleiro, formado por uma linha de pontos da cor escolhida pelo jogador. |
| **Nível** | 2º e 3º ciclos |
| **Dinâmica da turma** | Folha de papel com o modelo (em anexo no Módulo Prático) e lápis. |

**Regras**

1. Sorteio, para saber quais os lados opostos que cada jogador tem de unir e qual dos jogadores começa a partida.

2. Cada jogador, por turno e com o lápis da cor que lhe corresponda, une com um traço um par de pontos adjacentes. Um jogador une os pontos negros e o outro une os brancos.

3. Os traços são desenhados na horizontal ou na vertical, porém não na diagonal.

4. Não se pode cruzar nenhum par de traços.

5. Ganha o jogo quem conseguir traçar primeiro um caminho contínuo que una os dois lados do tabuleiro que lhe correspondem.

Veja exemplo de um tabuleiro em que o jogador que traçou o caminho passando por pontos pretos ganhou o jogo.

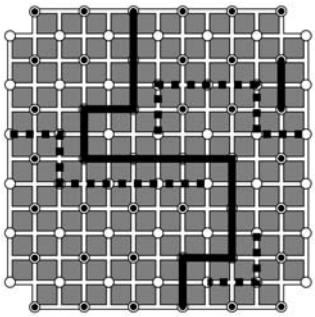


**Figura 29.15:** Tabuleiro do *Bridg-it* com jogada concluída.

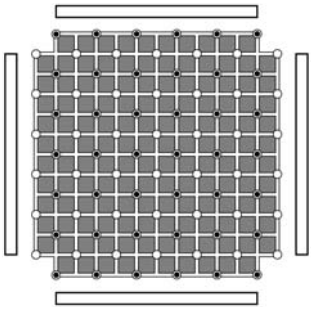


**Figura 29.16:** Tabuleiro do *Bridg-it.*

**!**

Lembre-se de que esse tabuleiro está disponível no Módulo Prático.

***COMENTÁRIO***

*O* **Bridg-it** *é um jogo inventado pelo matemático David Galé, da Universidade de Brown. É importante o professor deixar o aluno perceber que não é necessário unir os pontos consecutivamente; ou seja, ele pode ir unindo "isoladamente" (vindo do lado oposto, por exemplo), de maneira que, ao final, forme o caminho contínuo ligando os lados correspondentes. Como no jogo Hex, ficar só tentando bloquear o jogador que inicia pode não ser boa estratégia. No entanto, esse é um procedimento muito comum dos iniciantes.*

## SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 15

### Jogando com o Resta Um

O objetivo do Resta Um é deixar apenas uma peça no centro do tabuleiro. Esse jogo pode ser comprado nas lojas populares de R$1,99.

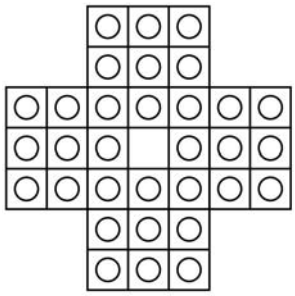


**Figura 29.17:** Resta Um.

Alguns endereços de jogos na internet

http://www.jogos.antigos.nom.br/quebra.htm

http://www.sectma.pe.gov.br/notitia/administracao/espacociencia/mat/conteudo/cubosoma.htm

http://www.sectma.pe.gov.br/notitia/administracao/espacociencia/mat/conteudo/pitagoras.htm

http://www.jogos.antigos.nom.br/concurso.htm

http://geocities.yahoo.com.br/marina_mil2000/jogo.htm

http://www.rede-nonio.min-edu.pt/1cic/agrup_ovar/mat_operacao.htm

*Site* explicativo de como utilizar a pluralidade cultural nas aulas de Matemática:

http://www.tvebrasil.com.br/salto/boletins2001/gq/gqtxt1.htm

## CONCLUSÃO

De acordo com Gardner, cabe à escola:

• Abandonar a procura de um "aluno médio" e de leis gerais de aprendizagem.

• Atender às diferenças entre os alunos, estimulando-os no desenvolvimento de uma mescla de inteligências.

• Interagir com toda a comunidade escolar para implantação de atividades extra-curriculares.

• Oferecer disciplinas opcionais, bem como trabalhar com projetos coletivos e individuais.

O debate sobre a Teoria das Inteligências Múltiplas é ainda recente. Como estamos trabalhando com o desenvolvimento da cognição individual, qualquer reducionismo ou classificação é muito arriscado. Conforme ressaltaram Gardner (1993) e Machado (1995), as formas de manifestação e desenvolvimento das competências individuais são múltiplas e a variedade de espectros individuais é infinita. Argumenta ainda Machado que a diversidade e as possibilidades de aperfeiçoamento, em todas as direções, e a explicitação de uma articulação mais efetiva entre as diversas componentes do espectro de competências (p.108) é fundamental. Concluindo, o autor sugere a seguinte rede, que é exemplificadora dos espectros de competência e suas inter-relações.

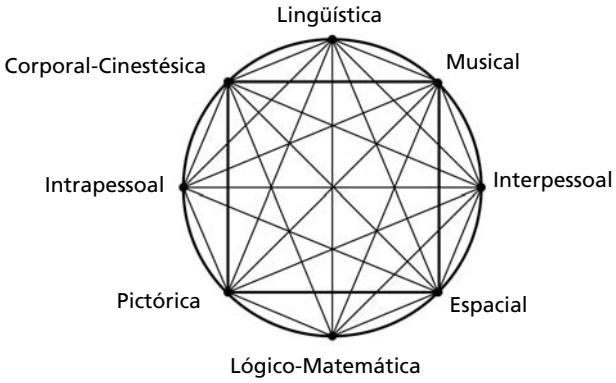



**Figura 29.18:** Esquema das inteligências múltiplas.

## RESUMO

Existem múltiplas inteligências que influem no desenvolvimento de nossas competências: a lingüístico-verbal; a lógico-matemática; a espacial; a corporal; a cinestésica; a interpessoal; a intrapessoal; a musical e a pictórica. Qualquer classificação ou isolamento de inteligência é perigoso. As situações sugeridas nesta aula são mais algumas alternativas didáticas que podem ser utilizadas nas suas aulas de Geometria, independentemente de você querer aprofundar a análise das inteligências.

## AUTO-AVALIAÇÃO

Esperamos que você tenha percebido que a Geometria é muito mais que "decoreba" de fórmulas e cálculos e tenha imaginado algumas possibilidades de utilização das situações de aprendizagem apresentadas nesta aula. Ter compreendido o significado e importância de cada inteligência deve ter sido fácil. No entanto, você deve estar se perguntando: *como posso desenvolvê-las em diferentes atividades?* Sugerimos, então, que você realize a atividade final proposta a seguir.

## ATIVIDADE FINAL

Volte a cada uma das situações de aprendizagem apresentadas nesta aula e identifique que(ais) inteligência(s) pode(m) ser desenvolvida(s) em cada uma delas. É possível que você conheça outras alternativas didáticas. Sugira-as também. Após terminar o preenchimento do quadro, converse com o tutor!

| Situação | Exemplos de inteligência(s) contemplada(s) | Comentário(s) e justificativa(s) de sua resposta |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |
| 11 | | |
| 12 | | |
| 13 | | |
| 14 | | |
| 15 | | |
| Sugestão | | |

**!**

Não basta pensar na atividade e na inteligência correlata. É imprescindível compreender o seu desenrolar e analisar os significados que são negociados, entre professor e aluno(s), no decorrer de cada uma delas.

AULA 30

# Resumindo o nosso trabalho na disciplina

## Meta da aula

Avaliar formativamente o trabalho na disciplina, através de quadro-síntese.

## objetivos

Esperamos que, após o estudo desta aula, você seja capaz de:

- Identificar pontos-chave em cada aula da disciplina.
- Revisar seus conhecimentos geométricos.
- Auto-avaliar sua aprendizagem na disciplina.

## Pré-requisitos

O pré-requisito fundamental desta aula é que você tenha desenvolvido as atividades obrigatórias propostas nas aulas anteriores. Conhecer e ter lido os Parâmetros Curriculares Nacionais (www.mec.gov.br) será, também, um suporte importante.

## INTRODUÇÃO

Estamos chegando ao final da disciplina. Esperamos que você tenha aproveitado qualitativamente o que preparamos. Assim, o que faremos agora é resumir os pontos discutidos em cada aula, para que isso possa enriquecer sua avaliação final do trabalho nesta disciplina.

Apesar de termos inserido, ao longo da disciplina, os princípios dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, nesta aula você poderá revisar um pouco mais alguns deles. Bom trabalho!

## OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS E A AULA DE MATEMÁTICA

Em linhas gerais, estamos de acordo com Bairral, Kindel e Oliveira (2000) quando dizem que o trabalho em Matemática no currículo escolar deve obedecer às seguintes observações:

- Representar de diversas formas um mesmo conceito, buscando estabelecer conexões entre elas.
- Desenvolver habilidades e procedimentos frente à resolução/aplicação de problemas.
- Estimular o espírito de interesse e investigação na busca de conjecturas.
- Utilizar diferentes tecnologias.
- Perceber regularidades e generalizar.
- Coletar, agrupar, analisar e representar dados.
- Explorar e desenvolver formas de raciocínio e processos intuitivos, indutivos, dedutivos, analógicos e estimados.
- Comunicar-se matematicamente.
- Estimular o trabalho cooperativo/coletivo.
- Desenvolver auto-estima e perseverança.

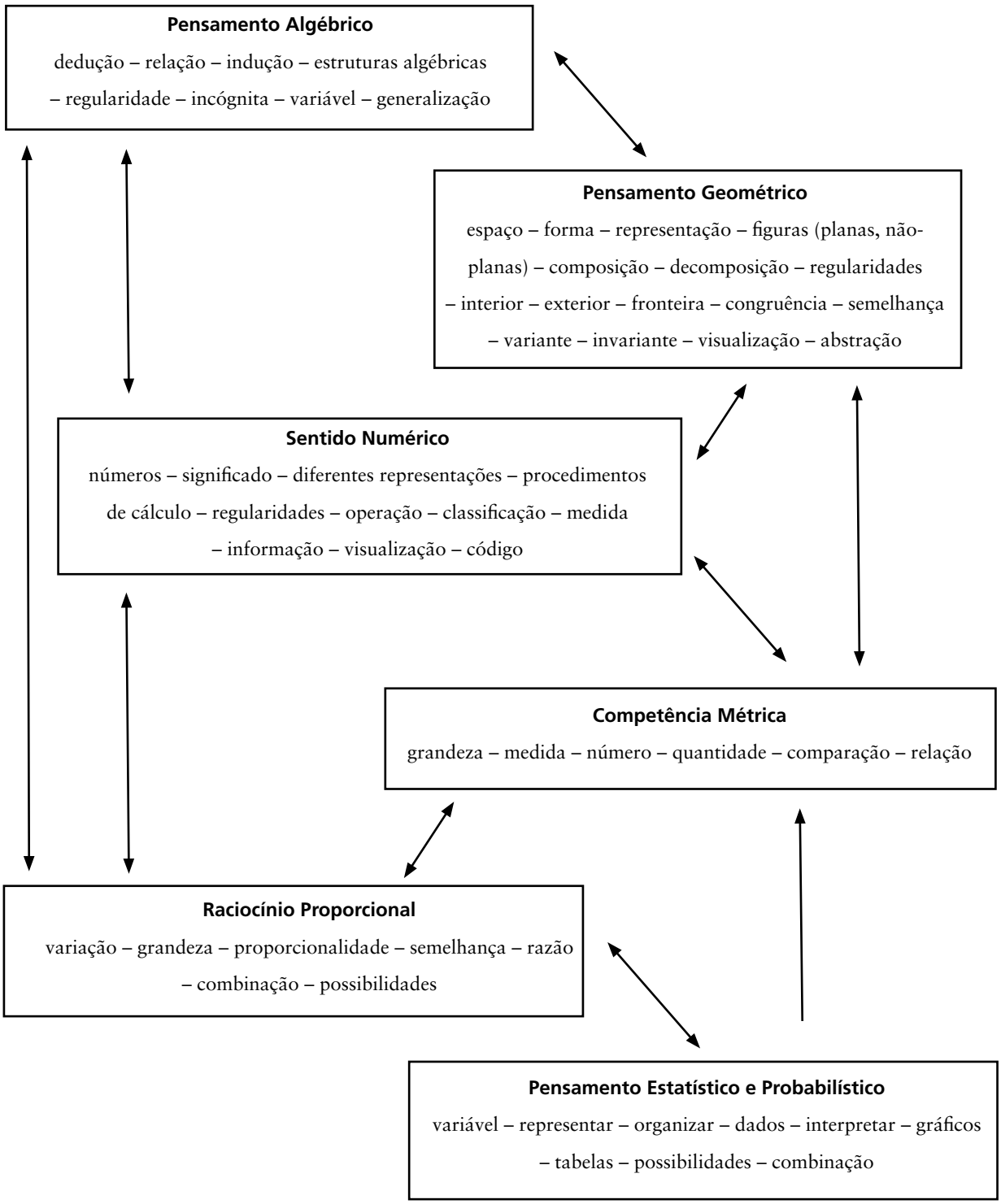
**!**

Nos Estados Unidos, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) publicou, em 2000, o seu último documento, *Princípios e Estândares para a Educação Matemática*, cujas diretrizes podem ser acessadas em www.nctm.org. Os estândares de 1989 foram traduzidos pela Associação de Professores de Matemática de Portugal (APM) e podem ser acessados em www.apm.pt

Refletindo o consenso entre professores e pesquisadores, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, em 1997, dão destaque ao ensino da Geometria, reconhecendo seu importante papel na formação dos nossos jovens, não só no que se refere à forte interação das formas geométricas com o meio ambiente, como também à construção de processos variados de raciocínio matemático, indispensáveis na formação de um cidadão crítico.

Enquanto os PCN do Ensino Médio são muito gerais e amplos, para o 3º e 4º ciclos eles são mais detalhados e dividem os objetivos em habilidades de pensamento diferentes, a saber: *Pensamento Algébrico, Pensamento Geométrico, Sentido Numérico, Competência Métrica, Raciocínio Proporcional, Pensamento Estatístico e Probabilístico*.

Sem querer defini-los, ilustramos a seguir, conforme fizeram Bairral, Kindel e Oliveira (2000), um conjunto de palavras que procuram traduzir as idéias presentes em cada objetivo, não existindo hierarquia entre eles. Os objetivos não são estanques, ou seja, de acordo com a atividade desenvolvida, pode haver relações distintas entre eles. No caso, o conteúdo deste módulo foi organizado relacionando, prioritariamente, três deles: *Pensamento Geométrico, Competência Métrica e Raciocínio Proporcional.*




Para você colocar um pouco mais em prática o seu entendimento e auto-avaliação das atividades no módulo, elaboramos o quadro seguinte, em que sintetizamos os aspectos didático-conceituais que priorizamos em cada aula. Veja e relembre-os!

**Quadro 30.1:** Síntese da disciplina

| Aula | Título | Meta | Objetivo(s) | Conteúdo(s) norteador(es) | Laboratório de Geometria | História | Integração curricular | Aspectos teóricos | Avaliação |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Desenvolvendo o pensamento geométrico | Apresentar o modelo de van Hiele sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico | • Reconhecer a importância do estudo da Geometria, motivando-se para a sua aprendizagem | Modelo de van Hiele | | | Geometria | Modelo de van Hiele | Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula |
| 2 | Conceituando e definindo em Geometria | Explicar a diferença entre definição e conceito | • Estabelecer diferenças entre conceito e definição<br>• Conceituar e definir figuras semelhantes | Semelhança | | | Geometria | Formação de conceitos em Geometria | Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula |
| 3 | Conceituando diagonal de um polígono | Explicar o conceito de diagonal e instrumentalizar o seu ensino | • Definir e conceituar diagonal de um polígono<br>• Construir um geoplano<br>• Utilizar o geoplano como recurso para a aprendizagem | Diagonal de um polígono | Geoplano | | Geometria | Formação de conceitos em Geometria | • Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula<br>• Utilização do geoplano |
| 4 | Definição e conceito de ângulo | Explicar o conceito de ângulo e instrumentalizar o seu ensino | • Definir e conceituar ângulo<br>• Apresentar diferentes ferramentas didáticas que envolvam o conceito de ângulo | Ângulos | Geoplano | | Geometria | Formação de conceitos em Geometria | • Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula<br>• Utilização de recursos variados para formação do conceito de ângulo |
| 5 | Ângulos e integração curricular | Desenvolver o conceito de ângulo e instrumentalizar o seu ensino | • Reconhecer a importância da definição e da conceituação de ângulo<br>• Distinguir os aspectos histórico-metodológicos que podem dinamizar o trabalho docente na formação do conceito de ângulo | Ângulos | Dominó | • Ângulo na Antigüidade<br>• Carta dos Rumos e Carta Portulano<br>• Problemas famosos da Grécia Antiga<br>• Concóide de Arquimedes, Quadratriz de Hípias e espiral de Arquimedes. Albert Dürer | • Geometria<br>• Física<br>• Educação-Física<br>• Biologia<br>• Artes<br>• História | • Processos cognitivos: formação de conceitos em Geometria<br>• Integração curricular | • Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula<br>• Utilização do dominó na formação do conceito de ângulo |

| Aula | Título | Meta | Objetivo(s) | Conteúdo(s) norteador(es) | Laboratório de Geometria | História | Integração curricular | Aspectos teóricos | Avaliação |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | Diferenciando sólidos de poliedros | Instrumentalizar o ensino de sólidos e poliedros | • Definir e conceituar sólido e poliedro<br>• Diferenciar sólido geométrico e poliedro<br>• Utilizar sucatas e planificações como recursos para aprendizagem | • Sólido geométrico<br>• Poliedro | • Sucatas<br>• Planificações<br>• Modelos sólidos | • História dos poliedros<br>• Papiro de Rhind<br>• Papiro de Moscou | Geometria | • Processos cognitivos: formação de conceitos em Geometria<br>• Mapas conceituais | • Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula<br>• Utilização de mapas conceituais |
| 7 | Redescobrindo e construindo os poliedros regulares com Canudos | Instrumentalizar o ensino dos poliedros regulares | • Definir ângulo poliédrico<br>• Definir e conceituar poliedros regulares<br>• Utilizar os modelos com canudos como recurso para aprendizagem | Poliedros regulares | • Modelos vazados, com canudos<br>• Planificações | Euclides de Alexandria | Geometria | Processos cognitivos: formação de conceitos em Geometria<br>• Habilidades cognitivas: desenvolvimento da visão espacial na formação de imagens mentais | •Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula<br>• Construção e utilização de modelos vazados de poliedros |
| 8 | Redescobrindo os poliedros regulares | Instrumentalizar o ensino dos poliedros regulares | • Definir ângulo poliédrico<br>• Definir e conceituar poliedros convexos<br>• Definir e conceituar poliedros regulares<br>• Utilizar as planificações como recurso para aprendizagem | • Poliedros de Platão<br>• Poliedros convexos | • Modelos vazados, com canudos<br>• Planificações | • História dos poliedros de Platão | Geometria | Processos cognitivos: formação de conceitos em Geometria<br>• Habilidades cognitivas: desenvolvimento da visão espacial na formação de imagens mentais | • Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula<br>• Construção e utilização de modelos vazados de poliedros |
| 9 | Explorando elementos do cubo | Instrumentalizar para o ensino do cubo | • Definir e conceituar cubo<br>• Utilizar os policubos, as dobraduras em papel e a internet como recursos para aprendizagem | Hexaedro regular | • Policubos<br>• Cubo soma<br>• Malha isométrica<br>• Dobraduras<br>• Modelos vazados<br>• Modelos sólidos | | Geometria | Processos cognitivos: formação de conceitos em Geometria<br>• Habilidades cognitivas: desenvolvimento da visão espacial na formação de imagens mentais | • Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula<br>• Construção e utilização de policubos, dobraduras e malhas isométricas |

| Aula | Título | Meta | Objetivo(s) | Conteúdo(s) norteador(es) | Laboratório de Geometria | História | Integração curricular | Aspectos Teóricos | Avaliação |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | Explorando o tetraedro e o octaedro | Instrumentalizar o ensino do tetraedro e do octaedro | • Construir modelos de tetraedros e octaedros regulares<br>• Visualizar simetrias e cortes no cubo, e no tetraedro e no octaedro<br>• Construir diferentes modelos como recurso para sua aprendizagem | • Tetraedro<br>• Octaedro | • Modelos vazados<br>• Modelos sólidos<br>• Modelos transparentes | Sistema planetário de Kepler | Geometria | Processos cognitivos: secções e simetria nos sólidos<br>• Habilidades cognitivas: desenvolvimento da visão espacial na formação de imagens mentais | • Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula<br>• Construção e utilização de modelos transparentes. |
| 11 | Estudando relações nos icosaedros e dodecaedros | Instrumentalizar o ensino dos poliedros regulares | • Analisar a obtenção de um poliedro regular através de secções planas em outro poliedro<br>• Realizar secções planas em poliedros | • Icosaedro<br>• Dodecaedro | • Modelos vazados<br>• Modelos sólidos<br>• Modelos transparentes<br>• Outros modelos | | Geometria | • Processos cognitivos: secções e simetrias nos sólidos<br>• Habilidades cognitivas: desenvolvimento da visão espacial na formação de imagens mentais | Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula |
| 12 | Inscrição e circunscrição de poliedros: os poliedros duais | Instrumentalizar o ensino dos poliedros duais | • Construir e definir poliedros duais<br>• Utilizar a internet como recurso para aprendizagem | Poliedros duais | • Modelos vazados<br>• Modelos sólidos<br>• Modelos transparentes<br>• Recursos da Geometria Dinâmica | Sólidos de Catalan | Geometria | • Processos cognitivos: inscrição e circunscrição de poliedros entre si<br>• Habilidades cognitivas: desenvolvimento da visão espacial na formação de imagens mentais | Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula |
| 13 | Euler e os poliedros | Instrumentalizar o ensino dos poliedros | • Construir modelos de poliedros<br>• Utilizar a relação de Euler $V - A + F = 2$<br>• Verificar a validade da relação de Euler em poliedros regulares convexos | Relação de Euler para poliedros | • Planificação<br>• Esculturas de sabão | Leonard Euler | Geometria | • Habilidades cognitivas: desenvolvimento da visão espacial na formação de imagens mentais | • Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula<br>• Construção e utilização de modelos com barra de sabão |

| Aula | Título | Meta | Objetivo(s) | Conteúdo(s) norteador(es) | Laboratório de Geometria | História | Integração curricular | Aspectos teóricos | Avaliação |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | Ampliando o mundo dos poliedros regulares: os poliedros estrelados | Instrumentalizar o ensino dos poliedros estrelados | • Estrelar poliedros e definir poliedros estrelados<br>• Utilizar a internet como recurso para sua aprendizagem<br>• Reconhecer a importância do uso da internet para o aprendizado de seus alunos e elaboração de suas aulas | Poliedros estrelados | Recursos da Geometria Dinâmica | História dos poliedros estrelados | Geometria | Habilidades cognitivas: desenvolvimento da visão espacial na formação de imagens mentais | • Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula<br>• Utilização da internet e de *softwares* na construção do conhecimento geométrico |
| 15 | Analisando estruturas: trabalhando plano e espaço conjuntamente | Instrumentalizar o ensino de estruturas poliédricas | • Identificar estruturas simples em três dimensões (3D), a partir de um modelo visual representado<br>• Analisar as formas que constituem uma estrutura técnica real<br>• Relacionar características técnicas de resistência às características morfológicas | Estruturas poliédricas | • Estruturas de palitos e canudos<br>• Plantas e maquetes | | • Geometria<br>• Temas transversais | • Habilidades cognitivas: desenvolvimento da visão espacial na formação de imagens mentais<br>• Análise morfológica de estruturas poliédricas<br>• Tipos de espaços geométricos | Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula |
| 16 | Girando e formando sólidos | Instrumentalizar o ensino dos sólidos de revolução | • Definir e conceituar os sólidos de revolução, utilizando material concreto<br>• Calcular volumes e áreas dos sólidos de revolução<br>• Aplicar recursos didáticos no ensino de sólidos de revolução<br>• Utilizar a internet como ferramenta de aprendizagem | Sólidos de revolução | Geradores de sólidos e superfícies de revolução | Papus de Alexandria | Geometria | Habilidades cognitivas: desenvolvimento da visão espacial na formação de imagens mentais | Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula |

| Aula | Título | Meta | Objetivo(s) | Conteúdo(s) norteador(es) | Laboratório de Geometria | História | Integração curricular | Aspectos Teóricos | Avaliação |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | A revolução do cone: secções cônicas | Instrumentalizar o ensino das secções cônicas | • Definir e conceituar as cônicas como secções do cone e<br>• Definir e conceituar as cônicas como lugares geométricos do plano<br>• Perceber que as abordagens das cônicas feitas na Geometria Espacial Geometria Analítica e em construções Geométricas falam sobre os mesmos objetos matemáticos<br>• Utilizar recursos didáticos para o ensino das cônicas<br>• Utilizar a internet como ferramenta de aprendizagem | Secções cônicas | • Papel vegetal e material recortável<br>• Internet | • Apolônio<br>• Menaecmus<br>• Kepler<br>• Galileu<br>• Van Schooten<br>• Cometa Halley | História | • Processos cognitivos: definição das cônicas como lugar geométrico<br>• Habilidades cognitivas: desenvolvimento da visão espacial na formação de imagens mentais | Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula |
| 18 | Explorando o Teorema de Pitágoras | Instrumentalizar o ensino do Teorema de Pitágoras | • Enunciar e demonstrar o Teorema de Pitágoras<br>• Conhecer episódios da história do Teorema de Pitágoras<br>• Utilizar vários recursos para ensinar o Teorema de Pitágoras<br>• Encontrar ternos pitagóricos | Teorema de Pitágoras | • Quebra-cabeças<br>• Internet | • Hamurabi<br>• Bhaskara<br>• Euclides<br>• Leonardo da Vinci | História | Processos cognitivos: técnicas de demonstração do teorema de Pitágoras e dedução dos ternos pitagóricos | Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula |
| 19 | O Teorema de Pitágoras e sua relação com polígonos semelhantes | Instrumentalizar o ensino do Teorema de Pitágoras | • Verificar a validade do Teorema de Pitágoras na soma das áreas de figuras semelhantes, não apenas quadrados<br>• Utilizar quebra-cabeças como recursos para ensinar o Teorema de Pitágoras | • Teorema de Pitágoras<br>• Polígonos semelhantes | • Vídeo: "Donald no País da Matemágica"<br>• Paradidático<br>• Quebra-cabeças<br>• Internet | Paulus Gerdes | Geometria | Processos cognitivos: extensão do teorema de Pitágoras para polígonos semelhantes | • Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula<br>• Construção e utilização de quebra-cabeças geométricos |

| Aula | Título | Meta | Objetivo(s) | Conteúdo(s) norteador(es) | Laboratório de Geometria | História | Integração curricular | Aspectos teóricos | Avaliação |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | Construindo, jogando e aprendendo com quebra-cabeças | Instrumentalizar o ensino de construções geométricas elementares, por meio de quebra-cabeças | • Reconhecer a pertinência do uso de quebra-cabeças na atividade matemática<br>• Criar e construir alguns quebra-cabeças para utilização em aulas de Geometria<br>• Avaliar e explorar o potencial de determinado quebra-cabeça no desenvolvimento de construções geométricas<br>• Refletir sobre a utilização de outros recursos (*softwares* e internet) nas aulas de matemática | Construções geométricas elementares | • Internet<br>• Dobradura<br>• Tangram Quadrado<br>• Tangram Coração<br>• Tangram Oval<br>• Tangram Triangular<br>• Tangram Pentagonal<br>• Tangram Retangular | Tangram | Construções geométricas | • Processos cognitivos: técnicas de construções geométricas<br>• Habilidades cognitivas: criação e construção de quebra-cabeças geométricos | • Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula<br>• Construção e utilização de quebra-cabeças geométricos |
| 21 | Triângulo Retângulo: de Tales à Trigonometria | Instrumentalizar o ensino de relações no triângulo retângulo | • Realizar medições indiretas usando o triângulo retângulo<br>• Enunciar e demonstrar as relações métricas no triângulo retângulo<br>• Definir as relações trigonométricas no triângulo retângulo<br>• Definir as relações trigonométricas no círculo trigonométrico | • Relações métricas no triângulo retângulo<br>• Razões trigonométricas no triângulo retângulo<br>• Ciclo trigonométrico | • Teodolito<br>• Ciclo trigonométrico | • Talles de Mileto<br>• Evolução histórica da Trigonometria | • Geometria<br>• Trigonometria | Processos cognitivos: construção de conceitos em Geometria | • Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula<br>• Construção e utilização de um teodolito<br>• Construção e utilização de um ciclo trigonométrico |

| Aula | Título | Meta | Objetivo(s) | Conteúdo(s) norteador(es) | Laboratório de Geometria | História | Integração curricular | Aspectos Teóricos | Avaliação |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 22 | Unidades de medidas | Instrumentalizar o ensino de unidades de medidas | • Entender a medida como processo de comparar<br>• Identificar ações (compor, decompor, comparar, estimar, verificar equivalências e diversificar unidades) no trabalho com a medida<br>• Entender a diferença entre unidade de medida padrão e não–padrão<br>• Perceber que entre a unidade de medida e o número que a expressa há uma relação proporcional<br>• Compreender o potencial de cada atividade no desenvolvimento do conceito de medida<br>• Manusear instrumentos de medida, em especial, o escalímetro | Unidades de medida | • Escalímetro<br>• Triângulo universal de escalas<br>• Tangram<br>• Geoplano<br>• Malhas<br>• Papel quadriculado<br>• Papel milimetrado<br>• Sucatas de caixas e recipientes diversos<br>• Mapas<br>• Paradidático | • Os egípicios e a demarcação de áreas<br>• Arquimedes e o volume e a área da esfera<br>• Número áureo | • História<br>• Geografia | • Processos cognitivos: o conceito de escala | • Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula |
| 23 | Áreas de figuras planas | Instrumentalizar a construção do conceito de área | • Conceituar área<br>• Utilizar variados recursos para construir o conceito de área<br>• Deduzir, de diversas maneiras, as fórmulas para o cálculo das principais figuras planas | • Áreas<br>• Perímetros | • Papel Pluma<br>• Geoplano<br>• Papel quadriculado<br>• Minós<br>• Tangram<br>• Mapas e plantas–baixas | | | Habilidades cognitivas envolvidas na construção conceitual de área | • Análise perguntas associadas aos objetivos da aula<br>• Quadro–síntese |

| Aula | Título | Meta | Objetivo(s) | Conteúdo(s) norteador(es) | Laboratório de Geometria | História | Integração curricular | Aspectos teóricos | Avaliação |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 24 | Estudando retas, círculos e circunferências | Instrumentalizar o ensino de retas, círculos e circunferências por meio de construções geométricas | • Encontrar a fórmula para calcular a área de um círculo<br>• Localizar o centro de uma circunferência qualquer<br>• Construir mediatrizes e localizar pontos estratégicos<br>• Inscrever polígonos regulares em geoplanos<br>• Comparar a medida do ângulo inscrito com a do ângulo central correspondente<br>• Refletir sobre a utilização de *softwares* e internet<br>• Refletir sobre a importância da integração curricular | • Retas<br>• Círculos<br>• Circunferências | • Régua e compasso<br>• Internet<br>• *Cabri*<br>• Tangram circular<br>• Geoplano quadrado<br>• Geoplano circular | • Hipócrates<br>• Problemas famosos da Grécia antiga | Geografia | Habilidades cognitivas: envolvidas na demonstração de teoremas geométricos | • Análise de perguntas associadas aos objetivos da aula |
| 25 | Estudando simetrias | Instrumentalizar o ensino das transformações no plano: as isometrias | • Conceituar simetria axial<br>• Construir e utilizar o livro de espelhos<br>• Utilizar a simetria na resolução de problemas<br>• Entender conteúdo curricular como conceitos, procedimentos e atitudes | Simetria axial | • Malhas<br>• Livro de espelhos<br>• Caleidoscópios | Mauritis Cornelis Escher | • Ciências Naturais<br>• Cristalografia<br>• Psicologia<br>• História<br>• Linguagem | Conteúdos curriculares como conceitos, procedimentos e atitudes | Mapa conceitual |

| Aula | Título | Meta | Objetivo(s) | Conteúdo(s) norteador(es) | Laboratório de Geometria | História | Integração curricular | Aspectos teóricos | Avaliação |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | Estudando rotações | Instrumentalizar o ensino das transformações no plano: rotações | • Conceituar rotação<br>• Conceituar e identificar simetria rotacional em polígonos regulares<br>• Analisar composições de isometrias<br>• Realizar giros por meio de dobras e cortes em papel<br>• Utilizar diferentes alternativas didáticas no trabalho com rotações | Rotação | • Dobras e recortes em papel<br>• Material transparente (papel vegetal, transparências etc.) e papel carbono<br>• Material de medida | | Artes | • Dificuldades dos alunos quando trabalham com materiais recortáveis<br>• Conteúdo curricular | Elaboração de um diário |
| 27 | Estudando translações | Instrumentalizar o ensino das transformações no plano: translações | • Conceituar translação<br>• Conceituar deslizamento<br>• Diferenciar translação de deslizamento<br>• Analisar composições de isometrias<br>• Utilizar diferentes alternativas didáticas no trabalho com as isometrias<br>• Aprofundar estudos sobre as rosetas, os mosaicos e os frisos | Translação | Material recortável | • Papiro de Ahmes<br>• Klein<br>• Pappus | • Aritmética, Álgebra, Geometria Analítica, Probabilidade, Tecnologia<br>• Educação Física, Ciências Naturais<br>• Astronomia, Física, Química<br>• História, Geografia, Literatura, Música<br>• Medicina<br>• Jogos<br>• Meios de comunicação, Artes, Arquitetura e História da Arte | Dificuldades na compreensão do conceito de translação | • Quadro conceitual<br>• Atividade de revisão e aplicação conceitual |

| Aula | Título | Meta | Objetivo(s) | Conteúdo(s) norteador(es) | Laboratório de Geometria | História | Integração curricular | Aspectos teóricos | Avaliação |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 28 | Parecido ou semelhante? Estudando homotetias e semelhanças | Instrumentalizar o ensino de homotetia e semelhança | • Definir figuras semelhantes<br>• Definir figuras homotéticas<br>• Compreender a semelhança e a homotetia como um tipo de transformação no plano<br>• Utilizar o pantógrafo<br>• Gerar famílias de figuras semelhantes e analisá-las | Homotetia e Semelhança | • Pantógrafo<br>• Recursos de projeção | • O polígono estrelado o número de ouro<br>• A duplicação do cubo | • O sistema solar como exemplo de utilização de escalas<br>• Artes, Língua Portuguesa, História, Geografia | • Atenção à linguagem<br>• Níveis de van Hiele | Análise de esquema |
| 29 | Atividades lúdicas, estratégias geométricas e inteligências múltiplas | Instrumentalizar a elaboração de atividades geométricas lúdicas que desenvolvam as inteligências múltiplas. | • Distinguir cada tipo de inteligência múltipla<br>• Reconhecer a importância das inteligências múltiplas e identificá-las em situações variadas<br>• Conhecer novas alternativas didáticas para elaboraçao de tarefas geométricas | Inteligências múltiplas | • Internet<br>• Batalha naval<br>• Labirintos<br>• Jogos<br>• Dobraduras<br>• Pipas | | Artes, Língua Portuguesa, História, Geografia | Teoria da Inteligências Múltiplas de Howard Gardner | Análise de atividades |
| 30 | Resumindo o nosso trabalho na disciplina | Avaliar formativamente o trabalho na disciplina, através de quadro-síntese | • Identificar pontos-chave em cada aula da disciplina<br>• Revisar seus conhecimentos geométricos<br>• Auto-avaliar sua aprendizagem na disciplina | Currículo | • Internet<br>• PCN | | | | Quadro-síntese |

!

A partir da leitura do quadro, você já pensou como seria um mapa conceitual do mesmo? Converse com o tutor e com seus colegas!

**RESUMO**

O quadro-síntese é um tipo de instrumento que pode ser utilizado como forma de organização, estudo e avaliação em Matemática.

## ATIVIDADE FINAL

No início do seu trabalho na disciplina, você leu os objetivos específicos que iríamos priorizar em seu desenvolvimento, no que se refere ao ensino da Geometria do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Ei-los, novamente, no quadro a seguir. Como avaliação final, propomos que os leia e identifique se alcançou ou não cada um. Faça os comentários que considerar necessários. Achamos que é importante que você exemplifique o que aprendeu. Você pode exemplificar com uma atividade de alguma aula específica, um comentário da mesma, um episódio histórico, elementos curriculares integradores; enfim, algum elemento que dê informações sobre sua aprendizagem. Finalmente, se preferir, pode acrescentar objetivos que considere terem sido atingidos por você e que não foram explicitados por nós.

**Quadro 30.2:** Título

| Objetivo | Sim | Não | Comentário(s) | Exemplo |
|---|---|---|---|---|
| Discutir aspectos teórico-metodológicos sobre a construção do conhecimento | | | | |
| Subsidiar a construção do seu laboratório pessoal | | | | |
| Desenvolver a visão espacial e a construção de modelos mentais | | | | |
| Abordar conteúdos não usuais | | | | |
| Incentivar a integração curricular | | | | |
| Utilizar a evolução histórica como recurso motivador | | | | |
| Utilizar a internet como ferramenta de ensino-aprendizagem | | | | |
| Utilizar a Geometria Dinâmica como recurso de ensino-aprendizagem | | | | |
| Propiciar discussão sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais | | | | |
| *Outro ...* | | | | |
| *Outro ...* | | | | |

**!**

Você já pensou que, após o preenchimento do quadro anterior, a elaboração de um diário (Aula 4) também pode ser outra alternativa na avaliação da aprendizagem matemática?

## AUTO-AVALIAÇÃO

Ao preencher o quadro anterior, mesmo sem querer, você realizou uma auto-avaliação. Esperamos que você tenha concluído que hoje está bem mais preparado para lecionar Geometria tanto no Ensino Fundamental como no Médio.

Gostaríamos de concluir a disciplina ratificando que a implantação de qualquer proposta curricular encontrará dificuldades se os professores não tiverem oportunidade de desenvolver seus conhecimentos em Geometria, tanto nos seus aspectos matemáticos, como no domínio de metodologias de ensino.

Você está fazendo a sua parte, ou seja, melhorando o seu conhecimento profissional visando também a mudar e melhorar o ensino em sua região. Cabe a todos nós continuar lutando por melhorias qualitativas na Educação brasileira. Desta forma, esperamos ter contribuído um pouco para o seu crescimento pessoal e profissional.

Seja feliz e tenha muito sucesso!

Marcelo e Miguel

# Instrumentação do Ensino da Geometria

Referências

## Aula 16

BOYER, Carl Benjamim. *História da matemática*. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

FERREIRA, Edson L.C; FONTENELE NETO, F.X.; RIOS, Isabel Lugão. *Geometria básica*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2003, v. 3.

KALEFF, Ana Maria; SÁ, Luciana Almeida; TOLEDO, Maria Inês de. Criando, vendo e entendendo sólidos de revolução. *Boletim do Gepem*, Rio de Janeiro, n. 40, p. 35-52, 2002.

LIMA, Elon L. *et al*. *A Matemática do ensino médio*. 3.ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2000. (Coleção Professor de Matemática; v. 2.).

TINOCO, Lúcia A.A. *Geometria Euclidiana:* por meio de resolução de problemas. Rio de Janeiro: UFRJ/Projeto Fundão, 1999.

VELOSO, Eduardo. *Geometria*: temas actuais: materiais para professores. Lisboa: IIE, 1998.

## Aula 17

Boletim do GEPEM, n. 42, Rio de Janeiro: GEPEM, 2003. Número Temático sobre Educação Algébrica.

FERREIRA, Edson Luiz C. *Geometria básica*. v.3. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2003.

IMENES, Luiz Márcio. *Geometria das dobraduras*. São Paulo: Scipione, 2001.

KALEFF, Ana Maria. *Vendo e entendendo poliedros*. Niterói: EDUFF, 1998.

## Aula 18

BAIRRAL, Marcelo A. (org.) *Recursos e Inovações para a Geometria no Currículo*. Seropédica: Imprensa UFRuralRJ, fev./2003.

FERREIRA, E.L. et al. *Geometria Básica*: v.1.- 2.ed. rev. atual. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2002.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 3. ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2002. Traduzido por Hygino Domingues.

BOYER, C. Benjamim. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

KALEFF, Ana Maria; REI, Dulce Monteiro; GARCIA, Simone dos Santos. *Quebra-Cabeças Geométricos e Formas Planas*. 2ª. ed. Niterói: EDUFF, 1997.

KINDEL, Dora Soraia; BAIRRAL, Marcelo Almeida; OLIVEIRA, Rosana. *Uma Propor-ação entre Matemática e PCNs*. Série Pensamento em Ação, v. 1. Rio de Janeiro: GEPEM, 2000.

**Aula 19**

GERDES, Paulus. *Sobre o despertar do pensamento geométrico*. Curitiba: Editora da UFPR, 1992.

GUNDLACH, Bernard. Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. São Paulo: Atual, 1992. Traduzido por Hygino Domingues.

IMENES, Luiz Márcio. *Descobrindo o Teorema de Pitágoras*. São Paulo: Scipione, 1988, 2. ed.

KINDEL, Dora Soraia; BAIRRAL, Marcelo Almeida; OLIVEIRA, Rosana. *Uma Propor-ação entre Matemática e PCNs*. Série Pensamento em Ação, V. 1. Rio de Janeiro: GEPEM, 2000.

**Aula 20**

BAIRRAL, Marcelo A. (Org.) *Recursos e inovações para a geometria no currículo*. Seropédica: Imprensa UFRRJ, 2003.

IMENES, Luiz Márcio. *Geometria dos mosaicos*. 4.ed. São Paulo: Scipione, 1988. (Coleção vivendo a matemática)

KALEFF, Ana Maria; REI, Dulce Monteiro; GARCIA, Simone dos Santos. *Quebra-cabeças geométricos e formas planas*. 2.ed. Niterói: EDUFF, 1997.

KINDEL, Dora Soraia; BAIRRAL, Marcelo Almeida; OLIVEIRA, Rosana. *Uma proporação entre matemática e PCNs*. Rio de Janeiro: GEPEM, 2000. (Série pensamento em ação; v. 1)

LOPES, Antônio J. *Matemática atual*. São Paulo: Atual, 1994.

## Aula 21

BAIRRAL, Marcelo A. (Org.). *Recursos e inovações para a geometria no currículo*. Seropédica: Imprensa UFRuralRJ, 2003.

_____. *Semelhança na 7ª série*: algumas dificuldades. *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, n. 34, p. 35-64, 1998.

BOYER, Carl Benjamim. *História da matemática*. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Traduzido por Hygino Domingues 3.ed. Campinas,SP: Ed. da UNICAMP, 2002.

FERREIRA, Edson Luiz C.; FONTENELE NETO, Francisco; Rios, Isabel Lugão. *Geometria básica*: 2.ed. rev. atual. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2002. v. 1.

GUELLI, Oscar. *Matemática:* uma aventura do pensamento, 8ª série: livro do professor. São Paulo: Ática, 2002.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. *Matemática para todos*: manual do professor, 8ª série, 4° ciclo. São Paulo: Scipione, 2002.

LEITE, J. B. Material didático no ensino da trigonometria. *Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro, SBM, n. 9, p. 45-46, 1986.

VELOSO, Eduardo. *Geometria:* temas actuais: materiais para professores. Lisboa: IIE, 1998.

## Aula 22

BAIRRAL, MARCELO A. Semelhança na 7ª série: algumas dificuldades. *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, n. 34, p. 35-64, 1998.

BOYER, arl Benjamim. *História da matemática*. Tradução Elza F Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

ESQUEF, Paulo Antonio. Como o surpreendente Arquimedes determinou o volume e a área da esfera. Rio de Janeiro, *Boletim GEPEM*, n. 43, 2004.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução Hygino Domingues. 3.ed. Campinas,SP: Ed. da UNICAMP, 2002. 844p.

IMENES, Luiz Márcio. *Medindo comprimentos*. 4.ed. São Paulo: Scipione, 1988. (Coleção vivendo a matemática)

OLIVEIRA, Rosana de. M. Área, perímetro e volume. *In*: BAIRRAL, Marcelo; GIMENEZ RODRIGUEZ, Joaquim. *Geometria para 3º e 4º ciclos pela Internet*. Seropédica,RJ: EDUR, 2004.

SOUZA, Cláudio S.; ARNAUT, Roberto G. Tavares; MATOS, Manoela Barros. *Construções geométricas*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2003. v. 1.

## Aula 23

BAIRRAL, Marcelo A. (Org.) *Recursos e Inovações para a Geometria no Currículo*. Seropédica: Imprensa UFRRJ, 2003.

FERREIRA, Edson Luiz C. et al. *Geometria básica*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2003. v. 3.

GOMES, Maria da Conceição V. *Caderno de Matemática*. Rio de Janeiro: EDUERJ, 1999.

GUELLI, Oscar. *Matemática*: uma aventura do pensamento: Livro do Professor. 5ª série. São Paulo: Ática, 2002.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. *Matemática para todos*: manual do professor. 6ª série, 3° ciclo. São Paulo: Scipione, 2002.

_____. *Matemática para Todos: Manual do Professor.* 7ª série, 4° ciclo. São Paulo: Scipione, 2002.

KINDEL, Dora Soraia; BAIRRAL, Marcelo Almeida; OLIVEIRA, Rosana. *Uma Proporação entre Matemática e PCNs*. Rio de Janeiro: GEPEM, 2000. (Série Pensamento em Ação; v. 1).

LIMA, Elon L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2000. (Coleção Professor de Matemática; v 2.).

NASSER, Lílian; LOPES, Maria Laura (Orgs). *Geometria na era da imagem e do movimento*. Rio de Janeiro: Ed. da UFRJ, 1996.

**Aula 24**

ALSINA, Claudi et al. *Materiales para construir la geometria*. Madrid: Síntesis, 1991.

BAIRRAL, Marcelo. Quebra-cabeças matemáticos e construções geométricas. *In*: _____. (Org.). *Material de apoio para didática da matemática*. Seropédica: Imprensa Universitária da UFRRJ, 1999.

FERREIRA, Edson Luiz C. et al. *Geometria básica*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2003. v. 3

IMENES, Luiz Márcio. O centro geográfico do Brasil. *Revista Professor de Matemática*, São Paulo, n. 6, p. 15-16, 1985.

KALEFF, Ana Maria; REI, Dulce Monteiro; GARCIA, Simone dos Santos. *Quebra-cabeças geométricos e formas planas*. 2.ed. Niterói: EDUFF, 1997.

LOPES, Antônio J. *Matemática atual*. São Paulo: Atual, 1994.

**Aula 25**

BAIRRAL, Marcelo. Conceitos, procedimentos e atitudes em Matemática. *Presença Pedagógica*, Belo Horizonte, v.9, n. 50, p. 43-49, mar./abr. 2003.

CORBALÁN, F. *Juegos Matemáticos para Secundaria y Bachillerato*. Madrid: Síntesis, 1994.

KALEFF, Ana Maria. Construindo o conceito de simetria em relação a uma reta: do jardim de infância ao ensino superior. *Boletim do GEPEM*, Rio de Janeiro, n. 35, p. 42-56, 1999.

MURARI, Claudeni.; PÉREZ, Geraldo; BARBOSA, Ruy Madsen. O uso de espelhos e caleidoscópios em atividades educacionais de geometria para 7ª e 8ª séries. *BOLEMA*, Rio Claro-SP, ano 15, n. 18, p. 1-25, 2002.

NASSER, Lílian; SANTANA, Neide (Coords.). *Geometria segundo a Teoria de van Hiele*. 2. ed. Rio de Janeiro: Projeto Fundão-IM/UFRJ, 1998.

## Aula 26

CASADO, Maria Jesús. *Geometría dinámica con papel*. Granada: Proyecto Sur de Ediciones, 1999.

REZENDE, Eliane; QUEIROZ, Maria Lúcia. *Geometria euclidiana e construções geométricas*. Campinas,SP: Ed. da UNICAMP; 2000.

**SUGESTÃO DE LEITURAS COMPLEMENTARES PARA APROFUNDAMENTO SOBRE AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS**

PINHEIRO, Virgilio Athayde. Geometrografia. Rio de Janeiro: Gráfica Editora Bahiense, 1974. v. 1.

_____. Geometrografia. Rio de Janeiro: Gráfica Editora Bahiense, 1986. v. 2.

## Aula 27

CASADO BARRIO, Maria Jesús. *Geometría dinámica con papel*. Granada: Proyecto Sur de Ediciones, 1999. 118p.

FAINGUELERNT, Estela K.; BORDINHÃO, Noelir. Translações e simetrias no plano. Rio de Janeiro, *Boletim do GEPEM*, n. 27, p. 49-62, 1990.

REZENDE, Eliane; QUEIROZ, Maria Lúcia. *Geometria Euclidiana e construções geométricas*. Campinas,SP: Ed. da UNICAMP; 2000.

**SUGESTÃO DE LEITURAS COMPLEMENTARES PARA APROFUNDAMENTO SOBRE O TRABALHO DE ZOLTAN DIENES COM TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS**

DIENES, Zoltan; GOLDING, Edward. *A geometria pelas transformações*. São Paulo: EPU, 1975.

**SUGESTÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR PARA APROFUNDAMENTO SOBRE AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO CURRÍCULO DO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO SEGUNDO A TEORIA DE VAN HIELE**

GUTIÉRREZ, Angel; JAIME, Adela. *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Sintesis, 1996.

NASSER, Lilian; SANTANA, Neide (Coords.). *Geometria segundo a teoria de Van Hiele*. 2.ed. Rio de Janeiro: Projeto Fundão-IM/UFRJ, 1998.

**SUGESTÃO DE LEITURAS COMPLEMENTARES PARA APROFUNDAMENTO SOBRE AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS**

PINHEIRO, Virgilio Athayde. Geometrografia. Rio de Janeiro: Gráfica Editora Bahiense, 1974. v. 1.

_____. Geometrografia. Rio de Janeiro: Gráfica Editora Bahiense, 1986. v. 2.

**SUGESTÃO DE LEITURAS COMPLEMENTARES PARA APROFUNDAMENTO SOBRE ROSETAS, FRISOS E MOSAICOS**

BIEMBENGUT, Maria Salett; SILVA, Viviane C. da; HEIN, Nelson. *Ornamentos x criatividade*: uma alternativa para ensinar geometria plana. Blumenau: Ed. da FURB, 1996.

GUTIÉRREZ, Angel; JAIME, Adela. *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Sintesis, 1996.

FONSECA, Maria da Conceição. da et al. *O ensino de geometria na escola fundamental*: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

GARDNER, Howard. *Multiple intelligences*. New York: Basic Books, 1993.

_____. Estruturas da mente: a teoria das inteligências múltiplas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

MACHADO, Nilson José. *Epistemologia e didática*: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Cortez, 1995.

POWELL, Arthur B. *Material do Seminário Internacional*: tecnologia, reflexão e interação em educação matemática. Seropédica: UFRRJ, 2004. Fotocópia.

SANTOS, Vânia M.P. et al. *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática*: métodos alternativos. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 1997.

VOCE, Silvio. Brincando com pipas planas. São Paulo: Global, 1994.

## Aula 28

BAIRRAL, Marcelo Almeida. *Buscando semelhanças encontramos mais do que meras coincidências*. 1996. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro: USU, 1996.

FERREIRA, Edson Luiz C.; FONTENELE NETO, Francisco; RIOS, Isabel Lugão. *Geometria básica*. Rio de Janeiro: CEDERJ, 2002.

LAPPAN, Glenda et al. Semelhança: pesquisa nos níveis escolares médios. *In*: LINDQUIST, Mary; SHULTE, Albert (Orgs.). *Aprendendo e ensinando geometria*. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

LUENGO, Ricardo (Coord.). *Proporcionalidad geometrica y semejanza*. Madrid: Sintesis, 1990.

REZENDE, Eliane; QUEIROZ, Maria Lúcia. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. Campinas,SP: Ed. da UNICAMP, 2000.

**SUGESTÃO DE LEITURAS COMPLEMENTARES PARA APROFUNDAMENTO SOBRE AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS**

PINHEIRO, Virgilio A. *Geometrografia*. Rio de Janeiro: Bahiense, 1974. v. 1.

_____. *Geometrografia*. Rio de Janeiro: Aula Editora, 1986. v. 2.

**SUGESTÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR PARA APROFUNDAMENTO SOBRE GEOMETRIA NO CURRÍCULO**

LINDQUIST, Mary M.; SHULTE, Albert P. (Org.). *Aprendendo e ensinando geometria*. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

MUSEO Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica. Disponível em:<http://www.museo.unimo.it/theatrum/inizio.htm>. Acesso em: 05 ago. 2004.

## Aula 29

BAIRRAL, Marcelo; GIMÉNEZ, Joaquin. *Geometria para 3º e 4º ciclos pela Internet*. Seropédica: EDUR, 2004.

FERRERO, Luis. *El juego y la matemática*. Madrid: La Muralla, 1991.

FONSECA, M. da C. et al. O *ensino de geometria na escola fundamental:* três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

GARDNER, Howard. *Multiple intelligences*. New York: Basic Books, 1993.

_____. *Estruturas da mente*: a teoria das inteligências múltiplas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

MACHADO, Nilson José. *Epistemologia e didática*: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Cortez, 1995.

POWELL, Arthur B. *Material do Seminário Internacional*: tecnologia, reflexão e interação em educação matemática. Seropédica: UFRRJ, 2004. Fotocópia.

SANTOS, Vânia M.P. et al. A*valiação de aprendizagem e raciocínio em matemática*: métodos alternativos. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 1997.

VOCE, Silvio. *Brincando com pipas planas*. São Paulo: Global, 1994.

## Aula 30

BAIRRAL, Marcelo Almeida; KINDEL, Dora S.; OLIVEIRA, Rosana de. Uma propor-Ação entre matemática e PCNs. Rio de Janeiro: GEPEM, 2000.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos*. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.

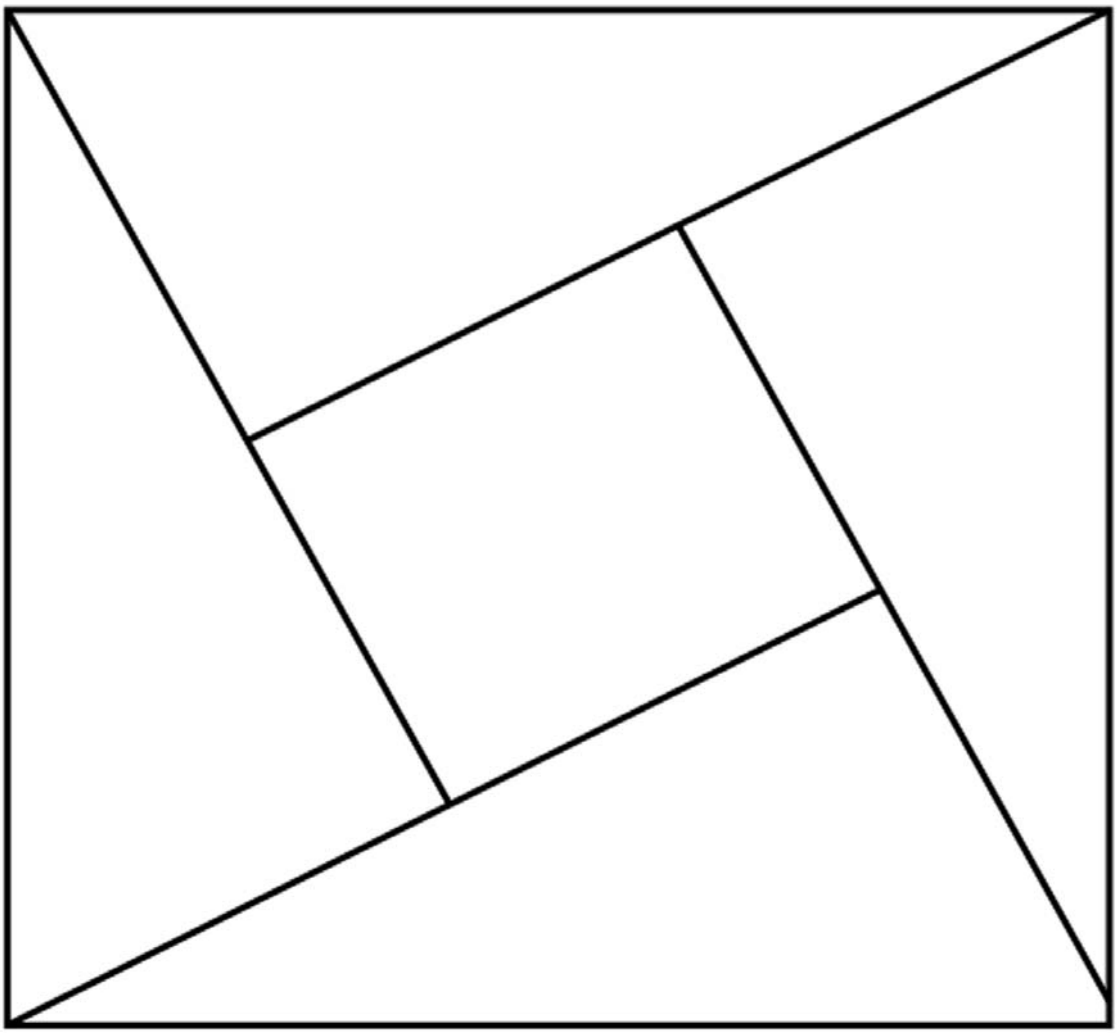
BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Média. *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Médio*. Brasília,DF: MEC/SEM, 1999.

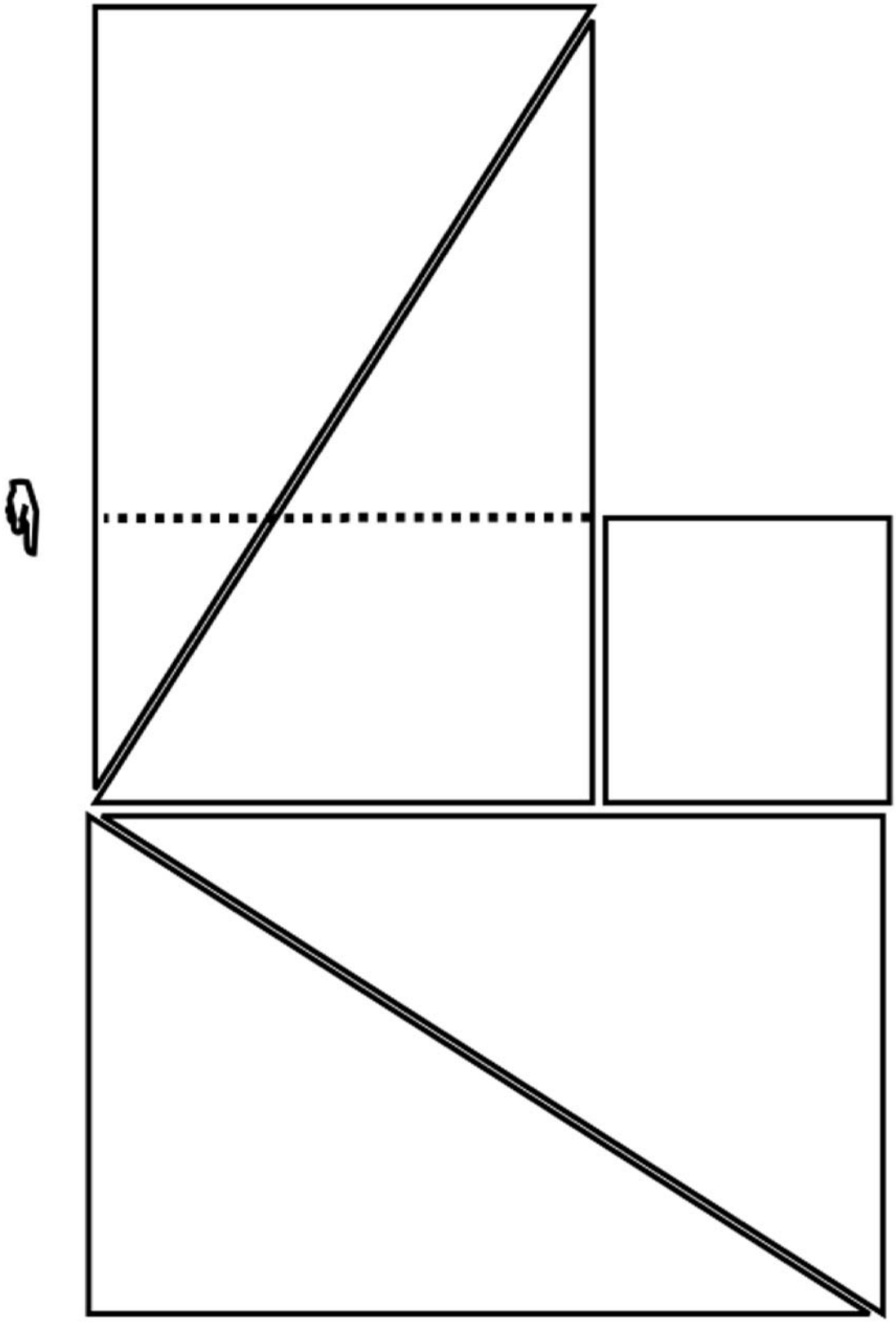
**SUGESTÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR SOBRE PCN DO 1º E 2º CICLOS**

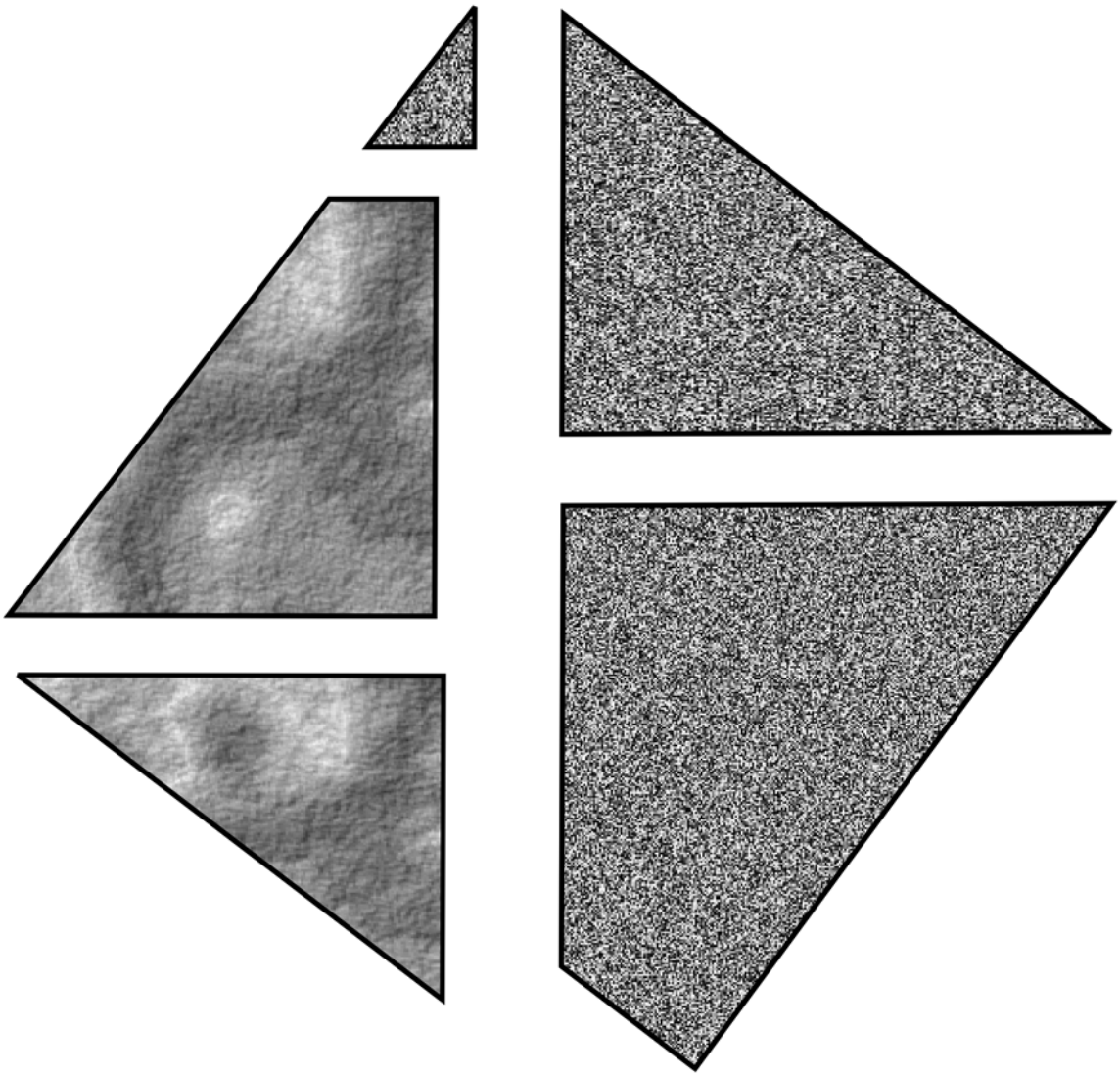
MAGNO, Beatriz; MANDARINO, Monica; JURKIEWICZ, Samuel. *Matemática na Educação 1*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2004.

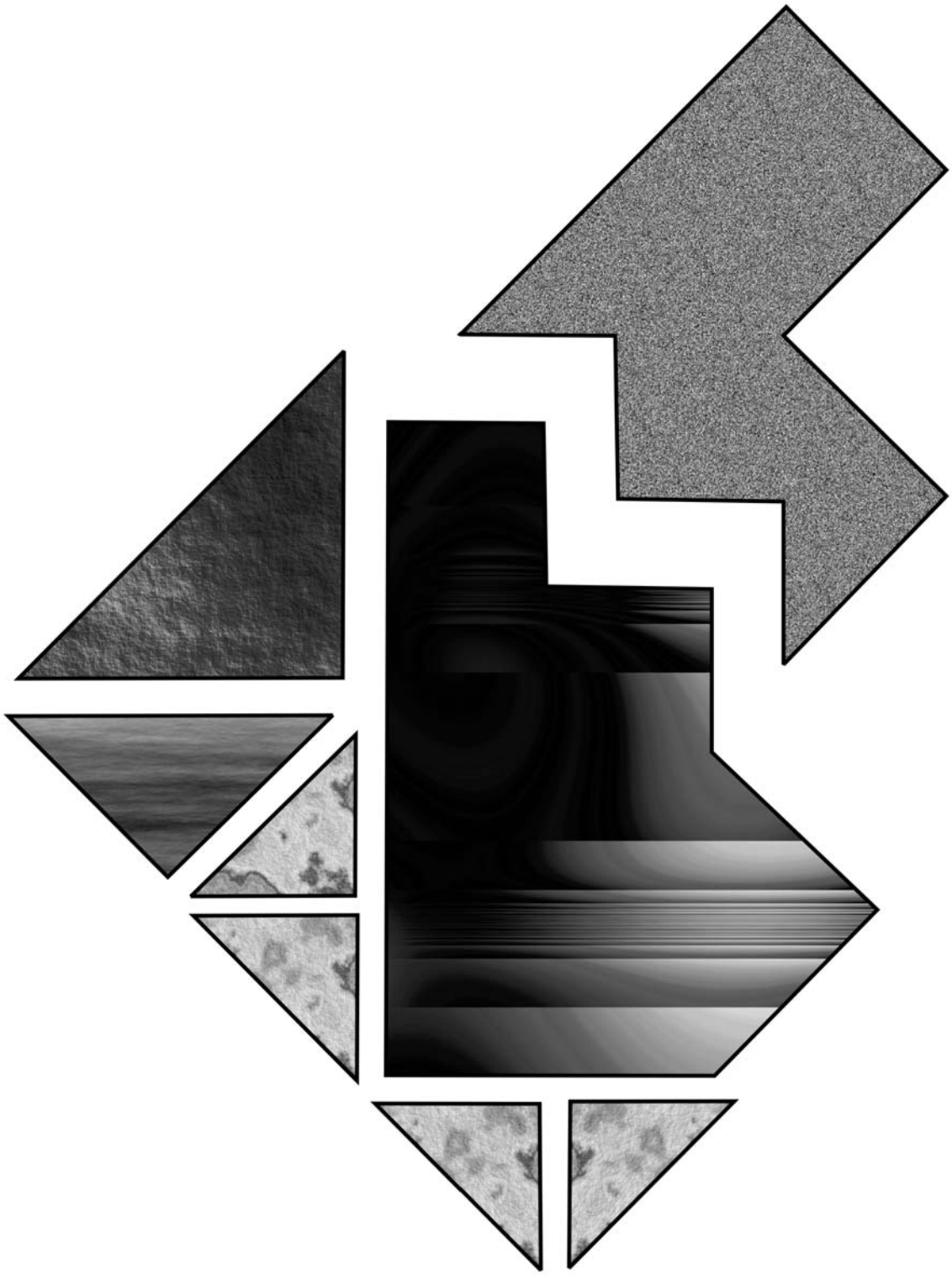
# Instrumentação do Ensino da Geometria

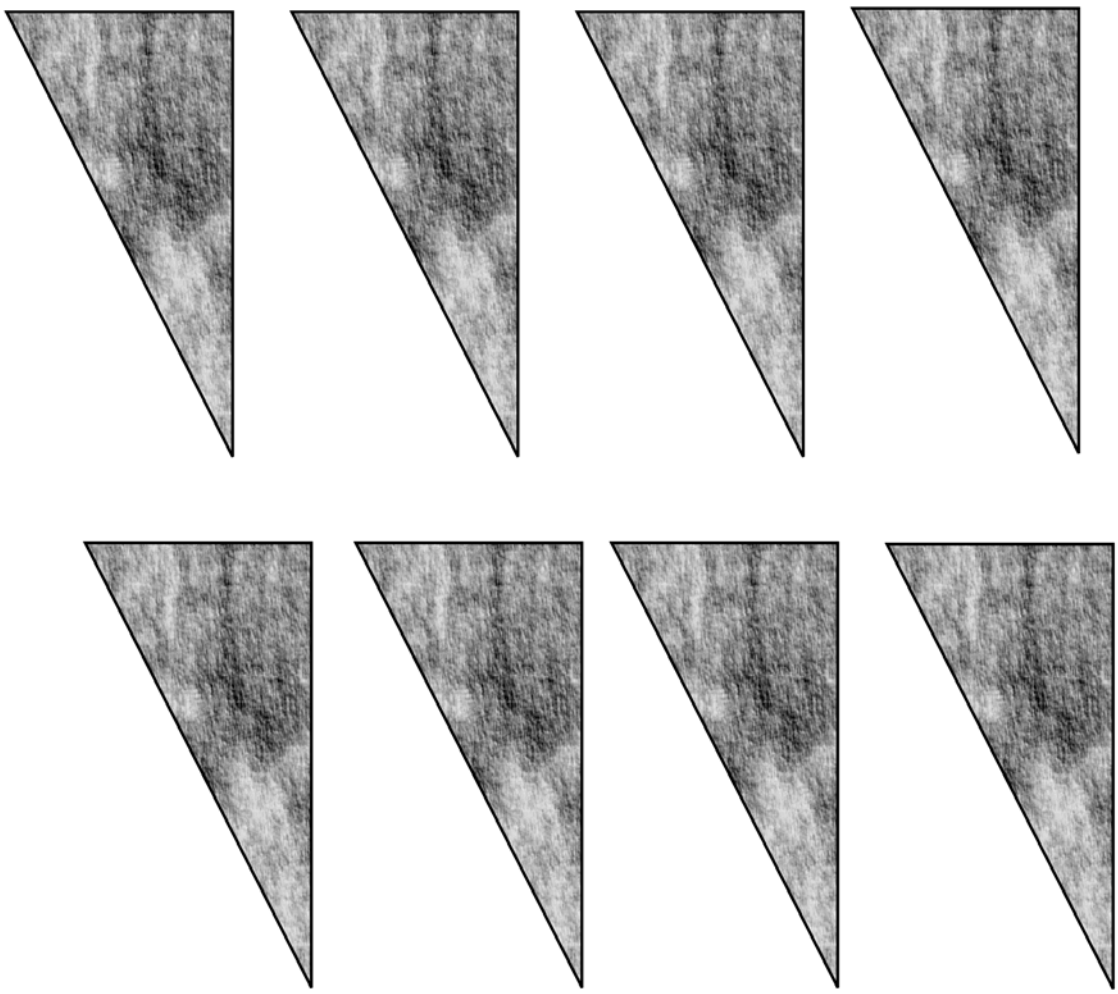
Módulo Prático

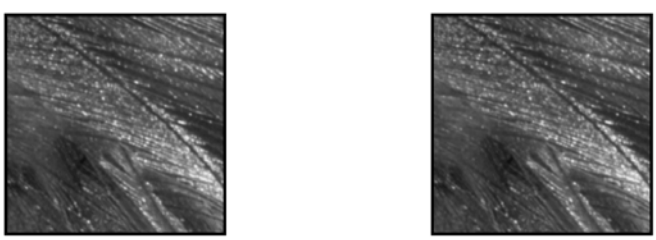


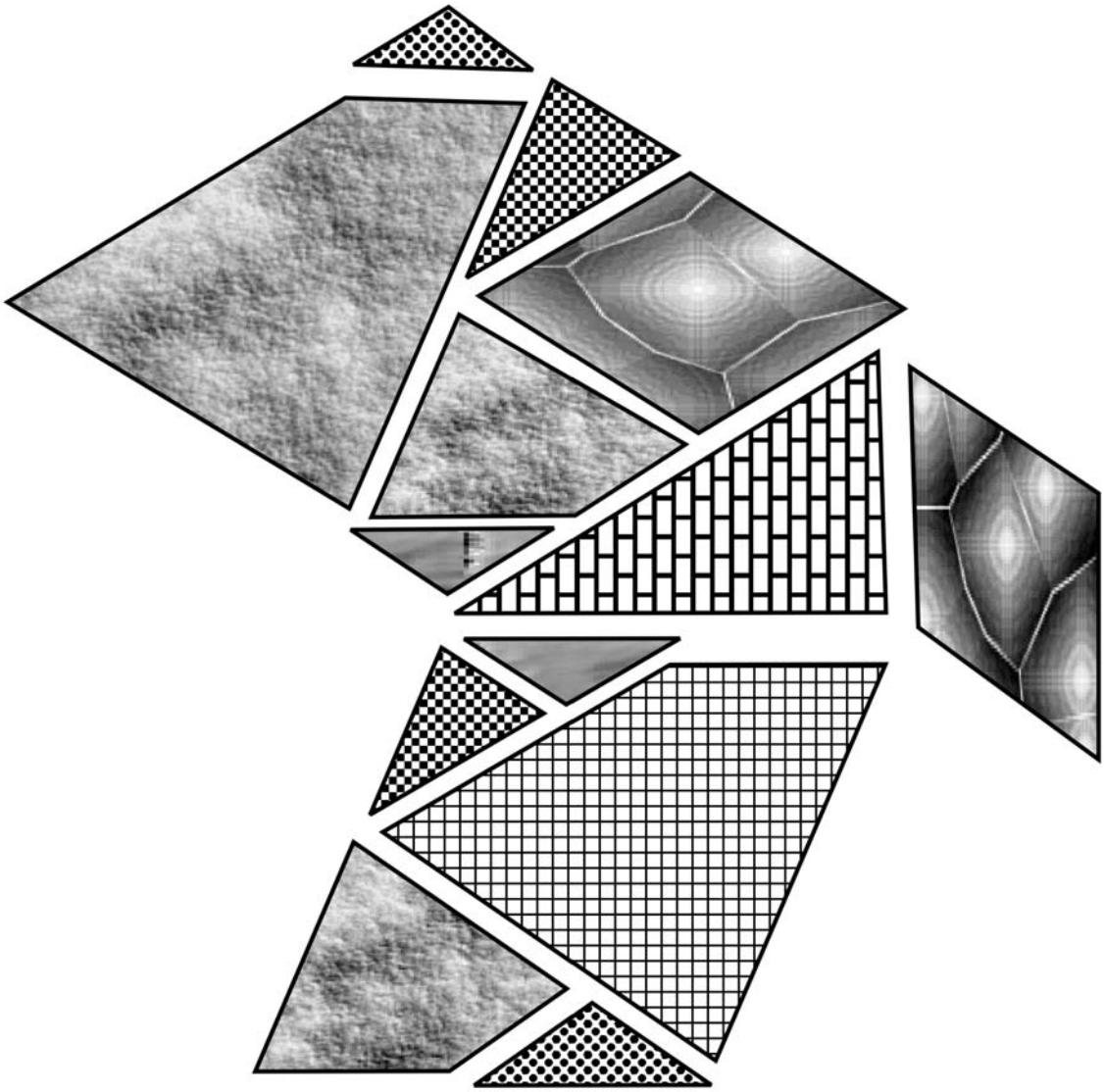


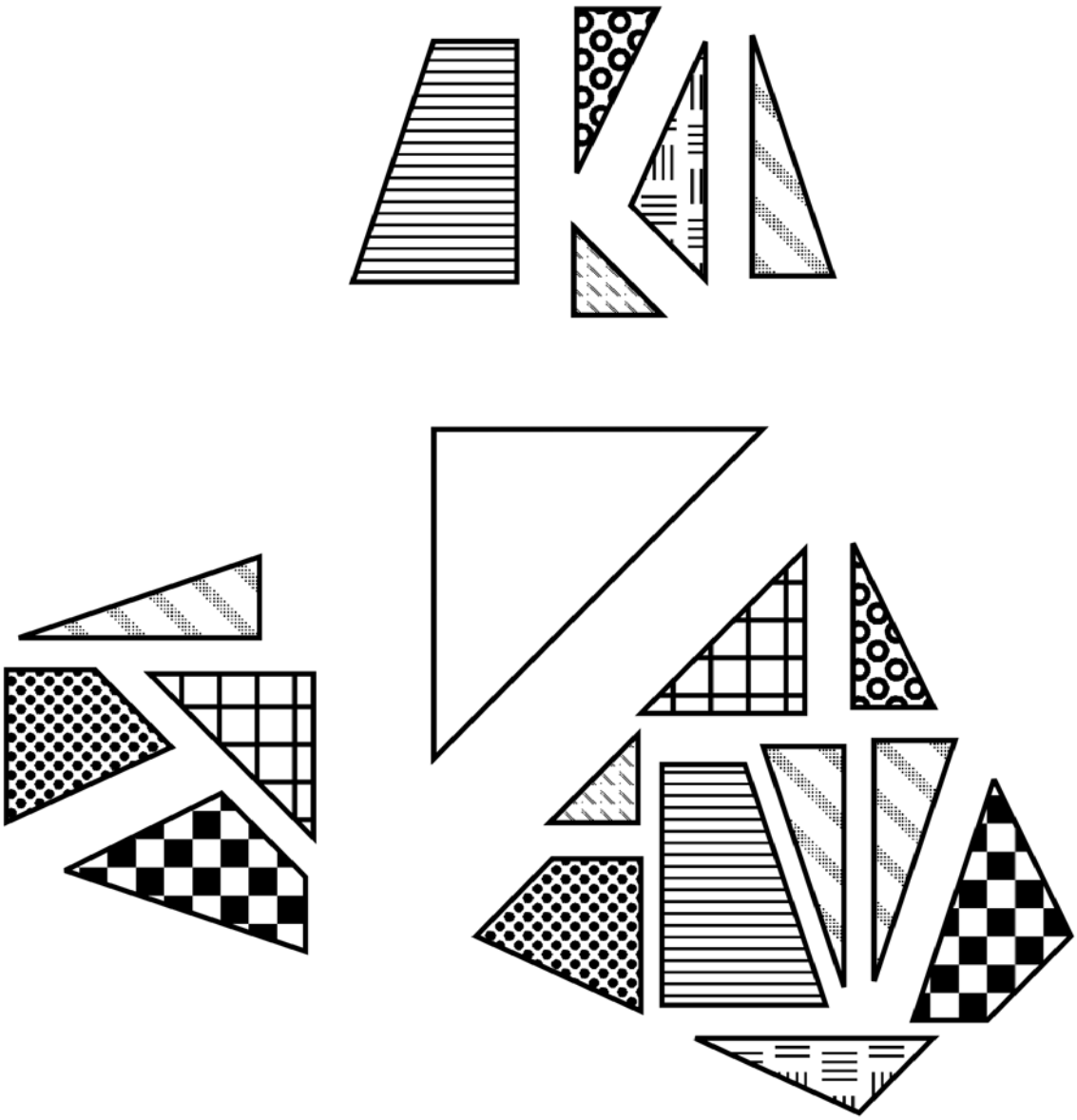


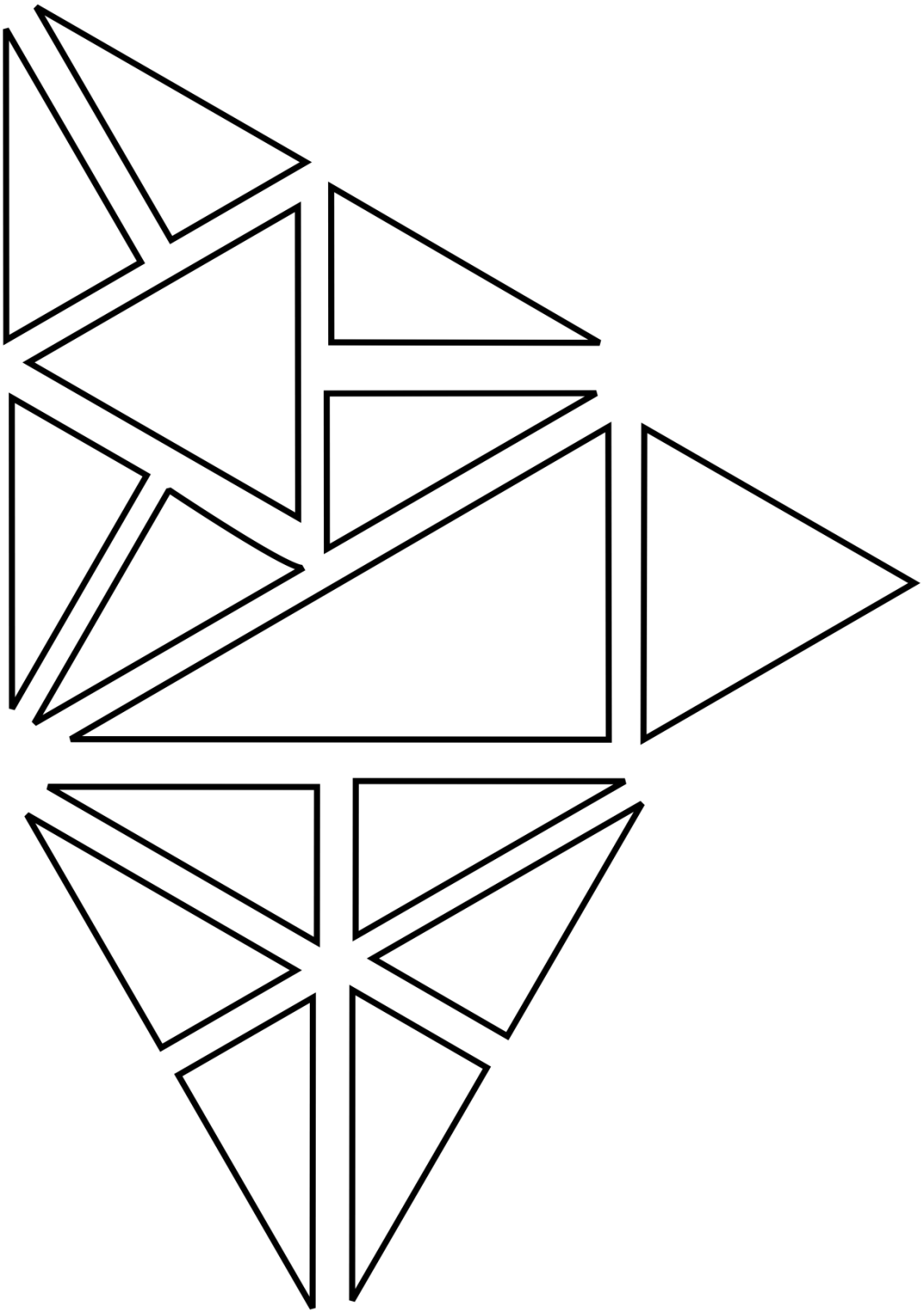


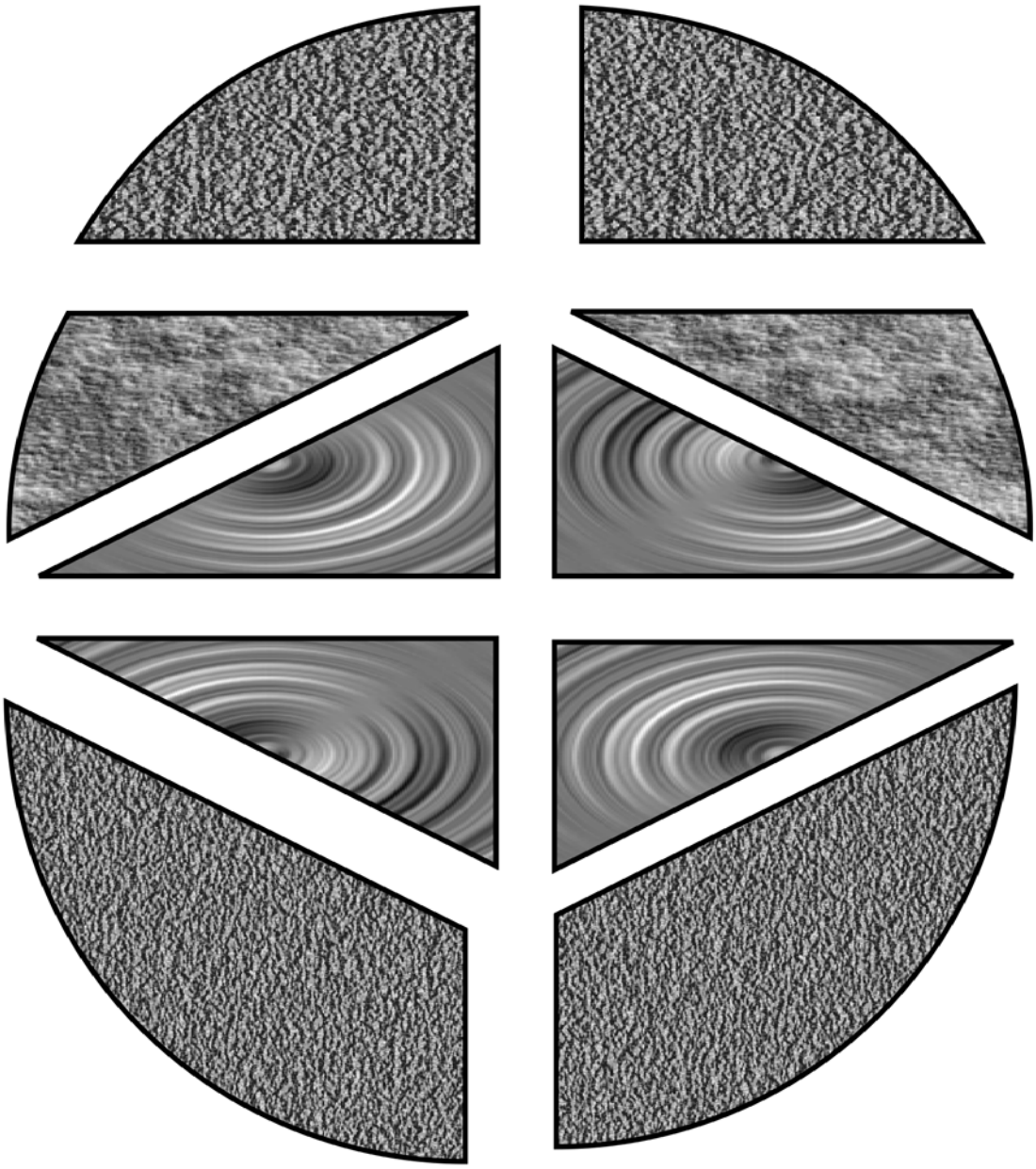


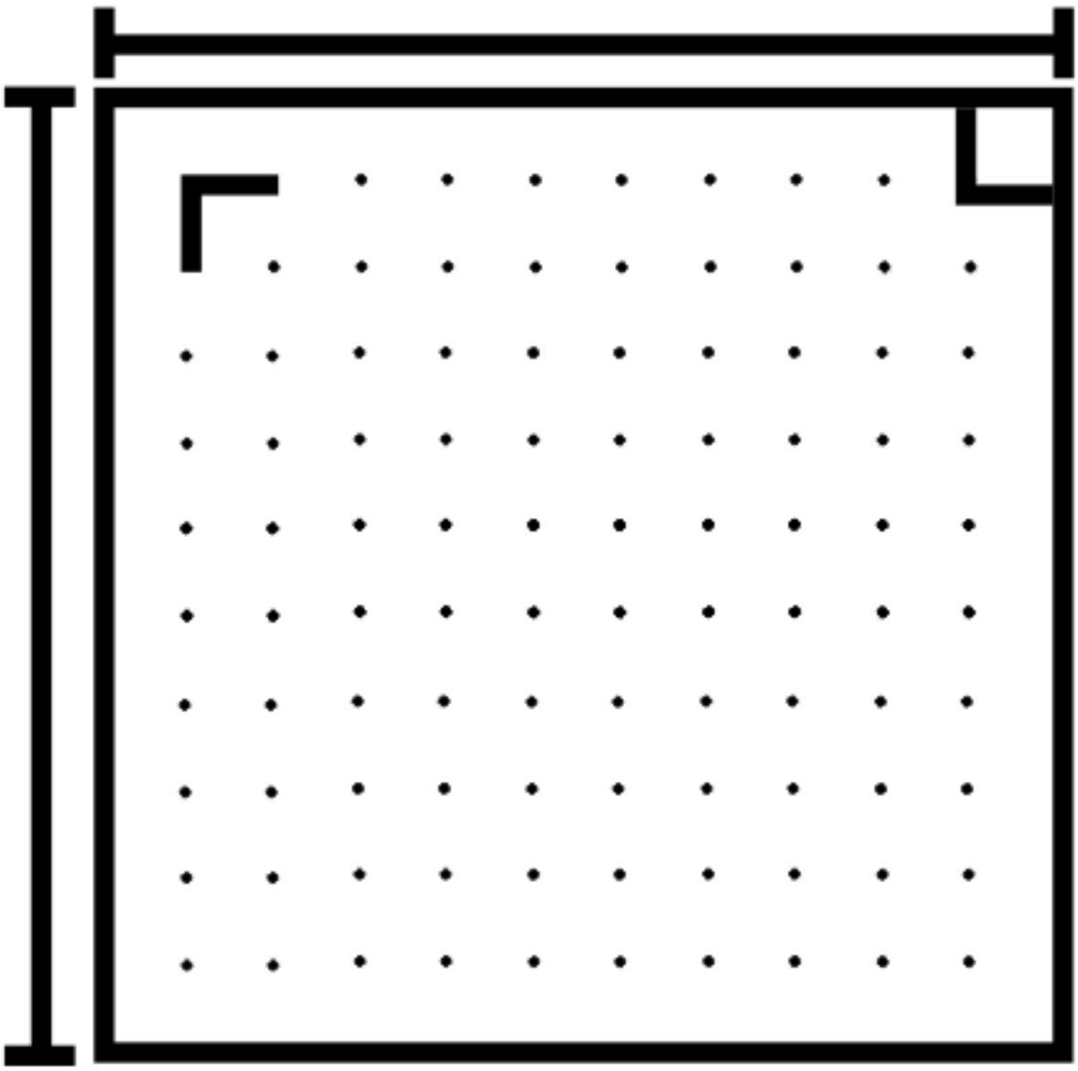


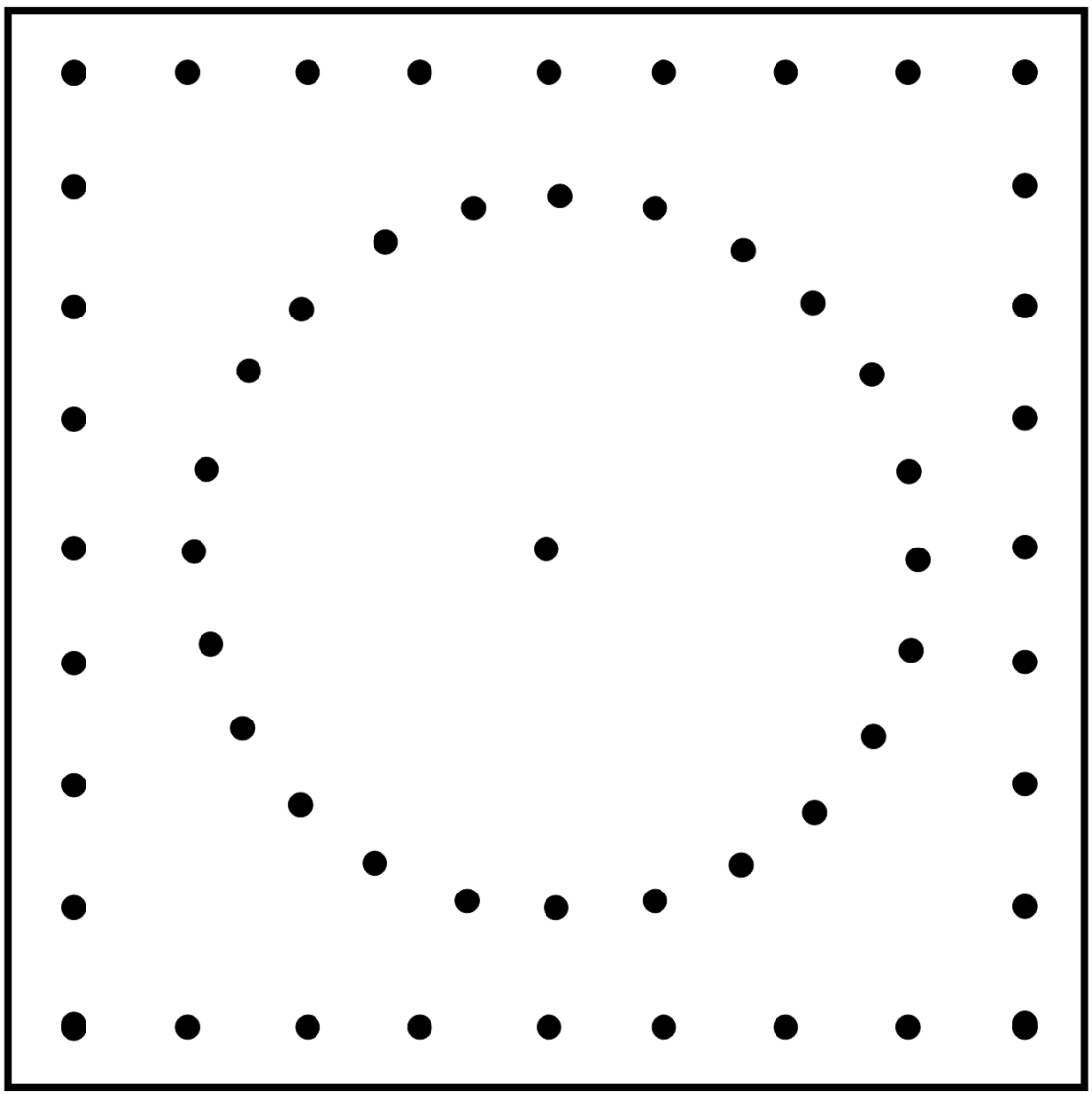


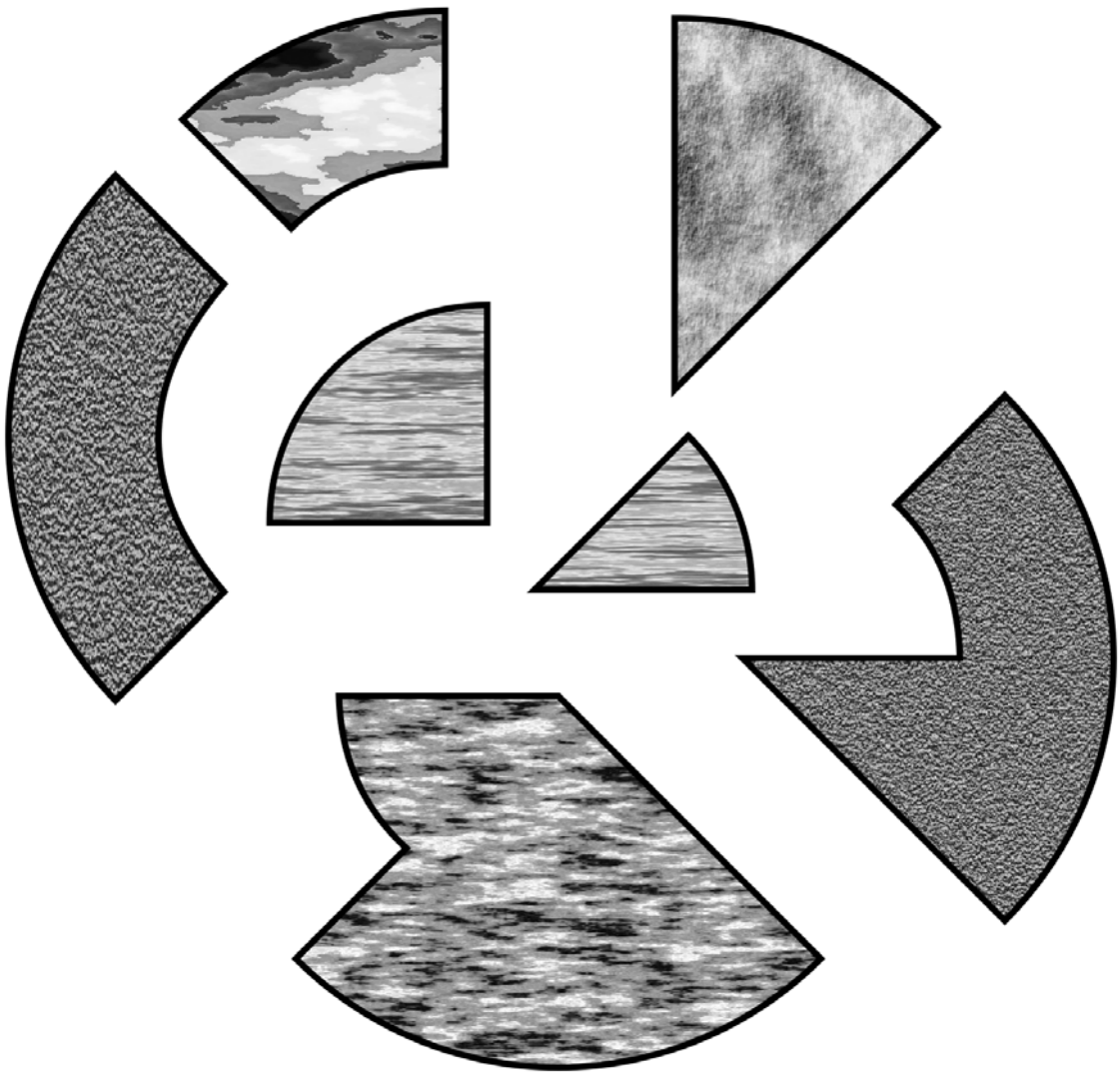


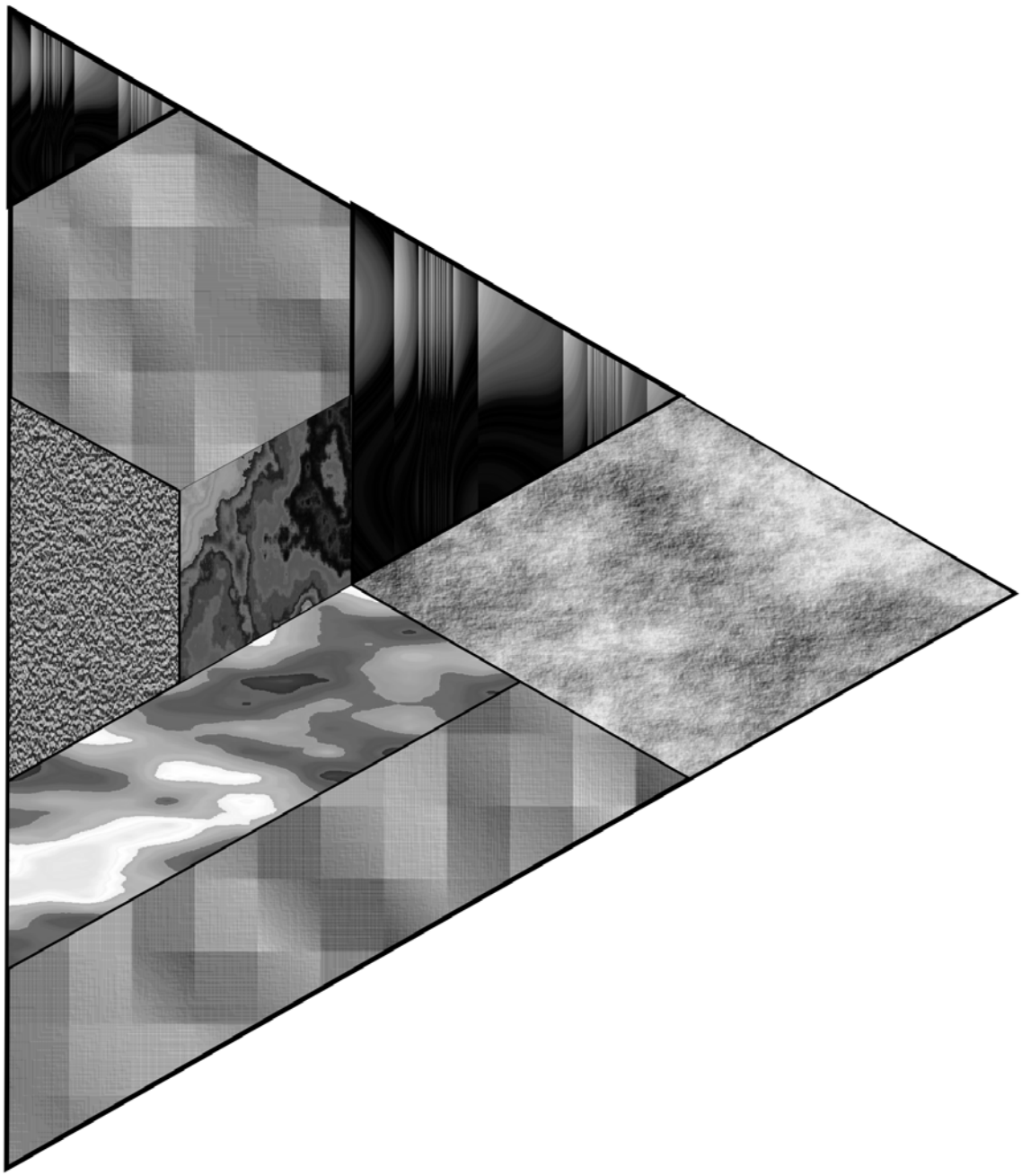


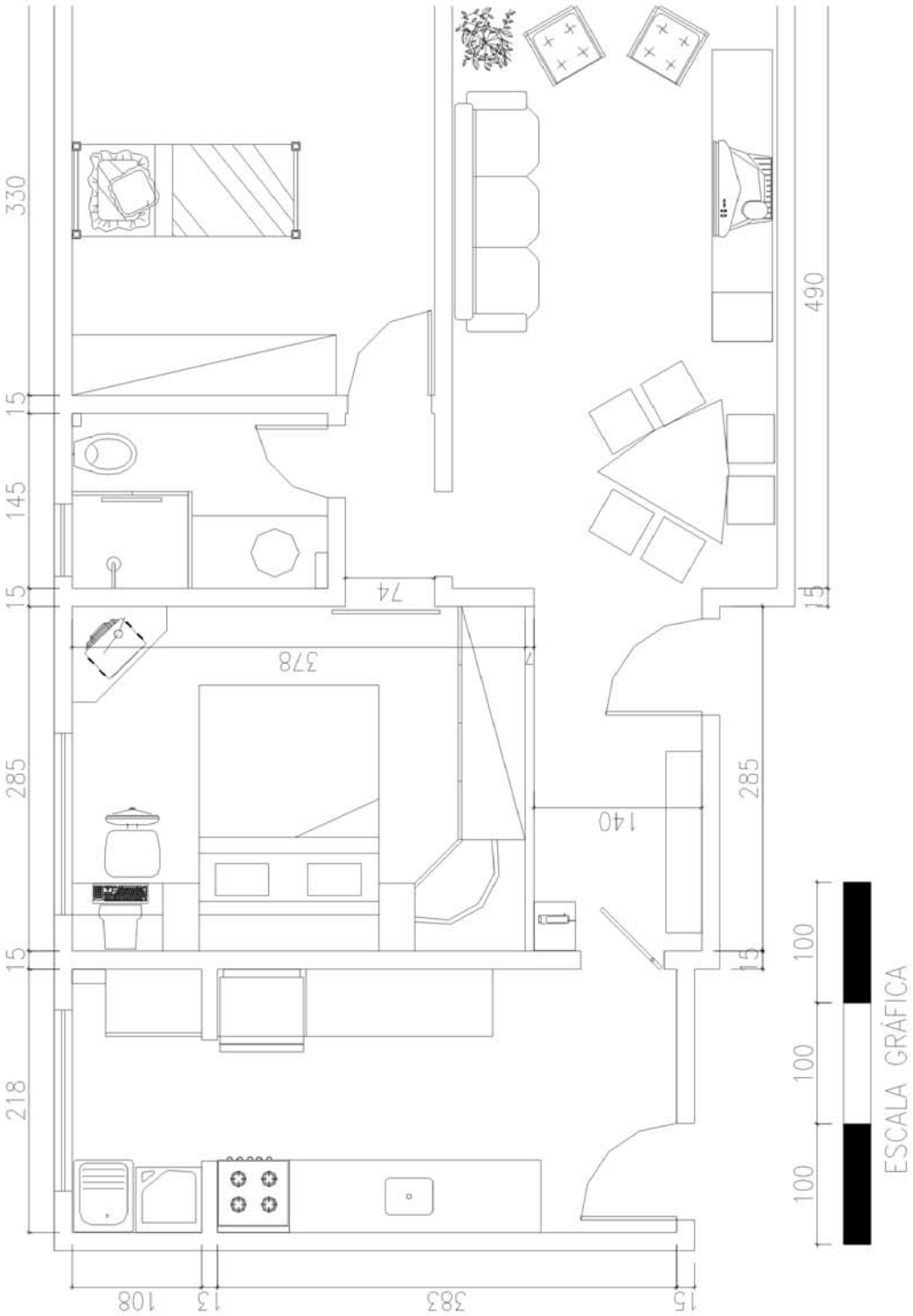


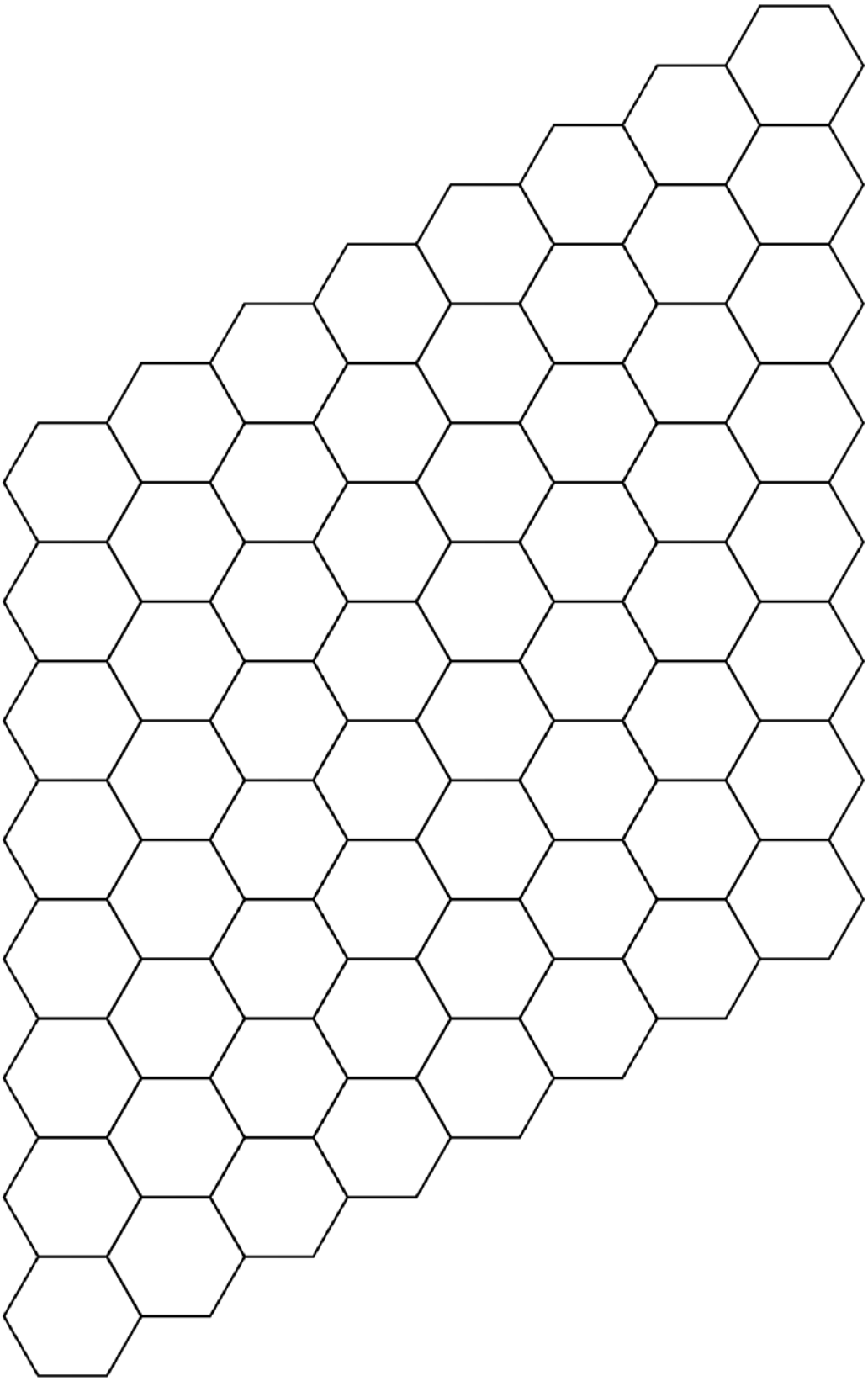


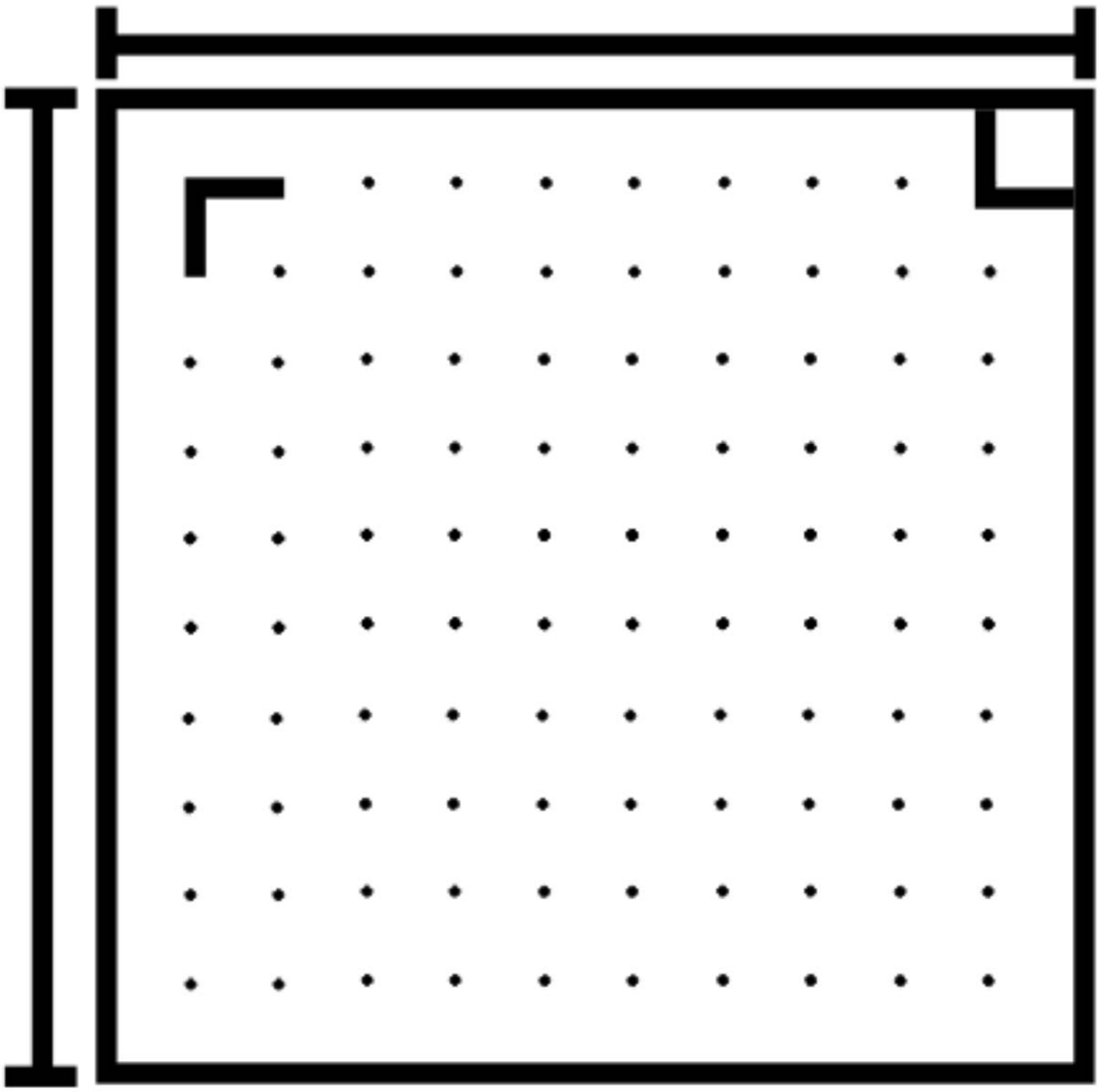


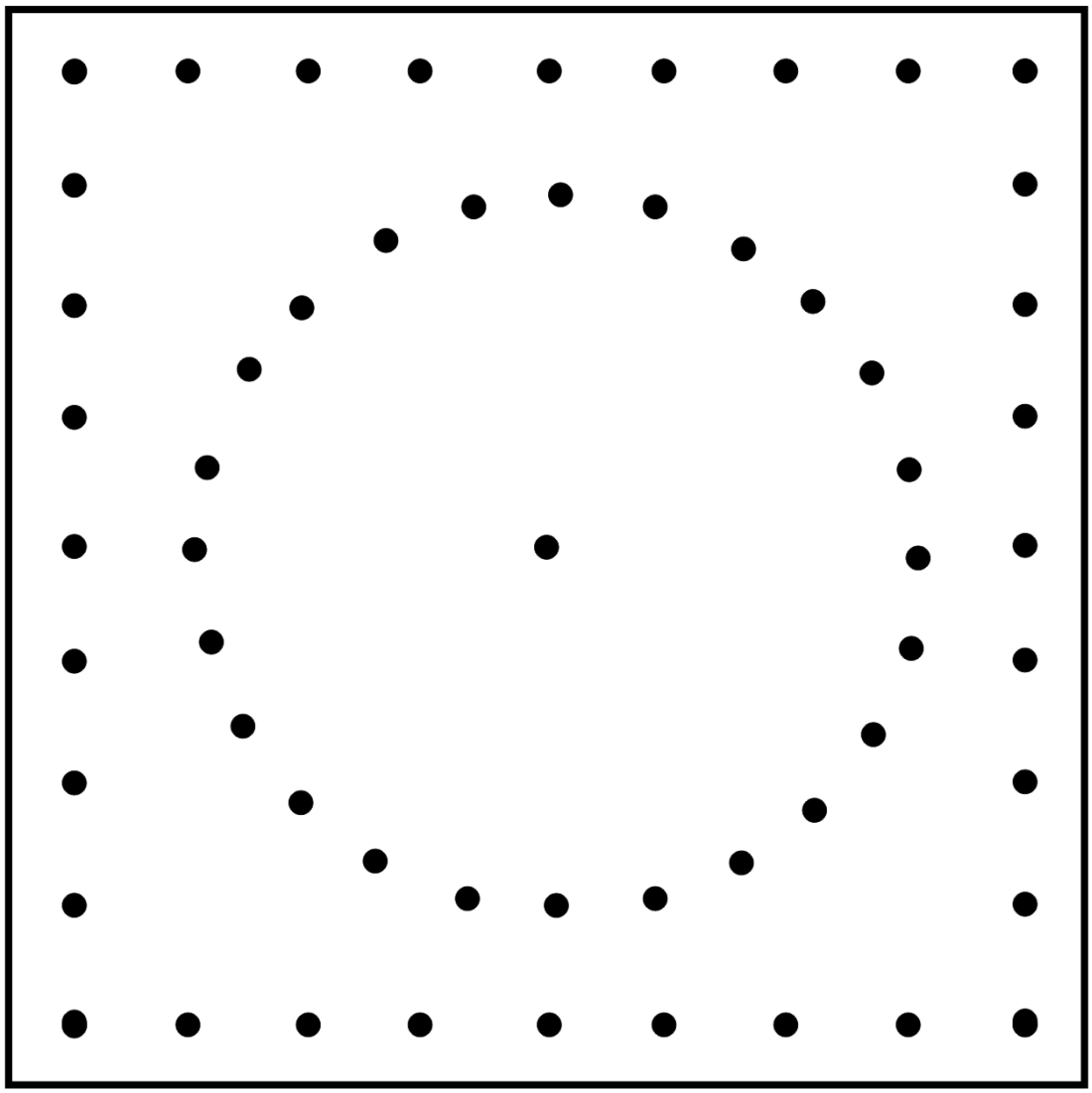





330
15
145
15
285
15
218
108
13
383
15
378
74
140
490
15
285
15
100
100
100
ESCALA GRÁFICA







ISBN 85-7648-231-2
9 788576 482314

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

UERJ
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Universidade Federal Fluminense
uff

Universidade do Brasil

Universidade Federal Rural
do Rio de Janeiro

UNIRIO

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL