Módulo 2

Volume 2
2ª edição

Luiz Manoel Figueiredo
Mário Olivero da Silva
Marisa Ortegoza da Cunha

Matemática Discreta

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Matemática Discreta

Volume 2- Módulo 2
2ª edição

Luiz Manoel Figueiredo
Mário Olivero da Silva
Marisa Ortegoza da Cunha

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Luiz Manoel Figueiredo
Mário Olivero da Silva
Marisa Ortegoza da Cunha

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL
Cristine Costa Barreto

COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM
Maria Angélica Alves

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO
Márcia Elisa Rendeiro
Gláucia Guarany

Departamento de Produção

EDITORA
Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Jane Castellani

REVISÃO TIPOGRÁFICA
Equipe CEDERJ

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO
Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Marcelo Freitas

ILUSTRAÇÃO
Ana Paula Trece Pires
Rafael Monteiro

CAPA
Eduardo de Oliveira Bordoni
Fábio Muniz de Moura

PRODUÇÃO GRÁFICA
Oséias Ferraz
Patricia Seabra

972m

Figueiredo, Luiz Manoel.
Matemática discreta: v. 2. / Luiz Manoel Figueiredo. 2ª ed. - Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.
144p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-88731-06-1

1. Probabilidades 2. Teorema de Bayes. 3. Distribuição binomial. I. Silva, Mário Olivero da. II. Cunha, Marisa Ortegoza da. III. Título.

CDD:510

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

2010/1

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

SUMÁRIO

Módulo 2

Probabilidades

> O Cálculo das Probabilidades, no fundo, não é nada mais
> do que o bom senso reduzido ao cálculo.
> Laplace

Caros alunos, vocês já se deram conta de que estamos o tempo todo fazendo perguntas, como:

Fará sol, amanhã?

Dará praia no final de semana?

O professor adiará a prova?

O meu candidato ganhará as eleições?

Quanto valerá o dólar na próxima sexta-feira?

Estamos freqüentemente formulando questões para as quais não há uma resposta definitiva, pois isso exigiria de nós a capacidade de fazer uma previsão correta. O que podemos fazer, então, numa tentativa de nos aproximarmos do que seria a resposta, é avaliar quais as "chances" de acontecer cada resultado.

Interessante notar que a palavra *chance*, em inglês, significa acaso, probabilidade.

Questões desse tipo são tratadas pela Teoria das Probabilidades, que já foi chamada a "ciência da incerteza". Essa teoria descreve modelos apropriados para a explicação de fenômenos observáveis e tenta quantificar a chance desses fenômenos acontecerem.

"Um modelo é uma versão simplificada de algum problema ou situação da vida real destinado a ilustrar certos aspectos do problema sem levar em conta todos os detalhes (que talvez sejam irrelevantes para o problema)."
William J. Stevensen
Estatística Aplicada à Administração
SP: Harper & Row do Brasil, 1981

As probabilidades auxiliam a desenvolver estratégias e são valiosas na previsão de resultados em diversas áreas do conhecimento, como na meteorologia (previsão de tempo), na economia (cotação de moedas, valores de ações, oscilações de mercado), na política (chances de um candidato numa eleição), na atuária (expectativa de vida, para cálculo de seguros), além de ser a base dos estudos estatísticos.

Neste módulo estudaremos os principais conceitos e veremos algumas aplicações da Teoria das Probabilidades. No cálculo das probabilidades teremos a oportunidade de aplicar os métodos de contagem que você aprendeu no Módulo 1, em Análise Combinatória.

Os autores gostariam de agradecer ao Prof. Antônio dos Santos Machado, pelos valiosos comentários e sugestões quando da leitura dos originais.

Aula 14 – Introdução ao estudo das probabilidades

Objetivos

Nesta aula você identificará dois diferentes tipos de fenômenos e obterá algumas informações sobre a evolução histórica desta área da Matemática.

Experimentos probabilísticos

Considere o seguinte experimento: uma moeda é lançada de uma determinada altura e o tempo necessário para que ela toque o chão é medido. Antes mesmo de realizar a experiência, temos condições de conhecer a resposta, porque existe uma equação da Física que fornece o tempo necessário para um corpo, em queda livre, percorrer uma certa distância.

Experimento: ação que geralmente pode ser repetida e com resultados observáveis.

O tempo que um corpo leva para cair de uma altura h, desprezada a resistência do ar, é $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, onde h é a distância percorrida e g é a aceleração da gravidade no local da realização do experimento.

Um fenômeno desse tipo é chamado de *determinístico*. Um experimento é determinístico quando sua realização tem resultado garantido, determinado por leis físicas ou matemáticas, ou pelas próprias condições nas quais o experimento é executado. Mais rigorosamente, trata-se de um fenômeno que pode <u>ser descrito</u> por um modelo determinístico. Se o experimento é repetido, sob as mesmas condições, produz o mesmo resultado. Tipicamente, um modelo determinístico é uma equação ou conjunto de equações relacionando os elementos presentes no experimento.

Por outro lado, ao abandonar a moeda de uma certa altura e deixá-la cair sobre uma superfície, não podemos afirmar qual face ficará voltada para cima quando ela parar: se cara ou coroa. Sabemos que há somente essas duas possibilidades (descartamos a possibilidade de a moeda cair “em pé”!), mas não temos como garantir qual delas ocorrerá. Experimentos desse tipo são chamados *probabilísticos* ou *aleatórios*. Eles são o objeto de estudo da área da Matemática chamada Teoria das Probabilidades. São fenômenos que podem <u>ser descritos</u> por modelos probabilísticos.

Os experimentos probabilísticos ou aleatórios também são chamados, por alguns autores, de *randômicos*. A palavra *random*, em inglês, significa acaso, destino, e a expressão *at random* siginifica ao acaso, aleatoriamente.

Os experimentos aleatórios não produzem sempre o mesmo resultado, mas têm um comportamento estatisticamente regular, no sentido de que, considerando um número grande de realizações, cada resultado possível ocorre numa freqüência que pode ser avaliada. Assim, se lançarmos uma moeda equilibrada, repetidamente, um grande número de vezes, nossa intuição e nossa experiência nos levam a esperar que a quantidade de vezes de dar "cara" na face de cima será, aproximadamente, igual à de dar "coroa".

Uma moeda é equilibrada quando, ao ser lançada, a chance de dar cara é igual a de dar coroa. Também chamamos moeda "honesta". O mesmo se aplica a um dado. O contrário é um dado "viciado", isto é, aquele que tem uma chance maior de cair em uma certa face do que em outra.

Esses aspectos de regularidade dos experimentos aleatórios, investigados e analisados, permitem a construção de um modelo matemático e a atribuição, a cada resultado possível, de um número que reflita a "chance de ocorrência" desse resultado. Por exemplo, é comum ouvirmos uma frase como "há uma chance de 65% de chover amanhã". Mas, o que isto quer dizer?

Quando nos referimos a algum experimento, devemos explicitar dois componentes: a ação a ser executada e o resultado a ser observado. Explicando melhor: um experimento é uma ação que pode ser repetida e um certo resultado que queremos observar. Por exemplo, o experimento de jogar um dado (ação) e observar a face que cai voltada para cima (resultado).

Observe que dois experimentos diferentes podem consistir da mesma ação, mas com resultados observáveis diferentes. Por exemplo:

- experimento A: lançamos dois dados e observamos a maior das faces que caem para cima;
- experimento B: lançamos dois dados e observamos a soma das faces que caem para cima.

Os experimentos A e B são diferentes, embora a ação tenha sido a mesma (jogar dois dados).

Exemplo 1

Os experimentos abaixo são determinísticos:

1. Comprar uma dezena de canetas, a 5 reais cada, e determinar o custo total.
2. Percorrer 300km, a uma velocidade constante de 80km/h, e medir o tempo gasto.
3. Aquecer a água e observar a que temperatura ela ferve.
4. Resolver a equação $x^2 - 4 = 0$ e anotar as soluções.
5. Medir a resistência elétrica de um condutor, conhecendo a diferença de potencial e a intensidade da corrente elétrica que passa entre dois pontos desse condutor.

Exemplo 2

Os experimentos a seguir são aleatórios:

1. Lançar um dado e observar o número da face de cima.
2. Contar a quantidade de canetas vendidas, em uma loja, em determinado mês.
3. Contar os dias de chuva em determinado período.
4. Jogar duas moedas e anotar o par de resultados.
5. Jogar uma moeda quatro vezes e anotar o número de caras obtido.
6. Jogar uma moeda cinco vezes e observar a seqüência obtida de caras e coroas.
7. Retirar uma carta de um baralho e observar o naipe.
8. Retirar uma carta de um baralho e observar se é ou não figura.
9. Jogar um dado três vezes e anotar o terno de números obtidos.
10. Jogar um dado três vezes e anotar a soma dos números obtidos.
11. Jogar um dado três vezes e anotar quantos números pares ocorrem.
12. Anotar o sexo dos recém-nascidos em uma maternidade, durante um determinado ano.
13. Observar, num conjunto de 1000 famílias com, pelos menos dois filhos, a ocorrência de gêmeos.
14. Em uma linha de produção, fabricar peças em série e contar o número de peças defeituosas produzidas num período de 12 horas.
15. Escolher, ao acaso, uma pessoa em determinado grupo e verificar seu tipo de sangue.
16. Sortear duas pessoas de um grupo de cinco para formarem uma comissão.

Um pouco de História

Jerônimo Cardano (1501-1576) é o autor da primeira obra sobre o estudo das probabilidades de que se tem conhecimento. Trata-se de *Ludo Aleae* (Sobre os Jogos de Azar), publicado em 1663.

Johannes Kepler (1571-1630) fez algumas anotações sobre probabilidades no livro *De Stella nova in pede Serpentarii*, publicado em 1606.

Chevalier De Méré (1607-1684) foi um filósofo e amante das letras, figura destacada da corte de Luís XIV.

O início do estudo das probabilidades está ligado aos jogos de azar. Embora matemáticos como Cardano e Kepler já tivessem se ocupado do estudo das probabilidades, foi a partir de um contato feito entre um rico jogador francês, Chevalier de Méré, e o matemático Blaise Pascal, por volta de 1650, que a moderna Teoria das Probabilidades realmente se desenvolveu.

Em 1654, De Méré, um jogador fanático que sempre buscava criar complicadas regras que lhe permitissem ganhar no jogo de dados, apresentou a Pascal um problema famoso, envolvendo jogos, que ficou conhecido como *O Problema dos Pontos*: *"Um jogo entre dois jogadores igualmente hábeis é interrompido. No momento da interrupção são conhecidos os pontos obtidos por cada jogador e o número necessário de pontos para que cada um ganhe o jogo. Como dividir o prêmio?"*. Esse problema já fora considerado por Cardano e, aproximadamente ao mesmo tempo, por Pacioli e Tartaglia.

Motivado pelo desafio, Pascal escreveu a outro matemático francês, Pierre de Fermat, trocando idéias sobre o problema, e essa correspondência, consistindo de cinco cartas, levou ao desenvolvimento da Teoria das Probabilidades. Além do problema dos pontos, os dois matemáticos consideraram também o chamado Problema do Dado: *Quantas vezes temos que jogar um par de dados para obter um duplo 6?*, já estudado por Cardano.

Interessante que nem Pascal nem Fermat publicaram seus resultados. Em 1657, estimulado pelo trabalho dos dois franceses, o cientista Christian Huygens (1629-1695) publicou o folheto *De ratiociniis em ludo aleae* (Sobre o raciocínio em jogos de dados), primeiro tratado de Teoria de Probabilidades.

Como vemos, a origem do interesse pelas probabilidades está ligada a situações de jogos de azar: os jogadores faziam uso delas para estabelecer estratégias de jogo e de apostas. A partir de 1700, porém, há importantes progressos na aplicação dos estudos de probabilidades em outras áreas.

Freqüência relativa é um conceito muito importante no estudo das probabilidades e será explicado detalhadamente em aulas futuras.

Em 1713, James Bernoulli publicou *Ars conjectandi.* Essa obra estabeleceu a relação entre probabilidade e freqüência relativa de cada resultado de um experimento aleatório, através de um resultado importante, conhecido como Teorema de Bernoulli (ou Lei dos Grandes Números). O teorema afirma que: *Se dois eventos são igualmente prováveis então, após um número grande de realizações do experimento, eles serão obtidos, aproximadamente, o mesmo número de vezes.*

O Teorema de Bernoulli também permite deduzir a probabilidade de cada um dos eventos acontecer, a partir das quantidades de suas ocorrências num número grande de experimentos.

Em 1718, De Moivre publicou a primeira edição de *The doctrine of chances* (Doutrina das probabilidades), sua obra mais célebre. Ali o autor explora a aplicação do cálculo de probabilidades em mais de cinqüenta problemas. Dentre outras questões envolvendo jogos, discute a probabilidade de se tirar bolas de cores diferentes de uma urna.

Abraham De Moivre era um francês protestante que se refugiou na Inglaterra onde viveu até a sua morte. Desenvolveu importantes trabalhos em vários campos.

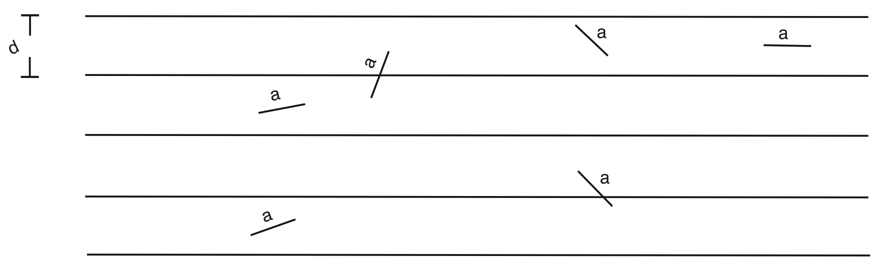
Em 1812, Laplace publicou o tratado *Theorie analitique des probabilités* (Teoria analítica das probabilidades), onde discutiu inúmeros problemas de probabilidade, desenvolveu técnicas para o cálculo de probabilidades e analisou várias aplicações desses cálculos. Laplace é considerado o matemático que mais contribuiu para a Teoria das Probabilidades.

O maior trabalho do matemático francês Laplace (1749-1827) foi uma obra em 5 volumes chamada *Mecânica Celeste*. Seu trabalho em probabilidade surgiu quando usou métodos probabilísticos para interpretar dados científicos em sua obra. Quando Napoleão observou que Deus não era mencionado na *Mecânica Celeste*, Laplace respondeu "eu não tenho necessidade desta hipótese". Na verdade, Laplace estava afirmando que conseguiu provar a estabilidade do sistema solar utilizando apenas a Matemática.

O problema da agulha de Buffon

A Teoria das Probabilidades permite a análise de problemas interessantes e resultados, às vezes,surpreendentes. Destacamos o chamado *problema da agulha de Buffon*: consideremos uma área plana, dividida em linhas retas paralelas, distantes entre si uma distância fixa, d. Uma agulha, de comprimento a, com $a < d$, é abandonada de uma certa altura, ao acaso, sobre essa região. A probabilidade de a agulha cortar uma das retas é $\dfrac{2a}{\pi\, d}$.

Determinações empíricas dessa probabilidade fornecem uma aproximação de π.



George Louis Leclere (1701-1788) foi nomeado Conde de Buffon por Luís XV. O problema da agulha foi apresentado em 1777, num pequeno ensaio sobre probabilidades, chamado Essai d'Arithmétique Morale. Uma variação desse problema possibilitou, cerca de 200 anos mais tarde, o desenvolvimento da tecnologia envolvida na tomografia computadorizada.

No século XX, o desenvolvimento do estudo das probabilidades foi obtido, principalmente, por matemáticos russos, entre eles P.L. Chebyshev (1821-1894), A.A. Markov (1856-1922) e A. N. Kolmogorov (nascido em 1903). Este último, em sua obra *Foundations of the Theory of Probability* (Fundamentos da Teoria da Probabilidade), de 1933, apresentou um tratamento axiomático da Teoria das Probabilidades.

Resumo

Nesta aula apresentamos alguns dados sobre a evolução do estudo das probabilidades e você aprendeu a distinguir fenômenos aleatórios de fenômenos determinísticos.

Exercícios

1. Classificar cada experimento a seguir como determinístico ou aleatório:

   (a) Lançar 3 moedas e anotar o número de caras obtidas.

   (b) Obter um número que, somado a 7, resulte 13.

   (c) Rodar a bolinha de uma roleta e observar o número em que ela para.

   (d) Retirar uma bola de uma urna contendo bolas pretas e brancas e observar a cor.

   (e) Lançar 2 dados e anotar a soma dos números obtidos.

   (f) Retirar uma carta de um baralho e anotar qual é.

   (g) Anotar a cor de uma bola retirada de uma urna contendo apenas bolas vermelhas.

   (h) Dirigir um automóvel a uma velocidade constante de 60km/h e observar o tempo gasto para percorrer 200km.

   (i) Contar o número de crianças que irão morrer em seu primeiro ano de vida durante o próximo ano, na região nordeste do Brasil.

   (j) Observar uma linha de produção, num dado período, e contar o número de peças defeituosas.

2. Dê um exemplo de fenômeno aleatório que seja objeto de interesse ou de estudo de cada área a seguir:

   (a) Economia
   (b) Matemática
   (c) Jogo de dados
   (d) Saúde
   (e) Jogos de cavalos
   (f) Política
   (g) Contabilidade
   (h) Física
   (i) Farmacologia
   (j) Mercado de Capitais

3. Em cada caso abaixo é descrita uma ação. Enuncie algo a ser observado, associado a cada ação, de modo a caracterizar um fenômeno aleatório:

   (a) Lançar um dado três vezes.
   (b) Retirar, sem reposição, duas cartas de um baralho de 52 cartas.
   (c) Retirar, com reposição, duas bolas de uma urna contendo bolas brancas e bolas vermelhas.
   (d) Consultar 50 famílias, consistindo de pai, mãe e dois filhos não-gêmeos.

Aula 15 – Experimentos e espaço amostral

Objetivos

Nesta aula você identificará os componentes de um experimento aleatório e identificará seu espaço amostral.

Pré-requisitos: aula 14.

Introdução

Como vimos na aula 14, experimentos aleatórios são aqueles que, mesmo quando realizados em idênticas condições, podem apresentar variações nos seus resultados. Queremos formular uma teoria matemática que descreva o experimento estudado. O primeiro passo no desenvolvimento de uma teoria matemática é construir um modelo matemático. Esse modelo será usado para predizer os resultados do experimento. Nesta aula definiremos os elementos iniciais, necessários para a construção do nosso modelo probabilístico.

O conjunto formado pelos resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de *espaço amostral*. Vamos representá-lo por Ω.

Ω (ômega) é a última letra do alfabeto grego. Os símbolos ω e Ω representam o ômega minúsculo e maiúsculo, respectivamente.

Exemplo 3

Consideremos o experimento de lançar um dado e observar o número da face de cima. Sabemos que os únicos resultados possíveis são 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Para este experimento temos, então, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exemplo 4

Vamos supor, agora, que jogamos uma moeda e observamos a face de cima. Podemos indicar o espaço amostral desse experimento por $\Omega = \{K, C\}$, onde K indica cara e C indica coroa.

Exemplo 5

Para o experimento "lançar uma moeda duas vezes e anotar o par de faces de cima" temos o seguinte espaço amostral: $\Omega = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$.

Lembre-se de que, para identificar o espaço amostral de um certo experimento, devemos levar em conta as duas atividades que o caracterizam:

– a operação realizada, e

- o que queremos observar.

Compare os dois exemplos a seguir.

Exemplo 6

Seja o experimento "lançar uma moeda quatro vezes e anotar a seqüência de faces observadas". O espaço amostral Ω é formado por todas as possíveis quádruplas de resultados:

$$\Omega = \{(K,K,K,K),(K,K,K,C),\ ...,\ (K,C,C,C),(C,C,C,C)\}\ .$$

Neste caso, $\#\Omega = 2^4 = 16$, isto é, existem 16 resultados possíveis.

Estamos usando o Princípio Multiplicativo, que estudamos na aula 6.

$\#\Omega$ lê-se *cardinalidade* de Ω. O símbolo #, precedendo o nome de um conjunto, indica a cardinalidade (número de elementos) desse conjunto.

Exemplo 7

Considere o experimento "lançar uma moeda quatro vezes e anotar o número de caras obtido". Neste caso, o espaço amostral é $\Omega = \{0,1,2,3,4\}$ e $\#\Omega = 5$.

Os exemplos 6 e 7 consistem em experimentos com a mesma ação, mas com a observação de resultados distintos.

Exemplo 8

Consideremos o experimento que consiste em lançar dois dados e anotar o par de números resultantes. Para identificar seu espaço amostral, podemos pensar que o primeiro dado é rosa e que o segundo dado é branco. Teremos, então diferentes resultados se forem observados 2-branco seguido de 3-rosa ou 3-branco seguido de 2-rosa. O diagrama abaixo fornece uma representação gráfica dos elementos de Ω:

branco → rosa ↓	1	2	3	4	5	6	
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	resultados possíveis
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(elementos de Ω)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	

Por exemplo, o par $(5, 2)$ é a situação da figura a seguir.

Sendo assim, os possíveis resultados são todos os pares ordenados (i, j), com $i = 1, \ldots, 6$ e $j = 1, ..., 6$. Podemos dizer que

$$\Omega = \{(i, j) \mid i = 1, \ldots, 6,\ j = 1, \ldots, 6\}\ .$$

Exercícios

1. Dê o espaço amostral de cada um dos experimentos a seguir:

   (a) Lançar duas moedas e anotar o par de faces de cima.

   (b) Lançar duas moedas e anotar o número de "caras".

   (c) Lançar duas moedas e anotar se os resultados são iguais ou diferentes.

   (d) Jogar um dado duas vezes e anotar a seqüência de números observados.

   (e) Jogar um dado duas vezes e anotar a soma dos números obtidos.

   (f) Jogar um dado duas vezes e anotar o produto dos números obtidos.

   (g) Jogar um dado duas vezes e anotar o número de ocorrências de números primos.

   (h) Selecionar, ao acaso, 3 lâmpadas a partir de um lote e observar se cada uma é defeituosa (d) ou perfeita (p).

   (i) Anotar se um cliente, ao fazer um pedido numa lanchonete, escolhe sanduíche (s), batatas fritas (b), os dois (d) ou nenhum dos dois (n).

   (j) Perguntar a fregueses num supermercado se gostam (s) ou não (n) de um certo produto e registrar suas respostas.

Um número natural é primo quanto é diferente de 1 e só é divisível por 1 e por ele mesmo.

Espaço Amostral

O espaço amostral representa, na Teoria das Probabilidades, o mesmo papel que o conjunto universo representa na Teoria dos Conjuntos. Importante ressaltar que estudaremos, apenas, experimentos cujos espaços amostrais são finitos.

Conjunto Universo foi estudado na aula 3.

Um exemplo de experimento aleatório cujo espaço amostral é infinito é a ação de escolher uma pessoa ao acaso, numa multidão, e medir sua altura. Podemos tentar limitar os valores possíveis, digamos, entre 0,30 e 3 metros, mas, de qualquer forma, ainda teríamos uma quantidade infinita de valores possíveis. A altura pode ser qualquer número real dentro de um certo intervalo.

Quando considerarmos um experimento composto de mais de uma ação, por exemplo,

– lançar um dado duas vezes e anotar o par resultante;

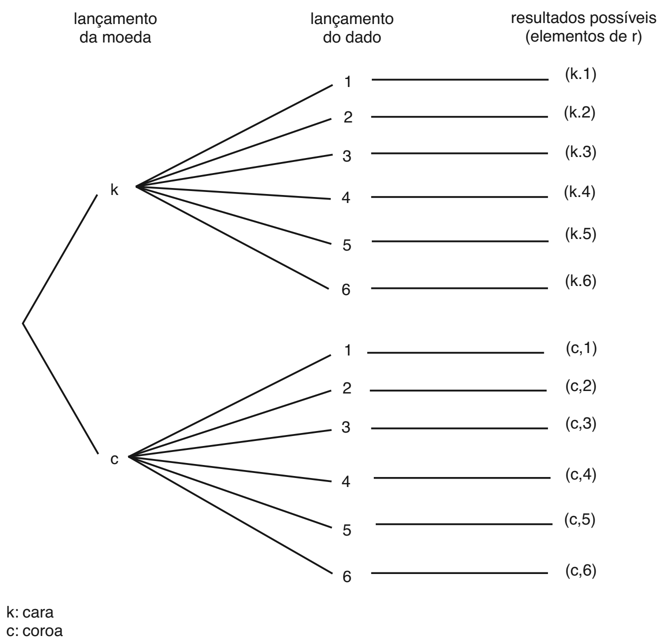
– lançar um dado seguido de uma moeda e anotar o par obtido;

– retirar duas cartas de um baralho de 52 cartas e observar os naipes etc.,

o Princípio Multiplicativo será muito útil no cálculo do número de elementos do espaço amostral. Às vezes não é necessário descrever o espaço amostral, sendo suficiente, para o cálculo das probabilidades, conhecer sua cardinalidade, isto é, qual o número de elementos de Ω.

Exemplo 9

Consideremos o experimento "lançar uma moeda e um dado e anotar o par de resultados". Sabemos que para o lançamento da moeda há dois resultados possíveis: cara e coroa. Para o dado, são seis as possibilidades: 1,2,3,4,5,6. Pelo Princípio Multiplicativo, temos um total de $2 \times 6 = 12$ elementos em Ω.



Exemplo 10

Quantos são os resultados possíveis na loteria esportiva?

Solução:

A loteria esportiva é composta de 13 jogos. Para cada jogo, é claro, são possíveis três resultados, que se traduzem em "coluna da esquerda", "coluna do meio"e "coluna da direita". Logo, $\#\Omega = \underbrace{3 \times ... \times 3}_{13\ termos} = 3^{13}$.

Exemplo 11

O lançamento de três dados possui $6 \times 6 \times 6 = 216$ resultados possíveis.

Retirada com e sem reposição

Quando realizamos um experimento em que retiramos algo mais de uma vez, devemos sempre observar se o objeto retirado é ou não reposto antes da próxima retirada. Uma retirada com reposição é um experimento diferente de uma retirada sem reposição.

O próximo exemplo mostra a diferença que pode ocorrer quando uma retirada é feita *com* ou *sem* reposição.

Exemplo 12

Em uma urna há 4 bolas numeradas de 1 a 4. Duas bolas são retiradas, uma em seguida à outra, e seus números são anotados. Dê o espaço amostral em cada caso:

1. as bolas são retiradas sem reposição;
2. a primeira bola é devolvida à urna antes de se retirar a segunda bola.

Solução:

1. Neste caso, temos
   $\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$
   e então $\#\Omega = 12$.
2. Como a primeira bola é devolvida, nas duas retiradas a urna contém o total inicial de bolas. Logo, neste caso,
   $$\Omega = \{(i,j) \mid i = 1,2,3,4 \text{ e } j = 1,2,3,4\} \text{ e } \#\Omega = 16\ .$$

Exercícios

2. Dê o espaço amostral e sua cardinalidade, para cada um dos experimentos abaixo.

   (a) Retirar uma bola de uma urna que contém bolas brancas e pretas e verificar sua cor.

   (b) Jogar um dado duas vezes e anotar a seqüência de números obtidos.

   (c) Jogar um dado três vezes e anotar a quantidade de números pares obtidos.

   (d) Jogar um dado duas vezes e anotar o produto dos números observados.

   (e) Em um lote de 10 lâmpadas sabe-se que 4 são defeituosas. As lâmpadas são testadas, uma a uma, até que todas as defeituosas sejam encontradas. Contar o número total de lâmpadas testadas.

   (f) Num conjunto de famílias com 3 filhos, descrever as possíveis seqüências dos sexos dos filhos.

   (g) De um grupo de 5 pessoas (A,B,C,D,E), sorteiam-se duas, uma após a outra, sem reposição. É anotado o par obtido.

3. Determine o número de resultados em cada um dos seguintes experimentos:

   (a) Um dado verde e um dado vermelho são lançados e é anotado o par de números obtidos.

   (b) Um dado verde e um dado vermelho são lançados e é anotada a soma dos números que aparecem.

   (c) São feitos exames de sangue numa escola. O tipo de sangue (A, B, AB ou O) e a presença ou ausência do fator Rh (Rh^+ ou Rh^-) de cada aluno são anotados.

   (d) São lançadas três moedas e é anotada a seqüência obtida de caras e coroas.

Os tipos de sangue que formam o grupo ABO foram descobertos em 1901 por Karl Landsteiner. São 4 tipos: A, B AB e O, determinados, primordialmente, por dois antígenos e dois anticorpos. A combinação desses 4 componentes determina o tipo individual de sangue: a presença do antígeno implica a ausência do anticorpo correspondente. O tipo A possui antígeno A e não possui o B. O Tipo B, o inverso disso. O tipo O não possui antígenos e o tipo AB possui os dois.

Freqüência relativa de um resultado

Como vimos anteriormente, a Teoria das Probabilidades se baseia nos aspectos de regularidade dos experimentos aleatórios. Vamos caracterizar melhor esses aspectos mencionados e responder a pergunta que fizemos na aula anterior: qual o significado de uma frase como "temos uma chance de 30% de ganhar um jogo"?

Se um experimento aleatório é repetido uma certa quantidade de vezes, a **freqüência relativa** de um certo resultado do experimento é a razão entre o número (m) de vezes que este resultado foi obtido e o número (n) de realizações do experimento.

Exemplo 13

Suponhamos que o experimento "lançar uma moeda equilibrada e observar a face de cima"foi realizado n vezes. A tabela abaixo mostra o número de ocorrências do resultado "cara"(m) e a freqüência relativa de caras (m/n).

número de lançamentos (n)	número de caras (m)	freqüência relativa de caras (m/n)
10	6	$0,6000$
100	46	$0,4600$
1.000	524	$0,5240$
10.000	5.100	$0,5100$
20.000	10.026	$0,5013$
50.000	25.025	$0,5005$

Conforme o número de lançamentos vai aumentando, a freqüência relativa vai se aproximando de $0,5 (= \frac{1}{2})$. Como o lançamento de uma moeda possui apenas dois resultados possíveis, sendo a moeda equilibrada, o valor $\frac{1}{2}$ para o resultado "cara"atende à expectativa do observador.

De uma forma mais geral, consideremos que um experimento é repetido, em condições idênticas, um número arbitrariamente grande de vezes. Suponha que, em n realizações desse experimento, um certo resultado E é observado m vezes. A fração m/n é a *freqüência relativa do resultado E após n repetições do experimento.*

Resumo

Nesta aula vimos que todo fenômeno aleatório tem um espaço amostral associado, que é o conjunto de resultados possíveis do experimento realizado. Aprendemos a identificar o espaço amostral de fenômenos aleatórios dados.

Vimos também que, quando realizamos um experimento aleatório um grande número de vezes, podemos definir a freqüência relativa de um resultado como sendo a razão entre o número de ocorrências desse resultado e o número de vezes que repetimos o experimento.

O conceito de freqüência relativa é importante para definirmos probabilidade, mas veja que trata-se de um conceito empírico. Não esperamos que você realize um experimento (digamos, jogar um dado e anotar a face de cima) mil vezes ou mais, para concluir algo sobre a freqüência relativa de um resultado. Mesmo assim, o nosso "senso comum", a experiência adquirida na observação do mundo e da natureza, nos permitem afirmar algo a respeito do que podemos esperar.

Exercícios

4. Jogue uma moeda 50 vezes e anote o número de ocorrências de "coroa". Calcule a freqüência relativa de coroa e a de cara.

5. A tabela abaixo indica as observações realizadas em 500 lançamentos de um dado:

face:	1	2	3	4	5	6
número de ocorrências	75	82	78	92	85	88

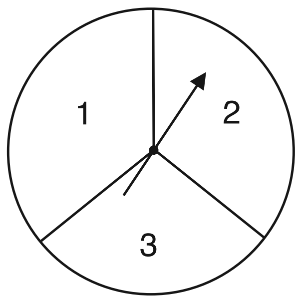
   Calcule a freqüência relativa de cada resultado possível nesse total de lançamentos.

6. Um dado é lançado repetidamente e os resultados observados estão listados na tabela abaixo:

face:	1	2	3	4	5	6
número de ocorrências	142	175	190	173	162	158

   Determine a freqüência relativa de cada resultado ao final desses lançamentos.

7. Um anel circular é dividido em setores iguais, numerados, como indica a figura abaixo. No seu centro está preso um ponteiro. Fazemos o ponteiro girar 500 vezes e anotamos, em cada tentativa, o número do setor para o qual o ponteiro aponta quando pára.



A tabela abaixo mostra a quantidade de vezes que cada setor foi assinalado pelo ponteiro. Calcule a freqüência relativa de cada resultado.

setor:	1	2	3
número de ocorrências	172	181	147

Auto-avaliação

Você não deve ter encontrado dificuldades para resolver os exercícios propostos nesta aula. De qualquer maneira, se você teve dúvidas em algum deles, releia a teoria, com calma, e tente novamente. Alguns experimentos descritos nos exercícios fazem parte do nosso dia-a-dia. Se a dúvida persistir, entre em contato com os tutores da disciplina.

Aula 16 – Eventos

Objetivos

Nesta aula você aprenderá a descrever os diversos eventos associados a um experimento aleatório.

Pré-requisitos: aulas 2, 3, 4, 5, 14 e 15.

Introdução

Na aula anterior, vimos que, em um mesmo experimento, podemos estar interessados em diferentes resultados (como nos exemplos 6 e 7 da aula 15). Nesta aula vamos caracterizar o conjunto de todos os possíveis alvos de nossa observação na realização de um experimento aleatório.

Consideremos o experimento "lançar um dado e anotar o resultado". Como vimos na Aula 14, o espaço amostral desse experimento é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Se você apostar na ocorrência de um número par, terá sucesso caso o resultado seja:

– o número 2, ou

– o número 4, ou

– o número 6,

isto é, se ocorrer qualquer resultado do conjunto

$$A = \{2, 4, 6\}$$

A é um subconjunto do espaço amostral Ω. Por isso, dizemos que A é um *evento* associado a esse experimento.

Um evento é qualquer subconjunto do espaço amostral.

Após realizado o experimento, dizemos que *ocorreu um evento* E se o resultado observado for um elemento de E.

Vimos nas aulas 4 e 5 que um conjunto de n elementos possui 2^n subconjuntos. Logo, um experimento cujo espaço amostral possua cardinalidade n admite 2^n eventos distintos.

O conjunto vazio denomina-se *evento impossível*. É um evento que nunca ocorre, o evento $E = \emptyset$.

O conjunto Ω denomina-se *evento certo*. É um evento que sempre ocorre, o evento $E = \Omega$.

Os subconjuntos unitários chamam-se *eventos elementares* (ou *simples*). Eventos com mais de um elemento são compostos de eventos elementares, por isso também são chamados de *eventos compostos*.

Exemplo 14

Consideremos que uma moeda é lançada duas vezes e o par de resultados é anotado. Representando por K e C os resultados "cara"e "coroa", respectivamente, sabemos que $\Omega = \{(K,K),(K,C),(C,K),(C,C)\}$. Como $\#\Omega = 4$, há $2^4 = 16$ eventos associados a Ω, que listamos abaixo, com uma possível interpretação para cada um:

$\emptyset$	obter 3 caras (ou qualquer outro resultado impossível)
$\{(K,K)\}$	obter 2 caras
$\{(K,C)\}$	obter cara no $1^{o.}$ lançamento e coroa no $2^{o.}$
$\{(C,K)\}$	obter coroa no $1^{o.}$ lançamento e cara no $2^{o.}$
$\{(C,C)\}$	obter 2 coroas
$\{(K,K),(K,C)\}$	obter cara no $1^{o.}$ lançamento
$\{(K,K),(C,K)\}$	obter cara no $2^{o.}$ lançamento
$\{(K,K),(C,C)\}$	obter resultados iguais
$\{(K,C),(C,K)\}$	obter resultados diferentes
$\{(K,C),(C,C)\}$	obter coroa no $2^{o.}$ lançamento
$\{(C,K),(C,C)\}$	obter coroa no $1^{o.}$ lançamento
$\{(K,K),(K,C),(C,K)\}$	obter pelo menos uma cara
$\{(K,K),(K,C),(C,C)\}$	não ocorrer o par (C,K)
$\{(K,K),(C,K),(C,C)\}$	não ocorrer o par (K,C)
$\{(K,C),(C,K),(C,C)\}$	obter pelo menos uma coroa
Ω	obter cara ou coroa em cada lançamento

Exemplo 15

Considere o experimento "lançar um dado e observar o número da face de cima". Vamos explicitar, em forma de conjuntos, os seguintes eventos:

1. A: sair o número 5
2. B: sair um número menor que 5
3. C: sair um número maior que 8

4. D: sair um número par

5. E: sair um número primo

6. F: sair um número inteiro positivo menor que 7

Solução:

O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Os eventos acima são:

1. $A = \{5\}$. Note que A é um evento elementar.

2. $B = \{1, 2, 3, 4\}$

3. $C = \phi$, pois não há resultado maior do que 8; o maior resultado possível é 6. C é evento impossível.

4. $D = \{2, 4, 6\}$

5. $E = \{2, 3, 5\}$

6. $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$. F é evento certo.

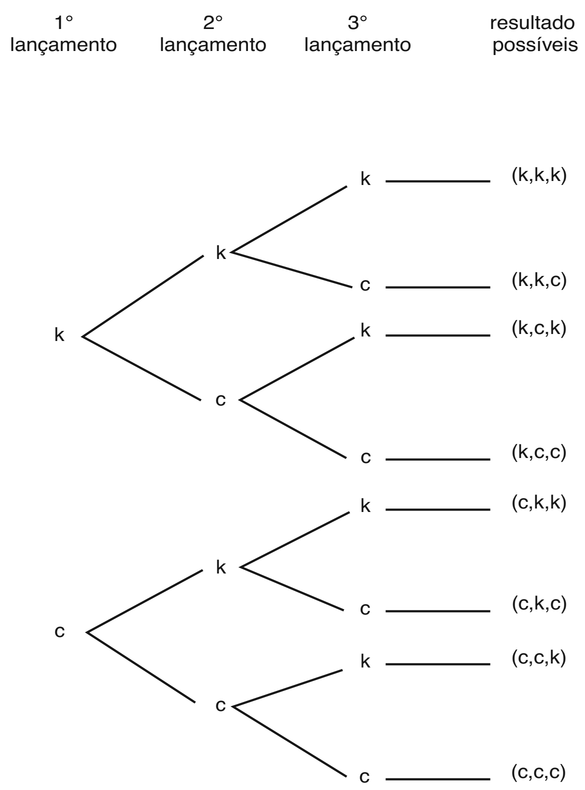
Exemplo 16

O experimento agora é: "lançar uma moeda três vezes e anotar o par de resultados obtidos". Primeiramente, vamos explicitar o espaço amostral desse experimento. Como antes, vamos representar por K o evento "sair cara"e por C o evento "sair coroa", temos:

$\Omega = \{(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (K, C, C), (C, K, K), (C, K, C), (C, C, K), (C, C, C)\}$.

Note que $\#\Omega = 2^3 = 8$.

A partir daí, vamos explicitar os seguintes eventos:



1. A: sair exatamente uma cara

2. B: sair pelo menos uma cara

3. C: saírem exatamente 2 coroas

4. D: sair, no máximo, uma coroa

5. E: saírem os três resultados iguais

Solução:

1. $A = \{(K,C,C),(C,K,C),(C,C,K)\}$

2. $B = \{K,K,K),(K,K,C),(K,C,K),(C,K,K),(C,C,K),$
   $(C,K,C),(K,C,C)\}$.

   Note que "pelo menos uma" implica uma ou mais. No caso, temos as possibilidades uma, duas ou três.

3. $C = \{(C,C,K),(C,K,C),(K,C,C)\}$.

4. $D = \{(K,K,K),(K,K,C),(K,C,K),(C,K,K)\}$.

   Note que "no máximo uma" implica uma ou menos. Claro que só temos as possibilidades uma ou nenhuma.

5. $E = \{(K,K,K),(C,C,C)\}$

Exemplo 17

Experimento: "sortear um número de 1 a 50".
Neste caso, $\Omega = \{1,2,3,4,...,50\}$. Vamos representar os seguintes eventos:

1. A: sair um número par

2. B: sair um número múltiplo de 10

3. C: sair um número divisível por 3 e por 5

4. D: sair um número divisível por 3 ou por 5

Discutimos sobre "e" (interseção) e "ou" (união) na aula 4.

Solução:

1. $A = \{2,4,6,8,10,...,50\}$. Note que $\#A = 25$.

2. $B = \{10,20,30,40,50\}$ e $\#B = 5$.

3. Se um número é divisível por 3 e por 5, simultaneamente, ele é divisível por 15. Logo, $C = \{15,30,45\}$ e $\#C = 3$.

4. Neste caso, D é a união do conjunto dos múltiplos de 3 com o conjunto dos múltiplos de 5. Logo,
   $D = \{3,5,6,9,10,12,15,18,20,21,24,25,27,30,33,35,36,39,40,$
   $42,45,48,50\}$ e $\#D = 23$.

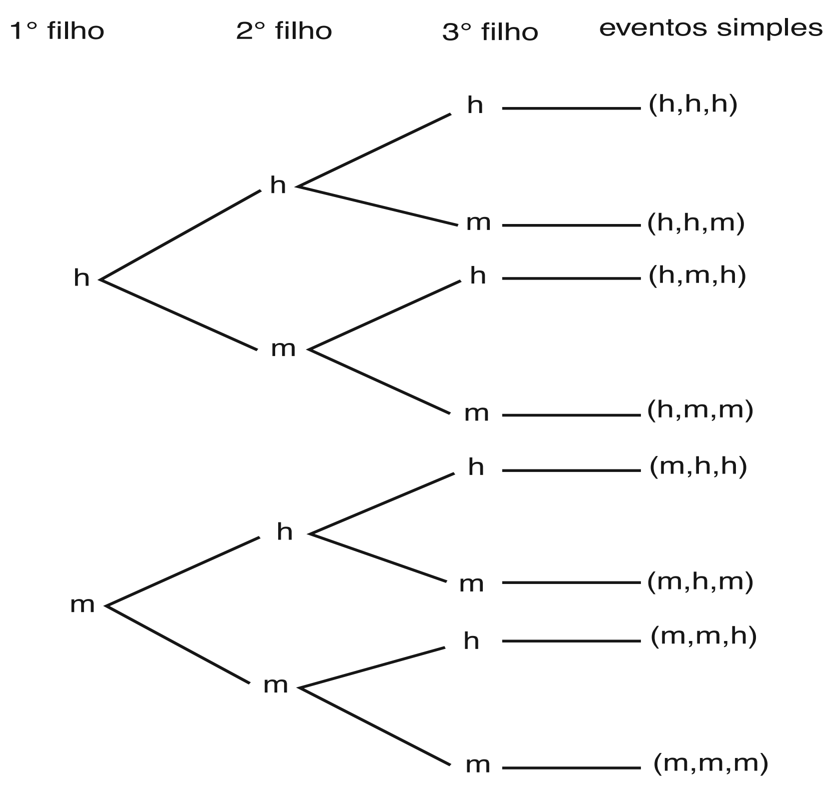
Exemplo 18

Consideremos o experimento: estudar a composição de uma família de três filhos, todos nascidos em datas distintas (ou seja, sem ocorrência de gêmeos).

1. Determine um espaço amostral apropriado para esse experimento.
2. Descreva o evento A: "há um menino e duas meninas na família".
3. Descreva o evento B: "o filho mais velho é um menino".
4. Descreva o evento C: "a criança mais velha é um menino e a mais nova, uma menina".

Solução:

1. Representando "menino" por h e "menina" por m, podemos obter o espaço amostral com o auxílio do seguinte diagrama para famílias com três filhos:



Logo, podemos escrever

$$\Omega = \{(h,h,h),(h,h,m),(h,m,h),(h,m,m),(m,h,h),(m,h,m),$$
$$(m,m,h),(m,m,m)\}\ .$$

Usando o diagrama, temos o seguinte:

2. A $= \{(h, m, m), (m, h, m), (m, m, h)\}$.

3. B $= \{(h, h, h), (h, h, m), (h, m, h), (h, m, m)\}$.

4. C $= \{(h, h, m), (h, m, m)\}$.

Exercícios

1. Para cada experimento abaixo, determine o espaço amostral e explicite, em forma de conjuntos, os eventos dados (caso o número de elementos seja muito grande, apenas descreva o conjunto), indicando a cardinalidade de cada um:

   (a) Experimento: "lançar 3 moedas e anotar os ternos de resultados".
   Eventos:
   A: saírem 3 caras
   B: saírem, pelo menos, 2 caras
   C: saírem, no máximo, 2 coroas
   D: saírem número de caras e coroas iguais
   E: saírem 3 coroas

   (b) Experimento: "lançar um dado duas vezes e anotar os resultados".
   Eventos:
   A: obter dois números pares
   B: obter números somando 10
   C: obter dois números primos
   D: obter dois números iguais
   E: obter números somando 12

   (c) Experimento: "retirar 1 carta de um baralho de 52".
   Eventos:
   A: retirar um ás
   B: retirar uma carta de naipe preto
   C: retirar uma carta de paus
   D: retirar um rei vermelho
   E: retirar um valete de ouros ou um rei de espadas

Um baralho de 52 cartas é dividido em 4 partes, cada uma de um naipe (ouros, copas, paus, espadas). Cada parte contém 13 cartas: as numéricas, de 1 (ás) a 10 e as figuras (valete, dama, rei).

Obtenção de eventos a partir de outros

A partir de eventos (simples ou compostos) podemos obter novos eventos, usando as operações de união, interseção e diferença de conjuntos. Relembrando: sendo A e B dois eventos de um espaço amostral Ω (isto é, A e B subconjuntos de Ω), temos:

Evento **união** de A e B: $A \cup B = \{x \in \Omega | x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Evento **interseção** de A e B: $A \cap B = \{x \in \Omega | x \in A \text{ e } x \in B\}$

Evento **diferença** de A e B: $A - B = \{x \in \Omega | x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Em particular, se $A \subset \Omega$ é um evento, então:

$\overline{A} = \Omega - A = \{x \in \Omega | x \notin A\}$ é o complementar de A (em Ω). O evento $\overline{A}$ é chamado *evento complementar* de A.

Assim, sendo E um experimento e A e B eventos de E, podemos definir os seguintes eventos de E:

$A \cup B$: evento que ocorre quando ocorre A ou B

$A \cap B$: evento que ocorre quando ocorrem A e B

$\overline{A} = \Omega - A$: evento que ocorre quando não ocorre A

No caso em que $A \cap B = \emptyset$, dizemos que os eventos A e B são *mutuamente exclusivos* (ou mutuamente excludentes). Como o próprio nome indica, eventos mutuamente exclusivos não podem ocorrer simultaneamente. Dois eventos simples distintos, associados a um mesmo experimento, são sempre mutuamente exclusivos, pois se $A = \{a\}$ e $B = \{b\}$, então $A \cap B = \emptyset$, se $a \neq b$.

Exemplo 19

Seja o experimento "lançar um dado e anotar o número da face de cima". Consideremos os seguintes eventos associados a esse experimento:

A: sair número menor que 5 $\rightarrow$ $A = \{1, 2, 3, 4\}$
B: sair número par $\rightarrow$ $B = \{2, 4, 6\}$
$C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
$D = \{2, 4, \}$
E: sair número ímpar $\rightarrow$ $E = \{1, 3, 5\}$

Observe que:
$C = A \cup B$
$D = A \cap B$
$E = \Omega - B$ (ou seja, $E \cup B = \Omega$)

Então, dado um certo experimento, sempre podemos, a partir de eventos dados, obter outros eventos, usando as operações de união, interseção e complementar de conjuntos vistas na aula 1.

Exemplo 20

Seja um experimento com espaço amostral $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$. Sejam $A = \{a, c\}$, $B = \{a, b, d\}$ e $C = \{c, e\}$ eventos associados a esse experimento. Então, temos:

1. $A \cup B = \{a, b, c, d\}$
2. $A \cap B = \{a\}$.
3. $B \cup C = \{a, b, c, d, e\} = \Omega$
4. $B \cap C = \emptyset$, logo, B e C são mutuamente exclusivos.
5. $\overline{A} = \{b, d, e\}$
6. $\overline{B} = \{c, e\}$
7. $C = \overline{B}$, isto é, C é o evento complementar de B.
8. Os eventos $A \cup B$ e $\overline{A} \cap \overline{B}$ são mutuamente exclusivos. (Verifique!)

Freqüência relativa de um evento

Na aula 15 vimos que a freqüência relativa de cada resultado (ou evento simples) de um experimento realizado n vezes é a razão entre o número m de ocorrências desse resultado e o número n.

Podemos estender essa definição a um evento qualquer associado ao experimento:

Se em n repetições de um experimento o evento A ocorre n_A vezes, então $f_A = \frac{n_A}{n}$ é denominada *freqüência relativa do evento A nas n repetições do experimento.*

A freqüência relativa f_A apresenta as seguintes propriedades:

1. $0 \leq f_A \leq 1$ (pois $n_A \geq 0$ e $n_A \leq n$. Logo, $0 \leq \frac{n_A}{n} \leq 1$).

2. $f_A = 1$ se, e somente se, A ocorre em todas as n repetições do experimento (pois, neste caso, $n_A = n$).

3. $f_A = 0$ se, e somente se, A não ocorre em nenhuma das n repetições do experimento.

4. Se A e B são eventos associados a esse experimento, representando por $f_{A\cup B}$ e $f_{A\cap B}$ as freqüências relativas dos eventos $A \cup B$ e $A \cap B$, respectivamente, então $f_{A\cup B} = f_A + f_B - f_{A\cap B}$. Essa relação parte do princípio da inclusão-exclusão (estudado na aula 4).

5. Se A e B são eventos associados a esse experimento, mutuamente exclusivos, representando por $f_{A\cup B}$ a freqüência relativa do evento $A \cup B$, então $f_{A\cup B} = f_A + f_B$. Esta relação deriva imediatamente da propriedade 4, no caso $A \cap B = \emptyset$.

O princípio da inclusão-exclusão afirma que, dados os conjuntos A, B e C, então $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

Observação. Para simplificar a notação de freqüência relativa de um evento simples e, em vez de escrever $f_{\{e\}}$, escreveremos simplesmente f_e.

Exemplo 21

Seja $\Omega = \{a, b, c, d\}$ o espaço amostral de um experimento que é realizado repetidamente. A tabela a seguir lista o número de ocorrências de cada evento simples associado ao experimento:

evento	{a}	{b}	{c}	{d}
número de ocorrências	285	280	220	215

determine:

1. A freqüência relativa de cada evento simples.

2. A freqüência relativa do evento $\{a\} \cup \{b\}$.

3. A freqüência relativa do evento $\overline{\{c\}}$.

Solução:

Temos um total de $285 + 280 + 220 + 215 = 1000$ repetições do experimento. Então:

1. $$\begin{array}{l} f_a = \frac{285}{1000} = 0,285 \\ f_b = \frac{280}{1000} = 0,280 \\ f_c = \frac{220}{1000} = 0,220 \\ f_d = \frac{215}{1000} = 0,215 \end{array}$$

2. $f_{\{a\}\cup\{b\}} = f_a + f_b = 0,565$

3. Note que $\overline{\{c\}} = \{a, b, d\}$. Então $f_{\overline{\{c\}}} = f_a + f_b + f_d = 0,780$

Resumo

Nesta aula definimos eventos como subconjuntos do espaço amostral e aprendemos a explicitar eventos em forma de conjuntos

Usamos as operações de conjuntos vistas em aulas anteriores para definir os eventos união, interseção e complementar, a partir de eventos dados.

Vimos as propriedades da freqüência relativa, agora estendida para um evento qualquer.

Com esta aula, estudamos todos os conceitos importantes e necessários para que possamos definir probabilidade. É o que faremos na próxima aula.

Exercícios

2. Seja $\Omega = \{a, b, c\}$ o espaço amostral de um experimento.

   (a) Liste todos os eventos desse experimento.

   (b) Quantos eventos ocorrem se ocorrer $\{a\}$?

3. Considere o lançamento de um dado e a observação do número da face de cima. Sejam os eventos:

   E: número par
   F: número ímpar
   G: número maior ou igual a 5

(a) Descreva o evento $E \cup F \cup G$

(b) Descreva o evento $E \cap F \cap G$

(c) Os eventos E e F são mutuamente exclusivos? Justifique.

(d) Os eventos F e G são mutuamente exclusivos? Justifique.

4. Seja Ω o espaço amostral de um experimento e A, B e C eventos associados a esse experimento. Descreva os eventos abaixo, usando a notação das operações de conjuntos:

   (a) Ocorrer A ou ocorrer B

   (b) Ocorrerem A e B

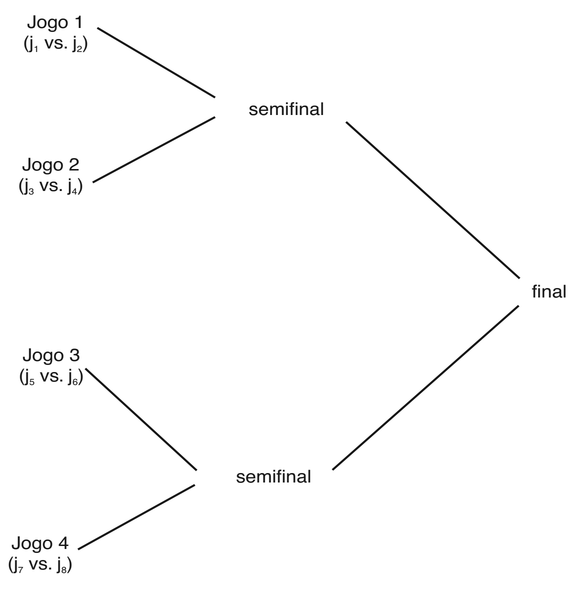
   (c) Ocorrer A mas não ocorrer B

   (d) Não ocorrer C

   (e) Não ocorrer nenhum dos eventos A, B e C

   (f) Ocorrer A mas não ocorrer B nem C

5. Oito jogadores de tênis $(j_1, ..., j_8)$ disputam um torneio em que o vencedor de uma etapa passa para a etapa seguinte, conforme a dinâmica descrita no diagrama a seguir:



Descreva o espaço amostral listando os possíveis participantes na final do torneio.

6. A tabela abaixo traz o número de ocorrências de cada evento elementar de um certo experimento, realizado repetidamente:

evento	$\{e_1\}$	$\{e_2\}$	$\{e_3\}$	$\{e_4\}$	$\{e_5\}$
número de ocorrências	850	1200	1350	980	620

   Sejam os eventos $A = \{e_1, e_2, e_4\}$ e $B = \{e_1, e_4, e_5\}$. Determine a freqüência relativa dos eventos $A \cup B$, $A \cap B$ e $\overline{A}$.

7. Considere quatro objetos a, b, c, e d. Suponha que o resultado de um experimento seja anotar a ordem na qual esses objetos estão listados. Considere os eventos:
   $A = \{a$ está na primeira posição$\}$
   $B = \{c$ está na terceira posição$\}$

   (a) Dê o espaço amostral desse experimento.

   (b) Dê os eventos $A \cap B$ e $A \cup B$.

Auto-avaliação

Se você sentiu dificuldades nos exercícios, tente resolvê-los usando diagramas de Venn: eventos são subconjuntos do espaço amostral. Caso as dificuldades persistam, solicite a ajuda de um tutor da disciplina.

Aula 17 – Probabilidades

Objetivos

Nesta aula você verá a definição do conceito-chave deste Módulo: a probabilidade de ocorrência de eventos associados a experimentos aleatórios. Aprenderá a reconhecer uma distribuição de probabilidade e a identificar um espaço amostral eqüiprovável.

Eqüiprovável: apresenta as mesmas probabilidades de ocorrência.

Pré-requisitos: aulas 14 a 16.

Introdução

Estamos agora em condições de atingir o objetivo mencionado na primeira aula deste Módulo: atribuir um número a cada evento associado a um experimento aleatório, que avaliará a chance de ocorrência desse evento.

Poderíamos resolver o problema da seguinte forma: repetir o experimento um número grande de vezes, calcular a freqüência relativa de cada evento e adotar esse número como sendo a probabilidade de ocorrência do evento considerado. As propriedades da freqüência relativa demonstram que esse número indica, de uma maneira bastante precisa, a chance de um dado evento ocorrer. Além disso, aumentando o número de realizações do experimento, é de se esperar que cada freqüência relativa se aproxime, cada vez mais, de um certo número. Esse número seria o candidato ideal para a probabilidade do evento considerado.

Há, porém, duas grandes dificuldades em se adotar a freqüência relativa como valor da probabilidade de um evento:

- Quantas vezes deve se repetir o experimento para se ter um valor da freqüência relativa que seja aceitável? (Ou: o que significa um grande número de vezes?)

- Para uma mesma quantidade de repetições do experimento, os valores obtidos para as freqüências relativas podem variar de um experimentador para outro; assim, o número adotado dependeria de experimentação.

Desejamos um meio de obter tal número sem depender de experimentações, mas de modo que o número definido possa refletir o que observamos.

Daremos, a seguir, uma definição formal e, mais tarde, faremos considerações sobre os aspectos que acabamos de mencionar.

Probabilidade de um evento simples

Consideremos um experimento aleatório com espaço amostral finito

$$\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \ .$$

A cada evento simples e_i corresponde um número real representado por $P(\{e_i\})$, ou simplesmente $P(e_i)$, denominado *probabilidade de* $\{e_i\}$, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições:

1. $P(e_i) \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., n$
2. $P(e_1) + P(e_2) + ... + P(e_n) = 1$

Veja que o número real associado ao evento simples $\{e_i\}$ é completamente arbitrário. Por exemplo, considerando o lançamento de um dado, a definição de probabilidade permite que façamos a seguinte associação:

evento	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
probabilidade	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$

Embora essa atribuição de valores não nos pareça natural, por não refletir o que observamos quando lançamos um dado repetidas vezes (embora possamos admitir a existência de um dado balanceado para isso), é rigorosamente aceitável, do ponto de vista matemático, uma vez que atende à definição.

Exemplo 22

Uma moeda é balanceada de modo que a chance de dar CARA é 5 vezes a chance de dar COROA. Qual a probabilidade de dar CARA?

Solução:

Representando por $P(K)$ e $P(C)$ as probabilidades de dar cara e coroa, respectivamente, temos que $P(K) = 5P(C)$. Pela definição de probabilidade, temos também que $P(K) + P(C) = 1$. Daí, $6P(C) = 1$, donde $P(C) = \frac{1}{6}$. Logo, a probabilidade de dar cara é $1 - P(C) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Seja um experimento aleatório com espaço amostral finito Ω. Atribuir uma probabilidade a cada elemento de Ω é definir uma *distribuição de probabilidades* para Ω. A partir de uma distribuição de probabilidades, podemos definir a probabilidade de um evento qualquer associado a esse experimento.

Probabilidade de um evento

Consideremos um experimento aleatório com espaço amostral finito

$$\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \ .$$

Seja E um evento associado a esse experimento. Definimos a probabilidade de ocorrência de E, indicada por $P(E)$, como segue:

1. se $E = \emptyset$, $P(E) = P(\emptyset) = 0$.
2. se E é união de r eventos simples, $E = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}\}$, então
   $P(E) = P(e_{i_1}) + ... + P(e_{i_r})$.

Em particular,

$$P(\Omega) = P(e_1) + ... + P(e_n) = 1 \ .$$

Exemplo 23

Duas moedas são lançadas e as faces de cima anotadas. O espaço amostral desse experimento é $\Omega = \{(K,K),\ (K,C),\ (C,K),\ (C,C)\}$, no qual K representa "cara" e C representa "coroa". Considere o evento A: "sair faces iguais". Determine a probabilidade de A, para cada distribuição de probabilidade abaixo:

1. $P((K,K)) = P((K,C)) = P((C,K)) = P((C,C)) = \frac{1}{4}$
2. $P((K,K)) = \frac{4}{9}$; $P((K,C)) = P((C,K)) = \frac{2}{9}$; $P((C,C)) = \frac{1}{9}$

Solução:

O evento A é $\{(K,K),(C,C)\}$. Então

$$P(A) = P((K,K)) + P((C,C)) \ .$$

Logo,

1. $P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

2. $P(A) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

Exemplo 24

Suponhamos que um dado foi construído de modo que a probabilidade de cada face seja proporcional ao número de pontos dessa face. Qual a probabilidade de se obter um número par de pontos num lançamento desse dado?

Solução:

O espaço amostral desse experimento é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Seja x a probabilidade de sair a face 1. Então:

$$\begin{aligned} P(1) &= x \\ P(2) &= 2x \\ P(3) &= 3x \\ P(4) &= 4x \\ P(5) &= 5x \\ P(6) &= 6x \end{aligned}$$

Pela definição de probabilidades, esses valores têm que satisfazer a relação $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$.
Logo, $x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1 \Rightarrow 21x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{21}$.

Estamos interessados no evento $A = \{2, 4, 6\}$.
Então $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 2x + 4x + 6x = 12x = 12 \times \frac{1}{21} = \frac{4}{7}$.

Eventos simples eqüiprováveis

Consideremos um dado equilibrado, isto é, um dado no qual todas as faces têm a mesma chance de sair voltada para cima.

Para o experimento de lançar esse dado e observar o número da face de cima, sabemos que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Como $P(e_1) + ... + P(e_6) = 1$, segue que cada probabilidade será $P(e_i) = \frac{1}{6}$.

De maneira análoga, considerando-se o lançamento de uma moeda equilibrada, temos $P(\text{cara}) = P(\text{coroa}) = \frac{1}{2}$.

De modo geral, quando todos os resultados de um experimento aleatório têm a mesma chance de ocorrer, dizemos que são *eqüiprováveis*. O espaço amostral é chamado *espaço amostral eqüiprovável*.

Seja $\Omega = \{e_1, ..., e_n\}$ o espaço amostral de um experimento aleatório.
Se Ω é eqüiprovável então

$$P(e_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, ..., n$$

Neste caso, a distribuição de probabilidades é chamada *distribuição uniforme*.

Exemplo 25

Consideremos o lançamento de um dado equilibrado. Determine a probabilidade de cada evento abaixo:

1. A: sair o número 5
2. B: sair um número maior que 4
3. C: sair um primo
4. D: sair um número maior que 7

Solução:

O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Como o dado é equilibrado, todos os resultados são eqüiprováveis e adotamos a distribuição de probabilidades uniforme. Assim, a probabilidade de cada evento elementar é $\frac{1}{6}$.

Temos, então:

1. $P(A) = P(\{5\}) = \frac{1}{6}$
2. $P(B) = P(\{5, 6\}) = P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
3. $P(C) = P(\{2, 3, 5\}) = P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
4. $P(D) = P(\emptyset) = 0$

Exemplo 26

O experimento é o lançamento de duas moedas equilibradas. Determine a probabilidade de cada evento:

1. A: dar duas coroas

2. B: dar, ao menos, uma coroa

3. C: dar uma cara e uma coroa

Solução:

Temos $\Omega = \{(K,K),(K,C),(C,K),(C,C)\}$, eqüiprovável. Logo, a probabilidade de cada evento elementar é $\frac{1}{4}$.

Então:

1. $P(A) = P(\{(C,C)\}) = \frac{1}{4}$

2. $P(B) = P(\{(K,C),(C,K),(C,C)\}) = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

3. $P(C) = P(\{(K,C),(C,K)\}) = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Exemplo 27

No lançamento de dois dados equilibrados, determinemos a probabilidade de cada evento descrito abaixo:

1. A: saírem números com soma 10

2. B: saírem dois número maiores que 4

3. C: saírem dois número primos

4. D: saírem números com soma menor que 15

5. E: sair, pelo menos, um "6"

6. F: saírem dois números iguais

Solução:

Neste experimento,

$$\begin{aligned}\Omega = \{ \ & (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ & (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ & (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ & (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ & (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ & (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.\end{aligned}$$

A probabilidade de cada evento elementar é $\frac{1}{36}$.

Então:

1. $P(A) = P(\{(4,6),(5,5),((6,4)\}) = 3 \times \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

2. $P(B) = P(\{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}) = 4 \times \frac{1}{36} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

3. $P(C) = P(\{(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,5),(5,2),(5,3),(5,5)\}) =$
$= 9 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{4}$

4. $P(D) = P(\Omega) = 1$

5. $P(E) = P(\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,1),(6,2),(6,3),$
$(6,4),(6,5)\}) = 11 \times \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$

6. $P(F) = P(\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}) = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$

Observando os exemplos, concluímos que:

Se Ω é um espaço amostral eqüiprovável, com n elementos e $A \subset \Omega$, com $\#A = r$, então

$$P(A) = r.\frac{1}{n} = \frac{r}{n} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Podemos nos referir aos elementos de A como *casos favoráveis a A*, uma vez que, se algum deles ocorrer, A ocorrerá. Usando essa terminologia, sendo Ω um espaço amostral eqüiprovável, podemos escrever:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a } A}{\text{número de resultados possíveis do experimento}}$$

Exemplo 28

A distribuição dos tipos de sangue numa certa população é dada na seguinte tabela:

tipo de sangue	A	B	AB	O
número de pessoas	155	105	102	138

Uma pessoa do grupo analisado é sorteada ao acaso. Qual a probabilidade de seu sangue ser AB?

Solução:

Podemos supor que a probabilidade de ser sorteada seja a mesma, para todas as pessoas da população estudada. Como existem 102 pessoas com sangue do tipo AB num total de 500, a propabilidade pedida é igual a $\frac{102}{500}$.

Exemplo 29

Ao sortear um número inteiro de 1 a 50, qual a probabilidade de ser sorteado um número maior que 30?

Solução:

O espaço amostral desse experimento é $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 49, 50\}$. Logo, $\#\Omega = 50$. Seja A o evento "número maior que 30". Então $A = \{31, 32, ..., 50\}$ e $\#A = 20$. Como Ω é eqüiprovável, temos $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$.

Exemplo 30

São lançados dois dados equilibrados. Calcule a probabilidade de cada evento a seguir:

1. A: "os números são menores que 4"
2. B: "a soma dos números é 9"

Solução:

Vimos anteriormente que o espaço amostral deste experimento é

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), ..., (6,5), (6,6)\}, \text{ com } \#\Omega = 36$$

Como os dados são equilibrados, a probabilidade de cada evento simples é $\frac{1}{\#\Omega} = \frac{1}{36}$.

Então:

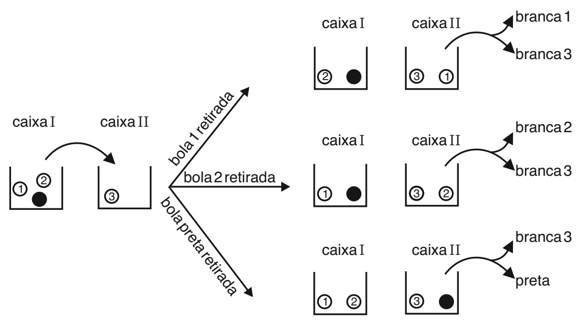
1. $A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$. Logo
$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}\ .$$
2. $B = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}$. Então $P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Exemplo 31

Seja o seguinte experimento: uma caixa I contém duas bolas brancas e uma preta. Uma caixa II contém uma bola branca. Retira-se uma bola da caixa I e coloca-se a mesma na caixa II. Depois, retira-se uma bola da caixa II. Liste os resultados possíveis e calcule a probabilidade de que a bola retirada da caixa II seja branca.

Solução:

Vamos supor as bolas brancas numeradas: 1 e 2, na caixa I e 3, na caixa II. A figura abaixo indica as diferentes possibilidades.



Os resultados possíveis estão listados na tabela a seguir, juntamente com suas probabilidades. Parece razoável supor que os eventos simples são eqüiprováveis, cada um com probabilidade de $\frac{1}{6}$, pois são 6 no total.

evento	bola tirada da caixa I	bola tirada da caixa II	$P(E_i)$
E_1	branca-1	branca-1	1/6
E_2	branca-1	branca-3	1/6
E_3	branca-2	branca-2	1/6
E_4	branca-2	branca-3	1/6
E_5	preta	branca-3	1/6
E_6	preta	preta	1/6

A probabilidade pedida é

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}\ .$$

Uma observação importante a respeito da freqüência relativa e da probabilidade de um evento: f_A e $P(A)$ não são a mesma coisa. $P(A)$ é um valor atribuído, arbitrário, atendendo à definição de probabilidade. f_A é uma aproximação obtida experimentalmente. Ao adotar para $P(A)$ um valor do qual f_A se aproxima (à medida que o número de repetições do experimento aumenta), tentamos fazer com que o modelo probabilístico reflita o que observamos ao longo da nossa experiência.

Resumo

Nesta aula definimos probabilidade de um evento associado a um experimento aleatório. Definimos eventos simples eqüiprováveis e a distribuição uniforme. Sendo A um subconjunto de um espaço amostral eqüiprovável, definimos a probabilidade de A como sendo a razão entre o número de casos favoráveis a A e o número de resultados possíveis do experimento. Em termos de cardinalidade de conjuntos, isso equivale a dizer que a probabilidade de A ocorrer é a razão entre a cardinalidade de A e a do espaço amostral.

Exercícios

1. Um dado é lançado 300 vezes. As ocorrências dos eventos estão registradas na tabela abaixo:

face	1	2	3	4	5	6
número de ocorrências	60	50	75	60	30	25

   Atribua uma probabilidade a cada evento elementar, igual à freqüência relativa observada. A seguir, determine a probabilidade de cada evento abaixo:

   (a) A: número par

   (b) B: número maior que 4

   (c) C: número divisor de 10

2. Um dado equilibrado é lançado duas vezes. Qual a probabilidade de

   (a) A soma dos números observados ser menor que 5?

   (b) Pelo menos um dos lançamentos dar 6?

3. Uma urna contém 3 bolas pretas, 2 bolas vermelhas e 5 bolas brancas. Uma bola é retirada ao acaso. Qual a probabilidade de a bola ser preta?

4. Seja $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ o espaço amostral associado a um experimento, com distribuição de probabilidade dada pela tabela abaixo:

evento	$\{e_1\}$	$\{e_2\}$	$\{e_3\}$	$\{e_4\}$	$\{e_5\}$
probabilidade	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$

Dê a probabilidade de cada evento:

(a) $A = \{e_1, e_2, e_4\}$

(b) $B = \{e_1, e_5\}$

(c) $C = \{e_3, e_4\}$

(d) $D = \Omega$

5. Um experimento admite apenas três resultados: a, b e c. Suponha que a é duas vezes mais provável de ocorrer que c e que c é duas vezes mais provável de ocorrer que b. Determine $P(a), P(b)$ e $P(c)$.

6. Uma letra é escolhida, ao acaso, entre as que formam a palavra PERNAMBUCO. Qual a probabilidade de ser uma vogal?

7. A tabela abaixo mostra pretensas distribuições de probabilidade para o lançamento de duas moedas. Quais dessas podem ser aceitas?

	{(K,K)}	{(K,C)}	{(C,K)}	{(C,C)}
1	1/4	1/4	1/4	1/4
2	0	0	0	1
3	2/15	4/15	7/15	2/15
4	1/2	1/2	−1/2	1/2
5	1/9	2/9	3/9	4/9
6	1,2	0,8	0,5	0,1

Auto-avaliação

Veja se entendeu claramente a definição de probabilidade. Note que se trata de uma definição teórica: podemos definir uma distribuição de probabilidade que não corresponda ao que observamos ao nosso redor. No exercício 7, verifique cuidadosamente quais das condições presentes na definição de probabilidade foram ou não satisfeitas. Você deve resolver os exercícios sem grandes dificuldades. Caso tenha dúvidas, solicite ajuda do tutor da disciplina.

Aula 18 – Usando técnicas de contagem no cálculo de probabilidades

Objetivos

Nesta aula você irá aplicar o Princípio Fundamental da Contagem e as técnicas de contagem (arranjo, combinação e permutação) estudadas no Módulo 1 para calcular probabilidades.

Pré-requisitos: aulas 6 a 12, 14 a 17.

Introdução

Esta aula não contém nenhum item novo de teoria. Nela, iremos aplicar conceitos já estudados. Usaremos a fórmula que fornece a probabilidade de um evento associado a um espaço amostral eqüiprovável e, para determinar as cardinalidades dos conjuntos envolvidos, usaremos as técnicas de contagem mencionadas acima.

Consideremos um experimento aleatório de espaço amostral associado Ω. Vimos que, se Ω eqüiprovável e $A \subset \Omega$, a probabilidade do evento A é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a } A}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Acompanhe, com atenção, as resoluções dos exemplos apresentados a seguir. Depois, resolva os exercícios propostos.

Exemplo 32

Uma moeda equilibrada é lançada seis vezes. Qual a probabilidade de

1. A: saírem exatamente 4 caras?

2. B: saírem, pelo menos, 4 caras?

3. C: sair cara no primeiro, terceiro e quinto lançamentos?

Solução:

Usando o Princípio Fundamental da Contagem, temos que, ao lançar uma moeda seis vezes, temos um total de $2^6 = 64$ eventos elementares possíveis, sendo cada um representado por uma seqüência de seis símbolos, K (cara) ou C (coroa).

1. O evento A representa a ocorrência de exatamente 4 caras entre esses seis símbolos, não importando a ordem em que ocorram. Isso caracteriza uma combinação de 6 elementos tomados 4 a 4. Logo, temos:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{C_{6,4}}{64} = \frac{\frac{6!}{2!4!}}{64} = \frac{15}{64} = 0,235 \ .$$

2. O evento B equivale a se ter "ocorrência de 4 caras" ou "ocorrência de 5 caras" ou "ocorrência de 6 caras". Logo, temos

$$\#B = C_{6,4} + C_{6,5} + C_{6,6} = 15 + 6 + 1 = 22 \ .$$

Daí, $P(B) = \dfrac{22}{64} = 0,344$.

3. O evento C é constituído das seqüências $(cara, -, cara, -, cara, -)$, onde os lugares marcados com $-$ podem ser ocupados com *cara* ou *coroa*. Temos, então, um total de $2 \times 2 \times 2$ possibilidades de preenchimento desses lugares. Logo,

$$\#C = 2^3 = 8 \quad \text{e} \quad P(C) = \frac{\#C}{\#\Omega} = 8/64 = 1/8 \ .$$

Exemplo 33

Um grupo é formado por 7 rapazes e 5 moças. São escolhidas 4 pessoas desse grupo, ao acaso, sem reposição, para formarem uma comissão. Determine a probabilidade de:

1. serem escolhidos exatamente dois rapazes.

2. serem escolhidos, pelo menos, dois rapazes.

Solução:

O espaço amostral desse experimento é formado por todas as combinações (já que a ordem da escolha não importa) das 12 pessoas, tomadas 4 a 4:

$$\#\Omega = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{12!}{8!4!} = 495 \ .$$

Além disso, como todas as pessoas têm a mesma chance de serem escolhidas, o espaço amostral é eqüiprovável.

1. O evento A: "serem escolhidos exatamente dois rapazes"é formado pelas combinações constituídas de 2 rapazes e 2 moças. Para determinar o total dessas combinações, dividimos a tarefa em duas etapas:

   - escolhemos 2 entre os 7 rapazes, e

   - escolhemos 2 entre as 5 moças.

   Aplicamos, então, o princípio multiplicativo:

   $$\#A = C_{7,2} \times C_{5,2} = \frac{7!}{5!2!} \times \frac{5!}{3!2!} = 21 \times 10 = 210 \ .$$

   Logo, $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{210}{495} = \frac{14}{33}$.

2. O evento B: "serem escolhidos, pelo menos, dois rapazes", ocorre se forem escolhidos dois, três ou quatro rapazes. Temos, então, as seguintes possibilidades:

   - 2 rapazes e 2 moças

   - 3 rapazes e 1 moça

   - 4 rapazes e 0 moças

   Aplicando o mesmo raciocínio do item anterior, temos:

   $$(C_{7,2} \times C5,2) + (C_{7,3} \times C5,1) + (C_{7,4} \times C_{5,0}) = 210 + 175 + 35 = 420 \ .$$

   Logo, $P(B) = \frac{420}{495} = \frac{28}{33}$.

Exemplo 34

Escolhemos, ao acaso, r objetos de um conjunto de n objetos, com reposição. Qual a probabilidade de que nenhum objeto seja escolhido mais de uma vez?

Solução:

Pelo Princípio multiplicativo,

$$\#\Omega = \underbrace{n \times n \times .. n}_{r \text{ termos}} = n^r \ .$$

Vejamos as possibilidades de escolha em cada retirada, de forma a não haver repetição do elemento retirado:

$1^{a.}$ retirada:	n
$2^{a.}$ retirada:	$n-1$
$3^{a.}$ retirada:	$n-2$
...	...
r-ésima retirada:	$n-r+1$

Pelo Princípio multiplicativo, temos um total de $n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$ casos favoráveis. Logo, a probabilidade de que nenhum objeto seja escolhido mais de uma vez é $\frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{n^r}$.

Exemplo 35

Num lote de 20 peças há 6 defeituosas. São escolhidas 5 peças do lote, ao acaso. Qual a probabilidade de serem sorteadas 2 peças defeituosas?

Solução:

Uma retirada de 5 peças é um amostra do lote, sendo que não importa a ordem em que a retirada é feita. Trata-se, assim, de combinação. O total de amostras é $\#\Omega = C_{20,5} = \frac{20!}{15!5!} = \frac{20.19.18.17.16}{5.4.3.2.1} = 15.504$, todas eqüiprováveis. Seja o evento A: duas peças defeituosas na amostra.

O total de elementos em A é calculado usando o princípio multiplicativo. Dividimos a tarefa de escolher as 5 peças em duas etapas: selecionamos 2 peças defeituosas entre as 6 existentes no lote e selecionamos 3 peças entre as 14 não-defeituosas do lote.

Assim:

$$\#A = C_{6,2}.C_{14,3} = \frac{6!}{4!2!}.\frac{14!}{11!3!} = \frac{6.5}{1.2}.\frac{14.13.12}{1.2.3} = 15 \times 364 = 5.460 \; .$$

Logo,$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{5.460}{15.504} \simeq 0,3522$.

Exemplo 36

Considere um lote de válvulas com cinco diferentes níveis de qualidade. Escolhendo, aleatoriamente, três válvulas desse lote, qual a probabilidade de duas possuírem qualidade dos três melhores níveis?

Solução:

Como no exemplo 35, cada retirada de três válvulas do lote representa uma amostra. Podemos aceitar que cada amostra tem a mesma probabilidade de ocorrer.

Seja o evento: A: a amostra contém duas válvulas dos três melhores níveis. Vamos determinar o total de elementos de Ω e de A. Cada amostra representa a retirada de 3 unidades entre 5, sem que a ordem importe. Logo, é um problema de combinação:

$$\#\Omega = C_{5,3} = \frac{5!}{2!3!} = 10 \ .$$

Para determinar $\#A$, vamos dividir, novamente, a tarefa em duas etapas:

1. escolher 2 entre as 3 melhores válvulas:
$$C_{3,2} = \frac{3!}{1!2!} = 3 \ .$$
2. escolher a terceira válvula entre os dois níveis mais baixos:
$$C_{2,1} = \frac{2!}{1!1!} = 2 \ .$$

Então, o total de elementos em A é $3 \times 2 = 6$. Logo, a probabilidade pedida é $P(A) = \frac{6}{10} = 0,6$.

Exemplo 37

Uma pessoa lança um dado equilibrado 5 vezes. Ela está interessada em tirar 5 ou 6 pontos, exatamente em três lançamentos. Qual a probabilidade de que isso ocorra?

Solução:

Seja A o evento "sair 5 ou 6 exatamente em três lançamentos". Sendo o dado equilibrado, o espaço amostral Ω, associado a esse experimento, é eqüiprovável. Logo, $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega}$. Precisamos, então, determinar as cardinalidades dos conjuntos A e Ω.

Como o dado é lançado cinco vezes, Ω é formado por todas as seqüências de 5 elementos, cada um deles pertencente ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pelo Princípio multiplicativo, temos que $\#\Omega = 6^5 = 7776$.

O evento A é o subconjunto de Ω formado pelas seqüências em que três elementos pertencem ao conjunto $\{5, 6\}$ e dois elementos pertencem ao conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Por exemplo, as seqüências (5,5,5,1,1), (5,1,6,2,5) e (1,2,5,6,6) pertencem a A. O total dessas seqüências é obtido dividindo-se a tarefa em etapas:

1. Vamos escolher 3 posições, entre as 5 possíveis, para preencher com elementos do conjunto $\{5, 6\}$. O número de escolhas é dado por $C_{5,3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$.

2. Para preencher cada uma das 3 posições escolhidas, temos duas possibilidades: 5 ou 6. Logo, o total é dado por $2^3 = 8$ possibilidades.

3. Para preencher cada uma das duas posições restantes, podemos escolher qualquer elemento do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Logo, temos $4^2 = 16$ escolhas possíveis.

Pelo Princípio multiplicativo, $\#A = 10 \times 8 \times 16 = 1280$.

Daí, a probabilidade pedida é:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{1280}{7776} = \frac{40}{243} \ .$$

Exemplo 38

São formados números de 4 algarismos distintos usando-se os dígitos 1,2,3,4 e 5. Um desses números é sorteado. Qual a probabilidade dele ser par?

Solução:

O espaço amostral do experimento é formado por todas as seqüências de 4 algarismos distintos escolhidos no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Como a ordem importa, trata-se de um problema de arranjo de 5 elementos tomados 4 a 4:

$$\#\Omega = A_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} = 120 \ .$$

Seja A o evento "o número é par". Temos as seguintes possibilidades:

– o algarismo das unidades é 2: escolhemos 3 dígitos no conjunto $\{1, 3, 4, 5\}$ para preencher as outras posições: $A_{4,3} = 24$;

– o algarismo das unidades é 4: escolhemos 3 dígitos no conjunto $\{1, 2, 3, 5\}$ para preencher as outras posições: $A_{4,3} = 24$.

Assim,

$$\#A = 24 + 24 = 48 \quad \text{e} \quad P(A) = \frac{48}{120} = \frac{2}{5} \ .$$

Resumo

Nesta aula trabalhamos apenas com espaços amostrais eqüiprováveis e calculamos a probabilidade de um evento A através da razão entre a cardinalidade de A e a do espaço amostral. Para isso, aplicamos as técnicas de contagem estudadas no módulo 1 na determinação das cardinalidades dos conjuntos envolvidos (espaços amostrais e eventos).

Exercícios

1. Dê a quantidade de elementos do espaço amostral associado a cada experimento randômico abaixo:

   (a) Lançar uma moeda 4 vezes.

   (b) Lançar um dado 3 vezes.

   (c) Lançar uma moeda 5 vezes.

   (d) Lançar um dado três vezes e, a seguir, 1 moeda.

   (e) Lançar 2 dados e 2 moedas.

   (f) Selecionar 2 cartas, sem reposição, de um baralho de 52 cartas.

   (g) Selecionar 3 cartas, sem reposição, de um baralho de 52 cartas.

   (h) Selecionar 5 cartas, com reposição, de um baralho de 52 cartas.

Na aula 14, você viu que os experimentos probabilísticos ou aleatórios também são chamados, por alguns autores, de RANDôMICOS.

2. São retiradas, sem reposição, 2 cartas de um baralho de 52 cartas e observa-se o par retirado. Qual a probabilidade de o par de cartas ser valete e dama?

3. Um grupo de 10 pessoas se oferece para doar sangue. Dentre elas, 8 possuem sangue tipo A. São escolhidas três pessoas desse grupo, aleatoriamente. Qual a probabilidade de

   (a) todas as três pessoas terem sangue do tipo A?

   (b) duas dessas pessoas terem sangue do tipo A e uma não?

   (c) pelo menos uma das pessoas ter sangue do tipo A?

4. São retiradas 13 cartas de um baralho de 52 cartas.
   (a) Qual a probabilidade de ser retirado exatamente um ás?
   (b) Qual a probabilidade de ser retirado, pelo menos, um ás?
   (c) Qual a probabilidade de que sejam retiradas apenas cartas de ouros?
5. Em uma gaveta há 50 pregos bons e 30 pregos enferrujados. São retirados, ao acaso, 10 pregos dessa gaveta. Qual a probabilidade de que todos sejam bons?
6. Dez pessoas vão se sentar em fila. Paulo e Maria estão entre elas. Qual a probabilidade de Paulo e Maria sentarem juntos?
7. Lançando-se 6 vezes uma moeda equilibrada, qual a probabilidade de que ocorra:
   (a) exatamente 3 caras?
   (b) pelo menos 2 coroas?
   (c) 3 caras e 3 coroas, alternadas?

Auto-avaliação

Nesta aula não foi apresentado nenhum conceito novo. Se você teve dúvidas na resolução dos exercícios, reveja as aulas anteriores deste módulo e as de técnicas de contagem, do módulo 1. Caso as dúvidas persistam, solicite a ajuda do tutor da disciplina.

Aula 19 – Probabilidade do evento complementar

Objetivos

Nesta aula você verá algumas propriedades da probabilidade (com ênfase na probabilidade do evento complementar) e aplicará essas propriedades na resolução de problemas.

Pré-requisitos: aulas 14 a 18.

Introdução

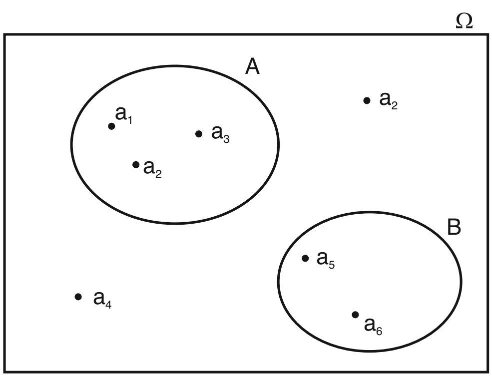
Seja Ω o espaço amostral de um experimento aleatório. Da definição de probabilidade de um evento, seguem as seguintes propriedades:

Propriedade 1. $P(\emptyset) = 0$.

Propriedade 2. $P(A) \geq 0, \ \ \forall A \subset \Omega$

Propriedade 3. $P(\Omega) = 1$

Propriedade 4. Se A e B são eventos associados a esse experimento, mutuamente exclusivos ($A \cap B = \emptyset$), então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.



$A = \{a_1, a_2, a_3\} \quad \Rightarrow \quad P(a_1) = P(a_2) + P(a_3)$

$B = \{a_5, a_6\} \quad \Rightarrow \quad P(B) = P(a_5) + P(a_6)$

$A \cap B = \emptyset$

$A \cup B = \{a_1, a_2, a_3, a_5, a_6\}$

$$P(A \cup B) = \underbrace{P(a_1) + P(a_2) + P(a_3)}_{} + \underbrace{P(a_5) + P(a_6)}_{} =$$

$$= P(A) + P(B)$$

Para verificar a validade da propriedade 4, basta lembrar que $P(A)$ é a soma das probabilidades dos eventos simples que pertencem a A. Analogamente, $P(B)$ é a soma das probabilidades dos eventos simples que pertencem a B. Como A e B não possuem elementos em comum, segue que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

A propriedade 4 pode ser estendida para uma quantidade finita de eventos:

Se $A_1, \ldots, A_n$ são eventos dois a dois mutuamente exclusivos, associados a um certo experimento, então

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum P(A_i), i = 1, ..., n \ .$$

Exemplo 39

Considere o experimento: extrair uma carta de um baralho de 52 cartas e anotar qual seja. Determine a probabilidade de sair uma figura ou um número par.

Solução:

Sejam os eventos:

A: "figura"

B: "número par"

Queremos calcular $P(A \cup B)$.

Como o baralho é dividido em cartas numéricas e figuras, os eventos A e B são mutuamente exclusivos. Por outro lado, cada carta tem a mesma chance de sair, isto é, o espaço amostral associado é eqüiprovável. Assim, $P(A) = \frac{12}{52}$ e $P(B) = \frac{20}{52}$.

Logo, pela propriedade 4 das probabilidades,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{12}{52} + \frac{20}{52} = \frac{32}{52} = \frac{8}{13} \ .$$

Exemplo 40

Uma urna contém 5 bolas assinaladas com sinal "+"e 6 bolas assinaladas com sinal "−". Duas bolas são retiradas, sem reposição, e é anotado o par de sinais observados. Qual a probabilidade de o produto dos sinais ser positivo?

Solução:

O número de elementos de Ω é dado pelo total de combinações (uma vez que a ordem dos sinais não vai alterar o sinal do produto) de 11 elementos tomados 2 a 2:

$$\#\Omega = C_{11,2} = \frac{11!}{9!2!} = 55 \ .$$

Queremos $P(A)$, onde $A = \{+\,+, -\,-\}$. Os eventos $\{+\,+\}$ e $\{-\,-\}$ são mutuamente exclusivos. Então $\#A$ é a soma dos totais de elementos de cada um desses eventos.

O número de elementos do evento $\{+\,+\}$ é dado pelas combinações das 5 bolas assinaladas com $+$, tomadas 2 a 2:

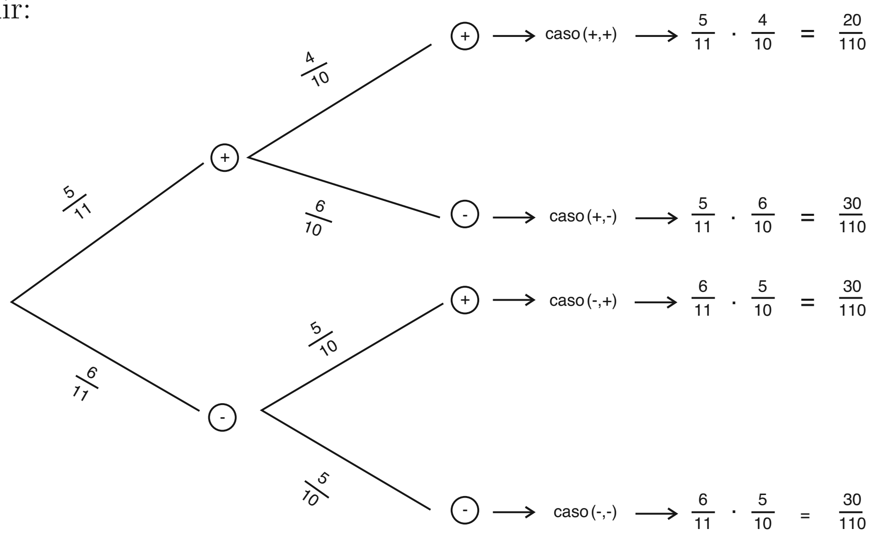
$$C_{5,2} = \frac{5!}{3!2!} = 10\ .$$

Analogamente, o número de elementos do evento $\{-\,-\}$ é dado por

$$C_{6,2} = \frac{6!}{4!2!} = 15\ .$$

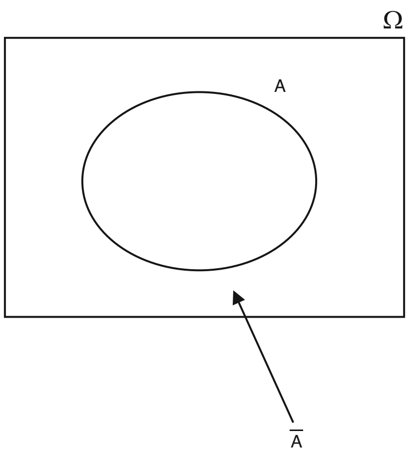
Logo, $\#A = 25$ e $P(A) = \frac{25}{55} = \frac{5}{11}$.

O problema também poderia ser resolvido com o uso de um diagrama, como indicado a seguir:



A partir das propriedades 1 a 4, podemos determinar a probabilidade do evento complementar:

Propriedade 5. (Probabilidade do evento complementar)
$P(\overline{A}) = 1 - P(A),\ \forall A \subset \Omega.$



Prova.

Podemos escrever $\Omega = A \cup \overline{A}$ e $A \cap \overline{A} = \emptyset$. Logo, pelas propriedades 4 e 3, $P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$, isto é, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Exemplo 41

Retomemos o experimento do exemplo 39. Qual a probabilidade de sair número ímpar ou figura?

Solução:

O que desejamos é que não saia um número par. Logo, o evento mencionado é o complementar do evento B (sair número par). Pela propriedade 5, $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{20}{52} = \frac{8}{13}$.

Exemplo 42

Sendo $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ o espaço amostral de um experimento aleatório, com $P(e_1) = 3/12$, $P(\overline{e_2}) = 7/12$ e $P(\overline{e_3}) = 10/12$. Vamos determinar $P(e_4)$.

Solução:

Se $P(\overline{e_2}) = 7/12$, então $P(e_2) = 1 - 7/12 = 5/12$.
Se $P(\overline{e_3}) = 10/12$, então $P(e_3) = 1 - 10/12 = 2/12$.
Como $P(e_1) + P(e_2) + P(e_3) + P(e_4) = 1$, temos $P(e_4) = 2/12$.

Exemplo 43

Uma aplicação interessante da regra da probabilidade do evento complementar é o *problema do aniversário*, que consiste em calcular a probabilidade de, num grupo de n pessoas, pelo menos duas aniversariarem num mesmo dia.

Neste caso, temos que a cardinalidade de Ω é

$$\underbrace{365 \times 365 \times ... \times 365}_{n \text{ termos}} = 365^n \ .$$

Vamos determinar a probabilidade de **não** ocorrerem aniversários num mesmo dia. Seja A esse evento. Então $\#A = 365 \times 364 \times 363 \times ... \times 365 - (n-1)$. Logo, $P(A) = \frac{365 \times 364 \times ... \times 365 - (n-1)}{365^n}$ e o nosso evento tem probabilidade $1 - P(A)$. A tabela a seguir mostra a probabilidade para alguns valores de n:

n	probabilidade
10	$0,13$
20	$0,42$
30	$0,71$
40	$0,89$
50	$0,97$

Note que para $n = 50$, ou seja, para um grupo razoavelmente pequeno de pessoas, trata-se de um evento praticamente certo! Se você já leciona e sua turma tem cerca de 40 alunos, pode fazer essa experiência na sala de aula.

Exemplo 44

Um número do conjunto $\{1, 2, ..., 200\}$ é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de sair um número que não seja múltiplo de 5?

Solução:

Este é um caso em que devemos usar a regra da probabilidade do evento complementar, pois veja que é muito mais simples determinar a probabilidade de sair um número **que seja** múltiplo de 5. Então seja A o evento "sair número múltiplo de 5". Queremos $P(\overline{A})$. Temos $A = \{5, 10, 15, ..., 195, 200\}$. Para determinar o número de elementos de A, podemos interpretar esses elementos como termos de uma progressão aritmética de primeiro termo 5 e razão 5.

Vamos usar a fórmula do termo geral de uma PA:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

No nosso caso, $a_1 = 5,\ r = 5,\ a_n = 200$ e queremos n.

Então $200 = 5 + 5(n-1) \Rightarrow n = 40$. Como Ω é eqüiprovável e possui 200 elementos, temos $P(A) = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$. Pela regra da probabilidade do evento complementar, a probabilidade pedida é

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}\ .$$

Exemplo 45

Um grupo é formado por 8 rapazes e 6 moças. Seis pessoas vão ser escolhidas ao acaso, para formarem uma comissão. Qual a probabilidade dessa comissão contar com, pelo menos, 1 rapaz?

Solução:

O espaço amostral é formado pelas combinações de 14 elementos, tomados 6 a 6:

$$\#\Omega = C_{14,6} = \frac{14!}{8!6!} = 3003 \ .$$

Seja A o evento "pelo menos um rapaz". Se fôssemos determinar o número de elementos de A, teríamos que considerar as possibilidades:

1 rapaz e 5 moças

2 rapazes e 4 moças

3 rapazes e 3 moças

4 rapazes e 2 moças

5 rapazes e 1 moça

6 rapazes e nenhuma moça

Podemos, porém, optar por uma resolução mais simples, determinando a probabilidade do evento complementar, ou seja, a probabilidade de a comissão não contar com nenhum rapaz, o que equivale a dizer que a comissão é formada por 6 moças escolhidas entre as 6:

$$\#\overline{A} = C_{6,6} = 1 \ .$$

Logo, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{3003} = \frac{3002}{3003}$.

Resumo

Nesta aula vimos as propriedades básicas da probabilidade e aprendemos a determinar a probabilidade do evento complementar de um evento dado.

Exercícios

1. Um dado equilibrado é lançado. Qual a probabilidade de não se obter 6 pontos?

2. Considere o espaço amostral $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ com distribuição de probabilidade: $P(a_1) = x$, $P(a_2) = 2x$, $P(a_3) = 4x$, $P(a_4) = 6x$. Calcule

(a) $P(a_1)$

(b) $P(A)$, onde $A = \{a_2, a_4\}$

(c) $P(\overline{B})$, onde $B = \{a_1, a_2, a_3\}$

3. Cinco pessoas vão ser escolhidas, ao acaso, para formar uma banca, num grupo formado por 6 professores e 6 alunos. Qual a probabilidade dessa banca contar com, pelo menos, 1 aluno?

4. Um número do conjunto $\{1, 2, 3, ..., 100\}$ é sorteado. Qual a probabilidade de não sair um múltiplo de 10?

5. Uma urna contém 6 bolas brancas, 5 amarelas, 4 azuis, 3 vermelhas e 2 verdes. Uma bola é extraída ao acaso. Qual a probabilidade de sair uma bola que tenha uma das cores da bandeira brasileira?

6. Numa cidade, 45% dos homens são casados, 35% solteiros, 15% divorciados e 5% viúvos. Um homem é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade desse homem:

   (a) ser solteiro ou divorciado?

   (b) não ser casado?

7. Um número é escolhido, ao acaso, no conjunto $\{1, 2, 3, ..., 30\}$. Determine a probabilidade de se escolher:

   (a) um primo ou múltiplo de 4.

   (b) um número não-primo.

Auto-avaliação

O mais importante nesta aula é aprender a identificar se um dado problema de probabilidade se torna mais fácil de resolver através do evento complementar. Fique atento, a partir de agora, na hora de calcular uma probabilidade! Caso você não tenha conseguido resolver algum exercício, releia a teoria, com calma, e tente novamente. Se necessário, solicite a ajuda do tutor da disciplina.

Aula 20 – Regra da adição

Objetivos

Nesta aula você estudará outras propriedades das probabilidades. Verá como a probabilidade da união de eventos se relaciona com as probabilidades desses eventos.

Pré-requisitos: aulas 14 a 19.

Introdução

Consideremos um experimento aleatório com espaço amostral $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_{12}\}$ e os eventos

$$A = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\} \quad \text{e} \quad B = \{a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\} \ .$$

Queremos determinar $P(A \cup B)$. Temos:

$\#A = 6$

$\#B = 5$

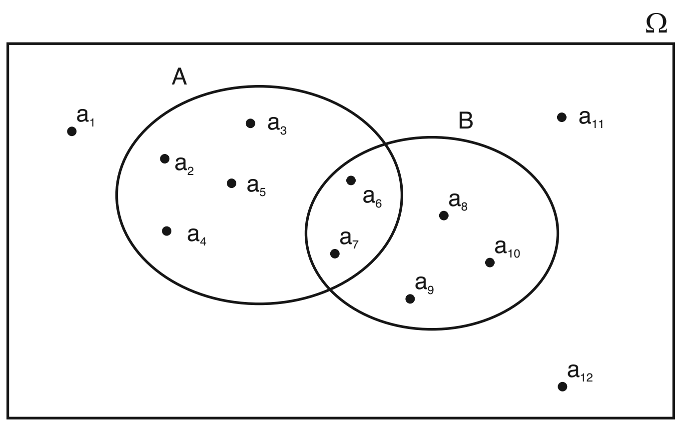
$A \cup B = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\} \Rightarrow \#A \cup B = 9$

$A \cap B = \{a_6, a_7\} \Rightarrow \#A \cap B = 2$

Logo,

$$\#A \cup B = 9 = 6 + 5 - 2 = \#A + \#B - \#(A \cap B) \ ,$$

conforme ilustra o diagrama abaixo:



Podemos generalizar esse resultado, obtendo a seguinte:

Propriedade. (**Regra da adição**)

Seja Ω o espaço amostral de um experimento aleatório e sejam $A, B \subset \Omega$. Então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ .$$

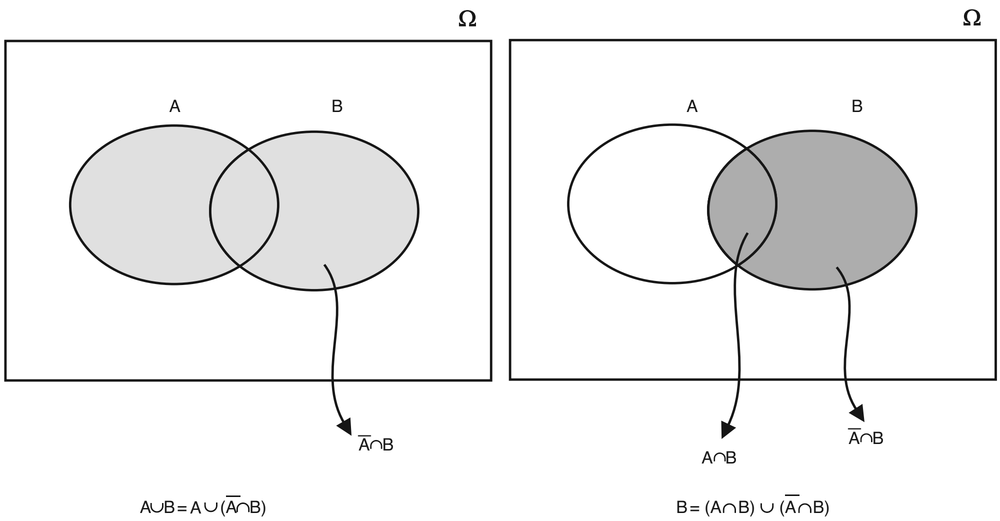
Prova.

Vamos escrever os conjuntos $A \cup B$ e B como uniões de conjuntos disjuntos: $A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B)$ e $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$. Então, pela propriedade 4, vista na aula 19, temos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$.

$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \Rightarrow P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Daí, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.



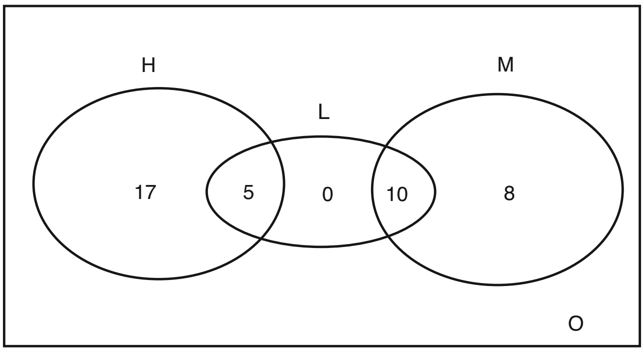
Observação. Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cap B) = 0$. Temos, então:

A e B mutuamente exclusivos $\quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemplo 46

Numa classe de 40 alunos, 22 são homens e 15 são louros. Entre os alunos louros, 10 são mulheres. Um aluno é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de ser homem ou louro?

Solução:



Sejam os eventos H: "homem"e L: "louro". Queremos a probabilidade do evento $H \cup L$.

Então

$$P(H \cup L) = P(H) + P(L) - P(H \cap L) = \frac{22}{40} + \frac{15}{40} - \frac{5}{40} = \frac{4}{5}\ .$$

Exemplo 47

Consideremos novamente o experimento de retirar uma carta de um baralho de 52 cartas e observar a que sai. Vamos determinar a probabilidade de que a carta retirada seja vermelha ou uma figura.

Solução:

Sejam os eventos A: "figura"e B: "vermelha". Queremos $P(A \cup B)$. Temos:

$\#\Omega = 52$

$\#A = 12$ (4 cartas de cada naipe)

$\#B = 26$ (13 cartas de ouros, 13 de copas)

$\#(A \cap B) = 6$ (3 figuras de ouros, 3 figuras de copas)

Logo, pela propriedade da adição:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{12}{52} + \frac{26}{52} - \frac{6}{52} = \frac{8}{13}\ .$$

Exemplo 48

Um número do conjunto $\{1, 2, ..., 100\}$ é escolhido ao acaso. Vamos determinar a probabilidade desse número:

1. ser múltiplo de 5 e de 6, simultaneamente.

2. ser múltiplo de 5 ou de 6.

3. não ser múltiplo de 5 nem de 6.

Solução:

O espaço amostral desse experimento é o próprio conjunto $\{1, 2, ..., 100\}$ e é eqüiprovável, pois todos os números têm a mesma chance de serem escolhidos.

1. Seja A o evento "o número retirado é múltiplo de 5 e de 6, simultaneamente". Isso significa que esse número é múltiplo de 30 (pois 30 é o menor múltiplo comum de 5 e 6). Logo, $A = \{30, 60, 90\}$ e $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{100}$.

2. Sejam os eventos:

   B: "o número retirado é múltiplo de 5"e

   C: "o número retirado é múltiplo de 6".

   Queremos $P(B \cup C)$. Pela regra da adição, sabemos que essa probabilidade é igual a $P(B) + P(C) - P(B \cap C)$. Observe que $P(B \cap C)$ já foi calculada no item a) ($B \cap C$:"o número retirado é múltiplo de 5 **e** de 6"). Vamos determinar as probabilidades dos eventos B e C:

   $$\begin{aligned} B &= \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, \\ &\quad 90, 95, 100\} \\ &\Rightarrow \#B = 20\ . \end{aligned}$$

   Logo, $P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{20}{100}$.

   Aqui poderíamos ter usado a fórmula do termo geral de uma PA, como fizemos na aula 19. Para determinar a cardinalidade de B, a PA é de primeiro termo 5, razão 5 e último termo 100. Para determinar a cardinalidade de C, a PA tem primeiro termo 6, razão 6 e último termo 96.

   $$\begin{aligned} C &= \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\} \\ &\Rightarrow \#C = 16 \end{aligned}$$

   Portanto,

   $$P(C) = \frac{\#C}{\#\Omega} = \frac{16}{100}\ .$$

   Podemos, agora, calcular a probabilidade pedida:

   $$P(B \cup C) = \frac{20}{100} + \frac{16}{100} - \frac{3}{100} = \frac{33}{100}\ .$$

3. O evento "não é múltiplo de 5 nem de 6" é o evento complementar de $B \cup C$. Portanto, a probabilidade pedida é

   $$P(\overline{B \cup C}) = 1 - P(B \cup C) = 1 - \frac{33}{100} = \frac{67}{100}\ .$$

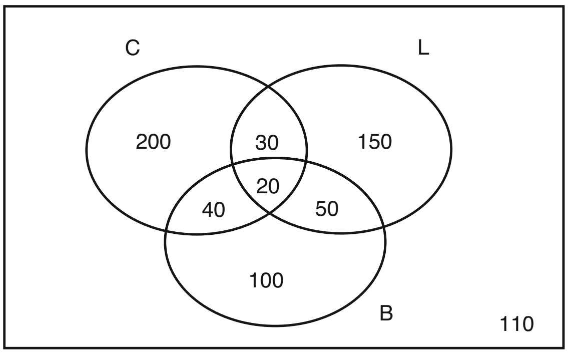
Exemplo 49

Consultando 700 alunos de uma universidade, verifica-se que 250 cursam licenciatura em Matemática, 210 cursam o bacharelado em Matemática e 290 cursam Computação. Além disso, como a universidade permite que um aluno tenha mais de uma matrícula, há alunos cursando mais de um desses cursos: 50 fazem, simultaneamente, Computação e licenciatura; 60, Computação e bacharelado; 70 cursam licenciatura e bacharelado e ainda há 20 deles que são alunos dos três cursos. Um desses alunos é sorteado para representar a universidade num evento. Determine a probabilidade desse aluno:

1. cursar a licenciatura em Matemática.
2. cursar a licenciatura e o bacharelado em Matemática.
3. cursar a licenciatura ou o bacharelado em Matemática.
4. não cursar Computação.
5. cursar pelo menos um desses três cursos.

Solução:

Vamos, primeiramente, organizar os dados fornecidos no enunciado num diagrama, como fizemos nas aulas 4 e 5.



Sejam os eventos:

L: cursar licenciatura em Matemática

B: cursar bacharelado em Matemática

C: cursar Computação

Como todos os alunos têm a mesma chance de serem escolhidos, os resultados possíveis são eqüiprováveis.

Então:

1. $P(L) = \frac{250}{700} = \frac{5}{14}$

2. Queremos $P(L \cap B)$. Pelo diagrama podemos ver que $\#(L \cap B) = 70$. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{70}{700} = \frac{1}{10}$.

3. Queremos $P(L \cup B)$. Pela regra da adição, $P(L \cup B) = P(L) + P(B) - P(L \cap B) = \frac{250}{700} + \frac{210}{700} - \frac{70}{700} = \frac{39}{70}$.

4. Queremos $P(\overline{C})$. Como $P(C) = \frac{290}{700}$, pela regra do evento complementar, $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{290}{700} = \frac{41}{700}$.

5. Neste caso, é mais fácil determinar a probabilidade do evento complementar, ou seja, a probabilidade de o aluno não cursar qualquer desses três cursos. Pelo diagrama, vemos que são 110 alunos nessa situação. Logo, a probabilidade pedida é $1 - \frac{110}{700} = \frac{59}{70}$.

Resumo

Nesta aula aprendemos a calcular a probabilidade do evento união de dois eventos dados.

Exercícios

1. Considere o espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e os eventos $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$ e $C = \{8, 10\}$. Enumere os seguintes eventos:

   (a) $\overline{A} \cup B$

   (b) $\overline{A} \cap B$

   (c) $A \cap (\overline{B \cap C})$

2. Suponha que A e B sejam eventos tais que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Determine:

   (a) $P(\overline{A})$

   (b) $P(A \cup B)$

3. Em cada item a seguir, explique o porquê da afirmativa estar INCORRETA:

   (a) A probabilidade de um ônibus passar num determinado ponto na hora prevista é $0,40$. Então a probabilidade de ele passar no ponto fora da hora prevista é $0,55$.

   (b) Uma pessoa participa de um jogo no qual sua probabilidade de ganhar é $\frac{1}{10}$. Se ela participa de 5 partidas então sua probabilidade de ganhar é $\frac{5}{10}$.

   (c) A probabilidade de um produto ter seu preço aumentado de um determinado mês para o seguinte é $0,7$. Então, a probabilidade do produto ter seu preço diminuído nesse mesmo período é $0,3$.

   (d) São lançados um dado branco e um dado verde. A probabilidade de sair 6 no dado branco é $1/6$ e a probabilidade de sair 6 no dado verde é $1/6$. Então a probabilidade de sair 6 em ambos os dados é $1/6 + 1/6 = 2/6$.

   (e) Numa escola há 10 turmas. Se um estudante dessa escola é selecionado ao acaso, então a probabilidade de que pertença a uma certa turma é $1/10$.

4. Sejam A e B eventos associados a um certo experimento aleatório. Sabe-se que $P(A) = a$, $P(B) = b$ e $P(A \cap B) = c$. Determine, em função de a, b e c, as seguintes probabilidades:

   (a) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

   (b) $P(\overline{A} \cap B)$

   (c) $P(\overline{A} \cup B)$

   (d) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

5. Seja Ω o espaço amostral. Mostre que:

   (a) $A \subset B \subset \Omega \Rightarrow P(A) = P(B) - P(B - A)$.

   (b) $A \subset B \subset \Omega \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

6. Sejam A, B e C eventos associados a um certo experimento aleatório. Sabendo-se que

   $P(A) = P(B) = P(C) = 1/4$

   $P(A \cap B) = P(B \cap C) = 0 \quad$ e $\quad P(A \cap C) = 1/8,$

   calcule a probabilidade de ocorrer pelo menos um dos eventos A, B ou C.

7. Suponha que A, B e C sejam eventos tais que

   $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{5}$

   $P(A \cap B) = P(B \cap C) = \frac{1}{10}$

   $P(A \cap C) = \frac{1}{6}$

   Calcule a probabilidade de ocorrer cada evento abaixo:

   (a) $P(\overline{A})$

   (b) $P(A \cup B)$

8. Seja Ω o espaço amostral de um experimento aleatório e sejam $A, B, C \subset \Omega$. Mostre que

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C)$$
$$-P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)\ .$$

9. Uma gaveta contém 100 parafusos, 60 porcas e 40 pregos. Metade dos parafusos, metade das porcas e metade dos pregos estão enferrujados. Uma dessas peças é retirada, ao acaso. Qual a probabilidade de que ela seja um parafuso ou uma porca ou que esteja enferrujada?

10. Dois eventos A e B são tais que $P(A) = 0,30$ e $P(B) = 0,90$.

    (a) Se $P(A \cap B) = 0,20$, quanto é $P(A \cup B)$?

    (b) A e B podem ser mutuamente exclusivos?

Auto-avaliação

No exercício 3, certifique-se de ter compreendido bem claramente a razão pela qual cada afirmativa é falsa. Para isso, relembre as propriedades da probabilidade, vistas na aula 17. Use diagramas de Venn para ajudá-lo a interpretar os enunciados dos exercícios. Caso sinta dúvidas, solicite a ajuda do tutor da disciplina.

Aula 21 – Probabilidade condicional e Regra da multiplicação

Objetivos

Nesta aula você verá que o fato de um evento ocorrer pode afetar a probabilidade de ocorrência de outro evento e aprenderá a determinar essa probabilidade.

Pré-requisitos: aulas 14 a 20.

Introdução

Consideremos o experimento de extrair, ao acaso, duas bolas de uma urna contendo bolas pretas e bolas brancas. Vamos analisar a diferença entre fazer a segunda retirada com ou sem reposição da primeira bola.

Para fixar idéias, vamos supor que a urna contenha 80 bolas pretas e 20 bolas brancas. Vamos retirar duas bolas, uma após a outra e verificar suas cores.

Sejam os eventos A: "a primeira bola é preta"e B: "a segunda bola é preta".

1. Retirada com reposição:

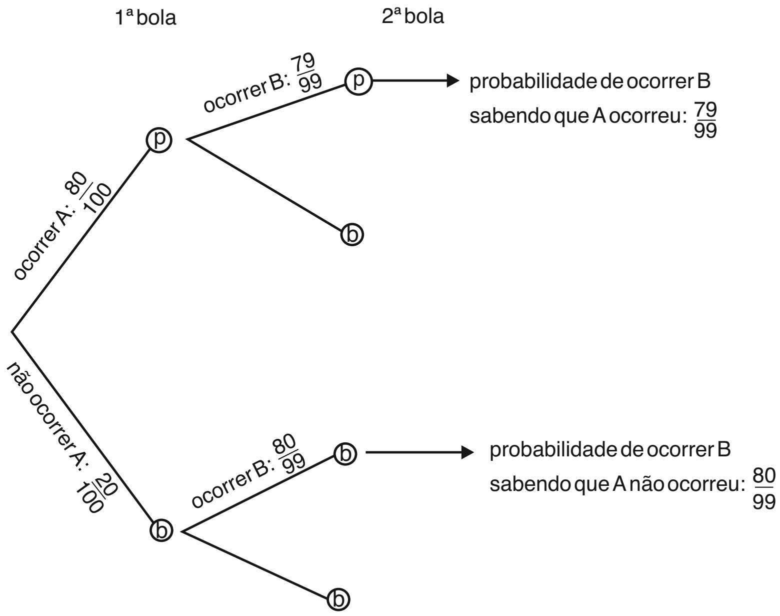
   Neste caso, a cada retirada, haverá 80 bolas pretas num total de 100 bolas. Logo, $P(A) = P(B) = \frac{80}{100}$.

2. Retirada sem reposição:

   Agora não é tão imediato determinar a probabilidade de B ocorrer. A probabilidade do evento A continua sendo $\frac{80}{100}$. Para determinar $P(B)$, precisamos saber a quantidade de bolas de cada cor restante na urna.

   Se A não ocorreu, o número de bolas pretas continua sendo 80 e o total passa a ser 99. Então, a probabilidade de B ocorrer, dado que A não ocorreu, é $\frac{80}{99}$.

   Se A ocorreu, há 79 bolas pretas num total de 99 bolas. Então, a probabilidade de B ocorrer, dado que A ocorreu, é $\frac{79}{99}$.

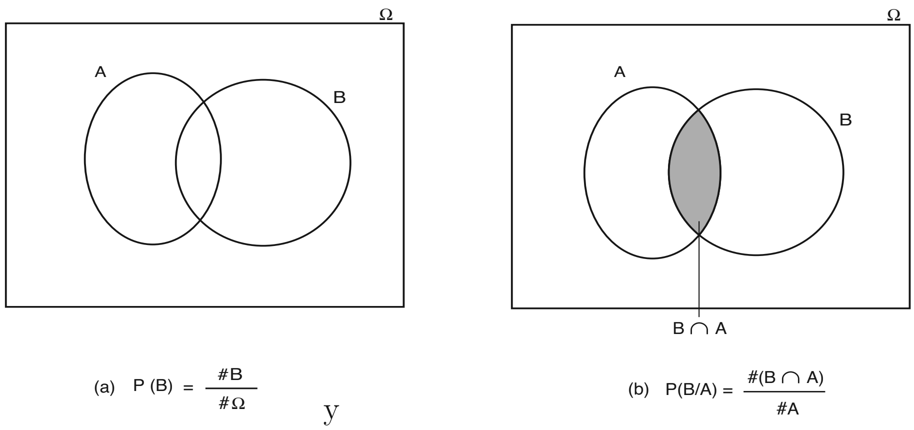


Afinal, qual o valor de $P(B)$? Mais adiante, na aula 22, veremos como determinar a probabilidade de B.

O fato de a ocorrência ou não de um evento alterar a probabilidade de um outro evento leva à caracterização de *probabilidade condicional*:

> Sejam A e B eventos associados a um experimento aleatório. Representamos a *probabilidade condicional de B dado que A ocorreu* por $P(B|A)$ (lê-se “probabilidade de B dado A”).

A figura a seguir ilustra o que ocorre em cada caso:



(a) Quando calculamos $P(B)$, estamos calculando a chance de estarmos em B, sabendo que estamos em Ω.

(b) Quando calculamos $P(B|A)$, estamos calculando a chance de estarmos em B, sabendo que estamos em A. Neste caso, o nosso espaço amostral se reduz a A, uma vez que o evento A ocorreu.

Supondo Ω eqüiprovável, temos $P(B|A) = \frac{\#(B\cap A)}{\#A}$. Dividindo o numerador e o denominador na expressão de $P(B|A)$ por $\#\Omega$, temos:

$$P(B|A) = \frac{\frac{\#(B\cap A)}{\#\Omega}}{\frac{\#A}{\#\Omega}} = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} .$$

Temos, então:

Probabilidade condicional de B dado A:

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \quad \text{(desde que } P(A) > 0)$$

Exemplo 50

Um dado equilibrado é lançado duas vezes. O par de números da face de cima é anotado. Sejam os eventos:

A: "a soma dos números obtidos é 10"

B: "o primeiro número do par é menor do que o segundo".

Vamos determinar $P(A), P(B), P(B|A), P(A\cap B)$ e verificar a relação entre essas probabilidades.

Solução:

Vimos anteriormente que o espaço amostral desse experimento é formado pelos 36 pares (i, j) obtidos fazendo i variar de 1 a 6 e j variar de 1 a 6. Temos também que Ω é um espaço amostral eqüiprovável, pois o dado é equilibrado.

Temos:

$A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$ e
B = $\{$(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), $(3, 4), (3, 5), (3, 6),$
$(4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$

Assim, $\#A = 3$ e $\#B = 15$.

Logo, $P(A) = \frac{3}{36}$ e $P(B) = \frac{15}{36}$.

Se A ocorre, sabemos que o par obtido é um dos que compõem A : $(4, 6), (5, 5)$ ou $(6, 4)$. Apenas um deles (o par $(4, 6)$) pertence a B. Logo, $P(B|A) = \frac{1}{3}$.

O evento $A \cap B$ ocorre somente se um par tem a soma dos elementos igual a 10 e o primeiro elemento menor que o segundo. O único par que satisfaz a essas duas condições é o par $(4, 6)$. Logo, $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$.

Podemos constatar, portanto, que

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3} = P(B|A)$$

e que

$$P(B) \neq P(B|A) \; .$$

Note que temos duas maneiras de calcular a probabilidade condicional $P(B|A)$:

1. diretamente, considerando o espaço amostral reduzido a A;
2. usando a fórmula, onde $P(B \cap A)$ e $P(A)$ são calculadas em relação a Ω.

Exemplo 51

Um número é escolhido ao acaso no conjunto $\{1, 2, 3, ..., 50\}$. Qual a probabilidade desse número ser par, sabendo-se que é um múltiplo de 5?

Solução:

Sejam os eventos:

A: sair número par

B: sair número múltiplo de 5

Vamos resolver o problema de dois modos:

$1^{o.}$ modo: Considerando que o evento B ocorreu, restringimos o espaço amostral a $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$.

Restrito a esse espaço, $A = \{10, 20, 30, 40, 50\}$.

Logo, a probabilidade pedida é

$$\frac{\#A}{\#B} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \; .$$

$2^{o.}$ modo: Queremos calcular a probabilidade condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \; ,$$

sendo $\Omega = \{1, 2, \ldots, 50\}$.

Temos $\#B = 10$, $A \cap B = \{10, 20, 30, 40, 50\}$ e B já foi listado no item anterior.

Daí,

$$P(A \cap B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10} \quad \text{e}$$

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{10}{50} \; .$$

Logo,

$$P(A|B) = \frac{\frac{5}{50}}{\frac{10}{50}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \; .$$

A expressão da probabilidade condicional permite a obtenção de uma importante relação, conhecida como **teorema da multiplicação de probabilidades**:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B|A)}$$

O mesmo, expresso em palavras: A probabilidade da interseção de dois eventos é o produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro ocorrer dado que o primeiro ocorreu.

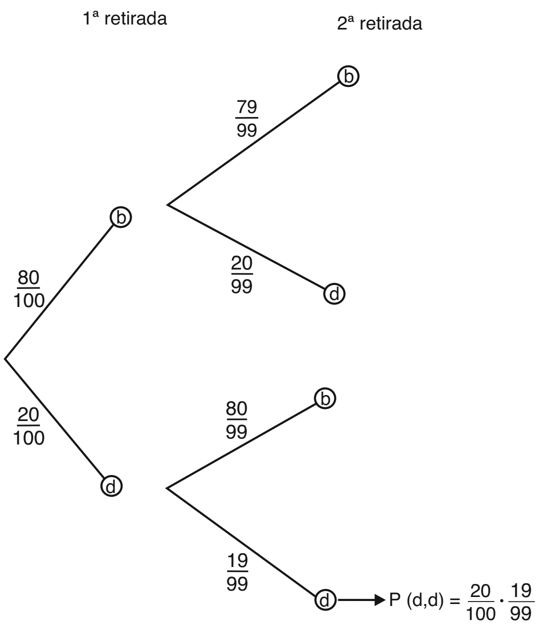
Assim, poderíamos também escrever $P(A \cap B) = P(B).P(A|B)$.

Exemplo 52

Um lote contém 80 peças boas (b) e 20 peças defeituosas (d). Duas peças são retiradas ao acaso, uma após a outra, sem reposição. Qual a probabilidade de ambas serem defeituosas?

Solução:

O espaço amostral é $\Omega = \{(b, b), (b, d), (d, b), (d, d)\}$. A resolução fica mais simples se construirmos a árvore das probabilidades:



Sejam os eventos:

A: "primeira peça defeituosa"

B: "segunda peça defeituosa"

Então, queremos $P(A \cap B) = P(d, d)$.

Temos:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = \frac{20}{100}.\frac{19}{99} = \frac{19}{495} \ .$$

Exemplo 53

No lançamento de um dado equilibrado, calcular as seguintes probabilidades:

1. obter mais do que 4 pontos;
2. obter mais do que 4 pontos, sabendo que o resultado foi um número ímpar de pontos;
3. obter mais do que 4 pontos, sabendo que o resultado foi mais do que 3 pontos.

Solução:

Como o dado é equilibrado, os resultados são eqüiprováveis.

Sejam os eventos:

A: sair mais do que 4 pontos

B: sair número ímpar

C: sair número maior do que 3

Então temos:

1. $A = \{5, 6\}$. Logo, $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
2. Queremos $P(A|B)$. Sabemos que essa probabilidade é dada por $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Temos:

   $B = \{1, 3, 5\} \ \Rightarrow \ \#B = 3 \ \Rightarrow \ P(B) = \frac{3}{6}$.

   $A \cap B = \{5\} \ \Rightarrow \ \#(A \cap B) = 1 \ \Rightarrow \ P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

   Logo, $P(A|B) = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \dfrac{1}{3}$.

3. Queremos $P(A|C)$. Temos:

   $C = \{4,5,6\} \Rightarrow \#C = 3 \Rightarrow P(C) = \frac{3}{6}$.

   $A \cap C = \{5,6\} \Rightarrow \#(A \cap C) = 2 \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{2}{6}$.

   Logo, $P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \dfrac{2}{3}$.

Exemplo 54

1. Um casal tem dois filhos e sabe-se que um deles é homem. Qual a probabilidade de que o outro seja homem?

2. Um casal tem dois filhos e sabe-se que o mais velho é homem. Qual a probabilidade de que o mais novo seja homem?

Solução:

O espaço amostral é formado pelos pares $(h,h),(h,m),(m,h),(m,m)$, onde representamos homem por h e mulher por m. Como são resultados eqüiprováveis, cada um tem probabilidade $\frac{1}{4}$ de ocorrer.

1. Sabendo que um dos filhos é homem, o espaço amostral se reduz a $\{(h,h),(h,m),(m,h)\}$. O evento "o outro filho é homem"é $\{(h,h)\}$. Logo, a resposta, neste caso, é $\frac{1}{3}$.

2. Como o filho homem é o mais velho, o espaço amostral fica restrito a $\{(h,h),(h,m)\}$. Queremos a probabilidade de o segundo filho ser homem, isto é, queremos que ocorra $\{(h,h)\}$. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{1}{2}$.

Resumo

Nesta aula aprendemos a determinar a probabilidade de um evento, considerando que um outro evento, associado ao mesmo experimento, tenha ocorrido. A probabilidade do evento B dado que o evento A ocorreu é dada por

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} .$$

Vimos que há duas maneiras de calcular a probabilidade condicional $P(B|A)$:

1. diretamente, considerando o espaço amostral reduzido a A;
2. usando a fórmula, onde $P(B \cap A)$ e $P(A)$ são calculadas em relação ao espaço amostral do experimento.

A partir da fórmula da probabilidade condicional, obtivemos a regra da multiplicação:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = P(B).P(A|B) .$$

Exercícios

1. Uma carta é retirada, ao acaso, de um baralho de 52 cartas. Qual a probabilidade de ser de ouros, sabendo que é vermelha?
2. Um dado equilibrado é lançado 2 vezes e é anotado o par de números obtidos. Se a soma dos resultados é 7, qual a probabilidade de ter saído 3 na primeira jogada?
3. Duas cartas são retiradas, sem reposição, de um baralho de 52 cartas. Qual a probabilidade de
   (a) ambas serem de paus?
   (b) ambas serem do mesmo naipe?

4. Num prédio vivem 30 pessoas, das quais 14 são homens. Seis homens e doze mulheres trabalham o dia todo. Os demais moradores são estudantes. Uma dessas pessoas é escolhida ao acaso. Qual a probabilidade dela ser:

   (a) mulher?

   (b) estudante?

   (c) mulher e estudante?

   (d) homem, sabendo que trabalha?

   (e) estudante, sabendo que é mulher?

5. Dois dados equilibrados são lançados. Determine a probabilidade de:

   (a) obter soma de 8 pontos, sabendo que a soma é maior que 7;

   (b) obter soma de 6 pontos, sabendo que os números observados são iguais.

6. A tabela a seguir mostra a resposta de 1000 compradores de carros novos ou usados de um certo modelo, quanto a estarem ou não satisfeitos com a respectiva compra:

	satisfeito	não satisfeito	total
novo	350	130	480
usado	400	120	520
	750	250	1000

   Representando por S e N os eventos "satisfeito"e "novo", respectivamente, determine as probabilidades abaixo.

   (a) $P(S \cap N)$

   (b) $P(\overline{S} \cap N)$

   (c) $P(N|S)$

   (d) $P(\overline{N}|S)$

   (e) $P(S|\overline{N})$

   (f) $P(S|N)$

Auto-avaliação

Você deve comprender claramente o que ocorre quando um evento tem sua chance de ocorrência afetada pela ocorrência de outro. Caso você sinta dúvidas para resolver os exercícios, leia o resumo atentamente. Se necessário, solicite a ajuda do tutor da disciplina.

Aula 22 – Eventos independentes e Regra da probabilidade total

Objetivos

Nesta aula você aprenderá a identificar eventos independentes um do outro. Aprenderá, também, como calcular a probabilidade de um evento a partir de sua probabilidade condicionada à ocorrência de outros eventos.

Pré-requisitos: aulas 14 a 21.

Eventos independentes

Na aula 21 estudamos a probabilidade condicional, ou seja, a probabilidade de eventos cujas ocorrências são afetadas pela ocorrência de outro evento. Dados dois eventos A e B, associados a um mesmo experimento, pode acontecer de a ocorrência de A não alterar a probabilidade de B. Quando isso acontece, dizemos que B e A são *eventos independentes*.

Poderíamos estabelecer a independência de B em relação a A, impondo

$$P(B|A) = P(B) \quad \text{(ou, equivalentemente, que } P(A|B) = P(A))$$

Essa relação, porém, exige que $P(A)$ (ou $P(B)$) seja não-nula. O teorema da multiplicação de probabilidades fornece uma outra expressão, usando a igualdade entre as probabilidades condicionais e absolutas:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = P(A).P(B)$$

Esta igualdade, mais geral, é a que caracteriza **eventos independentes**. Temos, por definição:

$$\boxed{A \text{ e } B \text{ são eventos independentes} \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A).P(B)}$$

Exemplo 55

Duas pessoas, A e B, e somente elas, estão tentando resolver um mesmo problema, independentemente uma da outra. A probabilidade de A resolver o problema é $3/4$ e a probabilidade de B resolver é $1/2$.

1. Qual a probabilidade de que ambas resolvam o problema?

2. Qual a probabilidade do problema ser resolvido?

Solução:

Denotemos por $P(A)$ e $P(B)$ as probabilidades de A e B resolverem o problema, respectivamente.

1. Queremos $P(A \cap B)$. Como os eventos são independentes, temos

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{3}{4}.\frac{1}{2} = \frac{3}{8} .$$

2. Como somente as pessoas A e B estão tentando resolver o problema, queremos $P(A \cup B)$ que, pela regra da adição, é igual a $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Do item a) temos $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$. Logo,

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8} .$$

Exemplo 56

Uma moeda equilibrada é lançada 5 vezes. Qual a probabilidade de obtermos cara nos 5 lançamentos?

Solução:

Sejam os eventos:

A_i : ocorre cara no i-ésimo lançamento $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$

Como cada lançamento não afeta os demais, os eventos são independentes. Logo,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_5) = P(A_1).P(A_2). \ \ldots \ .P(A_5) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} .$$

Exemplo 57

Sejam A e B eventos associados a um experimento aleatório. Suponha que $P(A) = 0,4, \ P(A \cup B) = 0,7$ e $\ P(B) = p$.

1. Determine p para que A e B sejam mutuamente exclusivos.

2. Determine p para que A e B sejam independentes.

Solução:

1. Queremos $A \cap B = \emptyset$, ou seja, $P(A \cap B) = 0$.

   Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, queremos $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Logo, $0,7 = 0,4 + p \Rightarrow p = 0,3$.

2. Queremos $P(A \cap B) = P(A).P(B)$. (1)

   Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, temos que

   $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$. (2)

   Substiuindo (2) em (1), temos:

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) - P(A \cup B) &= P(A).P(B) \\ 0,4 + p - 0,7 &= 0,4.p \\ p &= 0,5 \end{aligned}.$$

Exemplo 58

Retiram-se duas cartas de um baralho com 52 cartas. Vamos determinar a probabilidade dessas duas cartas serem um ás e um 10, em qualquer ordem.

Solução:

Seja A o evento desejado.

Então podemos dizer que $A = B \cup C$, onde:

B: ás na primeira retirada e 10 na segunda

C: 10 na primeira e ás na segunda.

Os eventos B e C são mutuamente exclusivos. Logo, $P(A) = P(B) + P(C)$. Temos que determinar $P(B)$ e $P(C)$. Podemos escrever:

$$B = B_1 \cap B_2, \quad \text{onde} \quad \begin{cases} B_1: & \text{ás na primeira retirada} \\ B_2: & \text{10 na segunda retirada} \end{cases}$$

$$C = C_1 \cap C_2, \quad \text{onde} \quad \begin{cases} C_1: & \text{10 na primeira retirada} \\ C_2: & \text{ás na segunda retirada} \end{cases}$$

Aplicando o teorema da multiplicação, temos:

$$P(B) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1).P(B_2|B_1) = \frac{4}{52}.\frac{4}{51}$$

e

$$P(C) = P(C_1 \cap C_2) = P(C_1).P(C_2|C_1) = \frac{4}{52}.\frac{4}{51}\ .$$

Então, aplicando a propriedade aditiva, obtemos

$$P(A) = P(B) + P(C) = \frac{4}{52}\frac{4}{51} + \frac{4}{52}\frac{4}{51} = \frac{8}{663} .$$

Partição

Considere o lançamento de um dado equilibrado e a observação do número da face de cima. Temos $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Sejam os eventos:

$A_1 = \{1,2,3\}$

$A_2 = \{4,5\}$

$A_3 = \{6\}$

Note que quaisquer dois desses eventos são mutuamente exclusivos. Além disso, a união deles é o evento certo: $A \cup B \cup C = \Omega$. Podemos afirmar, neste caso, que:

- <u>algum</u> deles ocorrerá, e

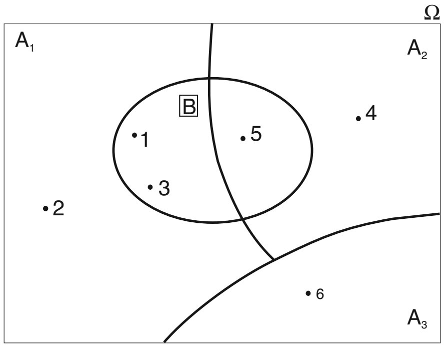
- <u>apenas um</u> deles ocorrerá.

Dizemos que os eventos A_1, A_2 e A_3 formam uma partição do espaço amostral Ω. De modo geral, temos:

> Seja Ω um espaço amostral. Os eventos $A_1, A_2, ..., A_k$ formam uma **partição** de Ω se:
>
> 1. $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$
> 2. $\cup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$
> 3. $P(A_i) > 0$, para todo i

Consideremos novamente os eventos A_1, A_2 e A_3 e seja o evento $B = \{1,3,5\}$.

Podemos escrever $B = \{1,3\} \cup \{5\} = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3)$, como ilustra a figura da próxima página.



O conjunto $B \cap A_3$ é vazio, mas isso não invalida a igualdade. Essa decomposição do evento B permite escrevê-lo como união de eventos dois a dois mutuamente exclusivos. Podemos, então, aplicar a lei da adição:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)\ .$$

Usando a regra da multiplicação, obtemos:

$$P(B) = P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + P(A_3).P(B|A_3)\ .$$

Vamos fazer os cálculos para verificar a validade dessa expressão. Como o dado é equilibrado, temos:

$$\begin{array}{llll} P(A_1) & = \frac{3}{6} & P(B|A_1) & = \frac{2}{3} \\ P(A_2) & = \frac{2}{6} & P(B|A_2) & = \frac{1}{2} \\ P(A_3) & = \frac{1}{6} & P(B|A_3) & = 0 \end{array}$$

Então,

$$P(B) = \frac{3}{6}.\frac{2}{3} + \frac{2}{6}.\frac{1}{2} + \frac{1}{6}.0 = \frac{3}{6}\ ,$$

o que corresponde ao valor esperado (visto que $\#B = 3$ e $\#\Omega = 6$).

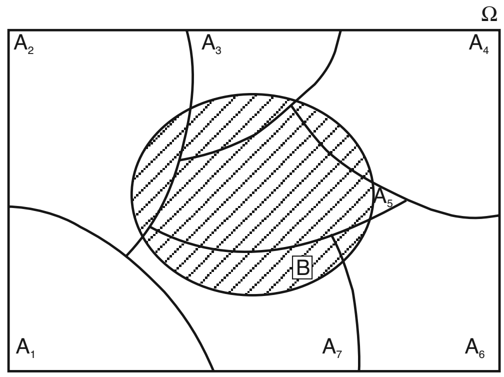
De modo geral, temos o seguinte resultado, conhecido como **teorema da probabilidade total**:

Seja $\{A_1, ..., A_k\}$ uma partição do espaço amostral Ω. Seja $B \subset \Omega$. Então,

$$B = (B \cap A_1) \cup ... \cup (B \cap A_k) \quad \text{e}$$

$$P(B) = P(A_1).P(B|A_1) + ... + P(A_k).P(B|A_k)$$

A figura a seguir ilustra essa situação no caso $k = 7$:

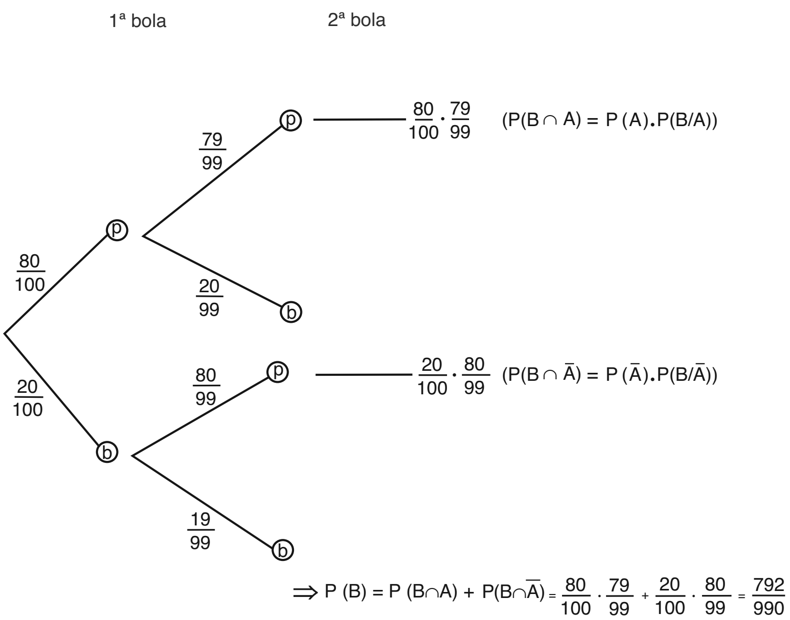


Esse resultado é de grande utilidade nos problemas em que é difícil calcular diretamente a probabilidade de um certo evento. Como primeiro exemplo, vamos determinar a probabilidade do evento B, associado ao experimento apresentado no início da aula 21 (nós ficamos devendo esse cálculo para mais tarde, você se lembra?).

Retomemos o exemplo: retiramos, ao acaso, duas bolas de uma urna contendo 80 bolas pretas e 20 bolas brancas, uma após a outra, sem reposição, e observamos suas cores. Queríamos calcular a probabilidade do evento B: "a segunda bola é preta". O evento A: "a primeira bola é preta" e $\overline{A}$ formam, obviamente, uma partição de Ω. Pelo teorema da probabilidade total, temos:

$$\begin{aligned} P(B) = P[(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})] &= P(A).P(B|A) + P(\overline{A}).P(B|\overline{A}) \\ &= \tfrac{80}{100}.\tfrac{79}{99} + \tfrac{20}{100}.\tfrac{80}{99} = \tfrac{792}{990}\ . \end{aligned}$$

Uma outra maneira de resolver faz uso de uma árvore, na qual vamos escrevendo as probabilidades envolvidas, conforme indica o diagrama abaixo:



Exemplo 59

Três máquinas numa fábrica produzem um mesmo produto. A tabela abaixo esquematiza a produção ao longo de um mês:

máquina	unidades defeituosas	unidades produzidas
1	40	2000
2	20	1000
3	40	1000

Uma unidade do produto é extraída ao acaso, do lote total produzido nesse mês. Qual a probabilidade de que seja defeituosa?

Solução:

Sejam os eventos:

D: a peça é defeituosa

M_1: a peça foi produzida na máquina 1.

M_2: a peça foi produzida na máquina 2.

M_3: a peça foi produzida na máquina 3.

Queremos $P(D)$.

Temos que $\{M_1, M_2, M_3\}$ forma uma partição do espaço amostral associado ao experimento "extrair uma peça ao acaso e verificar a máquina que a produziu". Pelo teorema da probabilidae total, podemos escrever:

$$P(D) = P(M_1).P(D|M_1) + P(M_2).P(D|M_2) + P(M_3).P(D|M_3) \ .$$

O espaço amostral é eqüiprovável. Assim,

$P(M_1) = \frac{2000}{4000} = \frac{1}{2}$

$P(M_2) = \frac{1000}{4000} = \frac{1}{4}$

$P(M_3) = \frac{1000}{4000} = \frac{1}{4}$

$P(D|M_1) = \frac{40}{2000} = \frac{1}{50}$

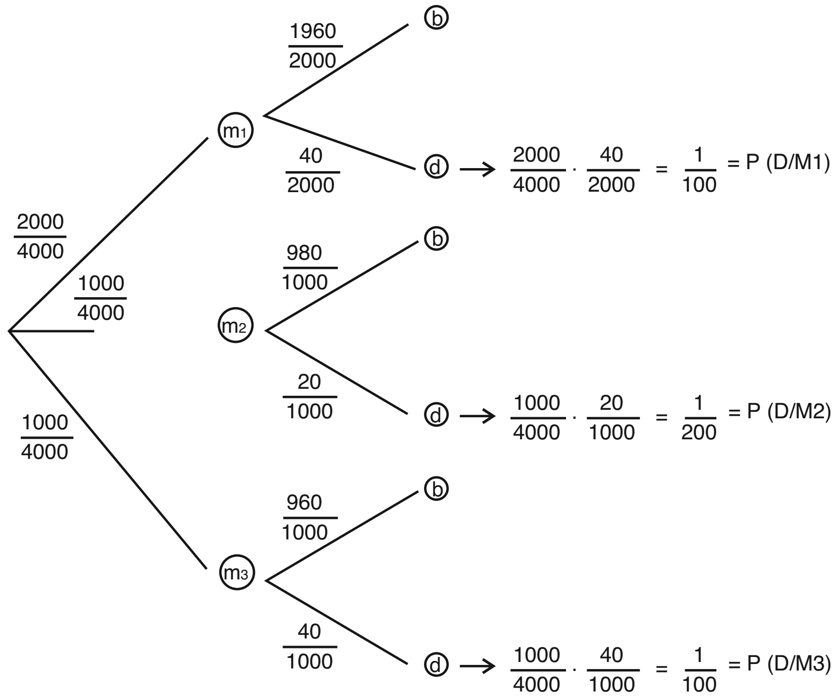
$P(D|M_2) = \frac{20}{1000} = \frac{1}{50}$

$P(D|M_3) = \frac{40}{1000} = \frac{1}{25}$

Logo,

$$P(D) = \frac{1}{2}.\frac{1}{50} + \frac{1}{4}.\frac{1}{50} + \frac{1}{4}.\frac{1}{25} = \frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{100} = \frac{1}{40} \ .$$

Uma outra maneira de abordar o problema é contruir a árvore de probabilidades:



Logo, $P(D) = \frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{100} = \frac{1}{40}$.

Resumo

Nesta aula aprendemos a identificar eventos independentes e vimos o teorema da probabilidade total. Esse teorema é útil em problemas em que é mais fácil determinar as probabilidades condicionais de um certo evento do que a sua probabilidade absoluta. Para isso, precisamos ter eventos que formem uma partição do espaço amostral.

Você já deve ter notado que pode haver mais de uma maneira de se interpretar e resolver um problema. À medida que avançamos na teoria, vamos contando com mais recursos para enfrentar novas situações propostas.

Exercícios

1. A e B são dois eventos independentes associados a um mesmo experimento aleatório. Se $P(A) = p$ e $P(B) = q$, determine a probabilidade de ocorrer:

   (a) os dois eventos;

   (b) pelo menos um dos eventos.

2. Sejam A e B eventos independentes associados a um experimento aleatório. Sabendo que $P(A) = \frac{1}{4}$ e $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$, calcule $P(B)$.

3. Um dado é viciado de maneira que a probabilidade de sair certo número é proporcional ao seu valor (por exemplo, o número 5 é 5 vezes mais provável de sair do que o número 1). Determine a probabilidade :

   (a) de cada evento simples;

   (b) do evento A: “sair número ímpar”;

   (c) de sair 3, sabendo-se que o número é ímpar;

   (d) de sair número par, sabendo-se que saiu um número maior que 3.

4. Duas pessoas participam de uma maratona. A probabilidade da primeira completar o percurso é $2/3$ e a probabilidade da segunda completar o percurso é $3/5$. Qual a probabilidade de:

   (a) ambas completarem o percurso?

   (b) ao menos uma delas completar o percurso?

5. Uma carta é extraída, ao acaso, de um baralho de 52 cartas. Sejam os eventos:

   A: copas

   B: rei

   C: rei ou valete

   Determine $P(A), P(B), P(C), P(A \cap B), P(A \cap C)$ e $P(B \cap C)$. Quais dos pares de eventos são independentes?

6. Um grupo de 100 pessoas é classificado segundo a cor dos olhos e dos cabelos, conforme indica a tabela:

olhos → cabelo ↓	azuis	castanhos
loura	36	12
morena	9	32
ruiva	5	6

   Uma dessas pessoas é escolhida ao acaso. Qual a probabilidade dela ser:

   (a) ruiva?

   (b) loura e de olhos castanhos?

   (c) morena e de olhos azuis?

   (d) morena, sabendo que possui olhos azuis?

   (e) morena ou de olhos azuis?

7. Um experimento aleatório possui espaço amostral $\{e_1, ..., e_7\}$, eqüiprovável. Considere os eventos:

   $A = \{e_1, e_3, e_5, e_7\}$

   $B = \{e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Determine $P(A), P(\overline{A}), P(A \cup B), P(A \cap B), P(B|A)$. Os eventos A e B são mutuamente exclusivos? Os eventos A e B são independentes? Justifique suas respostas.

Auto-avaliação

Caro aluno, esta aula exige um pouco mais de dedicação e de tempo. A resolução dos problemas envolve o cálculo de muitas probabilidades. Se você sentiu dificuldades, vá com calma. Leia atentamente cada enunciado e identifique todos os eventos envolvidos, destacando aqueles que formam uma partição do espaço amostral. A árvore de probabilidades pode ajudá-lo a compreender melhor a situação descrita em cada exercício. Caso seja necessário, solicite a ajuda do tutor da disciplina.

Aula 23 – Teorema de Bayes

Objetivos

Pré-requisitos: aulas 14 a 22.

Nesta aula você aprenderá como calcular a "probabilidade da causa", e como determinar uma probabilidade inversa. Trata-se de um interessante resultado, devido ao matemático Thomas Bayes (1701-1761).

Lê-se "Bêis"

Introdução

Vamos retomar o experimento do exemplo 59, da aula 22. Relembrando: três máquinas numa fábrica produzem um mesmo produto. Num mês, as máquinas 1, 2 e 3 produziram, respectivamente, 2000, 1000 e 1000 peças. Dessa produção, 40, 20 e 40 peças, respectivamente, eram defeituosas. Uma peça é retirada ao acaso, e constata-se que é defeituosa. Ela pode ter sido produzida por qualquer uma das três máquinas. Como calcular a probabilidade de que ela tenha sido produzida pela máquina 1? Isto é, qual o valor de $P(M_1|D)$?

Sendo, como antes, os eventos:

D: a peça é defeituosa.

M_1: a peça foi produzida na máquina 1.

M_2: a peça foi produzida na máquina 2.

M_3: a peça foi produzida na máquina 3.

Da definição de probabilidade condicional, sabemos que

$$P(M_1|D) = \frac{P(M_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(M_1).P(D|M_1)}{P(D)} \ .$$

Da aula 22, temos:

$P(M_1) = \frac{1}{2}$

$P(D|M_1) = \frac{1}{50}$

$P(D) = \frac{1}{40}$

Logo,

$$P(M_1|D) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{50}}{\frac{1}{40}} = \frac{2}{5} \ .$$

Vamos generalizar o procedimento que usamos no exemplo anterior:

Seja $\{B_1, ..., B_k\}$ uma partição do espaço amostral Ω.

Seja $A \subset \Omega$.

Suponhamos conhecidas as probabilidades $P(B_i)$ e $P(A|B_i)$, para $i = 1, ..., k$. Então,

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i).P(A|B_i)}{P(A)}$$

Mas,

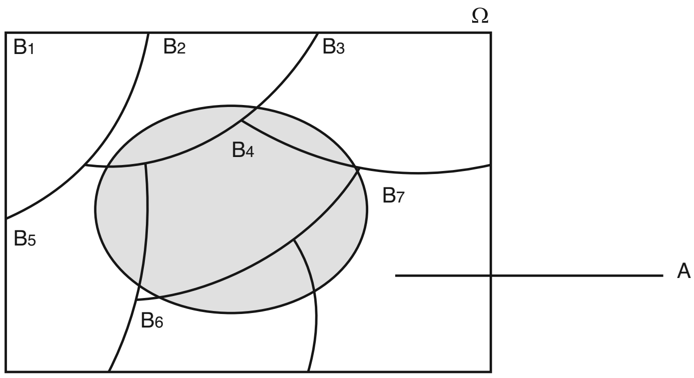
$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ... \cup (A \cap B_k)\ .$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_k) \\ &= P(B_1).P(A|B_1) + P(B_2).P(A|B_2) + ... + P(B_k).P(A|B_k). \end{aligned}$$

Dessa forma obtemos o resultado abaixo, conhecido como **Teorema de Bayes**:

$$\boxed{P(B_i|A) = \frac{P(B_i).P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(B_j).P(A|B_j)}, \qquad i = 1, ..., k}$$



A posteriori é uma expressão em latim e significa **após, depois de**. Ela se opõe à expressão *a priori*, que significa **antes de**. Elas não se referem apenas ao tempo, mas à necessidade de haver ou não uma demonstração de sua veracidade.

O Teorema de Bayes segue o seguinte encadeamento lógico: considerando que diferentes causas podem ser responsáveis por um mesmo efeito, se esse efeito ocorre, como determinar a probabilidade de ter sido provocado por uma determinada causa, entre as possíveis? Por usar esse raciocínio é que o Teorema de Bayes também é conhecido como "probabilidade das causas" ou "probabilidade *a posteriori*", uma vez que o efeito já foi observado.

Exemplo 60

Numa faculdade, 45% dos alunos fazem licenciatura em Matemática, 35% fazem Economia e 20% Administração. Do total de alunos de Matemática, Economia e Administração, 40%, 20% e 50%, respectivamente, são mulheres. Um aluno é escolhido, ao acaso. Determine a probabilidade de cursar Economia, sabendo que é uma mulher.

Solução:

Sejam os eventos

L: ser aluno de licenciatura em Matemática.

E: ser aluno de Economia.

A: ser aluno de Administração.

M: ser mulher.

Veja que, pelos dados do enunciado, temos $P(L) = 0,45$; $P(E) = 0,35$; $P(A) = 0,20$; $P(M|L) = 0,40$; $P(M|E) = 0,20$ e $P(M|A) = 0,50$.

Queremos $P(E|M)$.

Sabemos que a probabilidade condicional é dada por

$$P(E|M) = \frac{P(E \cap M)}{P(M)} = \frac{P(E).(P(M|E)}{P(M)} \ ,$$

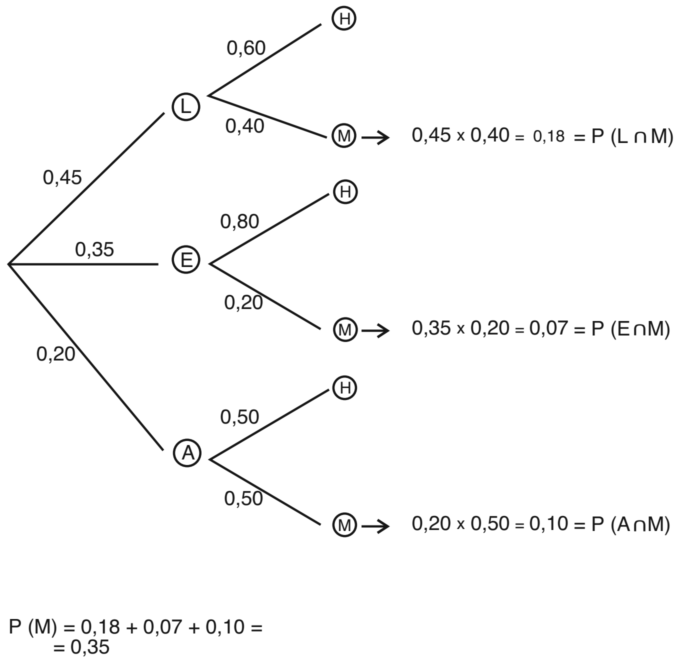
Os eventos L, E e A formam uma partição do espaço amostral associado ao experimento "escolher um aluno e anotar seu curso"(uma vez que a soma das proporções de cada curso é 100%). Podemos aplicar o teorema da probabilidade total e escrever:

$$\begin{aligned} P(M) &= P(M \cap L) + P(M \cap E) + P(M \cap A) = \\ &= P(L).P(M|L) + P(E).P(M|E) + P(A).P(M|A) = \\ &= (0,45 \times 0,40) + (0,35 \times 0,20) + (0,20 \times 0,50) = \\ &= 0,35 \end{aligned}$$

Substituindo esses valores na expressão da probabilidade pedida, temos:

$$P(E|M) = \frac{0,35 \times 0,20}{0,35} = 0,20 \ .$$

O problema também pode ser resolvido usando-se a árvore das probabilidades:



Logo,

$$P(E|M) = \frac{P(E \cap M)}{P(M)} = \frac{0,07}{0,35} = 0,2 \ .$$

Exemplo 61

Em certa comunidade, 1% da população tem uma doença. Em alguns casos, o exame realizado para detectar a doença pode dar uma indicação positiva para uma pessoa que não a possui. Sabe-se que a probabilidade de ocorrer um resultado positivo quando a pessoa tem a doença é 0,85 e quando não tem é 0,02. Uma pessoa dessa comunidade é escolhida ao acaso. Qual é a probabilidade de a pessoa ser portadora da doença, se o resultado do seu exame for positivo?

Solução:

Sejam os eventos:

S: o exame da pessoa escolhida dar positivo.

D: a pessoa escolhida ter a doença.

Queremos determinar $P(D|S)$.

Temos:

$P(D) = 0,01$. Logo, $P(\overline{D}) = 0,99$.

$P(S|D) = 0,85$

$P(S|\overline{D}) = 0,02$

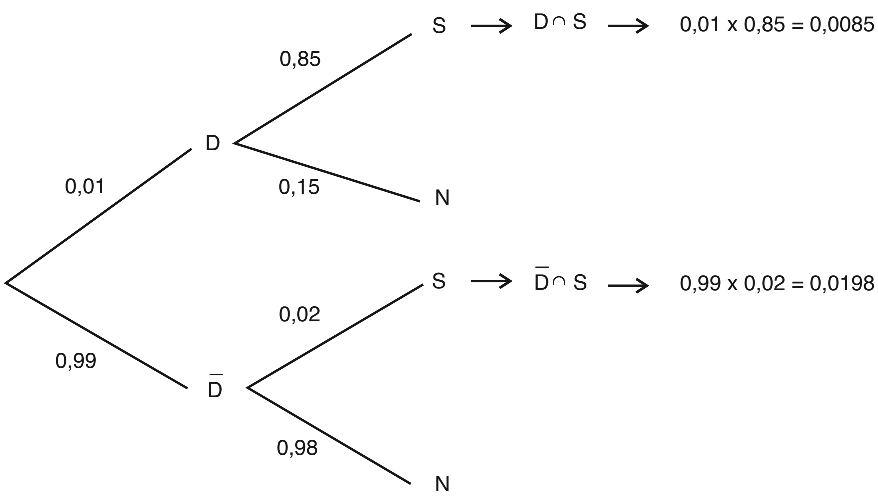
O evento S pode ocorrer estando a pessoa doente ou não, e esses dois eventos (respectivamente $S \cap D$ e $S \cap \overline{D}$) são mutuamente exclusivos. Logo, a probabilidade de ocorrer S é a probabilidade da união dos eventos $S \cap D$ e $S \cap \overline{D}$. Isto é:

$$
\begin{aligned}
P(D) &= P(S \cap D) + P(S \cap \overline{D}) = \\
&= P(D).P(S|D) + P(\overline{D}).P(S|\overline{D}) = \\
&= (0,01)(0,85) + (0,99).(0,02) = \\
&= 0,0085 + 0,0198 = \\
&= 0,0283
\end{aligned}
$$

Então, a probabilidade de uma pessoa ter a doença, por ter ocorrido um resultado positivo é:

$$P(D|S) = \frac{P(S \cap D)}{P(S)} = \frac{P(D).P(S|D)}{P(S)} = \frac{(0,01)(0,85)}{0,0283} = \frac{0,0085}{0,0283} = 0,30035\,.$$

Analise a árvore das probabilidades para chegar à mesma resposta.



P (S) = 0,0085 + 0,0198 = 0,0283

$$P\,(D/S) = \frac{P\,(D \cap S)}{P\,(S)} = \frac{0,0085}{0,0283} = 0,30035$$

Resumo

Nesta aula apresentamos o Teorema de Bayes. Esse resultado analisa a seguinte situação: supondo que um certo efeito pode ter diferentes causas, uma vez observado o efeito, qual a probabilidade de ter sido provocado por uma determinada causa? É como se pensássemos de uma forma “contrária” à usual. Por considerar que o efeito em observação já ocorreu, o teorema de Bayes também é conhecido como teorema das probabilidades *“a posteriori”*.

Exercícios

1. Sabe-se que 80% das pessoas que abrem crediário são boas pagadoras. Suponhamos que a probabilidade de um bom pagador possuir cartão de crédito seja de 0,9 e que um mau pagador tenha probabilidade 0,3 de possuir cartão de crédito. Uma pessoa é escolhida ao acaso entre as que abrem crediário. Calcule a probabilidade:

   (a) de que ela tenha cartão de crédito;

   (b) de ser boa pagadora, sabendo que tem cartão de crédito;

   (c) de ser boa pagadora, sabendo que não tem cartão de crédito.

2. Paulo e Roberto criam cães. Paulo tem 3 vezes mais cães que Roberto. Entre os cães de Paulo, 20% são de raça e entre os de Roberto, 10% são de raça. Um cão é encontrado. Sabe-se que pertence a Paulo ou a Roberto.

   (a) Qual a probabilidade de pertencer a Paulo?

   (b) Sabendo-se que o cão é de raça, qual a probabilidade de que pertença a Paulo?

3. Foi realizado um teste para detectar uma doença. Sabe-se que o teste é capaz de descobrir a doença em 97% das pessoas afetadas. Sabe-se também que o teste, erroneamente, identifica a doença em 5% das pessoas saudáveis. Além disso, sabe-se que, quando aplicado a pessoas que tenham algum outro tipo de doença, 10% são diagnosticados de forma incorreta.

   A população submetida ao teste era composta de 1% de pessoas afetadas pela doença, 96% de pessoas saudáveis e 3% de pessoas apresentando outras doenças.

Uma pessoa dessa população é escolhida ao acaso e seu teste deu positivo, isto é, foi detectada a doença. Qual a probabilidade de que ela esteja realmente com aquela doença?

4. Um aparelho para testar válvulas sempre detecta uma válvula ruim. No entanto, em 3% das vezes em que ele indica defeito, a válvula, de fato, está perfeita. Sabe-se que, num lote, 95% das válvulas estão boas. Uma válvula é retirada ao acaso desse lote. Ela é testada e é dada como estragada. Qual a probabilidade de se tratar de uma válvula boa?

5. Numa turma de terceiro ano de ensino médio, as quantidades de alunas e de alunos são iguais. Suponha que a probabilidade de um rapaz se dedicar às ciências exatas é 4/5 e que a probabilidade de uma moça se dedicar às ciências exatas é 2/5. Um estudante dessa turma é escolhido, ao acaso. Qual a probabilidade de :

   (a) ser um rapaz que se dedica às ciências exatas?

   (b) ser um estudante de ciências exatas?

   (c) ser do sexo masculino, sabendo que gosta de ciências exatas?

Auto-avaliação

Não se preocupe se você sentiu uma dificuldade maior nesta aula. Para ser compreendido e assimilado, o teorema de Bayes exige um pouco mais de atenção do que o conceito de probabilidade. Se você não conseguiu resolver os exercícios propostos, releia a aula, tentando entender passo a passo como o teorema vai surgindo. Acompanhe atentamente a resolução dos exemplos. Não é difícil, só diferente do raciocínio que vinha sendo aplicado nas aulas anteriores. Se você ainda ficar com dúvidas, solicite a ajuda do tutor da disciplina.

Aula 24 – Variável aleatória e Valor esperado

Objetivos

Nesta aula você aprenderá um conceito muito importante nos estudos estatísticos: a variável aleatória, e saberá como calcular seu valor esperado.

Pré-requisitos: aulas 14 a 22.

Variável aleatória

Os resultados de um experimento aleatório podem ser numéricos ou não. Experimentos como:

– anotar os tempos em uma maratona,

– medir a taxa de precipitação pluviométrica durante um período,

– lançar uma moeda três vezes e anotar a quantidade de coroas que ocorrem,

têm seus espaços amostrais constituídos de números. Muitos experimentos, porém, possuem resultados qualitativos (e não quantitativos). Por exemplo:

– entrevistar um eleitor, antes de uma eleição, para conhecer sua preferência,

– inspecionar uma lâmpada para verificar se é ou não defeituosa,

– lançar uma moeda e observar se dá cara ou coroa.

Podemos, então, classificar os resultados de um experimento como quantitativos ou qualitativos. Os estatísticos trabalham com os dois tipos, embora os quantitativos sejam mais comuns.

Em certos casos, é possível converter dados qualitativos em quantitativos, associando um valor numérico a cada resultado. Vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 62

1. Experimento: "lançamento de duas moedas e observação do par obtido".

   – Espaço amostral associado: $\Omega = \{(K,K),(K,C),(C,K),(C,C)\}$.

   – Um resultado numérico que podemos definir: contar o número de caras, isto é, fazer a seguinte associação:

resultado	valor numérico associado
(C,C)	0
(K,C)	1
(C,K)	1
(K,K)	2

2. Experimento: "retirada de uma lâmpada de um lote e observação se é (sim) ou não (não) defeituosa".

   – espaço amostral associado: $\Omega = \{\text{sim}, \text{ não}\}$

   – um resultado numérico que podemos definir: contar o número de lâmpadas defeituosas, isto é:

resultado	valor numérico associado
sim	1
não	0

3. Experimento: "lançamento de um dado e observação da face de cima".

   – espaço amostral associado: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

   Note que, neste caso, os resultados do experimento já são numéricos. Mesmo assim, podemos associar-lhes outros números. Por exemplo, contar a ocorrência de números ímpares, isto é:

resultado	valor numérico associado
1	1
2	0
3	1
4	0
5	1
6	0

Pelos exemplos acima, você pode notar que, a cada resultado, corresponde um e apenas um valor numérico. Esse procedimento pode ser visto, matematicamente, como a criação de uma função. Tal função é chamada *variável aleatória*.

Temos, então, a seguinte definição:

Variável aleatória é uma função numérica definida em um espaço amostral.

De modo geral, dado um experimento de espaço amostral Ω, uma variável aleatória X é uma função

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

que associa cada evento elementar a um número real. Em nosso curso, trabalharemos apenas com as chamadas variáveis aleatórias *discretas*, que são aquelas que assumem valores num subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$. Mais particularmente, as variáveis que estudaremos assumirão apenas uma quantidade finita de valores.

Você deve achar estranho chamar uma função de *variável* aleatória. E é mesmo! Mas essa terminologia já é consagrada na área e por isso vamos adotá-la. Não se esqueça, porém: apesar do nome, trata-se de uma função.

Um conjunto é *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção (relação 1 para 1) entre ele e um subconjunto do conjunto dos números naturais. Um conjunto enumerável pode ter seus elementos listados em seqüência: $\{x_1, ..., x_n\}$ se finito ou $\{x_1, ..., x_n, ...\}$ se infinito.

Distribuição de probabilidade

Dado um certo experimento aleatório, podemos interpretar os valores assumidos por uma variável aleatória como eventos numéricos associados àquele experimento. Vamos deixar isso mais claro, retomando o exemplo do lançamento das duas moedas. Estamos interessados em contar o número de caras. Definimos, então, a variável aleatória

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \to & X \\ & & \\ (C,C) & \mapsto & 0 \\ (C,K) & \mapsto & 1 \\ (K,C) & \mapsto & 1 \\ (K,K) & \mapsto & 2 \end{array}$$

Para cada valor de X, identificamos os resultados do experimento que lhe são associados:

evento numérico		eventos associados
$X = 0$	$\to$	$\{(C,C)\}$
$X = 1$	$\to$	$\{(C,K),(K,C)\}$
$X = 2$	$\to$	$\{(K,K)\}$

Sendo $\Omega = \{(K,K),(K,C),(C,K),(C,C)\}$ eqüiprovável, cada resultado tem probabilidade $1/4$. Podemos determinar a probabilidade de ocorrência de cada evento numérico, a partir das probabilidades dos eventos do experimento:

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P\{(C,C)\} = 1/4 \\ P(X=1) &= P\{(C,K),(K,C)\} = 1/2 \\ P(X=2) &= P\{(K,K)\} = 1/4 \end{aligned}$$

e construir a tabela:

X	P
0	$1/4$
1	$2/4$
2	$1/4$

Note que essa tabela, na qual anotamos X e suas respectivas probabilidades, caracteriza uma função que a cada valor de X associa um número real do intervalo [0,1]. Esta função é denominada **distribuição de probabilidade** da variável aleatória X.

Observação: é importante destacar que foram definidas duas funções:

1. a *variável aleatória*, que associa a cada resultado de um experimento um número real; e

2. a *distribuição de probabilidade* de uma variável aleatória, que associa a cada valor assumido pela variável um número real restrito ao intervalo [0,1].

Resumindo: Dado um experimento aleatório de espaço amostral Ω, uma variável aleatória X é uma função

$$X : \Omega \to \{x_1, ..., x_n\}$$

A escolha dos números $P(x_i) = P(X = x_i),\ i = 1, ..., n$, é determinada a partir das probabilidades associadas aos eventos no espaço amostral Ω, no qual X está definida.

Exemplo 63

Retomemos os experimentos do exemplo 62, e vamos supor que os espaços amostrais sejam todos eqüiprováveis:

1.

X	evento	probabilidade
0	$\{C, C)\}$	$P(X = 0) = 1/4$
1	$\{(K, C), (C, K)\}$	$P(X = 1) = 2/4$
2	$\{(K, K)\}$	$P(X = 2) = 1/4$

Distribuição de probabilidade da variável aleatória X:

X	P
0	1/4
1	2/4
2	1/4

2.

X	evento	probabilidade
0	{não}	$P(X = 0) = 1/2$
1	{sim}	$P(X = 1) = 1/2$

Distribuição de probabilidade da variável aleatória X:

X	P
0	1/2
1	1/2

3.

X	evento	probabilidade
0	$\{2, 4, 6\}$	$P(X = 0) = 3/6$
1	$\{1, 3, 5\}$	$P(X = 1) = 3/6$

Distribuição de probabilidade da variável aleatória X:

X	P
0	3/6
1	3/6

Valor esperado de uma variável aleatória

Vamos definir uma grandeza que irá refletir nossa expectativa em relação ao valor de uma variável aleatória.

Suponha que lancemos um dado equilibrado 300 vezes e anotemos o resultado da face de cima. Queremos determinar a média dos valores observados.

Como os resultados possíveis são eqüiprováveis, é de se esperar que cada um ocorra uma quantidade de vezes próxima de 50 (já que são 300 lançamentos e 6 resultados possíveis). A média dos valores deve ser, então, um valor próximo de:

$$\text{média} = \frac{1 \times 50 + 2 \times 50 + 3 \times 50 + 4 \times 50 + 5 \times 50 + 6 \times 50}{300} = 3,5\ .$$

Note que

$$\text{média} = \left(1 \times \tfrac{1}{6}\right) + \left(2 \times \tfrac{1}{6}\right) + \left(3 \times \tfrac{1}{6}\right) + \left(4 \times \tfrac{1}{6}\right) + \left(5 \times \tfrac{1}{6}\right) + \left(6 \times \tfrac{1}{6}\right)$$

$$\text{média} = \textstyle\sum_{k=1}^{6} k.P(k) \ .$$

A somatória dos produtos de cada resultado (numérico) do experimento pela sua probabilidade de ocorrência fornece um valor médio da variável aleatória. Esse valor é chamado **valor esperado** ou **esperança matemática** ou ainda **média** da variável aleatória.

$E(X)$ é a notação mais usual da Esperança de X. Alguns autores também usam a letra grega μ (lê-se "mi") para indicar o valor esperado.

Seja X uma variável aleatória que assume os valores $x_1, ...x_n$, com probabilidades $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, ..., n$. O **valor esperado** da variável aleatória X, representado por $E(X)$, é dado por:

$$E(X) = x_1.p_1 + ... + x_n.p_n \ .$$

Exemplo 64

Consideremos as famílias constituídas de três filhos. Representando por h a criança de sexo masculino e por m a de sexo feminino, o espaço amostral associado a essa observação pode ser representado por:

$$\Omega = \{mmm, mmh, mhm, hmm, mhh, hmh, hhm, hhh\}$$

O número de meninas é uma variável aleatória X que assume os valores 0,1,2 e 3. A tabela abaixo mostra a distribuição de probabilidade dessa variável:

X	evento associado	probabilidade
0	$\{hhh\}$	1/8
1	$\{mhh, hmh, hhm\}$	3/8
2	$\{mmh, mhm, hmm\}$	3/8
3	$\{mmm\}$	1/8

O número esperado de meninas é a soma dos produtos de cada valor de X pela sua probabilidade de ocorrência. Neste caso, temos que o valor esperado para essa variável é

$$0.(1/8) + 1.(3/8) + 2.(3/8) + 3.(1/8) = 12/8 = 3/2 = 1,5$$

Observe que o valor esperado para o número de meninas é impossível de ocorrer na realidade: nenhuma família de três filhos tem $1,5$ menina!

Isso muitas vezes ocorre com o valor esperado de uma variável aleatória. Como dissemos anteriormente, ele indica uma média dos valores observados, se o experimento for realizado um grande número de vezes.

Os próximos exemplos ilustram aplicações do valor esperado na análise de alguns jogos.

Exemplo 65

Um jogador paga 1 real para jogar um dado. Se a face observada é 6, ele recebe 10 reais (lucra 9, visto que já pagou 1). Se sai qualquer outro número, ele nada recebe. Podemos definir a variável aleatória (X) que fornece o ganho do jogador em cada partida:

face observada	ganho (X)
1, 2, 3, 4, 5	-1
6	9

Supondo que ele vá jogar um grande número de vezes, vamos calcular o valor esperado de seu ganho, $E(X)$. Para isso, vamos completar a tabela anterior, acrescentando as colunas com as probabilidades de cada evento numérico e com o produto de cada valor assumido pela variável e sua probabilidade:

face observada	ganho (X)	probabilidade (P)	produto (XP)
1, 2, 3, 4, 5	-1	5/6	-5/6
6	9	1/6	9/6

Então o valor esperado é $E(X) = -5/6 + 9/6 = 4/6 \approx 0,67$ reais.

Vamos interpretar esse resultado: o jogador não vai receber 67 centavos em nenhuma jogada (pois, como vimos, ele ganha 9 ou perde 1) mas, se ele jogar muitas vezes, é de se esperar que ganhe, em média, 67 centavos de real por partida. Por exemplo, se ele jogar 100 vezes, ganhará algumas vezes, perderá outras, mas deverá ganhar, ao final, cerca de $100 \times 0,67 = 67$ reais.

O exemplo 65 trata de um jogo em que o valor esperado do ganho é positivo. Jogos desse tipo são chamados *desequilibrados a favor do jogador*. Quando o valor esperado de ganho é nulo, o jogo é dito *equilibrado* e, quando é negativo, dizemos que o jogo é *desequilibrado contra o jogador*.

Será que entre os jogos que envolvem sorte (jóquei, loterias, bingo etc.) há algum que seja desequilibrado a favor do jogador? Se você conhecer as regras de pontuação e pagamento de algum deles, pode determinar o valor esperado de ganho.

Exemplo 66

Numa loteria, o jogador paga 1 real para marcar cinco algarismos quaisquer numa cartela. O jogo paga 1.000 reais para o jogador que acerta os cinco algarismos. Vamos encontrar o valor esperado de ganho para o jogador nesse jogo.

Os algarismos podem ser repetidos e a escolha de cada um independe da escolha de outro qualquer. Logo, a probabilidade de escolher os cinco corretos é $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100.000}$ e a probabilidade de escolher pelo menos um algarismo errado é $1 - \frac{1}{100.000} = \frac{99.999}{100.000}$. Se ele acerta, lucra 1000-1=999 reais e se erra, perde 1 real. Então, o valor esperado de ganho é:

$$(999)\left(\frac{1}{100.000}\right) + (-1)\left(\frac{99.999}{100.000}\right) = -0,99 \quad \text{reais}$$

Logo, a expectativa é de que o jogador perca cerca de 99 centavos de real por jogada. O jogo é desequilibrado contra o jogador.

Resumo

Vimos que, dado um experimento aleatório de espaço amostral Ω,

- uma **variável aleatória** é uma função numérica definida em Ω.
- a **distribuição de probabilidade** de uma variável aleatória é uma função que associa, a cada valor assumido pela variável, um número real do intervalo $[0, 1]$.
- o **valor esperado** de uma variável aleatória fornece um valor médio dessa variável.
- se X é uma variável aleatória que assume os valores $x_1, ...x_n$, com probabilidades $p_i = P(X = x_i),\ i = 1, ..., n$, o **valor esperado** da variável aleatória X é dado por $E(X) = x_1.p_1 + ... + x_n.p_n$.

Exercícios

1. Uma urna contém 3 bolas brancas e 2 bolas azuis. Duas bolas são retiradas dessa urna, uma após a outra, sem reposição, e suas cores são anotadas. Seja a variável aleatória que associa a cada resultado desse experimento o número de bolas brancas observadas. Determine a distribuição de probabilidade dessa variável.

2. Para lançar um dado, um jogador paga 1 real. O jogo paga:

   (a) 3 reais para o resultado 6.

   (b) 2 reais para o resultado 5.

   (c) 1 real para o resultado 4.

   (d) O jogo não paga qualquer dos resultados 1, 2, 3.

   Determine o valor esperado de ganho nesse jogo.

3. Uma loja de departamentos vende aparelhos de ar-condicionado. A tabela a seguir lista dados compilados sobre as vendas em um dia:

unidades de aparelhos	0	1	2	3	4
probabilidade de venda	0,10	0,35	0,30	0,20	0,05

   Determine o valor esperado de vendas diárias.

Auto-avaliação

É importante que você compreenda claramente cada uma das funções definidas nesta aula: a variável aleatória e a distribuição de probabilidade dessa variável. A partir desses conceitos foi possível definir o valor esperado da variável. Esse valor fornece uma média dos valores que a variável pode assumir. Se você sentir dificuldade para resolver os exercícios propostos, releia as definições e os exemplos resolvidos, com atenção. Se as dúvidas persistirem, solicite a ajuda do tutor da disciplina.

Aula 25 – Distribuição binomial

Objetivos

Estudar a distribuição de probabilidades de experimentos com apenas dois tipos de resultados, realizados uma certa quantidade de vezes.

Pré-requisitos: aulas 14 a 24.

Introdução

Vamos considerar experimentos aleatórios que apresentam dois resultados possíveis aos quais denominaremos **sucesso** e **fracasso**.

Por exemplo:

1. Experimento: lançar uma moeda e observar se dá cara ou não

   sucesso: cara

   fracasso: coroa

2. Experimento: lançar um dado e observar se dá 5 ou 6 pontos, ou não

   sucesso: sair 5 ou 6

   fracasso: sair 1 ou 2 ou 3 ou 4

3. Experimento: retirar uma bola de uma urna que contém 10 bolas, sendo 7 bolas brancas e 3 bolas não-brancas, e observar se é branca ou não.

   sucesso: branca

   fracasso: não-branca

Representemos por p a probabilidade de ocorrer sucesso e $q = 1 - p$ a probabilidade de fracasso. Nos exemplos anteriores, supondo a moeda e o dado equilibrados, temos:

1. $p = q = \frac{1}{2}$
2. $p = \frac{2}{6}$ e $q = \frac{4}{6}$
3. $p = \frac{7}{10}$ e $q = \frac{3}{10}$

Suponhamos que o experimento considerado seja repetido n vezes, e que o resultado de cada tentativa seja independente dos resultados das demais tentativas.

Vamos definir a variável aleatória

$$X = \text{número de sucessos nas } n \text{ tentativas}$$

A variável aleatória X tem uma distribuição de probabilidade:

X	P
0	p_0
1	p_1
2	p_2
.	.
.	.
.	.
n	p_n

O problema que queremos resolver é: como calcular p_k, onde

$$p_k = P(X = k) = P(\text{obter exatamente } k \text{ sucessos nas } n \text{ tentativas})?$$

Em outras palavras, como calcular a probabilidade de ocorrerem exatamente k sucessos nas n realizações do experimento?

- Uma possibilidade de ocorrerem k sucessos nas n tentativas é:

$$\underbrace{SSS...S}_{k \text{ vezes}}\ \underbrace{FFF...F}_{(n-k) \text{ vezes}}$$

onde S indica Sucesso; F indica Fracasso

- Devido à independência dos resultados de cada tentativa, a probabilidade de ocorrer o caso descrito acima é

$$\underbrace{(ppp...p)}_{k \text{ vezes}}.\ \underbrace{(qqq...q)}_{(n-k) \text{ vezes}}$$

ou seja, é $p^k.q^{n-k}$.

- Os k sucessos e os $n-k$ fracassos podem ocorrer em qualquer ordem e ocupar quaisquer posições na seqüência. O total de possibilidades é o total de permutações de n elementos, com k e $n-k$ elementos repetidos. Vimos no Módulo 1 que esse total é dado por

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = C_{n,k}$$

- Conclusão: Como são $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ tentativas, temos:

$$p(k) = P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k\, q^{n-k}$$

A expressão $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k\, q^{n-k}$ fornece o termo geral do desenvolvimento do binômio $(p{+}q)^n$. Por isso, essa distribuição de probabilidade é denominada **distribuição binomial**.

Vamos retomar os experimentos do exemplo anterior:

Exemplo 67

Qual a probabilidade de, em cinco lançamentos de uma moeda equilibrada, serem observadas exatamente três caras?

Solução:

Sendo X o número de caras nos 5 lançamentos.

- Em cada lançamento:

  sucesso: cara $\rightarrow\ \ p = 1/2$

  fracasso: coroa $\rightarrow\ \ q = 1/2$

- Número de lançamentos (tentativas): $n = 5$
- Número desejado de sucessos: $k = 3$
- Probabilidade pedida:

  $P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}$

  $P(X = k) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^{5-3}$

  $P(X = 3) = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{10}{32}$

Exemplo 68

Qual a probabilidade de, em dez lançamentos de um dado honesto serem obtidos 5 ou 6 pontos em exatamente quatro das dez tentativas?

Solução:

Definimos a variável aleatória $X =$ número de vezes em que são observadas as faces 5 ou 6, nos dez lançamentos. Queremos calcular $P(X = 4)$. Temos:

$n = 10; \quad k = 4; \quad p = \frac{2}{6}; \quad q = \frac{4}{6}$

Então

$$P(X=4) = \binom{10}{4}\left(\frac{2}{6}\right)^5\left(\frac{4}{6}\right)^{10-4} = \frac{10!}{4!6!}.\left(\frac{2}{6}\right)^5\left(\frac{4}{6}\right)^6 = \frac{40}{243}$$

Exemplo 69

Uma urna contém dez bolas das quais sete, e apenas sete, são brancas. Cinco bolas são retiradas, uma a uma, com reposição. Qual a probabilidade de serem retiradas exatamente três bolas brancas?

Solução:

Definimos a variável aleatória $X=$ número de bolas brancas nas 5 retiradas. Queremos calcular $P(X = 3)$. Temos:

$n = 5; \quad k = 3; \quad p = \frac{7}{10}; \quad q = \frac{3}{10}$

Então

$$P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^3\left(\frac{3}{10}\right)^{5-3} = \frac{5!}{3!2!}\left(\frac{7}{10}\right)^3\left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{3087}{10.000} = 0,3087$$

Exemplo 70

No lançamento de quatro moedas, dê a distribuição de probabilidade da variável aleatória "número de caras".

Solução:

- Em cada moeda:

  sucesso: cara $\quad p = \frac{1}{2}$

  fracasso: coroa $\quad q = \frac{1}{2}$

- Variável aleatória: $X =$ número de caras nas 4 moedas

- Distribuição de probabilidade da variável aleatória X:

X	(interpretação)	P
0	(nenhuma cara e 4 coroas)	$C_{4,0}.(\frac{1}{2})^0.(\frac{1}{2})^4 = 1/16$
1	(1 cara e 3 coroas)	$C_{4,1}.(\frac{1}{2})^1.(\frac{1}{2})^3 = 6/16$
2	(2 caras e 2 coroas)	$C_{4,2}.(\frac{1}{2})^2.(\frac{1}{2})^2 = 6/16$
3	(3 caras e 1 coroa)	$C_{4,3}.(\frac{1}{2})^3.(\frac{1}{2})^1 = 4/16$
4	(4 caras e nenhuma coroa)	$C_{4,4}.(\frac{1}{2})^4.(\frac{1}{2})^0 = 1/16$

Exemplo 71

Numa prova de 10 questões objetivas, a probabilidade de que um aluno acerte uma pergunta qualquer, no "chute", é $\frac{1}{5}$. Para ser aprovado, ele tem que acertar pelo menos 6 questões. Qual a probabilidade deste aluno ser aprovado, apenas chutando as respostas?

Solução:

Interpretemos o problema:

- o experimento "responder a uma questão" será repetido 10 vezes;
- em cada tentativa:

  - sucesso: acertar no chute; $p = 1/5$

  - fracasso: errar ao chutar; $q = 4/5$
- variável aleatória $X=$ número de acertos nas 10 tentativas

Queremos calcular a probabilidade de ocorrer $X = 6$ ou $X = 7$ ou $X = 8$ ou $X = 9$ ou $X = 10$. Como esses eventos são mutuamente exclusivos, a probabilidade da união desses eventos é a soma das probabilidades de cada um.

Então, a probabilidade pedida é: $P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = C_{10,6}.(1/5)^6.(4/5)^4 + C_{10,7}.(1/5)^7.(4/5)^3 + C_{10,8}.(1/5)^8.(4/5)^2 + C_{10,9}.(1/5)^9.(4/5)^1 + C_{10,10}.(1/5)^{10}.(4/5)^0 = 0,0064 = 0,64\%$.

Diante de uma probabilidade tão pequena, este exemplo pode ser usado para incentivar um aluno a estudar, não é?

Resumo

Na aula 17 vimos a distribuição de probabilidade uniforme, definida num espaço amostral eqüiprovável. Nesta aula, vimos uma outra distribuição de probabilidade: a distribuição binomial. Vamos listar suas características:

- Repete-se um experimento n vezes.
- Só há dois tipos de resultados possíveis em cada tentativa: designamos um deles sucesso e o outro fracasso.
- A probabilidade de resultar um sucesso em uma tentativa é p; logo, a de ocorrer um fracasso é $1 - p = q$.
- As realizações são todas independentes.
- A variável aleatória $X =$ número de sucessos nas n tentativas tem distribuição binomial.
- A probabilidade de ocorrerem exatamente k sucessos nas n tentativas, $P(X = k)$, é dada por $\binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}$.

Exercícios

1. Uma pesquisa indicou que, numa cidade, 75% dos automóveis têm seguro. Se 6 automóveis sofrerem um acidente, qual a probabilidade de exatamente 2 deles terem seguro?
2. Uma moeda equilibrada é lançada 10 vezes. Qual a probabilidade de serem observadas exatamente 4 coroas?
3. Uma urna contém 4 bolas azuis e 6 bolas vermelhas. São retiradas 5 bolas, uma a uma, com reposição, e sua cor é anotada. Qual a probabilidade de, em todas as retiradas, a bola ser azul?
4. A probabilidade de um homem de 50 anos viver mais 20 anos é 0,6. Considerando um grupo de 8 homens de 50 anos, qual a probabilidade de que pelo menos 4 cheguem aos 70 anos?

5. 60% das pessoas de uma população têm olhos castanhos. Cinco pessoas são escolhidas ao acaso (pode-se supor sorteio com reposição). Qual o número esperado de pessoas com olhos castanhos nas 5 selecionadas?

   (Sugestão: Faça X = número de pessoas com olhos castanhos nas 5 escolhidas. Forme a distribuição de probabilidade de X, depois calcule $E(X)$. Comprove que $E(X) = 60\%$ de 5.)

Auto-avaliação

Você deve identificar claramente as condições nas quais podemos definir uma distribuição binomial. Para resolver os exercícios, podemos usar as propriedades válidas para as probabilidades, vistas na aula 17. Se você sentir dificuldades, solicite ajuda do tutor da disciplina.

Fim deste módulo...

Chegamos ao final do módulo 2 de Matemática Discreta.

Ao longo de 12 aulas, vimos os conceitos e resultados básicos da Teoria das Probabilidades:

- A identificação de um fenômeno aleatório.
- As definições de experimento, espaço amostral e evento.
- A definição de probabilidade e o estudo de suas propriedades (probabilidade do evento complementar, regra da adição, probabilidade condicional, regra da multiplicação, regra da probabilidade total).
- Os conceitos de eventos mutuamente exclusivos e de eventos independentes.
- O teorema de Bayes, que permite calcular a probabilidade das causas de um determinado efeito.
- A definição da função numérica variável aleatória e o cálculo de seu valor esperado.
- A distribuição binomial.

Para saber mais deste assunto ou entender melhor algum conceito visto, indicamos uma bibliografia básica:

1. Mendenhal, W. *Probabilidade e Estatística.* Rio de Janeiro: Ed. Campus, vol.1, 1985.
2. Meyer, P.L. *Probabilidade - Aplicações à Estatística.* Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1974.
3. Morgado, A.C.O. e outros. *Análise Combinatória e Probabilidade.* Rio de Janeiro: SBM - Coleção do Professor de Matemática, 1981.
4. Toledo, G.L. e Ovalle, I.I. *Estatística Básica.* São Paulo: Ed. Atlas S.A., 1978.

Soluções de exercícios selecionados

Aula 14

Exercício 1.

(a) Aleatório (b) Determinístico (c) Aleatório (d) Aleatório
(e) Aleatório (f) Aleatório (g) Determinístico (h) Determinístico
(i) Aleatório (j) Aleatório

Aula 15

Exercício 1.

item	espaço amostral
(a)	$\{(K,K),(K,C),(C,K),(C,C)\}$ (K: cara, C: coroa)
(b)	$\{0,1,2\}$
(c)	$\{\text{iguais}, \text{diferentes}\}$
(d)	$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),$
	$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$
	$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),$
	$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$
	$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)$
	$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$
(e)	$\{2,3,4,5,6,7,8,910,11,12\}$
(f)	$\{1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,20,24,25,30,36\}$
(g)	$\{0,1,2\}$
(h)	$\{(d,d,d),(d,d,p),(d,p,d),(d,p,p),(p,d,d),(p,d,p),(p,p,d),(p,p,p)\}$
(i)	$\{s,b,d,n\}$
(j)	$\{s,n\}$

Exercício 2.

a) $\Omega = \{\text{branca}, \text{preta}\}; \quad \#\Omega = 2$

b) $$\begin{array}{rcl} \Omega & = & \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ & & (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ & & (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ & & (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ & & (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ & & (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \end{array} \; ; \quad \#\Omega = 6 \times 6 = 36$$

c) $\Omega = \{0,1,2,3\}; \quad \#\Omega = 4$

d) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,20,24,25,30,36\}; \quad \#\Omega = 18$

e) $\Omega = \{4,5,6,7,8,9,10\}; \quad \#\Omega = 7$

f) $\Omega = \{(h,h,h),(h,h,m,),(h,m,h),(h,m,m),(m,h,h),(m,h,m),(m,m,h),$
$(m,m,m)\}; \quad \#\Omega = 2 \times 2 \times 2 = 8$

g) $$\begin{array}{rcl} \Omega & = & \{(A,B),(A,C),(A,D),(A,E),(B,A),(B,C),(B,D),(B,E) \\ & & (C,A),(C,B),(C,D),(C,E),(D,A),(C,B),(D,C),(D,E) \\ & & (E,A),(E,B),(E,C),(E,D)\} \end{array}$$
$\#\Omega = 5 \times 4 = 20$

Exercício 3.

a) $6 \times 6 = 36$

b) 11 (as somas possíveis são os inteiros de 2 a 12)

c) $4 \times 2 = 8$ (4 tipos e, para cada tipo, duas possibilidades de Rh)

d) $2 \times 2 \times 2 = 8$

Exercício 5.

face	número de ocorrências	freqüência relativa
1	75	75/500=0,150
2	82	82/500=0,164
3	78	78/500=0,156
4	92	92/500=0,184
5	85	85/500=0,170
6	88	88/500=0,176

Observe que $0,150 + 0,164 + 0,156 + 0,184 + 0,170 + 0,176 = 1,000$.

Exercício 6.

Total de lançamentos do dado: $142 + 175 + 190 + 173 + 162 + 158 = 1000$.

face	número de ocorrências	freqüência relativa
1	142	142/1000=0,142
2	175	175/1000=0,175
3	190	190/1000=0,190
4	173	173/1000=0,173
5	162	162/1000=0,162
6	158	158/1000=0,158

Observe que $0,142 + 0,175 + 0,190 + 0,173 + 0,162 + 0,158 = 1,000$.

Exercício 7.

Total de ocorrências: $172 + 181 + 147 = 500$.

face	número de ocorrências	freqüência relativa
1	172	172/500=0,344
2	181	181/500=0,362
3	147	147/500=0,294

Observe que $0,344 + 0,362 + 0,294 = 1,000$.

Aula 16

Exercício 1.

1. $\Omega = \{(K,K,K),(K,K,C),(K,C,K),(K,C,C),(C,K,K),(C,K,C),$
   $(C,C,K),(C,C,C)\}$
   $A = \{(K,K,K)\};\ \ \#A = 1$
   $B = \{(K,K,K),(K,K,C),(K,C,K),(C,K,K)\};\ \ \#B = 4$
   $C = \Omega - \{(C,C,C)\}\ \ \ \#C = 7$
   $D = \emptyset$
   $E = \{(C,C,C)\};\ \ \#C = 1$

2. $\#\Omega = 36$
   $A = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}; \#A = 9$
   $B = \{(4,6),(5,5),(6,4)\};\ \ \#B = 3$
   $C = \{(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,5),(5,2),(5,3),(5,5)\}\ \#C = 9$
   $D = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\};\ \ \#D = 6$
   $E = \{(6,6)\};\ \ \#E = 1$

3. $\Omega = 52$
   $A = \{\text{ás de paus, ás de ourosás de copasás de espadas}\}$; $\#A = 4$
   $B = \{\text{cartas pretas}\}$; $\#B = 26$
   $C = \{\text{cartas de paus}\}$; $\#C = 13$
   $D = \{\text{rei de ouros, rei de copas}\}$; $\$D = 2$
   $E = \{\text{valete de ouros, rei de espadas}\}$; $\#E = 2$

Exercício 2.
(a) Eventos: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$.
(b) Se ocorrer o resultado $\{a\}$ ocorrem os 4 seguintes eventos:

$\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}$.

Exercício 3. $E = \{2, 4, 6\}$, $F = \{1, 3, 5\}$, $G = \{5, 6\}$
Então:
(a) $E \cup F \cup G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$
(b) $E \cap F \cap G = \emptyset$
(c) Os eventos E e F são mutuamente exclusivos pois $E \cap F = \emptyset$
(d) Os eventos F e G não são mutuamente exclusivos pois $F \cap G = \{5\} \neq \emptyset$

Exercício 4.
a) Ocorrer A ou ocorrer B: $A \cup B$
b) Ocorrerem A e B: $A \cup B$
c) Ocorrer A mas não ocorrer B: $A \cap \overline{B}$
d) Não ocorrer C: $\overline{C}$
e) Não ocorrer nenhum dos eventos A, B e C: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ ou $\overline{A \cup B \cup C}$
f) Ocorrer A mas não ocorrer B nem C: $A \cap (\overline{B \cup C})$ ou $A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})$.

Exercício 5.

$1^{a.}$ etapa	semi-final	final
	$j_1 \times j_3$	$j_1 \times j_5$
		$j_1 \times j_7$
$j_1 \times j_2$		$j_1 \times j_8$
	$j_1 \times j_4$	$j_1 \times j_6$
	$j_2 \times j_3$	$j_3 \times j_5$
		$j_3 \times j_7$
$j_3 \times j_4$		$j_3 \times j_8$
	$j_2 \times j_4$	$j_3 \times j_6$
	$j_5 \times j_7$	$j_4 \times j_5$
		$j_4 \times j_7$
$j_5 \times j_6$		$j_4 \times j_8$
	$j_5 \times j_8$	$j_4 \times j_6$
	$j_6 \times j_7$	$j_2 \times j_5$
		$j_2 \times j_7$
$j_7 \times j_8$		$j_2 \times j_8$
	$j_6 \times j_8$	$j_2 \times j_6$

Então, o espaço amostral desse experimento é:

$$\begin{aligned}\Omega \;=\; & \{(j_1, j_5), (j_1, j_6), (j_1, j_7), (j_1, j_8), (j_2, j_5), (j_2, j_6), (j_2, j_7), (j_2, j_8), \\ & (j_3, j_5), (j_3, j_6), (j_3, j_7), (j_3, j_8), (j_4, j_5), (j_4, j_6), (j_4, j_7), (j_4, j_8)\}\end{aligned}$$

Exercício 6.

Total de ocorrências: $850 + 1200 + 1350 + 980 + 620 = 5.000$

Freqüência relativa de cada evento simples:

evento	número de ocorrências	freqüência relativa
$\{e_1\}$	850	0,170
$\{e_2\}$	1200	0,240
$\{e_3\}$	1350	0,270
$\{e_4\}$	980	0,196
$\{e_5\}$	620	0,124

Então:

Como $A \cup B = \{e_1, e_2, e_4, e_5\}$, a freqüência relativa do evento $A \cup B$ é igual à soma das freqüências relativas dos eventos simples que o constituem. Assim, o valor pedido é $0,170 + 0,240 + 0,196 + 0,124 = 0,73$.

De modo análogo, temos $A \cap B = \{e_1, e_4\}$ e a freqüência relativa do evento $A \cap B$ é $0,170 + 0,196 = 0,366$.

A freqüência relativa do evento complementar $\overline{A}$ é igual a 1 menos a freqüência relativa do evento A. Esta freqüência é igual a $0,170 + 0,240 + 0,196 = 0,606$. Logo, a freqüência relativa de $\overline{A}$ é $1 - 0,606 = 0,394$.

Exercício 7.

Construindo a árvore de possibilidades da página seguinte, obtemos:

(a) Resposta na própria árvore.

(b)

$A = \{(a,b,c,d), ((a,b,d,c), (a,c,b,d), (a,c,d,b), (a,d,b,c), (a,d,c,b)\}$

$B = \{(a,b,c,d), (a,d,c,b), (b,a,c,d), (b,d,c,a), (d,a,c,b), (d,b,c,a)\}$

Logo,

$A \cap B = \{(a,b,c,d), (a,d,b,c)\}$

$A \cup B = \{(a,b,c,d), (a,b,d,c), (a,c,b,d), (a,c,d,b), (a,d,b,c), (a,d,c,b),$
$(b,a,c,d), (b,d,c,a), (d,a,c,b), (d,b,c,a)\}$

$1^{a.}$ posição	$2^{a.}$ posição	$3^{a.}$ posição	$4^{a.}$ posição	elementos de Ω (item (a))
a	b	c	d	(a,b,c,d)
		d	c	(a,b,d,c)
	c	b	d	(a,c,b,d)
		d	b	(a,c,d,b)
	d	b	c	(a,d,b,c)
		c	b	(a,d,c,b)
b	a	c	d	(b,a,c,d)
		d	c	(b,a,d,c)
	c	a	d	(b,c,a,d)
		d	a	(b,c,d,a)
	d	a	c	(b,d,a,c)
		c	a	(b,d,c,a)
c	a	b	d	(c,a,b,d)
		d	b	(c,a,d,b)
	b	a	d	(c,b,a,d)
		d	a	(c,b,d,a)
	d	a	b	(c,d,a,b)
		b	a	(c,d,b,a)
d	a	b	c	(d,a,b,c)
		c	b	(d,a,c,b)
	b	a	c	(d,b,a,c)
		c	a	(d,b,c,a)
	c	a	b	(d,c,a,b)
		b	a	(d,c,b,a)

Aula17

Exercício 1. Vamos atribuir probabilidade a cada evento elementar:

evento	probabilidade
1	$60/300 = 0{,}2000$
2	$50/300 = 0{,}1667$
3	$75/300 = 0{,}2500$
4	$60/300 = 0{,}2000$
5	$30/300 = 0{,}1000$
6	$25/300 = 0{,}0833$

$P(A) = P\{2,4,6\} = 0,1667 + 0,2000 + 0,0833 = 0,4500$
$P(B) = P\{5,6\} = 0,1000 + 0,0833 = 0,1833$
$P(C) = P\{1,2,5\} = 0,2000 + 0,1667 + 0,1000 = 0,4667$

Exercício 2. O espaço amostral é o conjunto Ω:

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$$
$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),$$
$$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

$\#\Omega = 36$.

(a) $A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$
$\#A = 6$ e $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{6}{36} = 1/6$

(b) $B = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$
$\#B = 11$ e $P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{11}{36}$

Exercício 3. Total de bolas: $3 + 2 + 5 = 10$. A probabilidade de a bola retirada ser preta é $\frac{3}{10}$.

Exercício 4.
(a) $P(A) = 1/15 + 4/15 + 3/15 = 8/15$
(b) $P(B) = 1/15 + 2/15 = 3/15 = 1/5$
(c) $P(C) = 5/15 + 3/15 = 8/15$
(d) $P(D) = 1$

Exercício 5. Seja $P(b) = x$. Então $P(c) = 2x$ e $P(a) = 2.2x = 4x$. Pela definição de probabilidades, devemos ter $P(a) + P(b) + P(c) = 1$. Logo, $4x + x + 2x = 1$, donde $x = \frac{1}{7}$. Daí, $P(a) = 4/7$, $P(b) = 1/7$ e $P(c) = 2/7$.

Exercício 6. A probabilidade é dada pela razão: (número de vogais) / (número total de letras). Logo, o valor é 4/10.

Exercício 7. Podem ser aceitas as de números 1, 2 e 3.

A de número 4 não é uma distribuição de probabilidades porque um dos valores é negativo.

A de número 5 não é uma distribuição de probabilidades porque a soma dos valores é diferente de 1.

A de número 6 não é uma distribuição de probabilidades porque um dos valores excede 1.

Aula 18

Exercício 1.
a) $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$
b) $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$
c) $2^5 = 32$
d) $6 \times 6 \times 6 \times 2 = 432$
e) $6 \times 6 \times 2 \times 2 = 144$
f) $52 \times 51 = 2.652$
g) $52 \times 51 \times 50 = 132.600$
h) 52^5

Exercício 2. O espaço amostral desse experimento é formado por todos os pares de cartas distintas (pois a retirada é sem reposição) possíveis. Então $\#\Omega = 52 \times 51 = 2.652$. O evento A é obter um par do tipo (valete,dama). No baralho existem 4 valetes (de paus, ouros, copas e espadas) e para cada valete retirado, existem 4 damas (uma de cada naipe). Assim, $\#A = 4 \times 4 = 16$. Como o espaço amostral é eqüiprovável, $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{16}{2.652} = 0,006$.

Exercício 3. O espaço amostral é formado por todos os subconjuntos de 3 pessoas escolhidas no conjunto original, num total de $C_{10,3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$ subconjuntos.
(a) O número de subconjuntos formados por 3 pessoas com sangue tido A é dado por $C_{8,3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$. Logo, a probabilidade é $\frac{56}{120} = 0,4667$.
(b) O número de subconjuntos formados por 2 pessoas com sangue tipo A e uma não é dado por $C_{8,2} \times C_{2,1} = 28 \times 2 = 56$. Logo, a probabilidade é $\frac{56}{120} = 0,4667$.

(c) Neste caso, podemos ter: 1 pessoa com sangue tipo A e 2 não; 2 pessoas com sangue tipo A e 1 não e as 3 com sangue tipo A. Fica mais simples calcular a probabilidade do evento complementar, pois o único caso não desejado é as 3 pessoas não terem o sangue tipo A. Veja que esse evento é impossível, pois só há 2 pessoas com essa característica. Logo, o evento dado é evento certo e sua probabilidade é 1.

Exercício 4. Neste exercício, como os valores são muito altos, deixaremos apenas indicados. Cada elemento do espaço amostral é um subconjunto formado por 13 cartas. Logo, $\#\Omega = C_{52,13} = \frac{52!}{39!13!}$
(a)Seja A o evento "sair exatamente um ás". Como há 4 ases no baralho, o número possível de escolher 1 carta no conjunto de ases e as outras 12 no conjunto de 48 (52-13) cartas que não são ases é dado por: $C_{4,1} \times C_{48,12}$. Como o espaço amostral é eqüiprovável, $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$.
(b) Seja B o evento "sair pelo menos 1 ás". Neste caso é mais simples calcular a probabilidade do evento complementar: "não sair ás". Ou seja, escolher as 13 cartas entre as 48 que não são ases. Temos $\#\overline{B} = C_{48,13}$ e então $P(\overline{B}) = \frac{\#\overline{B}}{\#\Omega}$ e $P(B) = 1 - P(\overline{B})$.
(c) Seja C o evento "as 13 cartas são de ouros". Como existem exatamente 13 cartas de ouros no baralho, há somente uma possibilidade de ocorrer esse evento (ou seja: $\#C = C_{13,13} = 1$). Logo, $P(C) = \frac{1}{\#\Omega}$.

Exercício 5. O espaço amostral é formado por todos os subconjuntos de 10 pregos escolhidos entre os 80 existentes na gaveta. Logo, $\#\Omega = C_{80,10}$. Deixaremos os valores indicados. Seja A o evento "os 10 pregos retirados são bons". Então $\#A = C_{50,10}$ e $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$, uma vez que o espaço amostral é eqüiprovável.

Exercício 6. A cardinalidade de Ω é dada por $P_{10} = 10!$ (deixaremos indicado), uma vez que cada resultado possível é dada por uma ordem escolhida para as 10 pessoas se sentarem em fila. Seja A o evento "Paulo e Maria sentados juntos". Podemos pensar nessa dupla como um único elemento permutando com os demais, totalizando 9. Temos, então, um total de P_9 possibilidades. Além disso, Paulo e Maria, embora juntos, podem trocar de lugar entre si. Então $\#A = P_9 \times P_2$. Como o espaço amostral é eqüiprovável, $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{9!2!}{10!}$.

Exercício 7. Temos $\#\Omega = 2^6 = 64$.
(a) O número de vezes em que temos exatamente 3 caras é dado por $C_{6,3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$ (pois escolhemos 3 das 6 posições para serem ocupadas por cara). Então a probabilidade pedida é $\frac{20}{64} = \frac{5}{16}$.
(b) Aqui queremos que ocorram 3 ou 4 ou 5 ou 6 caras. É mais simples trabalharmos com o evento complementar, isto é, não ocorrer cara ou ocorrer apenas 1. O total de possibilidades neste caso é dado por

$$C_{6,0} + C_{6,1} = 1 + 6 = 7 \ .$$

Então a probabilidade pedida é igual a $1 - \frac{7}{64} = \frac{57}{64}$.
(c) Aqui há somente duas possibilidades: (CKCKCK) ou (KCKCKC). Logo, a probabilidade pedida é $\frac{2}{64} = \frac{1}{32}$.

Aula 19

Exercício 1. A probabilidade de se obter 6 pontos é $\frac{1}{6}$, pois são aeis resultados possíveis, todos com a mesma chance de ocorrer. Então a probabilidade de não ocorrer 6 pontos é $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Exercício 2. Pela definição de probabilidade, devemos ter $x+2x+4x+6x = 1$. Então $13x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{13}$.
(a) $P(a_1) = x = \frac{1}{13}$
(b) $P(A) = P\{a_2, a_4\} = P(a_2) + P(a_4) = 2x + 6x = 8x = \frac{8}{13}$
(c) $P(B) = P\{a_1, a_2, a_3\} = P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) = x + 2x + 4x = 7x = \frac{7}{13}$.
Então $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{7}{13} = \frac{6}{13}$.

Exercício 3. O espaço amostral é formado por todos os conjuntos formados por 5 pessoas escolhidas no total de 12. Então $\#\Omega = C_{12,5} = \frac{12!}{5!7!} = 792$.

Seja A o evento pedido. Então A ocorre se ocorre um dos seguintes casos: 1 aluno e 4 professores, 2 alunos e 3 professores, 3 alunos e 2 professores, 4 alunos e 1 professor, 5 alunos e nenhum professor. É mais simples pensar no evento complementar: nenhum aluno e 5 professores.

Neste caso, $\#\overline{A} = C_{6,5} = \frac{6!}{5!1!} = 6$ e $P(\overline{A}) = \frac{6}{792} = \frac{1}{132}$. Então $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{132} = \frac{131}{132} = 0,9924$.

Exercício 4. Neste caso $\#\Omega = 100$. Calculemos a probabilidade do evento complementar, isto é, a probabilidade de o número escolhido ser múltiplo de 10.

Como existem 10 múltiplos de 10 no conjunto dado (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 e 100), essa probabilidade é $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$. Então a probabilidade pedida é $1 - \frac{1}{10} = 0,9$.

Exercício 5. Existem 20 bolas na urna, todas com a mesma chance de serem retiradas. Seja A o evento "ter cor da bandeira nacional". Calculemos a probabilidade do evento complementar, o que, neste caso, equivale a ser vermelha. Logo, $P(\overline{A}) = \frac{3}{20}$. Então $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$.

Exercício 6. Sejam os eventos:
A: ser solteiro
B: ser divorciado
(a) Queremos $A \cup B$. Como A e B são mutuamente eventos exclusivos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 35\% + 15\% = 50\%$.
(b) Seja C o evento "ser casado". Queremos $P(\overline{C})$. Como $P(C) = 45\%$, temos $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 100\% - 45\% = 55\%$.

Exercício 7. Temos $\#\Omega = 30$, eqüiprovável.
(a) Sejam os eventos: A: "primo"e B: "múltiplo de 4".
Então
$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ e $\#A = 10$
$B = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$ e $\#B = 7$.
Queremos $A \cup B$. Como os eventos A e B são mutuamente exclusivos (por quê?), temos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{10}{30} + \frac{7}{30} = \frac{17}{30}$.
(b) Queremos $P(\overline{A})$, onde A é o evento descrito no item (a). Então $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{10}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

Aula 20

Exercício 1.
(a) $\overline{A} \cup B = \{3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cup \{2, 4, 5, 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
(b) $\overline{A} \cap B = \{3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{2, 4, 5, 6\} = \{5, 6\}$
(c) $A \cap (\overline{B \cap C}) = \{1, 2, 4\} \cap \overline{\{\ \}} = \{1, 2, 4\} \cap \Omega = \{1, 2, 4\} = A$

Exercício 2.
(a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/2 + 1/3 - 1/6 = 2/3$.

Exercício 3.
(a) Os eventos descritos são complementares. Logo, a soma das suas probabilidades teria que ser 1 (e não 0,95).
(b) Se ela participa de 5 partidas, sua chance de ganhar é $\left(\frac{1}{10}\right)^5$.
(c) Os eventos descritos não são, necessariamente, complementares. É possível que o preço se mantenha.
(d) Como no item (b), a probabilidade é $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.
(e) A chance de um aluno escolhido ao acaso pertencer a uma determinada turma não é, necessariamente, igual para todas as turmas: ela depende das quantidades de alunos em cada turma.

Exercício 4. Para resolver este exercício, usamos as leis de Morgan: $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$ e $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ e a decomposição do conjunto $A \cup B$ em conjuntos disjuntos: $A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B)$.

(a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - c$.
(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B) \Rightarrow P(\overline{A} \cap B) = P(A \cup B) - P(A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A) = p(B) - P(A \cap B) = b - c$.
(c) Neste item usamos o resultado do item (b).
$P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) = (1 - a) + b - (b - c) = 1 - a - c$.
(d) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - (a + b - c) = 1 - a - b + c$.

Exercício 5.
(a) Podemos escrever $B = A \cup (B - A)$, onde os conjuntos A e $(B - A)$ são disjuntos. Logo, $P(B) = P(A) + P(B - A) \Rightarrow P(A) = P(B) - P(B - A)$.
(b) Do item (a), temos que $P(A) = P(B) - P(B - A)$. Como $(P(B - A) \geq 0$, $P(B) - P(B - A) \leq P(B)$. Logo, $P(A) \leq P(B)$.

Exercício 6. Queremos $P(A \cup B \cup C)$. Como (ainda) não temos uma fórmula para calcular essa probabilidade diretamente, vamos decompor o conjunto $A \cup B \cup C$ numa união de conjuntos disjuntos.

Note que os conjuntos $(A \cap B)$ e $(B \cap C)$ são vazios (pois estão associados a eventos de probabilidade nula. Faça um diagrama com 3 conjuntos, indicando que as interseções de A e B e de B e C são vazias. Veja que $A \cup B \cup C = (A - (A \cap C)) \cup (A \cap C) \cup (C - A) \cup B$ e que esses 4 conjuntos são disjuntos.

Além disso, como $(A \cap C) \subset A$, pelo exercício anterior, item (a), sabemos que $P(A \cap C) = P(A) - P(A - (A \cap C))$. O mesmo se aplica aos

conjuntos $(C \cap A)$ e A. Podemos, então, escrever:
$P(A \cup B \cup C) = P(A - (A \cap C)) + P(A \cap C) + P(C - (C \cap A)) + P(B) =$
$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$

Exercício 7.
(a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 1/5 = 4/5$

(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/5 + 1/5 - 1/10 = 3/10$

Exercício 8. Pela regra da adição, temos:
$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup B) - P(A \cap (B \cup C))$.
Mas $A \cap (B \cup C)) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Aplicando a regra da adição, temos:
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + [P(B) + P(C) - P(B \cap C)] - [P(A \cap B) + P(A \cap C) - P((A \cap B) \cap (A \cap C)]$.

Logo, $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$, que é a regra da adição para 3 conjuntos.

Exercício 9. Sejam os eventos:
A: parafuso; B: porca; C: enferrujada. Queremos $P(A \cup B \cup C)$.
Temos:
$\#\Omega = 100 + 60 + 40 = 200$
$\#A = 100 \Rightarrow P(A) = 100/200$
$\#B = 60 \Rightarrow P(B) = 60/200$
$\#C = 50 + 30 + 20 = 100 \Rightarrow P(C) = 100/200$
$\#(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0$
$\#(A \cap C) = 50 \Rightarrow P(A \cap C) = 50/200$
$\#(B \cap C) = 30 \Rightarrow P(B \cap C) = 30/200$
$\#(A \cap B \cap C) = 0 \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = 0$
Então:
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 100/200 + 60/200 + 100/200 - 0 - 50/200 - 30/200 + 0 = 180/200 = 0,9$.

Exercício 10.
(a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,30 + 0,90 - 0,20 = 1,00$.
(b) Não, pois a probabilidade de ambos ocorrerem, simultaneamente, não é nula ($P(A \cap B) = 0,20$).

Aula 21

Exercício 1. Sejam os eventos A: vermelha e B: ouros. Queremos $P(B|A)$.
$1^{o.}$ modo:
$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$.
Temos: $\#\Omega = 52$; $\#(B \cap A) = 13$; $\#A = 26$
Logo, $P(B \cap A) = \frac{13}{52}$ e $P(A) = \frac{26}{52}$. Então $P(B|A) = \frac{13/52}{26/52} = \frac{1}{2}$.

$2^{o.}$ modo:
Supondo que o evento A ocorreu, vamos restringir o espaço amostral a A. Então $\#A = 26$. Calculando $P(B)$ em relação a esse espaço amostral, temos $P(B) = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$.

Exercício 2. Sejam os eventos:
$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ (soma 7).
B: sair 3 na primeira jogada.

Queremos $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$.

Temos:
$\#\Omega = 36$ (Todos os pares $(i,j); i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}$)
$(B \cap A) = \{(3,4)\} \Rightarrow P(B \cap A) = \frac{\#(B \cap A)}{\#\Omega} = \frac{1}{36}$. $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{6}{36}$.

Logo, $P(B|A) = \frac{1/36}{6/36} = 1/6$.

Exercício 3. O espaço amostral é formado por todos os pares de cartas obtidos, sem reposição, num total de $52\times = 2.652$ pares.
a) Seja A: as duas cartas retiradas são de paus. Então A = conjunto de todos os pares formados por cartas de paus. O total desses pares é dado por $13 \times 12 = 156 \Rightarrow P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = 156/2.652 = 13/221$.
b) Seja B: as duas cartas retiradas possuem o mesmo naipe. Como são 4 naipes, a cardinalidade de B é igual a $4 \times 13 \times 12 = 624$ e $P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = 624/2.652 = 52/221$.

Exercício 4. As 30 pessoas estão distribuídas da seguinte maneira:

14 homens (dos quais 6 trabalham e 8 estudam)

16 mulheres (das quais 12 trabalham e 4 estudam)

Representando por m, e, h e t os eventos "ser mulher", "ser estudante", "ser homem"e "ser pessoa que trabalha", respectivamente, temos

(a) $P(m) = 16/30$

(b) $P(e) = 12/30$
(c) $P(m \cap e) = 4/30$
(d) $P(h|t) = \frac{P(h\cap t)}{P(t)} = \frac{6/30}{18/30} = 6/18 = 1/3$
(e) $P(e|m) = \frac{P(e\cap m)}{P(m)} = \frac{4/30}{16/30} = 1/4.$

Exercício 5. O espaço amostral é formado por todos os pares formados pelos inteiros de 1 a 6, num total de 36 elementos.
(a) Sejam os eventos:
A: soma maior que 7 $\Rightarrow A = \{(2,6),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(4,6),$
$(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \Rightarrow \#A = 15$
B: soma 8 $\Rightarrow B = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} \Rightarrow B \cap A = B$e $\#B = 5$.
Então $P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{5/36}{15/36} = 1/3.$

(b) Sejam os eventos:
C: números iguais $\Rightarrow C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\} \Rightarrow \#C = 6$
D: soma 6 $\Rightarrow D = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} \Rightarrow D\cap C = \{(3,3)\}$e $\#(D\cap C) = 1$.

Queremos $P(D|C) = \frac{P(D\cap C)}{P(C)} = \frac{1/36}{6/36} = 1/6.$

Exercício 6. Sejam os eventos:
S: satisfeito; $\#S = 750$; $\#\overline{S} = 250$
N: novo; $\#N = 480$; $\#\overline{N} = 520$.

Então:

a) $P(S \cap N) = 350/1000 = 0,35$

b) $P(\overline{S} \cap N) = 130/1000 = 0,13$

c) $P(N|S) = \frac{P(N\cap S)}{P(S)} = \frac{350/1000}{750/1000} = 7/15$

d) $P(\overline{N}|S) = \frac{P(\overline{N}\cap S)}{P(S)} = \frac{400/1000}{750/1000} = 8/15$

e) $P(S|\overline{N}) = \frac{P(S\cap \overline{N})}{P(\overline{N})} = \frac{400/1000}{520/1000} = 10/13$

f) $P(S|N) = \frac{P(S\cap N)}{P(N)} = \frac{350/1000}{480/1000} = 35/48$

Aula 22

Exercício 1.
(a) $P(A\cap B) = P(A).P(B) = pq$ (pois os eventos A e B são independentes).
(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = p + q - pq.$

Exercício 2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, onde $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, uma vez que os eventos A e B são independentes. Então:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + P(B) - \frac{1}{4}.P(B) \Rightarrow \frac{3}{4}.P(B) = \frac{1}{12} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{9}$.

Exercício 3.
(a) Temos:
$P(1) = x$; $P(2) = 2x$; $P(3) = 3x$; $P(4) = 4x$; $P(5) = 5x$; $P(6) = 6x$. Pela definição de probabilidade, $P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6) = 1 \Rightarrow 21x = 1 \Rightarrow x = 1/21$.
Então:
$P(1) = 1/21; P(2) = 2/21; P(3) = 3/21; P(4) = 4/21; P(5) = 5/21; P(6) = 6/21$.
(b) $P(A) = P\{1, 3, 5\} = P(1) + P(3) + P(5) = 1/21 + 3/21 + 5/21 = 9/21$.
(c) Seja o evento $B = \{3\}$. Queremos $P(B|A)$. Temos $B \cap A = \{3\}$. Então $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{3/21}{9/21} = 3/9$.
(d)Sejam os eventos:
$C = \{4, 5, 6\}$ e $D = \{2, 4, 6\}$. Queremos $P(D|C)$. Temos $D \cap C = \{4, 6\}$ e então
$P(D|C) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)} = \frac{10/21}{15/21} = 10/15$.

Exercício 4. Sejam os eventos:
A: a primeira completar o percurso
B: a segunda completar o percurso
Então:
(a) $P(A \cap B) = P(A).P(B) = 2/3.3/5 = 2/5$ (Note que os eventos são independentes.)
(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B) = 2/3 + 3/5 - 2/5 = 13/15$.

Exercício 5. Temos $\#A = 13$; $\#B = 4$; $\#C = 8$; $\#(A \cap B) = 1$; $\#(A \cap C) = 2$; $\#(B \cap C) = 4$.
Então
$P(A) = 13/52 = 1/4$
$P(B) = 4/52 = 1/13$
$P(C) = 8/52 = 2/13$
$P(A \cap B) = 1/52$
$P(A \cap C) = 2/13$
$P(B \cap C) = 4/52 = 1/13$
Como $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, A e B são eventos independentes.

Como $P(A \cap C) = P(A).P(C)$, os eventos A e C são independentes.
Como $P(B \cap C) \neq P(B).P(C)$, os eventos B e C NÃO são independentes.

Exercício 6. Temos os seguintes totais:
louras: 48; morenas: 41; ruivas: 11; olhos azuis: 50 e olhos castanhos: 50.
Denotemos por l,m,r,a,c, os eventos loura, morena, ruiva, azuis e castanhos, respectivamente. Então
(a) $P(r) = 11/100$
(b) $P(l \cap c) = 12/100$
(c) $P(m \cap a) = 9/100$
(d) $P(m|a) = \frac{P(m \cap a)}{P(a)} = \frac{9/100}{50/100} = 9/50$
(e) $P(m \cup a) = P(m) + P(a) - P(m \cap a) = 41/100 + 50/100 - 9/100 = 82/100$

Exercício 7. Temos:
$P(A) = 4/7; \quad P(\overline{A}) = 1 - 4/7 = 3/7$
$P(A \cup B) = P\{e_1, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} = 6/7; \quad P(A \cap B) = P\{e_3, e_5, e_7\} = 3/7$
$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{3/7}{4/7} = 3/4$
Como $A \cap B \neq \emptyset$, os eventos A e B não são mutuamente exclusivos.
Temos $P(A \cap B) = 3/7$ e $P(A).P(B) = 4/7.5/7 = 20/49$. Então os eventos A e B não são independentes.

Aula 23

Exercício 1. Vamos construir a árvore de probabilidades:

B = boa pagadora $\overline{B}$ = má pagadora (probabilidade)	C = possui cartão $\overline{C}$ - não possui cartão (probabilidade)	evento (probabilidade)
	C (0,9)	$C \cap B$ $(0,9 \times 0,8 = 0,72)$
B (0,8)		
	$\overline{C}$ (0,1)	$\overline{C} \cap B$ $(0,1 \times 0,8 = 0,08)$
	C (0,3)	$C \cap \overline{B}$ $(0,3 \times 0,2 = 0,06)$
$\overline{B}$ (0,2)		
	$\overline{C}$ (0,7)	$\overline{C} \cap \overline{B}$ $(0,7 \times 0,2 = 0,14)$

a) $P(C) = P(C \cap B) + P(C \cap \overline{B}) = (0,9 \times 0,8) + (0,3 \times 0,2) = 0,72 + 0,06 = 0,78 = 78\%$.

b) $P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$. Aqui podemos raciocinar de dois modos.

$1^{o.}$ modo: Usando os valores diretamente da árvore e o item a):

$$\frac{P(B \cap C)}{P(C)} = 0,72/0,78 = 0,92 = 92\ .$$

$2^{o.}$ modo: Usando Bayes:

$$\frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B).P(C|B)}{P(C)} = \frac{0,8 \times 0,9}{0,78} = 92\ .$$

c) $P(B|\overline{C}) = \frac{P(B \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(B).P(\overline{C}|B)}{P(\overline{C})} = \frac{0,8 \times 0,1}{0,22} = 0,36 = 46\%$.

Exercício 2.

Paulo (P) Roberto ($\overline{P}$) (probabilidade)	ser de raça (R) não ser de ($\overline{R}$) (probabilidade)	evento (probabilidade)
	R (0,2)	$R \cap P$ $(0,2 \times 0,75)$
P (0,75)		
	$\overline{R}$ (0,8)	$\overline{R} \cap P$ $(0,8 \times 0,75)$
	R (0,1)	$R \cap \overline{P}$ $(0,1 \times 0,25)$
$\overline{P}$ (0,25)		
	$\overline{R}$ (0,9)	$\overline{R} \cap \overline{P}$ $(0,9 \times 0,25)$

a) $P(P) = 0,75$ (Do próprio enunciado.)

b) $P(P|R) = \frac{P(P \cap R)}{P(R)} = \frac{P(P).P(R|P)}{P(R)}$. Mas $P(R) = P(R \cap P) + P(R \cap \overline{P}) = (0,2 \times 0,75) + (0,1 \times 0,25) = 0,15 + 0,03 = 0,18$.

Então $P(P|R) = \frac{P(P \cap R)}{P(R)} = \frac{P(P).P(R|P)}{P(R)} = \frac{0,75 \times 0,2}{0,18} = 0,83$.

Exercício 3.

portador da doença (D) saudável(S) outra doença (O)	resultado positivo (+) resultado negativo (-)
(probabilidade)	(probabilidade)
D (0,01)	(+) (0,97) (-) (0,03)
S (0,96)	(+) (0,05) (-) (0,95)
O (0,03)	(+) (0,10) (-) (0,90)

Queremos

$$P(D|+) = \frac{D\cap +}{P(+)} = \frac{P(D).P(+|D)}{P(+)} = \frac{P(D).P(+|D)}{P(+\cap D) + P(+\cap S) + P(+|O)}$$
$$= \frac{0,01 \times 0,97}{(0,97 \times 0,01) + (0,05 \times 0,96) + (0,1 \times 0,03)} = \frac{0,010}{0,061} = 0,164\ .$$

Exercício 4. Construindo a árvore de probabilidades:

válvula boa (B) válvula ruim ($\overline{B}$)	indica que é boa (+) ou que é defeituosa (-)
(probabilidade)	(probabilidade)
B (0,95)	(+) (0,97) (-) (0,03)
$\overline{B}$ (0,05)	(+) (0,00) (-) (1,00)

$$P(B|-) = \frac{B\cap -}{P(-)} = \frac{P(B).P(-|B)}{P(-)} = \frac{P(B).P(-|B)}{P(-\cap B) + P(-\cap \overline{B})} =$$
$$= \frac{0,95 \times 0,03}{(0,03 \times 0,95) + (1 \times 0,05)} = \frac{0,029}{0,029 + 0,05} = 0,108\ .$$

Exercício 5. Construindo a árvore de probabilidades:

rapaz (R) ciências exatas (C)
moça (M) ciências não-exatas ($\overline{C}$)

(probabilidade)	(probabilidade)
R (1/2)	(C) (4/5) ($\overline{C}$) (1/5)
M (1/2)	(C) (2/5) ($\overline{C}$) (3/5)

(a) $P(R \cap C) = 4/5 \times 1/2 = 2/5$

(b) $(P(C) = P(C \cap R) + P(C \cap M) = (4/5 \times 1/2) + (2/5 \times 1/2) = 2/5 + 1/5 = 3/5$

(c) $P(R|C) = \frac{P(R \cap C)}{P(C)} = \frac{2/5}{3/5} = 2/3.$

Aula 24

Exercício 1. Vamos construir a árvore de probabilidades desse experimento, indicando por b bola branca e por a bola azul:

1^{a} retirada /(probabilidade)	2^{a} retirada /(probabilidade)	resultado /(probabilidade)
$b(3/5)$	$b(2/4)$	$(b, b)(6/20)$
	$a(2/4)$	$(b, a)(6/20$
$a(2/5)$	$b(3/4)$	$(a, b)(6/20)$
	$a(1/4)$	$(2, a)(6/20)$

Seja a variável aleatória X: número de bolas brancas retiradas. Então:

X	evento associado	probabilidade
0	(a,a)	2/20
1	(b,a),(a,b)	12/20
2	(b,b)	6/20

Logo, a distribuição de probabilidad da variável X é:

$$P(X = 0) = 2/20; \quad P(X = 1) = 12/20; \quad P(X = 2) = 6/20\ .$$

Exercício 2. Definimos a variável aleatória X: valor ganho em cada partida. Vamos supor o dado equilibrado. Então:

face observada	ganho (X)	probabilidade (P)	produto (XP)
1,2,3	-1	3/6	- 3/6
4	1-1=0	1/6	0
5	2-1=1	1/6	1/6
6	3-1=2	1/6	2/6

Então o valor esperado é $E(X) = -3/6 + 1/6 + 2/6 = 0$.

Exercício 3. Definindo a variável aleatória X: número de aparelhos vendidos num dia, temos:

$E(X) = (0 \times 0,10) + (1 \times 0,35) + (2 \times 0,30) + (3 \times 0,20) + (4 \times 0,05) = 1,75$.

Aula 25

Exercício 1. Definimos:

Sucesso: ter seguro; $p = 75/100 = 3/4$.

Fracasso: não ter seguro; $q = 25/100 = 1/4$.

Variável aleatória X: número de pessoas com seguro nos 6 acidentes.

Queremos $P(X = 2)$. Sabemos que $P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}$. Então

$$P(X = 2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} (3/4)^2 (1/4)^4 = 135/4.096 \approx 0,033 \ .$$

Exercício 2. Definimos

Sucesso: coroa; $p = 1/2$.

Fracasso: cara; $q = 1/2$.

Variável aleatória X: número de coroas observadas em 10 lançamentos.

Queremos $P(X = 4)$. Sabemos que $P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}$. Então

$$P(X = 4) = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} (1/2)^4 (1/2)^6 = 210/1.024 \ .$$

Exercício 3. Definimos

Sucesso: bola azul; $p = 4/10 = 2/5$.

Fracasso: bola vermelha; $q = 6/10 = 3/5$.

Variável aleatória X: número de bolas azuis e, 5 retiradas.

Queremos $P(X = 5)$. Sabemos que $P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}$. Então

$$P(X = 5) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} (2/5)^5 (3/5)^0 = 32/3.125\ .$$

Exercício 4. Definimos

Sucesso: um homem de 50 anos viver mais 20; $p = 0,6$.

Fracasso: um homem de 50 anos não viver mais 20; $q = 0,4$.

Variável aleatória X: número de homens de 50 anos, num grupo de 8, que chegam aos 70 anos.

Queremos $P(X \geq 4)$.
Sabemos que $P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}$. Então

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) = \\ &= \binom{8}{4}(6/10)^4(4/10)^4 + \binom{8}{5}(6/10)^5(4/10)^3 + \binom{8}{6}(6/10)^6(4/10)^2 + \\ &\quad \binom{8}{7}(6/10)^7(4/10)^1 + \binom{8}{8}(6/10)^8(4/10)^0 = \\ &= 70.\frac{6^4.4^4}{10^8} + 56.\frac{6^5.4^3}{10^8} + 28.\frac{6^6.4^2}{10^8} + 8.\frac{6^7.4}{10^8} + 1.\frac{6^8}{10^8} = 0,826 \end{aligned}$$

Exercício 5.

Sucesso: olhos castanhos; $\quad p = 60\% = 3/5$.

Fracasso: olhos não castanhos; $\quad q = 2/5$.

Variável aleatória: X: número de pessoas com olhos castanhos nas 5 escolhas.

Vamos formar a distribuição de probabilidades de X:

X	Probabilidade (P)	Produto (XP)
0	$\binom{5}{0}\left(\frac{3}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^5 = \frac{32}{3.125}$	0
1	$\binom{5}{1}\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{240}{3.125}$	$\frac{240}{3.125}$
2	$\binom{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{720}{3.125}$	$\frac{1.440}{3.125}$
3	$\binom{5}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1.080}{3.125}$	$\frac{3.240}{3.125}$
4	$\binom{5}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{810}{3.125}$	$\frac{3.240}{3.125}$
5	$\binom{5}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^5\left(\frac{2}{5}\right)^0 = \frac{243}{3.125}$	$\frac{1215}{3.125}$

Então o valor esperado é:

$$E(X) = \frac{240}{3.125} + \frac{1.440}{3.125} + \frac{3.240}{3.125} + \frac{3.240}{3.125} + \frac{1215}{3.125} = \frac{3.125}{9.375} = 3 \ .$$

Notemos que 3 equivale exatamente a 60% de 5.

ISBN 85-88731-06-1
9 788588 731066

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense

UERJ
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Universidade Federal Fluminense
uff

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

UNIRIO

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL