

Módulo 2

Carlos Farina de Souza
Marcus Venicius Cougo Pinto
Paulo Carrilho Soares Filho

Volume | 2
2ª edição

Física 1A





Fundação

CECIERJ

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Física 1A

Volume 2 – Módulo 2
2ª edição

Carlos Farina de Souza
Marcus Venicius Cougo Pinto
Paulo Carrilho Soares Filho



GOVERNO DO
Rio de Janeiro

SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA



Ministério
da Educação



Apoio:



Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Presidente

Masako Oya Masuda

Vice-presidente

Mirian Crapez

Coordenação do Curso de Física

Luiz Felipe Canto

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

Carlos Farina de Souza
Marcus Venicius Cougo Pinto
Paulo Carrilho Soares Filho

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL

Cristine Costa Barreto

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO

Ana Tereza de Andrade
Carmen Irene Correia de Oliveira
Marcia Pinheiro
Raquel Queirós

COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM

Maria Angélica Alves

COORDENAÇÃO DE AVALIAÇÃO DO MATERIAL DIDÁTICO

Débora Barreiros

Departamento de Produção

EDITORA

Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO EDITORIAL

Jane Castellani

REVISÃO TIPOGRÁFICA

Jane Castellani
Raquel Queirós
Sandra Valéria Ferreira de Oliveira

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO

Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL

Marcelo Freitas

ILUSTRAÇÃO

Fabiana Rocha
Fábio Muniz

CAPA

Eduardo Bordoni

PRODUÇÃO GRÁFICA

Oséias Ferraz
Patricia Seabra

Copyright © 2005, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

S729f

Souza, Carlos Farina de.

Física 1A. v.2 / Carlos Farina de Souza. 2. ed. –

Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

212p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-7648-242-8

1. Partícula isolada. 2. Massa inercial. 3. Leis de Newton. 4. Princípio de superposição. 5. Translação de corpos rígidos.

I. Pinto, Marcus Venicius Cougo. II. Soares Filho, Paulo Carrilho. III. Título.

CDD: 530.1

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO
NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO
RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO**
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL
DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO
DO RIO DE JANEIRO**
Reitora: Malvina Tania Tuttman

SUMÁRIO

| | |
|---|------------|
| Aula 13 – Partícula isolada, referencial inercial e forças _____ | 7 |
| <i>Carlos Farina de Souza / Marcus Venicius Cougo Pinto / Paulo Carrilho Soares Filho</i> | |
| Aula 14 – Conceito de massa inercial e a Segunda Lei de Newton _____ | 39 |
| <i>Carlos Farina de Souza / Marcus Venicius Cougo Pinto / Paulo Carrilho Soares Filho</i> | |
| Aula 15 – Princípio da Superposição e Terceira Lei de Newton _____ | 69 |
| <i>Carlos Farina de Souza / Marcus Venicius Cougo Pinto / Paulo Carrilho Soares Filho</i> | |
| Aula 16 – O problema fundamental da Mecânica Clássica _____ | 87 |
| <i>Carlos Farina de Souza / Marcus Venicius Cougo Pinto / Paulo Carrilho Soares Filho</i> | |
| Aula 17 – Translação de um corpo rígido _____ | 111 |
| <i>Carlos Farina de Souza / Marcus Venicius Cougo Pinto / Paulo Carrilho Soares Filho</i> | |
| Aula 18 – Forças elásticas – forças dadas e forças vinculares _____ | 137 |
| <i>Carlos Farina de Souza / Marcus Venicius Cougo Pinto / Paulo Carrilho Soares Filho</i> | |
| Aula 19 – Aplicações das leis de Newton _____ | 167 |
| <i>Carlos Farina de Souza / Marcus Venicius Cougo Pinto / Paulo Carrilho Soares Filho</i> | |
| Aula 20 – E Newton tinha razão... _____ | 203 |
| <i>Carlos Farina de Souza / Marcus Venicius Cougo Pinto / Paulo Carrilho Soares Filho</i> | |

Aula 13 – Partícula isolada, referencial inercial e forças

Objetivos

- Entender os conceitos de partícula isolada e referencial inercial e o conceito qualitativo de força.
- Compreender a Primeira Lei de Newton do movimento.

Introdução

Até a aula anterior, estudamos a cinemática de uma partícula, isto é, os conceitos e procedimentos usados para descrever o seu movimento e analisar os aspectos que são considerados importantes no estudo da ciência do movimento, a Mecânica. Mas esta, como qualquer ciência, não pode se limitar apenas a descrever os fenômenos, sendo também necessário compreendê-los, isto é, relacioná-los com as suas causas. A parte da Mecânica que relaciona o movimento com suas causas é chamada **dinâmica**. A dinâmica tem como fundamento as três leis de Newton do movimento. Nesta aula, enunciaremos a primeira dessas leis. Apresentaremos os conceitos de **partícula isolada** e de **referencial inercial**, essenciais à compreensão da primeira lei de Newton. Para entendermos o conceito de referencial inercial, é necessário estar bem clara em nossa mente a idéia de relatividade do movimento. O movimento de uma partícula é sempre relativo a algum referencial, como foi enfatizado na Aula 1. A mesma partícula pode ter simultaneamente diferentes movimentos em relação a diferentes referenciais.

O referencial em relação ao qual descrevemos os movimentos de uma partícula é arbitrário. Podemos escolher qualquer um para fazer tal descrição. No entanto, quando desejamos não somente descrever o movimento, mas também relacioná-lo às suas causas, a escolha do referencial a ser usado torna-se muito importante. Foi Newton o primeiro a perceber que, usando-se um certo tipo de referencial, torna-se muito mais simples determinar os movimentos a partir de suas causas. Esse tipo de referencial é chamado inercial e constitui-se no conceito fundamental a ser estudado nesta aula.

Partícula isolada

Sabemos que o movimento de uma partícula depende do referencial em relação ao qual esse movimento é considerado. Desse modo, uma propriedade do movimento, como a sua aceleração, também depende do referencial que estiver sendo usado para descrevê-lo. Em um certo instante, a partícula pode ter uma aceleração em relação a um certo referencial e, nesse mesmo instante, ela pode ter uma aceleração diferente em relação a outro referencial, como ilustra o exemplo que segue.

Exemplo 13.1

A **Figura 13.1** mostra um automóvel sendo acelerado em uma estrada retilínea e dois referenciais. Um referencial é dado pelo sistema de eixos $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ fixado na estrada e o outro é dado pelo sistema de eixos $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ fixado no próprio automóvel (os eixos $\mathcal{O}\mathcal{Y}$ e $\mathcal{O}'\mathcal{Y}'$ são perpendiculares à página, apontam para dentro dela e não aparecem desenhados na figura).

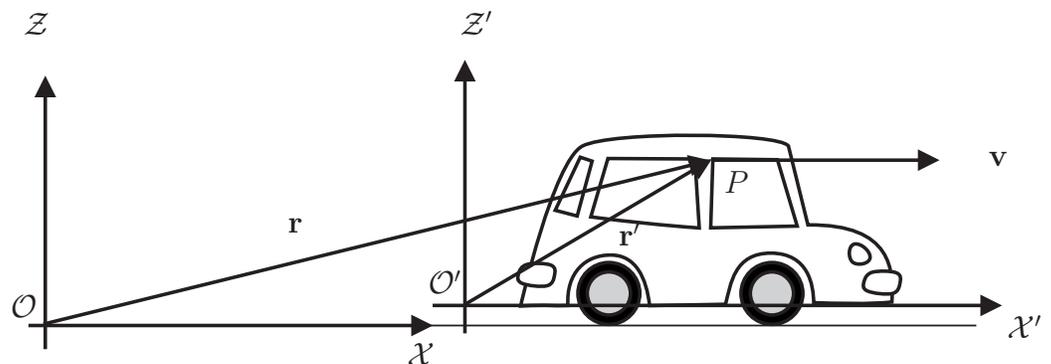


Figura 13.1: A mancha puntiforme P no automóvel, quando observada de um referencial $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ fixo na estrada, está em movimento. Já em relação ao referencial $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$, fixo no próprio automóvel e, portanto, movendo-se com ele em relação ao referencial fixo na estrada, ela está em repouso.

Na lataria do automóvel há uma mancha puntiforme P , que tem um certo movimento em relação a $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ e um outro movimento em relação a $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$. O vetor de posição da mancha em relação a $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ é \mathbf{r} . Em relação a $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$, a velocidade da mancha é \mathbf{v} e sua aceleração é \mathbf{a} . Naturalmente, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ e $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$. Devido ao fato de o carro estar acelerado, a aceleração \mathbf{a} da mancha é diferente de zero, isto é, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. O vetor-posição da mancha em relação a $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ é \mathbf{r}' . Esse vetor é constante, pois a mancha está fixa em relação ao sistema de eixos $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$. Isso é uma consequência direta do fato de que tanto

a mancha quanto o sistema de eixos $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ estão fixos no automóvel. Portanto, em relação ao referencial solidário ao automóvel representado pelos eixos $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$, são nulas a velocidade \mathbf{v}' e a aceleração \mathbf{a}' da mancha. Sendo \mathbf{r}' um vetor constante, temos matematicamente: $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt = \mathbf{0}$ e $\mathbf{a}' = d\mathbf{v}'/dt = \mathbf{0}$. Desse modo, a mancha tem aceleração diferente de zero em relação a $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ e ao mesmo tempo aceleração nula em relação a $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$, isto é, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{a}' = \mathbf{0}$.

Com esse exemplo, deve ficar claro o que já afirmamos anteriormente: a aceleração de uma partícula depende do referencial em relação ao qual consideramos o seu movimento. Em especial, o fato de a partícula estar ou não acelerada depende do referencial que é usado. Uma partícula pode ter aceleração nula em relação a um referencial e, ao mesmo tempo, ter aceleração diferente de zero em relação a algum outro referencial, como vimos no exemplo anterior. Com este fato bem entendido, passemos ao primeiro conceito importante desta aula: o de partícula isolada.

Há uma enorme quantidade de fatos que nos fazem crer que as influências entre os corpos diminuem se as distâncias entre eles são suficientemente grandes. Aumentando indefinidamente as distâncias entre eles, as influências mútuas acabam por diminuir até ficarem desprezíveis. Não podemos ainda usar esses fatos para enunciar uma lei física, pois não dispomos de definições precisas e abrangentes para o que acabamos de chamar influências entre os corpos.

No entanto, podemos aproveitar tais fatos para definir um primeiro conceito da dinâmica, o de partícula isolada. Uma partícula isolada seria aquela que não sofre influências dos outros corpos do universo por estar infinitamente distante deles. Definimos, então, uma **partícula isolada** como aquela que está infinitamente distante de todos os outros corpos do universo. É claro que essa definição é muito idealizada, pois não temos meios de verificar que a distância entre duas partículas, ou dois corpos quaisquer, é infinita. Na prática, aceitamos como uma partícula isolada aquela cujas distâncias dos outros corpos do universo são tão grandes que podemos considerá-las como se fossem distâncias infinitas. Se for malfeito o nosso julgamento de que uma dada partícula é isolada, a teoria dinâmica baseada nesse julgamento deve levar a resultados errados, que não estarão de acordo com as observações e medições que fizermos. Se, pelo contrário, escolhermos bem cada partícula que consideramos como isolada, é sinal de que as distâncias entre cada uma delas e os demais corpos do universo são suficientemente grandes para podermos considerá-las como infinitas, e a teoria construída sobre tal escolha descreverá satisfatoriamente os fenômenos que pretendemos estudar. Será possível encontrar partículas que possam ser razoavelmente consideradas como isoladas?



Figura 13.2: Cada estrela fixa se encontra a distâncias enormes das outras estrelas e dos demais corpos do universo.

Para noções de Astronomia, pode-se consultar, por exemplo, <http://www.zenite.nu/brasil>, onde há também informações interessantes sobre a astronomia da Bandeira Nacional.

No céu noturno, distinguimos a olho nu uma imensidão de pontinhos brilhantes que mantêm entre si distâncias constantes. São simplesmente as estrelas comuns, que hoje sabemos serem imensas massas incandescentes. Suas posições relativas parecem imutáveis e elas formam uma estrutura que nos parece rígida. Por isso, desde muito tempo, tais estrelas são chamadas **estrelas fixas**, porque mantêm posições fixas umas em relação às outras. Alguns grupos dessas estrelas fixas são chamados **constelações**. Após vários milhares de anos, as posições relativas entre as estrelas fixas acabam mudando. Mas esse movimento é tão lento para os nossos interesses que podemos considerar as chamadas estrelas fixas como se fossem realmente fixas.

Também vemos, no céu noturno, alguns poucos pontinhos brilhantes que, em um período de alguns dias, movem-se perceptivelmente em relação às estrelas fixas. Esses pontinhos móveis são os **planetas**, que os antigos chamavam estrelas errantes. Mas voltemos às estrelas fixas, que são os objetos de nosso interesse no momento.

As estrelas fixas que vemos no firmamento são, talvez, os objetos concretos que mais se aproximam da definição de partícula isolada. Cada uma dessas estrelas está a distâncias inimaginavelmente grandes das outras estrelas e corpos do universo. Desse modo, para muitos propósitos é razoável considerar cada uma delas como uma partícula e, além disso, uma partícula isolada. Na verdade, a escolha de uma estrela fixa como um exemplo prático de partícula isolada é acertada. A mecânica newtoniana sempre se baseou nessa escolha para obter resultados excelentes no estudo de uma imensa variedade de fenômenos.

A palavra **planeta** é de origem grega; *planes*, *-etos* ou *planetes* significa vagabundo, errante.

Referencial inercial

De posse da definição de partícula isolada, e tendo visto alguns exemplos concretos de partículas do universo, que podemos considerar como isoladas, vamos definir um tipo especial de referencial. Para essa definição, vamos precisar de três partículas isoladas não-colineares, isto é, que não estejam ao longo de uma mesma reta. Não é difícil encontrar uma trinca como essa. Na constelação do Cruzeiro do Sul, por exemplo, podemos escolher várias trincas que não são colineares. Consideremos agora as acelerações, em relação a um dado referencial, das partículas isoladas que formam uma trinca não-colinear. Se as acelerações forem sempre iguais a zero, o referencial é chamado inercial. Se não forem sempre iguais a zero, o referencial é chamado não-inercial. Essa é a definição de referencial inercial, que vamos repetir a seguir.

Referencial inercial é um referencial em relação ao qual são nulas as acelerações de uma trinca de partículas isoladas não-colineares.

Sabemos que uma partícula com aceleração nula em relação a um referencial está em repouso ou em MRU em relação a este referencial. Desse modo, cada partícula de uma trinca de partículas isoladas não-colineares está em repouso ou em MRU em relação a um referencial inercial.

No momento, tal definição pode parecer um tanto arbitrária, pois não foi explicitado o motivo pelo qual usamos partículas isoladas para definir um tipo especial de referencial, nem o motivo pelo qual temos de usar na definição três partículas isoladas não-colineares. Por ora, basta entender que essa definição serve de fundamento apropriado para formular as leis básicas da dinâmica. À medida que formos avançando em nossos estudos da Mecânica, ficarão claros os motivos lógicos e históricos que levaram a essa definição de referencial inercial. Vamos agora considerar dois referenciais importantes e verificar se são ou não inerciais.

Primeiramente, seja um referencial fixo na superfície da Terra, digamos um sistema de eixos \mathcal{OXYZ} fixo nas paredes de uma sala. Para verificar se esse referencial é ou não inercial, vamos tomar como trinca de partículas isoladas não-colineares as três estrelas do Cruzeiro do Sul indicadas na **Figura 13.2** pelas letras α , β e γ .

As estrelas indicadas por α , β e γ na **Figura 13.2** são chamadas Acrux, Mímosa e Gacrux, respectivamente. Na Bandeira Nacional, elas representam os estados de São Paulo, Rio de Janeiro e Bahia.



Figura 13.3: As estrelas fixas têm movimento circular em relação a um referencial fixo na Terra.

Perguntamos agora: essas três estrelas têm acelerações nulas em relação a \mathcal{OXYZ} ? É fácil responder a essa pergunta. Em relação a \mathcal{OXYZ} , elas, como as demais, realizam um movimento circular uniforme em um período aproximado de 24 horas. Esse movimento foi mencionado anteriormente e ilustrado na **Figura 13.3**. Todo movimento circular tem uma aceleração diferente de zero, que chamamos centrípeta. Portanto, em relação a \mathcal{OXYZ} , as partículas isoladas α , β e γ não têm aceleração nula. A conclusão é que \mathcal{OXYZ} não é um referencial inercial. Na verdade, qualquer referencial fixo na Terra não é inercial. Para concluir que o referencial não é inercial, basta verificar que pelo menos uma das partículas da trinca tem aceleração diferente de zero, pois para ser inercial é necessário que todas as partículas da trinca tenham aceleração nula.

Consideremos agora um sistema de eixos $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ em repouso em relação às estrelas fixas. Podemos considerar a origem \mathcal{O}' no Sol, pois também o Sol se mantém praticamente imóvel em relação ao conjunto das estrelas fixas. É claro que, em relação a $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$, todas as estrelas fixas estão em repouso e, portanto, têm velocidades e acelerações nulas. Escolhendo uma trinca qualquer de estrelas fixas não-colineares, chegaremos à conclusão de que elas têm acelerações nulas em relação a $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$. Conseqüentemente, concluímos que $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ é um referencial inercial. A **Figura 13.4** ilustra os eixos $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ fixos em relação às estrelas fixas e com origem \mathcal{O}' no Sol. Essa figura também mostra quatro vetores-posição. Três deles dão as posições de três estrelas do Cruzeiro do Sul, escolhidas para verificar se $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ é inercial. O quarto vetor-posição é o da Terra.

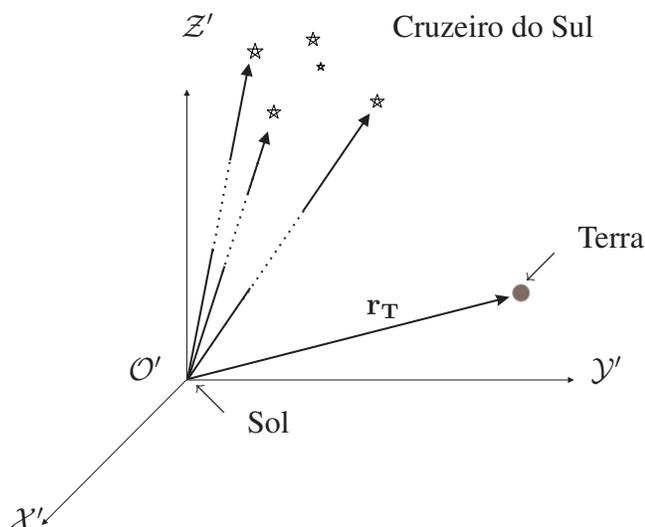


Figura 13.4: As estrelas fixas estão em repouso em relação ao referencial $O'X'Y'Z'$, pois este é intencionalmente escolhido como fixo em relação a elas.

Note que os vetores-posição das estrelas têm uma parte pontilhada para indicar que possuem módulos muito maiores do que o módulo do vetor-posição da Terra. De fato, as estrelas são tão mais distantes do Sol do que a Terra que, se desenhassemos os quatro vetores em escala, o vetor-posição da Terra teria um tamanho imperceptível no desenho.

Usando-se a definição de referencial inercial, podemos, em princípio, determinar se é ou não inercial qualquer referencial que quisermos considerar. Escolhemos uma trinca qualquer de partículas isoladas não-colineares e examinamos os movimentos que elas têm em relação ao referencial considerado. Se cada uma delas está em repouso ou em MRU em relação ao referencial, este é inercial. Caso contrário, não é inercial ou, como se costuma dizer, é um referencial não-inercial.

Os dois referenciais considerados anteriormente são de extrema importância. O referencial $O'X'Y'Z'$, fixo nas estrelas e com origem no Sol, é chamado **referencial copernicano**, pois foi proposto por Copérnico para descrever o movimento dos planetas. Em relação ao referencial copernicano, os planetas realizam movimentos de uma simplicidade notável. Suas trajetórias, por exemplo, são elipses com um elevado grau de precisão. Voltaremos a esse tópico quando estudarmos a teoria da gravitação. É claro que qualquer referencial fixo em relação às estrelas é um referencial inercial, mesmo que a origem dos eixos não seja escolhida no Sol. No entanto, é a escolha da origem do referencial copernicano no Sol que permite uma descrição simples do movimento planetário.

Um referencial fixo na Terra, como o considerado no exemplo dado anteriormente, pode ser chamado **referencial terrestre**. Os referenciais terrestres são importantes, porque são normalmente fixados em nossos laboratórios e instrumentos de medição. Os movimentos dos planetas, por exemplo, são descritos na prática por vetores-posição em relação a um referencial terrestre. Estes vetores são indicados por telescópios e demais instrumentos astronômicos fixos na superfície da Terra. Em relação aos referenciais terrestres, os movimentos planetários se mostram muito mais complicados do que em relação ao referencial copernicano. Um defeito ainda mais grave dos referenciais terrestres é que eles não são inerciais, como já vimos. De fato, devido ao movimento da Terra em relação às estrelas fixas, principalmente o seu movimento de rotação em torno do seu eixo polar, observamos as estrelas em movimento circular em relação a referenciais terrestres, como ilustrado na **Figura 13.3**.

Como afirmamos na Introdução, as leis dinâmicas do movimento têm sua forma mais simples quando o movimento é considerado em relação a referenciais inerciais. Com isso, os movimentos em relação aos nossos referenciais terrestres, que somos constantemente obrigados a usar, não poderiam ser estudados usando as leis da dinâmica em sua forma mais simples. A situação não é assim tão catastrófica quanto parece, por um motivo que explicaremos agora. Acontece que o movimento circular das estrelas, em relação a um referencial terrestre, é extremamente lento nos intervalos de tempo em que ocorre uma grande variedade de fenômenos. Durante esses intervalos de tempo, as estrelas são observadas, em relação a referenciais terrestres e dentro das precisões exigidas, em repouso ou, no máximo, em um MRU. Nesses intervalos de tempo, os referenciais terrestres podem então ser considerados, com boa aproximação, inerciais. Há fenômenos de grande duração ou extrema delicadeza, para os quais não é possível usar um referencial terrestre como se fosse inercial. Esses fenômenos são estudados à parte e requerem um tratamento especial. De um modo geral, estudaremos fenômenos para os quais é possível considerar os referenciais terrestres como inerciais. Vamos estabelecer a convenção a seguir.

Sempre que usarmos um referencial terrestre, estará implícito que ele pode ser considerado inercial, a menos que seja explicitamente dito o contrário.

Note que não há nada de estranho em usar referenciais aproximadamente inerciais, como os referenciais terrestres, como se fossem inerciais. Na verdade, não podemos afirmar que um certo referencial é perfeitamente inercial. De fato, para começar, as partículas isoladas que usamos para verificar se um referencial

é inercial não são perfeitamente isoladas, pois não se encontram a distâncias infinitas dos demais corpos do universo, como já discutimos. Além disso, quando dizemos que as acelerações de partículas isoladas são nulas em relação a um certo referencial, não entendemos que sejam exatamente nulas, pois não é possível medir uma aceleração, ou qualquer outra grandeza, com precisão absoluta.

Podemos dizer que as acelerações são nulas dentro de uma certa margem de erro e, conseqüentemente, concluir que um certo referencial é inercial dentro de uma certa aproximação. O próprio referencial copernicano, que usamos como exemplo de referencial inercial, não pode ser considerado perfeitamente inercial. Ele talvez seja o referencial que mais se aproxime da definição idealizada de um referencial inercial. Já havíamos comentado sobre este aspecto da Física, que usa conceitos idealizados na formulação da teoria, mas lida com objetos e fenômenos que exemplificam esses conceitos apenas de maneira aproximada. Talvez devamos, a partir desse momento, não preveni-lo mais sobre este aspecto da Física. Nos próximos conceitos que apresentarmos, você mesmo saberá distinguir o aspecto idealizado de suas realizações concretas imperfeitas e aproximadas.

Antes, porém, de passarmos para a próxima seção e discutirmos a chamada Primeira Lei de Newton, vamos finalizar esta seção mostrando um resultado muito importante, a saber: dado um referencial inercial, há uma infinidade de outros referenciais inerciais.

Com esse objetivo, vamos considerar o referencial \mathcal{R} , com eixos $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$, e o referencial \mathcal{R}' , com eixos $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ que, por hipótese, movimenta-se em relação a \mathcal{R} de tal modo que os eixos $\mathcal{O}'\mathcal{X}'$, $\mathcal{O}'\mathcal{Y}'$ e $\mathcal{O}'\mathcal{Z}'$ permaneçam sempre paralelos aos eixos $\mathcal{O}\mathcal{X}$, $\mathcal{O}\mathcal{Y}$ e $\mathcal{O}\mathcal{Z}$, respectivamente. Além disso, vamos supor que o movimento da origem \mathcal{O}' , quando observado do referencial \mathcal{R} , seja um MRU de velocidade \mathbf{V} . Vale ressaltar nesse momento que, devido ao paralelismo entre os eixos dos referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}' , os unitários $(\mathbf{u}'_x, \mathbf{u}'_y, \mathbf{u}'_z)$ dos eixos $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ coincidem com os unitários $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ dos eixos $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$.

Consideremos, então, o movimento de uma partícula em relação a \mathcal{R} e esse mesmo movimento em relação a \mathcal{R}' . Vejamos como relacionar suas posições, velocidades e acelerações observadas num desses referenciais com suas posições, velocidades e acelerações observadas no outro. Num dado instante de tempo, seja \mathbf{r} o seu vetor-posição no referencial \mathcal{R} , \mathbf{r}' o seu vetor-posição no referencial \mathcal{R}' e \mathbf{R} o vetor-posição da origem \mathcal{O}' em relação a \mathcal{R} . Esses vetores podem ser escritos em termos de suas componentes cartesianas como:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z; \quad \mathbf{r}' = x'\mathbf{u}'_x + y'\mathbf{u}'_y + z'\mathbf{u}'_z; \quad \mathbf{R} = X\mathbf{u}_x + Y\mathbf{u}_y + Z\mathbf{u}_z.$$

Quando se diz que um corpo tem uma certa velocidade, deve-se entender que todas as suas partículas estão com essa mesma velocidade. Nesse caso também se diz que o corpo está em movimento de translação. É com essas idéias que dizemos que um referencial tem uma certa velocidade em relação a outro.

A **Figura 13.5** ilustra essa situação (o desenho mostra apenas dois dos eixos para cada referencial, a fim de não sobrecarregar a figura).

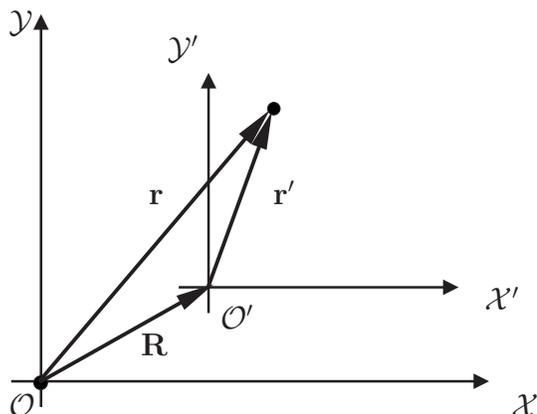


Figura 13.5: Posições de uma partícula em movimento em relação aos referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}' , com \mathcal{R}' em MRU em relação a \mathcal{R} .

A partir da **Figura 13.5**, obtém-se, de imediato,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R}. \quad (13.1)$$

Escrevendo a equação anterior, em termos de suas respectivas componentes cartesianas, temos:

$$\begin{cases} x = x' + X \\ y = y' + Y \\ z = z' + Z. \end{cases} \quad (13.2)$$

Derivando as expressões anteriores em relação ao tempo, obtemos:

$$\begin{cases} v_x = v'_x + V_x \\ v_y = v'_y + V_y \\ v_z = v'_z + V_z, \end{cases} \quad (13.3)$$

onde, na primeira equação, identificamos $v_x = dx/dt$, $v'_x = dx'/dt$ e $V_x = dX/dt$, enquanto, nas duas outras equações, identificamos expressões análogas.

As equações escritas em (13.3) podem ser agrupadas numa forma vetorial compacta, como

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}, \quad (13.4)$$

onde, por definição, temos

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y + v_z \mathbf{u}_z, \quad \mathbf{v}' = v'_x \mathbf{u}'_x + v'_y \mathbf{u}'_y + v'_z \mathbf{u}'_z, \quad \mathbf{V} = V_x \mathbf{u}_x + V_y \mathbf{u}_y + V_z \mathbf{u}_z.$$

A equação (13.4), conhecida como **transformação de Galileu** para as velocidades, informa-nos que a velocidade da partícula em relação a \mathcal{R} é igual à soma vetorial de sua velocidade em relação a \mathcal{R}' com a velocidade da origem \mathcal{O}' em relação a \mathcal{R} .

Derivando as equações escritas em (13.3) em relação ao tempo, obtemos

$$\begin{cases} a_x = a'_x \\ a_y = a'_y \\ a_z = a'_z \end{cases}, \quad (13.5)$$

onde, na primeira equação, identificamos $a_x = dv_x/dt$, $a'_x = dv'_x/dt$, enquanto nas duas outras equações identificamos expressões análogas. Note que as derivadas em relação ao tempo de V_x , V_y e V_z não aparecem nas equações anteriores por serem todas nulas.

As equações escritas em (13.5) podem ser escritas na forma vetorial compacta, como:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' , \quad (13.6)$$

onde, por definição, temos

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z , \quad \mathbf{a}' = a'_x \mathbf{u}'_x + a'_y \mathbf{u}'_y + a'_z \mathbf{u}'_z .$$

Conseqüentemente, qualquer que seja o movimento da partícula considerada, a sua aceleração em relação a \mathcal{R} , num dado instante, é exatamente igual à sua aceleração em relação a \mathcal{R}' nesse instante, desde que se cumpram as seguintes condições:

- (i) que os eixos de \mathcal{R}' permaneçam paralelos aos eixos de \mathcal{R} ;
- (ii) que a origem \mathcal{O}' se mova em MRU relativamente a \mathcal{R} .

Na verdade, o resultado contido na equação (13.6) permanece válido, se substituirmos, no parágrafo anterior, a condição (i) pela seguinte condição mais geral: que as direções dos eixos de \mathcal{R}' permaneçam fixas em relação aos eixos de \mathcal{R} . A condição (i) do parágrafo anterior é apenas o caso particular desta quando as direções dos eixos de \mathcal{R}' coincidem com as direções dos eixos de \mathcal{R} . Você está convidado a demonstrar, no problema proposto 1, a validade do resultado (13.6) sob essa condição mais geral.

O resultado que acabamos de demonstrar implica a seguinte propriedade: se uma partícula tem aceleração nula em relação a \mathcal{R} , então ela tem aceleração nula também em relação a \mathcal{R}' . Suponhamos agora que \mathcal{R} seja um referencial inercial. Em relação a ele, qualquer partícula isolada tem aceleração nula. Dessa propriedade, concluímos que qualquer partícula isolada possui também uma aceleração

em relação a \mathcal{R}' , isto é, \mathcal{R}' também é referencial inercial. Devido à importância desse resultado, vale a pena destacá-lo a seguir:

qualquer referencial que se mova em MRU em relação a um referencial inercial é também um referencial inercial.

A escolha do referencial inercial a ser utilizado na solução de um dado problema pode simplificar esta solução ou mesmo ajudar na compreensão de alguns aspectos do problema. A seguir, apresentaremos três exemplos nos quais estarão envolvidas mudanças de referenciais. No primeiro deles, ilustraremos a transformação de Galileu para as velocidades num caso simples e freqüente do cotidiano. Nos outros dois, faremos mudanças de um referencial inercial para outro, a fim de simplificar a descrição do movimento da partícula em questão. Veremos, em cada exemplo, como o movimento da partícula depende do referencial, muito embora as suas acelerações sejam as mesmas nos dois referenciais, uma vez que consideraremos apenas referenciais que se movem um em relação ao outro em MRU.

Exemplo 13.2

Neste exemplo, ilustraremos a transformação de Galileu para velocidades numa situação bem simples, a saber, no movimento de um nadador que cruza um rio de margens retilíneas e paralelas entre si. Por simplicidade, vamos supor que todas as partículas do rio se movam em MRU com a mesma velocidade \mathbf{V} em relação a um referencial solidário às margens, que chamaremos referencial \mathcal{R} . É comum, nesse caso, nos referirmos à velocidade \mathbf{V} simplesmente como a velocidade do rio relativamente às margens. Conhecida a velocidade \mathbf{V} , relacionaremos, então, a velocidade do nadador em relação às margens com a sua velocidade em relação a um referencial que se desloca em relação às margens com a mesma velocidade do rio.

Escolhemos os eixos cartesianos do referencial \mathcal{R} de tal modo que a direção de $\mathcal{O}\mathcal{X}$ coincida com a do rio, o sentido positivo deste eixo seja o sentido da correnteza do rio, e que a origem \mathcal{O} esteja num ponto da margem em contato com a água do rio. Seja \mathcal{R}' um referencial solidário ao rio, isto é, que se move em MRU em relação a \mathcal{R} com a velocidade \mathbf{V} . Vamos supor que os eixos de \mathcal{R}' permaneçam sempre paralelos aos eixos de \mathcal{R} e que no instante $t = 0$ s as origens \mathcal{O} e \mathcal{O}' coincidam, de modo que nesse instante todos os eixos de \mathcal{R} e \mathcal{R}' coincidam. Suponha que em $t = 0$ s um nadador de dimensões desprezíveis em relação à distância d entre as margens (de modo que possa ser considerado uma partícula em seu movimento) inicie um MRU em relação a \mathcal{R}' com velocidade $\mathbf{v}' = v'_y \mathbf{u}'_y$. Vejamos como determinar a sua velocidade em relação a \mathcal{R} .

Poderíamos imaginar os eixos do referencial \mathcal{R}' como três eixos solidários a um barco que esteja descendo o rio acompanhando a correnteza.

Utilizando a transformação de Galileu para as velocidades, dada pela equação (13.4), obtemos diretamente a velocidade do nadador em relação a \mathcal{R} , ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{v}' + \mathbf{V} \\ &= v'_y \mathbf{u}'_y + V_x \mathbf{u}_x \\ &= v'_y \mathbf{u}_y + V_x \mathbf{u}_x,\end{aligned}\quad (13.7)$$

onde usamos o fato de que $\mathbf{u}'_y = \mathbf{u}_y$.

Portanto, a sua velocidade em relação às margens (isto é, em relação a \mathcal{R}) é diferente de sua velocidade em relação ao rio (isto é, em relação a \mathcal{R}'). No caso em questão, não apenas as respectivas direções de \mathbf{v} e \mathbf{v}' , mas também seus respectivos módulos são diferentes. A **Figura 13.6** mostra o nadador num instante genérico de sua travessia.

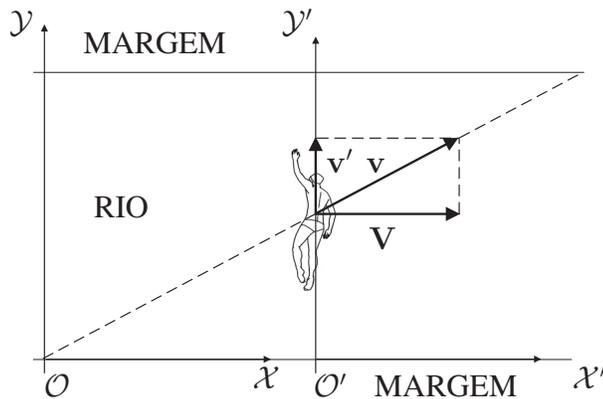


Figura 13.6: Nadador cruzando o rio. O desenho está fora de escala para facilitar a visualização do problema.

Como $\mathbf{v}' = v'_y \mathbf{u}'_y$, é imediato perceber que a velocidade do nadador em relação a \mathcal{R}' é perpendicular às margens do rio (lembre-se de que estas são paralelas aos eixos $\mathcal{O}\mathcal{X}$ e $\mathcal{O}'\mathcal{X}'$), enquanto a sua velocidade relativa a \mathcal{R} é oblíqua em relação às margens, ou seja, faz um ângulo menor do que 90° com o eixo $\mathcal{O}\mathcal{X}$. Aplicando o teorema de Pitágoras, vemos que $|\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{V}|^2$. É também imediato perceber que $v_x = V_x$ e $v_y = v'_y$.

Como um último comentário sobre este exemplo, note que, embora as trajetórias do nadador relativas aos referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}' sejam ambas segmentos de reta, elas não coincidem. Para um observador no referencial \mathcal{R}' , o movimento do nadador ocorre ao longo do eixo $\mathcal{O}'\mathcal{Y}'$, enquanto para um observador no referencial \mathcal{R} seu movimento ocorre ao longo de uma reta que está no primeiro

quadrante, indicada na **Figura 13.6** pela linha tracejada. As equações cartesianas das trajetórias relativamente a \mathcal{R} e \mathcal{R}' podem ser facilmente obtidas. Sendo d a distância entre as margens, elas são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} y &= \frac{v'_y}{V_x} x, & 0 \leq x \leq \frac{V_x}{v'_y} d & \text{ (trajetória em } \mathcal{R} \text{)}; \\ x' &= 0, & 0 \leq y' \leq d & \text{ (trajetória em } \mathcal{R}' \text{)}, \end{aligned} \quad (13.8)$$

como você pode verificar com facilidade.

Exemplo 13.3

Neste exemplo, analisaremos novamente o movimento de um projétil com lançamento oblíquo em relação ao solo, isto é, um projétil cuja velocidade inicial \mathbf{v}_0 possui, além de uma componente vertical, uma componente horizontal em relação a um referencial \mathcal{R} com eixos solidários ao solo. No entanto, nosso objetivo aqui não será reobter os resultados apresentados na Aula 11, mas comparar o movimento do projétil em relação a \mathcal{R} com o seu movimento em relação a um referencial \mathcal{R}' que se move em MRU relativamente a \mathcal{R} . Em particular, mostraremos que se a velocidade de \mathcal{R}' em relação a \mathcal{R} for escolhida de forma apropriada, o movimento do projétil, quando observado de \mathcal{R}' , será simplesmente um movimento vertical de queda livre.

Vamos escolher os eixos de \mathcal{R} de modo que $\mathcal{O}\mathcal{X}$ tenha direção horizontal, a origem \mathcal{O} esteja no solo, na posição de lançamento do projétil, e $\mathcal{O}\mathcal{Y}$ esteja na direção vertical, com sentido para cima. Além disso, vamos orientar os eixos de modo que o movimento do projétil ocorra no plano $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}$. Com essa escolha, e sendo θ_0 o ângulo entre \mathbf{v}_0 e \mathbf{u}_x , a posição e a velocidade do projétil em $t = 0$ s são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_0 = v_0 \cos\theta_0 \mathbf{u}_x + v_0 \operatorname{sen}\theta_0 \mathbf{u}_y, \quad (13.9)$$

onde, como de costume, usamos a notação em que $v_0 = |\mathbf{v}_0|$. Como o projétil possui uma aceleração constante (a aceleração da gravidade \mathbf{g}), a sua posição e a sua velocidade num instante qualquer t são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = v_0 \cos\theta_0 t \mathbf{u}_x + (v_0 \operatorname{sen}\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2) \mathbf{u}_y \\ \mathbf{v} = v_0 \cos\theta_0 \mathbf{u}_x + (v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt) \mathbf{u}_y. \end{cases} \quad (13.10)$$

Consideremos agora um referencial \mathcal{R}' que se movimenta em MRU com velocidade \mathbf{V} em relação a \mathcal{R} . De acordo com a equação (13.6), concluímos que $\mathbf{a}' = \mathbf{a} = \mathbf{g}$. No entanto, devido à transformação de Galileu para as velocidades, dada pela equação (13.4), temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' &= \mathbf{v} - \mathbf{V} \\ &= (v_0 \cos\theta_0 \mathbf{u}_x - \mathbf{V}) + (v_0 \sin\theta_0 - gt) \mathbf{u}_y, \quad (13.11)\end{aligned}$$

onde fizemos uso também da segunda equação escrita em (13.10). Fica evidente pela equação anterior que escolha devemos fazer para \mathbf{V} , de modo que, em relação ao referencial \mathcal{R}' , o projétil realize um movimento retilíneo e vertical. Basta escolher \mathbf{V} , de modo que \mathbf{v}' não possua componente horizontal. Portanto, vamos escolher

$$\mathbf{V} = v_0 \cos\theta_0 \mathbf{u}_x,$$

pois, desse modo, temos

$$\mathbf{v}' = (v_0 \sin\theta_0 - gt) \mathbf{u}'_y, \quad (13.12)$$

onde usamos o fato de que $\mathbf{u}_y = \mathbf{u}'_y$. Esse resultado já garante que o movimento do projétil, quando observado de \mathcal{R}' , seja vertical, isto é, com direção paralela ao eixo $\mathcal{O}'\mathcal{Y}'$. No entanto, para sabermos a posição do projétil em relação a \mathcal{R}' , num instante genérico, devemos saber a posição deste referencial em relação ao referencial \mathcal{R} num certo instante, mas essa informação não foi dada. Não especificamos, ainda, a posição da origem \mathcal{O}' em relação a \mathcal{R} em nenhum instante particular. Para simplificar, vamos supor que em $t = 0$ s as origens \mathcal{O} e \mathcal{O}' coincidam. Nesse caso, temos $\mathbf{r}'_0 = \mathbf{0}$ e a integração da equação (13.12) nos fornece

$$\mathbf{r}' = \left(v_0 \sin\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \right) \mathbf{u}'_y. \quad (13.13)$$

Da equação anterior, concluímos que o movimento em relação a \mathcal{R}' é vertical e ao longo do eixo $\mathcal{O}'\mathcal{Y}'$ (trata-se de um movimento de queda livre usual já estudado na Aula 7). Note que, ao mudarmos para o referencial \mathcal{R}' , apenas eliminamos o movimento horizontal do projétil, mas seu movimento vertical continuou exatamente o mesmo (basta comparar a equação anterior com a primeira equação escrita em (13.10)). Conseqüentemente, a altura máxima atingida pelo projétil e o tempo total de vôo (tempo de queda) são os mesmos nos dois referenciais (dados, respectivamente, por $(v_0^2 \sin^2\theta_0)/(2g)$ e $2v_0 \sin\theta_0/g$).

Em contrapartida, as trajetórias observadas em \mathcal{R} e \mathcal{R}' são diferentes. Enquanto um observador em \mathcal{R} registra uma parábola, dada por

$$y = \tan\theta_0 x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta_0} x^2, \quad 0 \leq x \leq \frac{2v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g},$$

um observador em \mathcal{R}' registra um segmento de reta, dado por:

$$x = 0, \quad 0 \leq y \leq \frac{v_0^2 \text{sen}^2 \theta_0}{2g}.$$

Os resultados discutidos nesse exemplo estão sintetizados na **Figura 13.7**. Nela, estão desenhados os eixos $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}$ e $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'$ nos instantes $t = 0s$, $t = t_q/4$, $t = t_q/2$, $t = 3t_q/4$ e $t = t_q$, onde $t_q = 2v_0 \text{sen} \theta_0 / g$. Estão indicadas ainda as velocidades \mathbf{v} , \mathbf{v}' e \mathbf{V} nesses instantes, para que você possa verificar a validade da transformação de Galileu, isto é, que $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$. Você pode perceber também, a partir dessa figura, que o projétil se encontra sempre ao longo do eixo $\mathcal{O}'\mathcal{Y}'$ e que sua velocidade \mathbf{v}' é sempre vertical. Já a velocidade \mathbf{v} é sempre tangente à trajetória parabólica observada de \mathcal{R} .

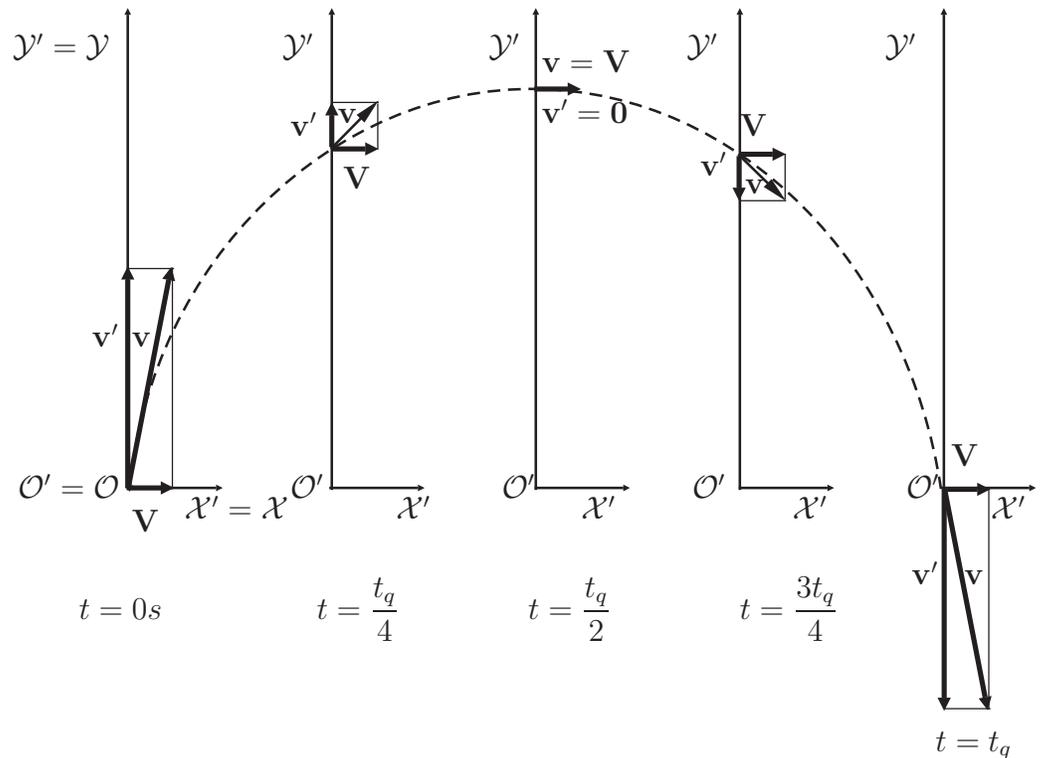


Figura 13.7: Movimento de um projétil analisado a partir dos referenciais \mathcal{R} , fixo no solo, e \mathcal{R}' , que se desloca em MRU em relação ao solo.

Exemplo 13.4

Vamos ilustrar novamente, neste exemplo, a questão da mudança de referenciais na descrição de um movimento de uma partícula, mas agora iremos considerar um movimento um pouco mais complicado. No entanto, nosso objetivo

aqui ainda é mostrar que, quando mudamos de um referencial \mathcal{R} para um referencial \mathcal{R}' , que se move em MRU em relação a \mathcal{R} , embora a aceleração da partícula seja a mesma nos dois referenciais, seu movimento pode se tornar mais simples num deles, permitindo um melhor entendimento do movimento em consideração. Novamente faremos uso da transformação de Galileu.

Consideremos o movimento cicloidal de uma partícula como, por exemplo, o movimento de um pequeno grão de poeira preso à periferia de um pneu de uma bicicleta que se movimenta em linha reta e com velocidade constante em relação ao solo. Nesse caso, note que o pneu rola sem deslizar, ou seja, em cada instante, o ponto do pneu que está em contato com o solo tem velocidade nula. Os eixos do referencial \mathcal{R} serão escolhidos como no exemplo anterior, isto é, com a origem \mathcal{O} fixa no solo, com o eixo \mathcal{OX} na horizontal e o \mathcal{OY} na vertical, apontando para cima. Além disso, escolhemos o eixo \mathcal{OX} de modo que o movimento do grão ocorra no plano \mathcal{OXY} . Para tornar o exemplo mais simples, vamos supor ainda que em $t = 0$ s o grão esteja na origem. Com isso, e sendo A o raio do pneu, a posição do grão num instante genérico em relação a \mathcal{R} é dada por

$$\mathbf{r} = A [\omega t - \text{sen}(\omega t)] \mathbf{u}_x + A [1 - \cos(\omega t)] \mathbf{u}_y, \quad (13.14)$$

onde ω é uma constante positiva (não é difícil mostrar que $\omega/2\pi$ corresponde ao número de voltas que o pneu da bicicleta executa por unidade de tempo). Analisando a equação anterior, vemos que o grão retorna ao solo pela primeira vez no instante $t_1 = 2\pi/\omega$ (basta impor a condição $1 - \cos(\omega t) = 0$ e buscar, dentre as soluções desta equação, qual possui o menor valor positivo). Esse resultado será utilizado mais adiante ainda neste exemplo.

A velocidade do grão num instante genérico é, então,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega A [1 - \cos(\omega t)] \mathbf{u}_x + \omega A \text{sen}(\omega t) \mathbf{u}_y. \quad (13.15)$$

Vamos agora mudar de referencial e analisar o movimento do grão em relação ao referencial \mathcal{R}' , definido como segue: a velocidade de \mathcal{R}' em relação a \mathcal{R} é igual à velocidade da bicicleta em relação a \mathcal{R} ; seus eixos são paralelos aos eixos de \mathcal{R} , mas a origem \mathcal{O}' coincide com o centro do pneu da bicicleta. Vamos mostrar que em relação a \mathcal{R}' o movimento do grão é simplesmente um movimento circular uniforme, de raio A , centro na origem \mathcal{O}' e velocidade de módulo $|\mathbf{v}'| = \omega A$.

O movimento cicloidal já foi estudado na Aula 11, na qual, inclusive, foram deduzidas as equações paramétricas da cicloide. Caso tenha dificuldade em acompanhar este exemplo, volte àquela aula para recordar os pontos que achar necessários.

A **Figura 13.8** mostra os dois referenciais, \mathcal{R} e \mathcal{R}' , num instante genérico do movimento do grão, e os vetores \mathbf{r} , \mathbf{r}' e \mathbf{R} , onde \mathbf{r} é o vetor-posição do grão em relação a \mathcal{R} , \mathbf{r}' é o vetor-posição do grão em relação a \mathcal{R}' e \mathbf{R} é o vetor-posição da origem \mathcal{O}' em relação a \mathcal{R} .

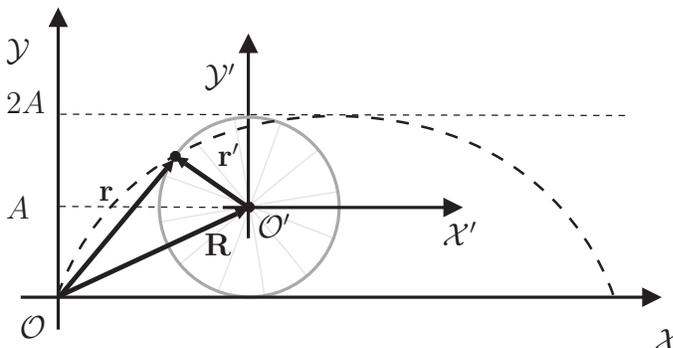


Figura 13.8: Pneu de raio A , trajetória cicloidial do grão relativamente a \mathcal{R} e eixos dos referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}' , com a origem \mathcal{O}' escolhida no centro do pneu.

Da **Figura 13.8**, temos imediatamente

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}, \quad (13.16)$$

onde $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}t$. Para obtermos \mathbf{R}_0 , note que em $t = 0$ s o grão se encontra na origem \mathcal{O} e, conseqüentemente, o centro do pneu está, nesse instante, sobre o semi-eixo positivo $\mathcal{O}y$, a uma distância A de \mathcal{O} . Portanto, é fácil verificar que $\mathbf{R}_0 = A \mathbf{u}_y$. Para encontrarmos \mathbf{V} , vamos imaginar que o pneu tenha dado uma volta completa. Nesse caso, como o pneu rola sem deslizar, o centro do pneu terá se deslocado de uma distância igual a $2\pi A$. Porém, como vimos anteriormente, o pneu dá uma volta completa no intervalo de tempo igual a $2\pi/\omega$, de modo que sua velocidade \mathbf{V} tem módulo:

$$|\mathbf{V}| = \frac{2\pi A}{2\pi/\omega} = \omega A \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{V} = \omega A \mathbf{u}_x.$$

Temos, então,

$$\mathbf{R} = A \mathbf{u}_y + \omega A t \mathbf{u}_x. \quad (13.17)$$

Substituindo as equações (13.17) e (13.14) em (13.16), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= A[\omega t - \text{sen}(\omega t)] \mathbf{u}_x + A[1 - \text{cos}(\omega t)] \mathbf{u}_y - (A \mathbf{u}_y + \omega A t \mathbf{u}_x) \\ &= -A \left[\text{sen}(\omega t) \mathbf{u}'_x + \text{cos}(\omega t) \mathbf{u}'_y \right], \end{aligned} \quad (13.18)$$

onde, na última igualdade, usamos o fato de que $\mathbf{u}_x = \mathbf{u}'_x$ e $\mathbf{u}_y = \mathbf{u}'_y$. Da expressão anterior, fica claro que o movimento do grão em relação a \mathcal{R}' é circular, pois

$$x'^2 + y'^2 = A^2 \left[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) \right] = A^2. \quad (13.19)$$

A velocidade do grão em relação a \mathcal{R}' , num instante genérico, é dada por:

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = -\omega A \left[\cos(\omega t) \mathbf{u}'_x - \sin(\omega t) \mathbf{u}'_y \right]. \quad (13.20)$$

A partir da equação anterior, podemos calcular o módulo de \mathbf{v}' :

$$|\mathbf{v}'|^2 = v_x'^2 + v_y'^2 = (\omega A)^2 \left[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) \right] = (\omega A)^2. \quad (13.21)$$

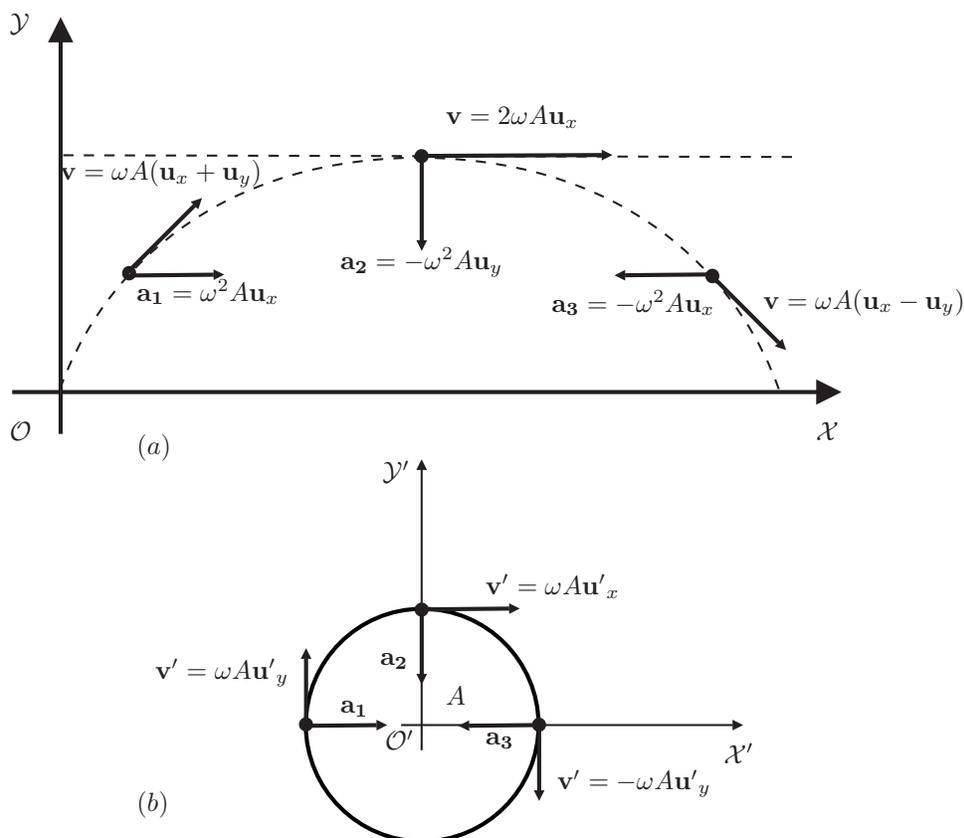


Figura 13.9: Trajetórias do grão com velocidades e acelerações marcadas em alguns instantes: (a) no referencial \mathcal{R} ; (b) no referencial \mathcal{R}' .

As equações (13.19) e (13.21) mostram que, para um observador em \mathcal{R}' , o movimento do grão é circular, de raio A e centro em \mathcal{O}' , e uniforme. Para

descobrirmos o sentido do movimento, podemos analisar tanto a equação (13.18) quanto a equação (13.20). Por exemplo, substituindo $t = 0\text{s}$ em (13.20), obtemos $\mathbf{v}'_0 = -\omega A \mathbf{u}'_x$, resultado que indica ser horário o sentido do movimento visto a partir de um ponto no semi-eixo positivo $\mathcal{O}'Z'$.

Na **Figura 13.9**, estão desenhadas as trajetórias do grão nos dois referenciais. Enquanto no referencial \mathcal{R}' ela é circular de raio A e centro em \mathcal{O}' , como ilustrado na **Figura 13.9(b)**, no referencial \mathcal{R} ela é uma cicloide de círculo geratriz de raio A , como ilustrado na **Figura 13.9(a)**. Nessas figuras, estão indicadas, ainda, as velocidades e acelerações do grão em alguns instantes do movimento observadas por cada um dos referenciais. Vale enfatizar que, embora $\mathbf{v}' \neq \mathbf{v}$, as acelerações do grão observadas nos dois referenciais são idênticas, isto é, $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$, como era de se esperar, uma vez que \mathcal{R}' se move em MRU relativamente a \mathcal{R} (comparando as **Figuras 13.9(a)** e **13.9(b)**, verifique o que foi afirmado neste último comentário).

Uma vez que o movimento do grão em relação a \mathcal{R}' é circular e, por sua vez, esse referencial se translada com um movimento retilíneo em relação a \mathcal{R} , podemos concluir que o movimento cicloidal pode ser pensado como uma composição apropriada de um movimento retilíneo com um circular.

A **Figura 13.10** ilustra o movimento do grão e o movimento dos eixos de \mathcal{R}' em relação a \mathcal{R} . Nela, estão marcadas as posições do grão e dos eixos de \mathcal{R}' nos instantes $t_0 = 0$, $t_1 = \pi/2\omega$, $t_2 = \pi/\omega$, $t_3 = 3\pi/2\omega$ e $t_4 = 2\pi/\omega$. Escolhemos deliberadamente esses instantes, pois durante um intervalo de tempo igual a $\pi/2\omega$ o pneu gira de um ângulo igual a $\pi/2$ radianos, fazendo com que tais pontos sejam bastante ilustrativos do movimento do grão.

A partir dessa figura, podemos ainda, se bem que com algum esforço, visualizar o movimento do grão em relação a \mathcal{R}' . Note, por exemplo, que no instante $t = 0\text{s}$, o grão está no semi-eixo negativo $\mathcal{O}'Y'$; no instante $t = \pi/2\omega$, o grão está no semi-eixo negativo $\mathcal{O}'X'$; em $t = \pi/\omega$, o grão está no semi-eixo positivo $\mathcal{O}'Y'$ e assim por diante, de modo que o grão está circulando em torno de \mathcal{O}' no sentido horário, como já havíamos comentado anteriormente.

Primeira lei de Newton

Definimos partícula isolada e usamos esse conceito para definir referencial inercial. Sabemos que referenciais podem ou não ser inerciais e temos dois exemplos de referenciais que consideramos inerciais. O referencial copernicano é um exemplo de referencial inercial e os referenciais terrestres também podem, com

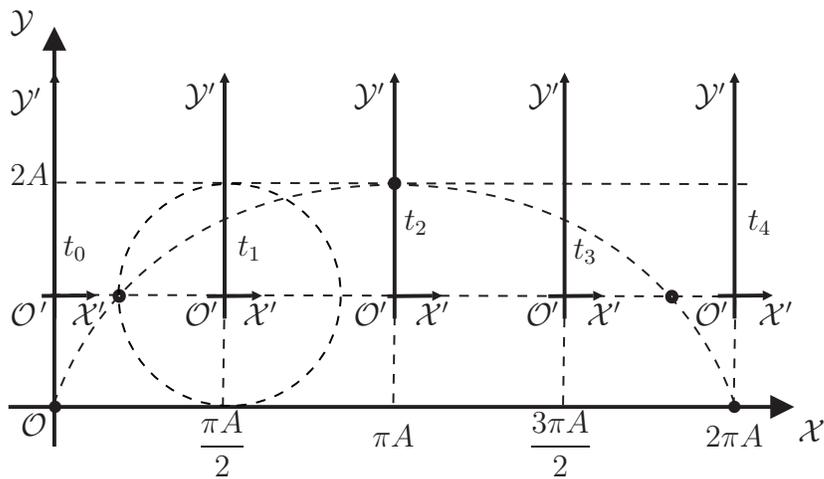


Figura 13.10: Referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}' e posições do grão em vários instantes.

boa aproximação, ser considerados inerciais na maioria dos problemas que vamos estudar. Agora vamos enunciar, na forma de uma lei, os resultados obtidos após um enorme conjunto de observações e medições.

Em primeiro lugar, percebemos a existência de referenciais inerciais, o que depende de outra observação: a de que existem partículas que podem ser consideradas isoladas. Agora, observamos também outro fenômeno de suma importância, que enunciamos da seguinte forma:

em relação a qualquer referencial inercial, qualquer partícula isolada está em repouso ou em MRU.

Para verificar se um referencial é inercial, usamos três partículas isoladas não-colineares e concluímos que o referencial é inercial se, em relação a ele, as três partículas estão em repouso ou em MRU. O fato de que essas três partículas estão em repouso ou em MRU em relação ao referencial inercial é apenas uma decorrência da verificação de que o referencial é inercial. E quanto às outras partículas isoladas do universo, além das três mencionadas? O que a lei enunciada anteriormente afirma é que todas essas outras partículas isoladas do universo estão em repouso ou em MRU em relação ao referencial inercial. Essa é uma afirmação que não decorre apenas da definição de referencial inercial. É uma lei física confirmada por uma imensa quantidade de dados experimentais. Essa lei é uma forma preliminar e parcial da primeira lei de Newton, que enunciaremos mais adiante.

Lembre-se de nossa motivação para definir partícula isolada como uma partícula infinitamente afastada de todos os demais corpos do universo. Queríamos garantir, com isso, que ela não sofresse influência alguma dos outros corpos do universo, exatamente por estar infinitamente afastada de todos eles. Uma vez aceitando que uma partícula isolada não sofra influência de nenhum outro corpo do universo, podemos perguntar qual o seu movimento em relação aos diversos referenciais. Em relação aos referenciais inerciais, a resposta é dada pela lei que já enunciamos: tal partícula tem o mais simples dos movimentos, o movimento de aceleração nula, isto é, ela está em repouso ou em MRU.

Já em relação aos referenciais não-inerciais, é possível verificar que essa partícula, que julgamos não sofrer nenhuma influência de qualquer outro corpo do universo, pode ter qualquer tipo de movimento acelerado, movimentos tão complicados quanto quisermos imaginar. Vemos então que, pelo menos para estudar o movimento de partículas isoladas, os referenciais inerciais são os mais convenientes porque, em relação a eles, os movimentos observados são os mais simples possíveis. Veremos mais adiante que também no estudo dos movimentos de partículas que não são isoladas, os referenciais inerciais são os mais convenientes. Em relação a eles, os fenômenos da Natureza aparecem em suas formas mais simples de se compreender. Por esse motivo, sempre supomos que os referenciais utilizados no estudo de qualquer movimento são inerciais, a menos que se afirme explicitamente o contrário. Desse modo, é costume não afirmar que estamos usando um referencial inercial, ficando subentendida esta informação. Seguindo esse procedimento, a lei que enunciamos anteriormente pode ter a seguinte forma resumida:

qualquer partícula isolada permanece em repouso ou em MRU.

Já sabemos que tal lei só é válida se o referencial usado é inercial, mas, como dissemos, isto está subentendido pela nossa convenção.

Uma partícula não isolada é aquela que não está infinitamente afastada de todos os outros corpos do universo. Nesse caso, dizemos que há corpos próximos à partícula, ou nas proximidades da partícula, ou nas vizinhanças da partícula ou, ainda, que a partícula está na presença de outros corpos. Essas são algumas das maneiras de dizer que a partícula não é isolada.

Considere uma partícula não isolada, cujo movimento consideramos em relação a um referencial inercial. Se ela fosse isolada, isto é, se estivesse distante de todos os corpos do universo, teria aceleração nula em relação ao referencial inercial. Não sendo isolada, ela está próxima de alguns outros corpos e podemos

perguntar que efeito a presença desses corpos tem sobre o seu movimento, em relação ao referencial inercial. A resposta é: a presença de outros corpos tem o efeito de, possivelmente, acelerar a partícula. Em outras palavras, a partícula pode adquirir aceleração, em relação ao referencial inercial, devido à presença desses outros corpos. Essa resposta é fundamentada numa enorme quantidade de observações e medições, e constitui-se, como veremos, no embrião de uma das leis fundamentais da dinâmica.

É importante notar que não somente uma partícula pode ter aceleração devido à proximidade de outros corpos, como também essa é a única condição em que ela pode ter aceleração relativamente a um referencial inercial. De fato, se não houver outros corpos em sua proximidade, ela é uma partícula isolada e, conseqüentemente, sua aceleração tem de ser nula. É claro que isso só é verdadeiro porque estamos considerando um referencial inercial. Em relação a referenciais não-inerciais, uma partícula isolada e, portanto, sem nenhum corpo em suas proximidades, pode ter aceleração diferente de zero. Por esse motivo, os referenciais não-inerciais são inconvenientes para estudar o movimento: em relação a eles, uma partícula pode ter aceleração sem que haja outros corpos nas vizinhanças para causar tal aceleração. Já os referenciais inerciais são convenientes exatamente porque em relação a eles uma partícula só pode ter aceleração se houver corpos nas vizinhanças para causar essa aceleração. Analisando os movimentos observados na Natureza e utilizando os conceitos de referencial inercial, de partícula isolada e de partícula não-isolada, somos levados a considerar um tipo especial de influência que os corpos podem exercer sobre uma partícula. Esse tipo de influência pode ser definido por duas propriedades: a influência consiste em acelerar a partícula e desaparece quando as distâncias entre os corpos e a partícula vai a infinito. Vamos chamar essa influência **força**.

Força *que um corpo exerce sobre uma partícula é a ação pela qual ele acelera a partícula e que desaparece quando a distância entre o corpo e a partícula tende a infinito.*

Estamos dizendo, então, que a aceleração de uma partícula é sempre devida às influências de outros corpos sobre ela, e chamamos forças essas influências. Se a partícula está próxima aos corpos, eles podem exercer forças sobre ela e acelerá-la; contudo, se os corpos estão infinitamente afastados da partícula, eles não podem acelerá-la e, por esse motivo, as partículas isoladas não têm aceleração. Pode também ocorrer que vários corpos estejam nas vizinhanças de uma partícula e ainda assim ela não tenha aceleração. Essa situação é interpretada considerando-se que as ações aceleradoras que os diversos corpos exercem sobre a partícula

estão sendo canceladas entre si, ou seja, as forças que eles exercem sobre a partícula se cancelam entre si. O exemplo seguinte ilustra essa situação.

Exemplo 13.5

Consideremos uma bolinha em repouso sobre uma mesa horizontal que está fixa em relação à Terra, conforme indicado na **Figura 13.11**. Podemos dizer que a bolinha está em repouso em relação a um referencial terrestre que, para os nossos propósitos, pode ser considerado inercial. Estando ela em repouso, a sua velocidade e a sua aceleração são iguais a zero.

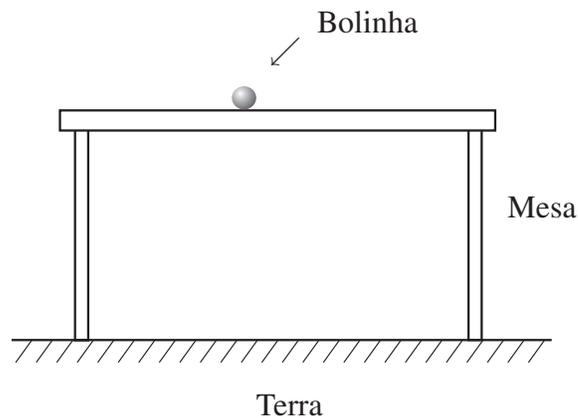


Figura 13.11: A bolinha sobre a mesa não é uma partícula isolada, mas tem aceleração nula, pois está em repouso.

A bolinha não é uma partícula isolada. Podemos identificar vários corpos em suas vizinhanças, como a Terra e a mesa sobre a qual ela repousa. Poderíamos acrescentar o ar que a circunda e outros corpos mais que julgamos estarem nas vizinhanças da bolinha. Quaisquer que sejam eles e quaisquer que sejam as influências que eles exerçam para acelerar a bolinha, temos de admitir que essas influências se cancelam, pois a bolinha tem aceleração nula.

Podemos resumir essas considerações, dizendo que há forças exercidas sobre uma partícula sempre que ela estiver acelerada em relação a um referencial inercial, mas que pode haver forças sem que haja aceleração, pois existe a possibilidade de as forças se cancelarem.

Mesmo com o risco de sermos repetitivos, vamos lembrar que as considerações que nos levaram ao conceito de força, e o próprio conceito, pressupõem que o referencial em relação ao qual consideramos o movimento da partícula seja inercial.

Vamos resumir, usando o conceito de força, o que dissemos sobre a ausência de aceleração de uma partícula em relação a um referencial inercial. Se uma partícula é isolada, ela não tem aceleração e não há forças sobre ela, pois corpos não podem exercer forças se estão a uma distância infinita da partícula. Se uma partícula não é isolada, há corpos em suas vizinhanças que podem acelerá-la ou não. Se a partícula não isolada está acelerada, essa aceleração é devida às ações dos corpos em suas vizinhanças, que chamamos forças exercidas sobre a partícula por esses corpos. Se a partícula não-isolada não tem aceleração, é porque as forças exercidas sobre ela pelos corpos nas suas vizinhanças se cancelam entre si.

É usual resumir as observações e considerações sobre partículas isoladas, referenciais inerciais e influências aceleradoras que corpos exercem sobre partículas não-isoladas por meio do enunciado que segue abaixo.

Toda partícula permanece em estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que seja acelerada por forças exercidas sobre ela.

Essa afirmação é chamada **primeira lei de Newton**. Newton não a formulou exatamente desse modo. Sua formulação segue uma linguagem própria da época e pressupõe certas considerações que podem não ser convenientes do ponto de vista didático. Por isso são propostos enunciados diferentes, mas com o mesmo conteúdo do enunciado de Newton. Tais enunciados são apresentados sob o nome de primeira lei de Newton, e o que vimos anteriormente é um deles. É instrutivo extrair o conteúdo conceitual de física contido nesta lei, o que faremos a seguir.

Em primeiro lugar, consideremos uma partícula isolada qualquer. Infinitamente afastada dos demais corpos do universo, não há forças sobre ela. A primeira lei diz, então, que ela permanece em repouso ou em MRU, isto é, permanece com aceleração igual a zero. Mas sabemos que o valor da aceleração de uma partícula depende do referencial em relação ao qual consideramos o seu movimento. Podemos escolher um referencial em relação ao qual a partícula tenha aceleração diferente de zero. Conseqüentemente, a afirmação de que a aceleração é zero, feita na primeira lei de Newton, significa que essa lei pressupõe que um certo tipo de referencial esteja sendo usado. Trata-se, é claro, do tipo de referencial em relação ao qual qualquer partícula isolada tem aceleração nula. Em particular, as partículas de uma trinca de partículas isoladas não-colineares têm acelerações nulas em relação a tal tipo de referencial, isto é, ele é do tipo inercial.

Constatamos, então, que a primeira lei de Newton pressupõe que o referencial usado para analisar o movimento de uma partícula qualquer seja um re-

referencial inercial. Dessa primeira conclusão segue imediatamente que a primeira lei também afirma a existência de referenciais inerciais e de partículas isoladas. De fato, uma vez que essa lei afirma fatos sobre a Natureza, que somente são verdadeiros em relação a referenciais inerciais, pressupõe-se nela a existência de tais referenciais. Mas tais referenciais somente podem ser definidos e caracterizados se existirem partículas isoladas; logo, na primeira lei fica afirmada, implicitamente, a existência de partículas isoladas, mais especificamente, a existência de trincas de partículas isoladas não-colineares. Sabemos que as estrelas fixas provêm exemplos dessas partículas.

A primeira lei de Newton também afirma a existência de dois tipos de movimento para uma partícula: o movimento sem aceleração e o movimento com aceleração. A diferença fundamental entre esses dois tipos de movimento é que, para realizar o primeiro tipo, a partícula não necessita da presença de outros corpos, enquanto para realizar o segundo tipo a presença de outros corpos é absolutamente necessária. Uma partícula isolada tem sempre aceleração zero, isto é, permanece em repouso ou em MRU. A existência desse movimento requer apenas a existência da partícula, do espaço e do tempo, além do referencial inercial em relação ao qual o movimento é considerado. Já o movimento acelerado requer também a existência de outros corpos nas vizinhanças da partícula. São as ações desses corpos sobre a partícula, que chamamos forças, que causam a aceleração da mesma. De fato, essas afirmações sobre o movimento estão claramente afirmadas na primeira lei. Nela se diz que, não havendo forças sobre a partícula, isto é, corpos nas vizinhanças da partícula, ela permanece em repouso ou em MRU, ou seja, com aceleração zero. Está aí o movimento que a partícula tem quando deixada por si só. Nela também se afirma que a partícula só não permanece em repouso ou MRU, isto é, ela só adquire aceleração se outros corpos agirem sobre ela para causar essa aceleração, como acabamos de afirmar.

Vale a pena você meditar sobre esta lei, para ficar claro que essas afirmações que fizemos estão de fato contidas em seu enunciado breve. A primeira lei de Newton é de significado profundo e afirma propriedades fundamentais sobre a natureza do movimento. Ela não pode ser considerada apenas como um caso particular das outras leis de Newton ou como a simples definição de um conceito, como o de referencial inercial. Uma lei não é uma definição, pois definições são inventadas por nós, enquanto leis são fatos sobre a Natureza que nós apenas verificamos. Veremos também que as outras leis de Newton dependem em sua formulação do conteúdo da primeira lei. Esta é necessária para formular as outras, portanto, não pode ser apenas um caso particular delas.

Vamos finalizar esta aula observando que a definição de força que usamos expressa a idéia qualitativa da mesma. Essa idéia qualitativa não é suficiente para desenvolver a teoria da dinâmica. Necessitaremos de um conceito de força mais preciso e quantitativo, que será desenvolvido nas aulas seguintes. De qualquer modo, esse conceito quantitativo estará de acordo com o conceito mais vago que usamos nesta aula: de força como a ação de um corpo que acelera uma partícula e que desaparece quando a distância entre o corpo e a partícula vai a infinito.

Resumo

Partícula isolada é uma partícula infinitamente afastada dos demais corpos do universo. Referencial inercial é um referencial em relação ao qual são nulas as acelerações de uma trinca de partículas isoladas não-colineares. Uma partícula não-isolada tem corpos em suas vizinhanças que podem agir sobre ela de modo a acelerá-la. Definimos força que um corpo exerce sobre uma partícula como a ação com a qual ele acelera a partícula e que desaparece quando a distância entre o corpo e a partícula tende a infinito. A primeira lei de Newton afirma que toda partícula permanece em estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que seja acelerada por forças exercidas sobre ela.

Questionário

1. O que você entende por relatividade do movimento?
2. O que é uma partícula isolada?
3. Podemos observar no universo uma partícula perfeitamente isolada? O que consideramos, na prática, como a realização aproximada de uma partícula isolada? Cite exemplos de partículas isoladas que podemos observar facilmente.
4. O que é um referencial inercial? Cite exemplos.
5. Qualquer referencial pode ser classificado como inercial ou não-inercial, ou há referenciais que não são nem uma coisa nem outra? Um referencial pode ser inercial e ao mesmo tempo não-inercial?
6. Considere a seguinte afirmação: um referencial inercial é aquele em relação ao qual três partículas estão em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. O que é necessário alterar nessa afirmação para torná-la verdadeira?

7. Enuncie a primeira lei de Newton.
8. Analise a primeira lei de Newton, explicitando as afirmações nela contidas sobre a natureza do movimento.

Problemas propostos

1. Considere um referencial \mathcal{R} e um referencial \mathcal{R}' que se movimenta em MRU relativamente a \mathcal{R} com velocidade \mathbf{V} e cujos eixos têm orientações fixas em relação a \mathcal{R} . Vamos supor que os eixos \mathcal{OZ} e \mathcal{OZ}' sejam paralelos, mas os planos $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Z}'$ e $\mathcal{O}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ estejam girados de um ângulo α em relação aos planos \mathcal{OXZ} e \mathcal{OYZ} , respectivamente, como indica a **Figura 13.12**.

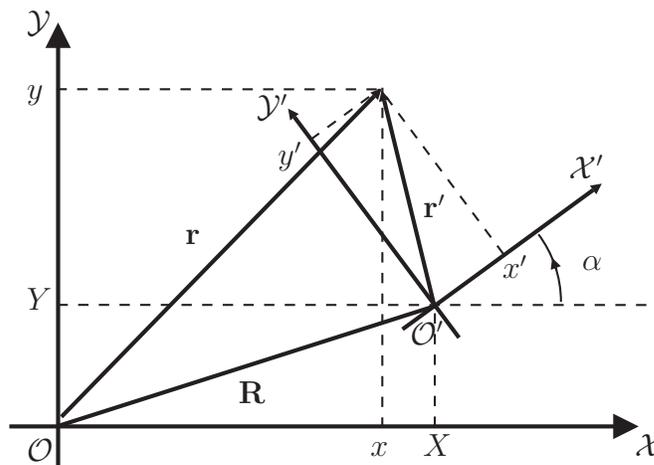


Figura 13.12: Eixos $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'$ girados de um ângulo α em relação aos eixos $\mathcal{OX}\mathcal{Y}$.

Nesta **Figura 13.12**, estão marcados os vetores \mathbf{r} , \mathbf{r}' e \mathbf{R} , onde \mathbf{r} é o vetor-posição de uma partícula em relação a \mathcal{R} , \mathbf{r}' é o seu vetor-posição em relação a \mathcal{R}' e \mathbf{R} é o vetor-posição da origem \mathcal{O}' em relação a \mathcal{R} .

- (a) A partir da **Figura 13.12**, mostre que as componentes cartesianas dos vetores \mathbf{r} , \mathbf{r}' e \mathbf{R} estão relacionadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + X \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + Y \\ z = z' + Z \end{cases} .$$

Conseqüentemente, por derivação direta, temos:

$$\begin{cases} v_x = v'_x \cos\alpha - v'_y \sin\alpha + V_x \\ v_y = v'_x \sin\alpha + v'_y \cos\alpha + V_y \\ v_z = v'_z + V_z \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} a_x = a'_x \cos\alpha - a'_y \sin\alpha \\ a_y = a'_x \sin\alpha + a'_y \cos\alpha \\ a_z = a'_z \end{cases} .$$

(b) Usando o fato de que $\mathbf{v} = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y + v_z \mathbf{u}_z$, $\mathbf{v}' = v'_x \mathbf{u}'_x + v'_y \mathbf{u}'_y + v'_z \mathbf{u}'_z$ e $\mathbf{V} = V_x \mathbf{u}_x + V_y \mathbf{u}_y + V_z \mathbf{u}_z$, demonstre que a transformação de Galileu para as velocidades ainda é válida nesse caso (no qual alguns eixos de \mathcal{R}' estão girados em relação aos de \mathcal{R}), ou seja, mostre que $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$. Demonstre, então, que se \mathcal{R} é um referencial inercial, \mathcal{R}' também é.

2. Repita o problema anterior, mas considerando agora que os eixos do referencial \mathcal{R}' se movimentem em MRUV com aceleração \mathbf{A} em relação a \mathcal{R} . Mostre, nesse caso, que $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{A}$. Demonstre que, se \mathcal{R} é um referencial inercial, \mathcal{R}' não será mais inercial. Nesse caso, você terá demonstrado que todo referencial que tem aceleração diferente de zero em relação a um referencial inercial não é inercial.
3. Reconsidere o Exemplo 13.3, mas, neste problema, suponha que o referencial \mathcal{R}' tenha a velocidade $\mathbf{V} = 2v_0 \cos\theta_0 \mathbf{u}_x$ em relação a \mathcal{R} . Obtenha, nesse caso, as expressões para a posição e a velocidade do projétil relativas a \mathcal{R}' , isto é, \mathbf{r}' e \mathbf{v}' , assim como a equação cartesiana de sua trajetória neste referencial. Faça um desenho dessa trajetória.
4. Considere um trem que se encontra em MRU com velocidade $\mathbf{V} = V_0 \mathbf{u}_x$ em relação a um referencial \mathcal{R} solidário à estação. Num dado instante, que tomaremos como $t = 0\text{s}$, um pequeno parafuso se desprende do teto de um dos vagões. Por simplicidade, vamos escolher o eixo \mathcal{OY} , de modo que a posição inicial do parafuso seja dada por $\mathbf{r}_0 = h \mathbf{u}_y$.
 - (a) Obtenha a função-movimento do parafuso (em relação a \mathcal{R}) desde $t = 0\text{s}$ até o instante em que toca o chão do vagão, ou seja, determine a posição do parafuso \mathbf{r} num instante genérico de seu movimento. Escreva a equação cartesiana de sua trajetória, nesse referencial, e faça um esboço da mesma.
 - (b) Considere agora um outro referencial, \mathcal{R}' , solidário ao trem, ou seja, que se move em MRU em relação a \mathcal{R} com a mesma velocidade do trem e cujos eixos estão definidos como nos Exemplos 13.2 e 13.3, ou seja, seus eixos são paralelos aos de \mathcal{R} e coincidem em $t = 0\text{s}$.

Determine a posição do parafuso em relação a \mathcal{R}' , isto é, \mathbf{r}' , num instante genérico de seu movimento. Escreva a equação cartesiana de sua trajetória neste referencial e faça um esboço da mesma.

(c) Repita o item anterior, mas supondo que \mathcal{R}' se mova em relação a \mathcal{R} com a velocidade $\mathbf{V} = 2V_0\mathbf{u}_x$.

5. Suponha que o comboio de vagões de um metrô esteja parado numa estação. Num dado instante, tomado como $t = 0\text{s}$, o comboio inicia um MRUV com aceleração $\mathbf{A} = A_0\mathbf{u}_x$ em relação a um referencial \mathcal{R} solidário à estação. Nesse mesmo instante, uma pequena lâmpada (considerada uma partícula) se solta do teto de um dos vagões e cai sob a ação da gravidade. Considere agora um referencial \mathcal{R}' solidário ao vagão com eixos $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ escolhidos de tal forma que $\mathbf{u}'_x = \mathbf{u}_x$ e que a posição inicial da lâmpada nesse referencial seja dada por $\mathbf{r}'_0 = h\mathbf{u}'_y$. Determine a posição da lâmpada em relação a \mathcal{R}' num instante genérico de sua queda e encontre a equação cartesiana de sua trajetória nesse referencial. Faça um esboço dessa trajetória. Compare com a trajetória observada no referencial \mathcal{R} .
6. Utilizando as equações apresentadas no texto desta aula, de acordo com a necessidade, encontre as expressões de todos os vetores desenhados na **Figura 13.9** do Exemplo 13.4.
7. A posição de uma partícula em movimento relativo a um referencial solidário ao solo é dada por

$$\mathbf{r} = A \cos(\omega t) \mathbf{u}_x + A \sin(\omega t) \mathbf{u}_y + (B + Vt) \mathbf{u}_z,$$

onde A , ω , B e V são constantes positivas. Note que, em relação a \mathcal{R} , esse movimento não é plano. Escolha um referencial \mathcal{R}' , de tal modo que, em relação a ele, o movimento da partícula seja circular e uniforme. Deixe bem claro como você escolheu os eixos cartesianos de \mathcal{R}' e escreva explicitamente qual o movimento da origem \mathcal{O}' em relação a \mathcal{R} . Com a sua escolha de \mathcal{R}' , em que plano ocorre o movimento circular e qual o seu centro?

8. Um bêbado resolveu pegar uma canoa e remar rio acima. Quando passou embaixo de uma pequena ponte, sem que percebesse, sua garrafa de cachaça caiu no rio e imediatamente passou a se mover, em relação às margens, com a velocidade do rio. Não tardou muito para que o bêbado se desse conta dessa “tragédia”, e dois minutos depois da queda da garrafa, ele virou a canoa e começou a remar rio abaixo, mas com a mesma intensidade com

que remava rio acima. Quando ele por fim atingiu a garrafa, para sua felicidade, ele se encontrava a 120m da ponte. Desprezando o tempo gasto pelo bêbado para virar a canoa, calcule o módulo da velocidade do rio em relação às margens.

9. Um avião sai da cidade A , vai até a cidade B e, por não ser possível pousar nessa cidade devido ao mau tempo, retorna imediatamente à cidade A . Por simplicidade, despreze o tempo gasto pelo avião para fazer a volta sobre a cidade B e retornar para a cidade A e suponha que ele se movimenta em linha reta tanto de A para B quanto de B para A . Seja ℓ a distância entre A e B e u o módulo da velocidade do avião em relação ao ar.
- Caso não haja vento durante todo o vôo, determine o tempo total de viagem, isto é, o intervalo de tempo entre a saída da cidade A e o retorno a ela.
 - Caso sopra um vento constante durante todo o vôo, cuja velocidade tenha módulo V e direção do segmento de reta que une A e B (escolha o sentido que mais lhe convier), determine o tempo total de viagem.
 - Caso sopra um vento constante durante todo o vôo, cuja velocidade tenha módulo V e direção perpendicular ao segmento de reta que une A e B (escolha o sentido que desejar), determine o tempo total de viagem.

10. Dois barcos, A e B , navegam num grande lago com as seguintes funções-movimento relativas a um referencial \mathcal{R} fixo em suas margens:

$$\mathbf{r}_A = 2t\mathbf{u}_x + 10t\mathbf{u}_y ; \quad \mathbf{r}_B = (240 - 2t)\mathbf{u}_x + 10t\mathbf{u}_y .$$

Considere agora um referencial \mathcal{R}' solidário ao barco A e cujos eixos sejam paralelos aos eixos de \mathcal{R} .

- Usando apropriadamente a transformação de Galileu, obtenha a velocidade do barco B no referencial \mathcal{R}' (nessa situação, é comum dizermos velocidade do barco B relativa ao barco A).
- Obtenha a posição do barco B em relação a \mathcal{R}' , isto é, \mathbf{r}'_B num instante genérico de seu movimento. Os barcos irão se chocar? Em caso afirmativo, em que instante? Responda a essas duas últimas perguntas analisando os movimentos no referencial \mathcal{R}' .

11. Um pára-quedista, em seu treinamento de rotina, salta de um avião em direção ao solo e, em seguida, abre seu pára-quedas. Identifique os corpos, nas vizinhanças do pára-quedista, que você julga relevantes para o estudo de seu movimento:
- (a) durante a queda;
 - (b) depois que ele atinge o solo e retira o pára-quedas de seu corpo.

Auto-avaliação

O conteúdo desta aula, juntamente com os conteúdos das duas próximas aulas, reúnem os fundamentos de toda a mecânica newtoniana. Por esse motivo, essas três aulas devem ser muito bem compreendidas por você. Portanto, não passe adiante sem que tenha certeza de ter entendido todos os conceitos apresentados, ainda que isso exija várias leituras desta aula. Um modo de verificar o grau de compreensão é, obviamente, tentar responder ao questionário e resolver os problemas propostos. Sugerimos, então, que você prossiga com seus estudos somente se tiver respondido a todas as questões e resolvido todos os problemas propostos com razoável confiança em tê-los feito corretamente.

Aula 14 – Conceito de massa inercial e a Segunda Lei de Newton

Objetivos

- Desenvolver o conceito de massa inercial e o conceito quantitativo de força.
- Compreender a Segunda Lei de Newton do movimento.
- Entender o conceito de força gravitacional entre partículas.

Introdução

Esta aula dá continuidade aos tópicos tratados na Aula 13. Por isso, é necessário iniciá-la já supondo que os referenciais usados para analisar os movimentos das partículas sejam inerciais. Portanto, tenha sempre em mente que toda afirmação é feita pressupondo que o referencial usado seja inercial, a menos que se diga explicitamente o contrário. Pretendemos chegar aos conceitos quantitativos de massa inercial e de força. Mais especificamente, chegaremos ao conceito de força total sobre uma partícula exercida pelas partículas e corpos que estão em suas vizinhanças.

Como veremos, massa inercial é a quantidade associada a uma partícula cujo valor representa a dificuldade que ela oferece para ser acelerada. Força sobre uma partícula é a quantidade associada à influência que as vizinhanças dessa partícula exercem sobre ela, acelerando-a. Essas duas quantidades, juntamente com a própria aceleração da partícula, são as grandezas que entram no enunciado da Segunda Lei de Newton. Uma propriedade fundamental da força é que ela é determinada não apenas pela posição e velocidade da partícula, cujo movimento queremos analisar, mas também pelas posições e velocidades das partículas que estão à sua volta, em sua vizinhança.

Nesta aula, estudaremos os conceitos e as afirmações fundamentais contidas na Segunda Lei de Newton. Contudo, não estaremos ainda aptos a resolver problemas concretos como, por exemplo, determinar o movimento de blocos que são puxados por fios e deslizam sobre rampas inclinadas, ou mesmo superfícies mais gerais, entre outros. Para isso, ainda faltam alguns conceitos e métodos que desenvolveremos nas próximas aulas. Aqui, nossa proposta é entender os conceitos de massa e força, por meio de situações gerais bem simples, deixando para depois a tarefa de realizar cálculos sobre problemas específicos. Mesmo os

problemas propostos no final desta aula têm por objetivo apenas auxiliar o aluno na compreensão dos conceitos que discutiremos.

Massa inercial

Consideremos um par de partículas infinitamente afastado dos demais corpos do universo, mas suponhamos que elas estejam próximas uma da outra. Cada partícula do par não está isolada, pois tem, por hipótese, a outra em suas vizinhanças. Porém, além da outra, cada partícula do par não possui nenhum outro corpo em suas vizinhanças. Podemos dizer que o par constituído por tais partículas está isolado, embora cada partícula não esteja isolada. Nessas circunstâncias, o movimento de uma das partículas do par só pode ser influenciado pela outra. Em outras palavras, cada partícula do par pode ser acelerada somente pela outra.

Vamos denominar partícula i uma das partículas do par e partícula j a outra. Seja \mathbf{a}_i a aceleração da partícula i e \mathbf{a}_j a aceleração da partícula j . A **Figura 14.1** exemplifica tal situação.

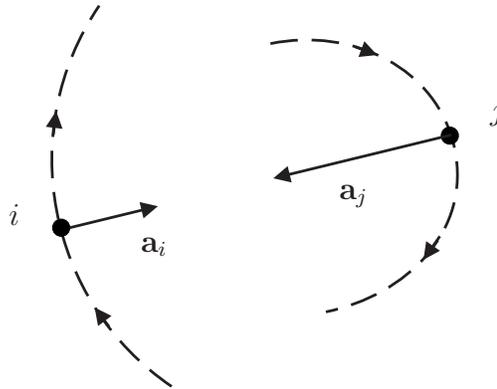


Figura 14.1: Um par de partículas isolado do restante do universo e suas respectivas acelerações.

Essa situação idealizada do par de partículas completamente isolado não pode ser realizada na prática, mas há muitas situações concretas que se aproximam dela ou que são equivalentes a ela. Observando e medindo as acelerações do par de partículas nessas situações concretas, observamos algumas propriedades que relacionam entre si as acelerações das partículas do par isolado. A primeira propriedade observada é enunciada a seguir.

As acelerações das partículas de um par isolado têm sempre a mesma direção e sentidos opostos. Além disso, a razão entre os módulos das acelerações não depende do movimento das partículas; ela é uma constante que depende apenas do par de partículas em consideração.

Esta propriedade pode ser sintetizada na equação:

$$\mathbf{a}_j = -m_{ij}\mathbf{a}_i, \quad (14.1)$$

onde m_{ij} é uma constante real positiva que depende apenas do par de partículas em consideração, no caso, as partículas i e j . De fato, sendo m_{ij} um número positivo, $-m_{ij}$ é um número negativo e, conseqüentemente, o vetor \mathbf{a}_j é o produto de um número negativo pelo vetor \mathbf{a}_i . Isso significa que as duas acelerações têm a mesma direção e sentidos opostos, como afirmado na primeira propriedade.

A outra afirmação contida na primeira propriedade é obtida tomando-se o módulo da equação (14.1), ou seja,

$$\frac{|\mathbf{a}_j|}{|\mathbf{a}_i|} = m_{ij}. \quad (14.2)$$

Desse modo, vemos que a razão entre os módulos das acelerações das partículas de um par isolado é uma constante que só depende desse par de partículas em consideração. Com isso, fica demonstrado que a equação (14.1) é uma expressão perfeita da primeira propriedade enunciada anteriormente. Note que essa primeira propriedade foi escrita na forma de uma equação, na qual \mathbf{a}_j é igual a um número multiplicado por \mathbf{a}_i . A propriedade ficaria igualmente descrita pela equação na qual \mathbf{a}_i é igual a um número multiplicado por \mathbf{a}_j , isto é, pela equação

$$\mathbf{a}_i = -m_{ji}\mathbf{a}_j, \quad (14.3)$$

onde m_{ji} também é uma constante real positiva que depende apenas do par de partículas i e j . De fato, dessa equação também concluímos que as acelerações das partículas do par têm a mesma direção e sentidos opostos, e que a razão entre elas é uma constante que depende apenas do par de partículas em consideração. Substituindo no lado direito da equação (14.3) a expressão de \mathbf{a}_j dada pela equação (14.1), obtemos: $\mathbf{a}_i = m_{ji}m_{ij}\mathbf{a}_i$. Essa equação mostra que $m_{ji}m_{ij} = 1$, isto é, que as constantes m_{ji} e m_{ij} obedecem à relação

$$m_{ij} = \frac{1}{m_{ji}}. \quad (14.4)$$

Essa é uma propriedade necessária na teoria que estamos desenvolvendo, mas, a bem da verdade, não é expressão de nenhum resultado experimental. Apenas

descreve o fato de que podemos escolher qualquer uma das duas equações (14.1) ou (14.3) para expressar a primeira propriedade sobre as acelerações de um par de partículas isolado.

Em resumo, isolando um par de partículas quaisquer e medindo suas acelerações, concluímos que elas obedecem às equações (14.1) e (14.3), nas quais as constantes m_{ij} e m_{ji} satisfazem à relação (14.4). Esse resultado é obtido para qualquer par isolado de partículas.

Consideremos agora três partículas quaisquer, designadas por partículas i , j e k , respectivamente. Formemos dois pares isolados que contenham a partícula k . Do par isolado constituído pelas partículas i e k , obtemos a constante m_{ik} , e do par isolado constituído pelas partículas j e k , a constante m_{jk} . Comparando essas constantes, verifica-se uma segunda propriedade decorrente dos valores das acelerações de pares isolados de partículas. Essa segunda propriedade é expressa pela equação

$$\frac{m_{ik}}{m_{jk}} = m_{ij}, \quad (14.5)$$

onde m_{ij} é a constante associada ao par isolado constituído pelas partículas i e j .

A segunda propriedade (14.5) mostra que a razão entre m_{ik} e m_{jk} não depende da partícula k que é repetida nos dois pares. Essa propriedade reflete o resultado experimental:

a razão m_{ik}/m_{jk} é igual à constante m_{ij} , obtida de modo totalmente independente da partícula k .

Portanto, as acelerações das partículas de um par isolado obedecem a algumas propriedades bem específicas: a que chamamos primeira propriedade, dada pela equação (14.1), e a que chamamos segunda propriedade, dada pela equação (14.5). Estas duas propriedades permitem definir uma grandeza, chamada massa inercial, que possui importantes propriedades. Essa grandeza, por sua vez, é utilizada para escrever as duas propriedades na forma sucinta de uma única lei. Vejamos, a seguir, como tudo isso é feito.

Escolheremos uma partícula bem identificada, que chamaremos partícula padrão p , e formaremos pares isolados constituídos por ela e por uma outra partícula qualquer. Do par constituído pela partícula padrão p e pela partícula i , obtemos o número m_{ip} . Vamos chamar esse número **massa** da partícula i em relação à partícula padrão p . Digamos que o número m_{ip} seja igual a 3. Nesse caso, a massa da partícula i em relação à partícula padrão p é 3. Representando a massa da partícula i por m_i , poderíamos escrever $m_i = 3$. Embora nessa equação seja dito claramente que o número m_{ip} é igual a 3, não está especificado que

esse número foi obtido usando uma certa partícula padrão p . Para deixar claro e explícito que usamos essa partícula padrão, em vez de escrever a igualdade $m_i = 3$, escrevemos a igualdade $m_i = 3 u_p$, na qual o símbolo u_p indica que o número $m_{ip} = 3$ foi obtido pelo uso da partícula padrão p . O símbolo u_p é chamado unidade de massa obtida da partícula padrão p . Usamos o valor 3 para o número m_{ip} para raciocinarmos com um valor específico, mas aplicamos ao caso geral o procedimento de usar um símbolo u_p para indicar que foi escolhida como padrão a partícula p . Desse modo, a massa m_i da partícula i , em relação à partícula padrão p , é representada por:

$$m_i = m_{ip} u_p . \quad (14.6)$$

A equação anterior afirma que a massa m_i está expressa em unidade de massa u_p e que, nessa unidade, o valor numérico da massa é o número m_{ip} . De fato, essa é a simbologia usual para expressar uma grandeza qualquer numa certa unidade. Sabemos que, com essa simbologia, podemos fazer mudanças de unidade que induzem uma mudança no valor numérico da grandeza, ao mesmo tempo que mantém invariável o valor da própria grandeza.

Formamos um par isolado da partícula p com uma partícula i para definir a massa da partícula i . Com esse procedimento, podemos definir a massa de qualquer partícula, exceto da própria partícula p , pois, obviamente, não é possível formar um par apenas com uma única partícula. O procedimento deixa a massa da própria partícula padrão completamente indeterminada. É conveniente estabelecer, por convenção, que a massa da partícula padrão p é de uma unidade de massa u_p , isto é,

$$m_p = 1 u_p . \quad (14.7)$$

Portanto, a qualquer partícula podemos atribuir uma massa, expressa em uma certa unidade. No Sistema Internacional de Unidades, a partícula padrão é um cilindro de platina iridiada chamado **quilograma padrão**. A unidade de massa associada a essa partícula padrão é representada por kg e é chamada simplesmente **quilograma**. Usando esse padrão, temos, naturalmente, nas equações (14.6) e (14.7), o símbolo u_p , que é substituído pelo símbolo kg. Nesse caso, as equações (14.6) e (14.7) tomam as formas respectivas: $m_i = m_{ip}$ kg e $m_p = 1$ kg.

Voltemos agora à equação (14.5). Sabemos que qualquer partícula k pode ser usada no lado esquerdo dessa equação para obter o número m_{ij} que aparece no seu lado direito. Vamos escolher a partícula k como sendo a partícula padrão p , de modo que (14.5) toma a forma

$$\frac{m_{ip}}{m_{jp}} = m_{ij} . \quad (14.8)$$

O protótipo de platina iridiada foi aprovado como padrão para o quilograma na Conferência Geral de Pesos e Medidas, realizada em Paris, em 1889. Desde então, encontra-se cuidadosamente guardado na Repartição Internacional de Pesos e Medidas, em Sèvres, na França. Um fato histórico curioso, por ocasião da adoção do sistema decimal de unidades oficialmente no Brasil, foi a chamada Revolta dos Quebra-quilos, ocorrida em 1874, no estado da Paraíba. O objetivo principal de tal rebelião, como sugere o nome, era destruir, entre outros, os padrões de massa do sistema decimal de unidades.

Usando a definição de massa (14.6) para as partículas i e j , obtemos as igualdades: $m_{ip} = m_i/u_p$ e $m_{jp} = m_j/u_p$. Usando essas igualdades na equação (14.8), obtemos:

$$m_{ij} = \frac{m_i}{m_j}. \quad (14.9)$$

Desse modo, usando a definição de massa de uma partícula, vemos que o número m_{ij} , associado ao par isolado constituído pelas partículas i e j , é simplesmente a razão entre a massa da partícula i e a massa da partícula j . Substituindo essa expressão de m_{ij} como razão entre massas na equação (14.1), obtemos

$$m_j \mathbf{a}_j = -m_i \mathbf{a}_i, \quad (14.10)$$

que chamamos **lei das acelerações das partículas de um par isolado**, e que enunciamos da seguinte forma:

em um par isolado de partículas, o produto da massa pela aceleração de uma das partículas tem sempre a mesma direção, o mesmo módulo e sentido oposto ao produto da massa pela aceleração da outra partícula.

Essa lei é conseqüência das duas propriedades que havíamos enunciado anteriormente. Além disso, como você pode verificar por conta própria, essas duas propriedades podem ser obtidas a partir da lei (14.10) que, portanto, é equivalente às duas propriedades. Por esse motivo, podemos levar em consideração, de agora em diante, apenas esta lei. Na verdade, ela é uma das leis fundamentais da mecânica newtoniana.

Tomando os módulos dos vetores na equação (14.10), obtemos

$$\frac{|\mathbf{a}_j|}{|\mathbf{a}_i|} = \frac{m_i}{m_j}, \quad (14.11)$$

ou seja, em um par isolado de partículas, os módulos das acelerações são inversamente proporcionais aos valores das massas. Isso significa que, no par, quanto maior a massa da partícula, menor a sua aceleração. É comum expressar essa propriedade dizendo que quanto maior for a massa de uma partícula, maior será a dificuldade que ela oferece para ser acelerada. Como essa idéia de dificuldade para ser acelerada recebe o nome antigo e tradicional de **inércia**, também se diz que a massa é uma medida da inércia de uma partícula. Por esse motivo, a grandeza massa definida nesta seção também costuma ser chamada pelo nome mais extenso **massa inercial**.

Força e Segunda Lei de Newton

Consideremos o movimento de uma partícula em relação a um referencial inercial. Desejamos determinar os movimentos possíveis dessa partícula na presença de outros corpos em suas vizinhanças. Para identificar essa partícula como aquela cujo movimento desejamos estudar, vamos chamá-la **partícula em estudo**. Supomos que ela não esteja isolada, isto é, que haja corpos em suas vizinhanças. Como qualquer corpo pode ser considerado um conjunto de partículas, podemos dizer que a partícula em estudo tem, em suas vizinhanças, um conjunto de partículas que chamamos **partículas vizinhas**. A partícula em estudo, juntamente com as partículas vizinhas, serão aqui chamadas **partículas do problema**. Todos esses nomes visam apenas a facilitar o estudo do movimento de uma partícula. As partículas vizinhas podem formar corpos rígidos ou maleáveis, líquidos ou gasosos, ou podem se apresentar todas separadas umas das outras. Elas podem ser muitas ou se resumir a umas poucas partículas. Pode mesmo ocorrer a situação mais simples, em que a partícula em estudo tem apenas uma partícula vizinha. Todas essas situações são apenas particularidades que não afetam, por enquanto, o nosso estudo.

Vamos começar perguntando de que modo identificamos as partículas vizinhas de uma partícula em estudo. A resposta teórica é simples: são aquelas que não estão infinitamente afastadas da partícula em estudo. Na prática, são apenas aquelas partículas que julgamos exercer alguma influência sobre o movimento da partícula em estudo. Surge então a pergunta crucial: em que se baseia nosso julgamento de que uma dada partícula não tem influência sobre o movimento da partícula em estudo, de modo a podermos considerá-la como se estivesse infinitamente afastada dessa partícula em estudo? Perguntando de outro modo: em que se baseia nosso julgamento de que uma dada partícula pertence ou não à vizinhança da partícula em estudo? A resposta a essas perguntas pode parecer óbvia, mas é a única possível: nosso julgamento se baseia em conhecimentos e experiências previamente adquiridos a respeito do tipo de partícula em estudo e dos tipos de vizinhança que ela possui. Tais conhecimentos e experiências incluem o conhecimento de leis físicas e resultados experimentais relacionados com o problema em questão.

É claro que nosso julgamento sobre que partículas pertencem ou não às vizinhanças da partícula em estudo pode estar errado. Podemos não considerar uma partícula que, na verdade, pertence à vizinhança da partícula em estudo. Nesse caso, a influência dessa partícula estará sendo desconsiderada e os cálculos que fizermos levarão a resultados errados. Tais erros nos obrigarão a redefinir que partículas pertencem, de fato, à vizinhança da partícula em estudo.

Pode também ocorrer que incluamos nessas vizinhanças uma partícula que não tenha nenhuma influência no movimento da partícula em estudo. Nesse caso, podemos obter resultados errados ou fazer cálculos desnecessariamente complicados, indicando que devemos redefinir as partículas pertencentes às vizinhanças da partícula em estudo. Não devemos nos surpreender pelo fato de que, em Física, podemos errar na análise de um dado problema e ter de refazê-lo desde o início para chegar a um resultado satisfatório. Entretanto, em nosso estudo, somente serão considerados problemas sobre os quais já se tem uma grande experiência, de modo que você não terá dificuldades em identificar quais são as partículas vizinhas de uma dada partícula em estudo.

Vamos considerar um exemplo da definição das partículas que pertencem às vizinhanças de uma partícula em estudo.

Exemplo 14.1

Seja a situação representada na **Figura 14.2**, na qual aparece uma bolinha de chumbo, pendurada por um fio cujo extremo superior está fixo ao teto de uma sala fechada.

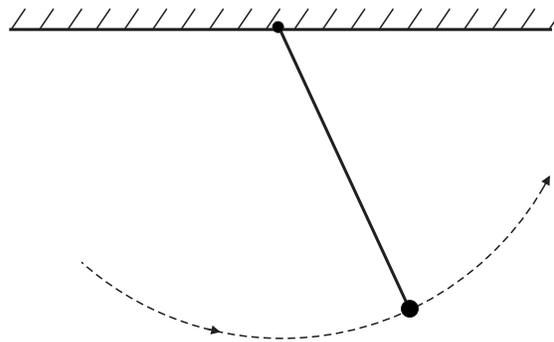


Figura 14.2: Uma bolinha de chumbo pendurada por um fio que está preso ao teto de uma sala fechada.

No caso, a bolinha é a partícula cujo movimento queremos estudar, isto é, o que chamamos partícula em estudo. Quais são as partículas que estão nas suas vizinhanças? Por experiência, sabemos que o movimento da bolinha é afetado pela presença da Terra, do fio e do ar circundante. Sabemos que a Terra atrai a bolinha, acelerando-a para baixo, a menos que algum outro corpo impeça essa queda. Também sabemos que o fio afeta o movimento da bolinha, impedindo a sua queda. Finalmente, sabemos que o ar circundante oferece resistência ao movimento da bolinha. Nossa experiência também nos diz que o teto, as paredes da sala e os demais corpos do universo não precisam ser incluídos como corpos que influenciam no movimento da bolinha. Desse modo, as partículas que

estão nas vizinhanças da bolinha são as partículas que compõem a Terra, o fio e o ar circundante.

Acrescentemos, ainda, que a influência do ar circundante pode ser ignorada, se a velocidade da bolinha e a duração do movimento ficarem abaixo de certos limites. Mesmo desconsiderando o ar circundante, as vizinhanças da bolinha contêm uma enorme quantidade de partículas, mas isso não significa que elas exerçam um papel complicado no estudo do movimento da bolinha. A ação conjunta dessas partículas pode ser descrita de modo simples devido a condições que não nos interessam agora. Por enquanto, este exemplo serve apenas para ilustrar uma possível seleção das partículas que pertencem às vizinhanças de uma partícula em estudo, embora devamos aguardar o desenrolar da teoria para esclarecer várias afirmações que fizemos.

Suponhamos, então, que as partículas que estão nas vizinhanças da partícula em estudo tenham sido determinadas. Agora estamos preparados para apresentar mais uma das leis fundamentais do movimento de uma partícula, que podemos chamar **lei do determinismo newtoniano**. Ela foi obtida a partir de uma quantidade imensa de observações e resultados experimentais e seu enunciado é dado a seguir.

Em cada instante, o produto da massa pela aceleração de uma partícula em estudo é determinado pela sua posição e sua velocidade e pelas posições e velocidades das partículas vizinhas.

Vamos entender bem o que essa lei afirma. Seja m a massa da partícula em estudo, supostamente conhecida, pois é uma constante que, em princípio, pode ser medida ou calculada. Seja a a aceleração da partícula em estudo em um instante arbitrário. A lei do determinismo newtoniano afirma, em primeiro lugar, que podemos determinar o produto de m por a , isto é, o produto ma . Isto é praticamente o mesmo que dizer que podemos determinar a aceleração a . De fato, se ma foi determinado, basta dividi-lo por m para determinar a . Reciprocamente, se a foi determinada, basta multiplicá-la por m para obter ma . É apenas uma questão de conveniência dizer que podemos determinar ma em vez de dizer que podemos determinar a , o que vamos continuar a fazer.

A lei não diz apenas que podemos determinar ma , diz também a partir de quais informações podemos determinar ma . As informações são a posição e a velocidade da própria partícula em estudo e as posições e velocidades das partículas vizinhas da partícula em estudo. Notemos que nem sempre é necessário conhecer as posições e velocidades de todas as partículas envolvidas no problema.

Em alguns casos, basta conhecer as posições e velocidades de apenas algumas partículas. Em muitos outros casos, nem mesmo é necessário conhecer as velocidades das partículas, bastando conhecer apenas as suas posições para determinar o produto ma . De qualquer modo, saber as posições e as velocidades da partícula em estudo e das partículas vizinhas é sempre suficiente para determinar o produto ma , de acordo com a lei do determinismo newtoniano.

Para aplicar essa lei ao estudo do movimento, devemos expressá-la em linguagem matemática. Para isso, devemos usar o conceito de função de diversas variáveis, pois a lei diz que a grandeza ma é determinada por várias outras grandezas, que são as posições e velocidades das partículas envolvidas no problema. O conceito de função de diversas variáveis é simples e não é essencialmente diferente do conceito de função utilizado até o momento. Consideremos esse conceito, para depois voltarmos ao estudo da lei do determinismo newtoniano.

Se o valor de uma grandeza w é determinado pelo valor de uma grandeza u , dizemos que w é função de u ou que w é função da variável u . Essencialmente, a função é essa relação que determina w a partir de u . Representando a função pela letra f , escrevemos $w = f(u)$ para declarar que u determina w por meio da função f . Por exemplo, se $f(u) = u^2$, onde u é um número real qualquer, w é um número real dado por $w = u^2$. Tudo isso já conhecemos muito bem e, inclusive, temos utilizado com muita frequência em nosso curso o conceito de função.

Consideremos agora que o valor de uma grandeza w seja determinado pelos valores de uma grandeza u_1 e também pelos valores de uma outra grandeza u_2 , isto é, que o par de valores (u_1, u_2) determine o valor de w . Nesse caso, dizemos que w é função de u_1 e de u_2 , ou que w é função das duas variáveis u_1 e u_2 . A função continua sendo, essencialmente, a relação que determina w a partir de u_1 e u_2 . Representando a função pela letra φ , escrevemos $w = \varphi(u_1, u_2)$, para declarar que u_1 e u_2 determinam w por meio da função φ .

Por exemplo, se $\varphi(u_1, u_2) = (u_1)^2 - 3u_2$, onde u_1 e u_2 são números reais quaisquer, então w é um número real dado por $w = (u_1)^2 - 3u_2$. Nessa relação, é evidente que u_1 e u_2 determinam w . Ilustremos esse fato com alguns valores específicos para u_1 e u_2 . Se $u_1 = 4$ e $u_2 = 5$, obtemos $w = 4^2 - 3 \times 5$, isto é, $w = 1$. Se $u_1 = 0$ e $u_2 = 2$, obtemos $w = 0^2 - 3 \times 2$, isto é, $w = -6$. Se uma grandeza w é determinada por três grandezas u_1 , u_2 e u_3 , dizemos que w é função de u_1 , u_2 e u_3 . Se a função for chamada ϕ , escrevemos $w = \phi(u_1, u_2, u_3)$ para declarar que u_1 , u_2 e u_3 determinam w por meio da função ϕ .

De um modo geral, podemos considerar a situação em que uma grandeza w é determinada por n grandezas u_1, u_2, \dots, u_n , sendo n um número inteiro positivo

qualquer. Nesse caso, dizemos que w é função de u_1, \dots, u_n , ou que é função das n variáveis u_1, \dots, u_n . No parágrafo anterior, consideramos os casos em que n é igual a 1, 2 e 3, respectivamente, isto é, o caso de funções de uma, duas e três variáveis. Se a função que determina w , a partir das n variáveis u_1, \dots, u_n , for chamada χ , escrevemos $w = \chi(u_1, \dots, u_n)$ para declarar que u_1, \dots, u_n determinam w por meio da função χ . Dizemos também que w é uma função das n variáveis u_1, \dots, u_n e que χ é uma função de n variáveis.

Em Física, é muito comum o uso de funções com mais de uma variável. Por exemplo, aprendemos que a relação entre a pressão p , o volume V e a temperatura T de n moles de um gás perfeito em equilíbrio térmico é dada por $pV = nRT$, onde R é a chamada constante universal dos gases. Com isso, o volume V e a temperatura T determinam a pressão p , de acordo com a relação $p = nRT/V$. Usando o conceito matemático de função, dizemos que a pressão p é função do volume V e da temperatura T . Chamando φ a função em questão, escrevemos $p = \varphi(T, V)$ e dizemos que V e T determinam p por meio da função φ . No caso dos gases perfeitos, a função φ é dada por $\varphi(T, V) = nRT/V$, onde n e R são constantes conhecidas; T e V são as duas variáveis independentes da função.

Nos exemplos que consideramos, as funções relacionam grandezas que são números reais. Mas podemos também dar exemplos de funções que relacionam grandezas vetoriais. Se uma grandeza vetorial c é determinada por duas grandezas vetoriais \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 , dizemos que c é função de \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 ou que c é função das duas variáveis vetoriais \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 . Representando a função por Ψ , escrevemos $c = \Psi(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ para declarar que \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 determinam c por meio da função Ψ . Um exemplo de uma tal função é dado por $c = |\mathbf{b}_1| \mathbf{b}_2$, isto é, c é igual ao módulo do vetor \mathbf{b}_1 multiplicado pelo vetor \mathbf{b}_2 . Nesse caso, a função Ψ é dada por $\Psi(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = |\mathbf{b}_1| \mathbf{b}_2$. Neste ponto, você deve resolver o problema proposto 3, para observar, em alguns casos específicos, como \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 determinam c por meio desse exemplo de função Ψ .

Finalmente, temos o caso geral em que uma grandeza vetorial c é determinada por n grandezas vetoriais $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$. Dizemos então que c é função de $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ ou que c é função das n variáveis vetoriais $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$. Representando a função por Ψ , escrevemos $c = \Psi(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ para declarar que $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ determinam c por meio da função Ψ . Esse último caso é o que vamos utilizar para dar uma expressão matemática à lei do determinismo newtoniano.

Para obter a expressão matemática da lei do determinismo newtoniano, vamos definir os símbolos das grandezas envolvidas na lei. Temos uma partícula em estudo, cuja massa é m e cuja aceleração é \mathbf{a} . Sua posição e sua velocidade serão representadas por \mathbf{r} e \mathbf{v} , respectivamente. Vamos chamar N o número total de partículas nas vizinhanças da partícula em estudo e vamos numerá-las de 1 até N . Não importa, no momento, se esse número é grande ou pequeno. Sejam $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ os respectivos vetores-posição dessas partículas e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$ suas respectivas velocidades vetoriais. A aceleração, as posições e as velocidades são consideradas todas em um mesmo instante arbitrário. A **Figura 14.3** é uma ilustração da partícula em estudo e das partículas em suas vizinhanças.

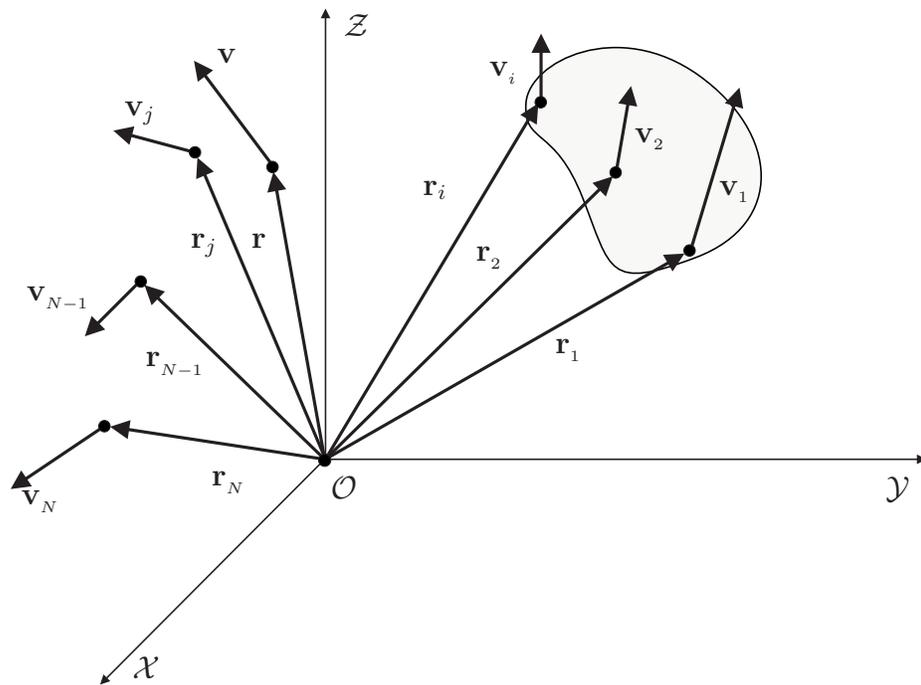


Figura 14.3: Partícula em estudo na posição \mathbf{r} e com velocidade \mathbf{v} , e as partículas em suas vizinhanças.

A lei do determinismo newtoniano afirma que, em cada instante, o produto da massa pela aceleração da partícula em estudo é determinado pela sua posição e sua velocidade, e pelas posições e velocidades das partículas vizinhas. Portanto, a lei afirma que o produto $m\mathbf{a}$ é uma função dos vetores posição $\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ e das velocidades $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$. Representando essa função por \mathcal{F} , obtemos a seguinte expressão matemática para a lei do determinismo newtoniano:

$$m\mathbf{a} = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N). \quad (14.12)$$

Temos, pois, nessa equação, a afirmação de que as posições e velocidades das partículas do problema determinam o produto da massa pela aceleração por meio de uma função representada por \mathcal{F} . Essa é uma função de $2N + 2$ variáveis vetoriais que depende das propriedades das partículas do problema. Nesse ponto, duas observações importantes devem ser feitas:

(i) A primeira é que essa equação pode ser extremamente complicada, conforme o número das propriedades das partículas envolvidas no problema. Em sua forma geral, a equação (14.12) tem uma complexidade que leva à impressão de que não podemos fazer nada com ela. Você não deve se preocupar com isso no momento. O nosso objetivo aqui é apenas discutir o significado mais básico dessa equação, qual seja, de que o produto ma é determinado pelas posições e velocidades das partículas do problema (ou seja, da partícula em estudo e das partículas vizinhas). Posteriormente, aprenderemos a usar essa equação para analisar o movimento da partícula em estudo em várias situações simples.

(ii) A segunda observação é relacionada com o conceito de função constante. Você sabe que podemos definir uma função f por uma expressão como $f(u) = 5$, onde u é um número real qualquer. Chamamos u variável porque pode assumir diversos valores. Para qualquer valor de u , o valor dessa função é sempre 5. Dizemos que é uma função constante, ou mais especificamente, uma função constante da variável u . Se representarmos o valor da função por w , isto é, $w = f(u)$, dizemos que w não varia com u , pois w tem sempre o mesmo valor 5 para qualquer valor de u . Nesse caso, também dizemos que w não depende de u . Algo análogo ocorre com funções de diversas variáveis. Podemos ter uma função φ de duas variáveis u_1 e u_2 , cujo valor chamamos w , isto é, $w = \varphi(u_1, u_2)$, mas de tal modo que w não se altere com uma das variáveis, por exemplo, u_1 . Isto significa que mudanças no valor de u_1 não acarretam mudanças em w . Dizemos, então, que w não depende de u_1 , ou que φ é uma função constante em relação à variável u_1 .

Um exemplo dessa situação seria dado por $\varphi(u_1, u_2) = 5 + (u_2)^2$. Você pode perguntar: se o valor da função não depende da variável u_1 , por que considerar que o valor é uma função de u_1 ? Por que considerar que é uma função constante em relação a u_1 , em vez de simplesmente eliminar a variável u_1 da função e escrever $\varphi(u_2) = 5 + (u_2)^2$? A resposta é que, de fato, se o valor da função não depende de uma variável, parece mesmo melhor eliminá-la das fórmulas. Acontece que nem sempre sabemos de antemão que o valor de uma função não depende de uma certa variável. Nesse caso, é melhor deixar a variável nas fórmulas e só eliminá-la quando ficar claro que a função é constante em relação a essa variável. É isso que costuma acontecer com a função \mathcal{F} na equação (14.12). Nessa equação, está em

aberto a possibilidade de que o valor da função dependa de todas as posições \mathbf{r} , $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ e de todas as velocidades \mathbf{v} , $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$. No entanto, pode também ocorrer que o valor não dependa de algumas dessas variáveis. Nesse caso, podemos eliminá-las das expressões em que aparecem. Por exemplo, pode ocorrer que o valor da função \mathcal{F} não dependa das velocidades, mas apenas das posições, isto é, \mathcal{F} seja uma função constante em relação às velocidades. Então, no lugar da expressão $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$, podemos escrever simplesmente $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$. Faremos isso em um exemplo apresentado mais adiante.

Por motivos que ficarão claros, vamos chamar a função \mathcal{F} **função-força**. O valor da função-força \mathcal{F} , quando as partículas do problema têm posições \mathbf{r} , $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ e velocidades \mathbf{v} , $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$, é um vetor que deve ser igual a $m\mathbf{a}$ e é dado por $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$. Chamamos esse valor **força total** sobre a partícula em estudo, exercida pelas partículas em suas vizinhanças, quando as partículas do problema estão nas posições \mathbf{r} , $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ e com as velocidades \mathbf{v} , $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$. É claro que a força total pode mudar, se houver mudança nas posições ou velocidades das partículas do problema. Representando por \mathbf{F} a força total sobre a partícula em estudo, temos, por definição:

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N). \quad (14.13)$$

Usando essa definição de força total, a lei do determinismo newtoniano (14.12) assume a forma:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \quad (14.14)$$

Esta lei é conhecida como **Segunda Lei de Newton** e enunciada na forma que segue.

O produto da massa pela aceleração de uma partícula é igual à força total exercida sobre ela.

Ao enunciar essa lei, devemos ter em mente que essa força é devida às partículas nas vizinhanças da partícula em estudo e que é determinada pelas posições e velocidades das partículas do problema, por meio de uma função-força. Você deve se lembrar de que na aula anterior demos uma definição qualitativa de força. De acordo com essa definição qualitativa, a força exercida sobre a partícula em estudo pelas partículas vizinhas é a ação pela qual essas partículas vizinhas aceleram a partícula em estudo. A esse conceito qualitativo de força como ação aceleradora acrescentemos agora o conceito quantitativo de força como um vetor determinado pelas posições e velocidades das partículas do problema, de acordo com a equação (14.13). O importante a observar é que o conceito quantitativo

está em harmonia com o qualitativo e o complementa. De fato, o vetor-força \mathbf{F} expressa de modo quantitativo a ação aceleradora das partículas vizinhas sobre a partícula em estudo, pois a aceleração da partícula em estudo é completamente determinada pelo vetor \mathbf{F} por meio da Segunda Lei de Newton:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m}\mathbf{F} . \quad (14.15)$$

Conseqüentemente, não deve causar problema usar o mesmo nome, força, para designar o conceito qualitativo de ação aceleradora e o conceito quantitativo dado pelo vetor \mathbf{F} . Cada conceito expressa, a seu modo, a mesma idéia de que a aceleração da partícula em estudo é causada pelas partículas nas suas vizinhanças.

Em figuras e diagramas ilustrando forças atuando sobre partículas, a seta que representa o vetor-força exercida sobre uma partícula é desenhada com seu ponto inicial na partícula que sofre a ação desta força.

Há outras maneiras de nos referirmos à força total \mathbf{F} exercida sobre uma partícula pelas partículas em suas vizinhanças. É comum nos depararmos com expressões do tipo: força sofrida pela partícula devido às partículas em suas vizinhanças, ou ainda, força numa partícula devido às vizinhanças.

A equação (14.15) é a equação fundamental para determinarmos os movimentos da partícula em estudo. Nela, temos a força \mathbf{F} dada em função das posições e velocidades das partículas do problema, e a aceleração da partícula em estudo é igual a essa força dividida pela massa da partícula em estudo. Desse modo, temos a aceleração da partícula em estudo dada em função das posições e velocidades das partículas do problema. Essa relação entre aceleração, posições e velocidades é usada para determinar os movimentos da partícula em estudo. No entanto, para que isso possa ser feito, são necessários outros conceitos e métodos que desenvolveremos nas aulas seguintes. Por enquanto, vamos apenas tentar entender os conceitos e as afirmações fundamentais contidas na Segunda Lei de Newton. Posteriormente, chegaremos ao ponto em que saberemos usá-la para resolver problemas concretos.

Note agora que, no limite em que se tornam infinitas as distâncias entre a partícula em estudo e as N partículas das vizinhanças, a partícula em estudo se torna uma partícula isolada. De acordo com a Primeira Lei de Newton, a aceleração da partícula em estudo deve, então, anular-se. Nesse caso, a força total \mathbf{F} também deve se anular, em virtude da Segunda Lei de Newton (14.14).

Vamos agora considerar a situação mais simples na qual uma partícula em estudo pode se encontrar. É quando em suas vizinhanças há somente uma única partícula. Nesse caso, o número N de partículas nas vizinhanças é igual a 1. Se

$N = 1$, a força total (14.13) sobre a partícula em estudo é uma função da posição \mathbf{r} e velocidade \mathbf{v} da partícula em estudo, e da posição \mathbf{r}_1 e velocidade \mathbf{v}_1 da única partícula nas vizinhanças. Temos, portanto,

$$\mathbf{F}_1 = \mathcal{F}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1), \quad (14.16)$$

onde representamos a força total por \mathbf{F}_1 e a função-força por \mathcal{F}_1 , em vez de usar os símbolos \mathbf{F} e \mathcal{F} , para enfatizar que agora há apenas uma partícula nas vizinhanças. Assim sendo, a Segunda Lei de Newton (14.14) nos leva à expressão:

$$m\mathbf{a} = \mathcal{F}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1). \quad (14.17)$$

A força que a única partícula nas vizinhanças exerce sobre a partícula em estudo depende das características dessas duas partículas. Por exemplo, é possível que essas duas partículas possuam carga elétrica e , nesse caso, a partícula em estudo sofrerá um tipo de força que chamamos eletromagnética e que pode ser muito complicada. Tais forças serão estudadas na disciplina Física 3. Essas forças somente existem se as partículas possuem cargas elétricas. Há outros tipos de forças que também podem estar presentes ou não, dependendo das circunstâncias. Em contrapartida, há um tipo de força que ocorre simplesmente porque as partículas do problema têm massa. Como, em princípio, toda partícula tem massa, essa força sempre estará presente quando uma partícula estiver nas vizinhanças de uma outra. Essa força é chamada gravitacional. Se a partícula nas vizinhanças tem massa m_1 , a força gravitacional que ela exerce sobre a partícula em estudo é dada por

$$\mathbf{F}_1 = -G \frac{m m_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}, \quad (14.18)$$

onde G é uma constante chamada **constante gravitacional de Newton** ou também **constante da gravitação universal**. Seu valor no SI é dado por:

$$G = 6,67259(85) \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}. \quad (14.19)$$

A força gravitacional exercida sobre a partícula em estudo, pela partícula em suas vizinhanças, tem módulo proporcional ao produto das massas das duas partículas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa. Além disso, é uma força na direção da reta que passa pelas duas partículas, com sentido que vai da partícula sobre a qual a força é exercida para a partícula que exerce a força. Essa propriedade do sentido da força é descrita sucintamente, dizendo que a força gravitacional é atrativa. Isto porque esse sentido da força faz com que a aceleração

da partícula em estudo aponte para a partícula que exerce a força, conforme exigido pela Segunda Lei de Newton (14.14). Todas essas propriedades da força gravitacional você pode observar diretamente na fórmula (14.18), desde que seus conhecimentos sobre álgebra vetorial estejam em dia. Se você tiver dificuldades em perceber imediatamente tais propriedades em (14.18), você deve consultar a Aula 8 para rever as propriedades básicas de vetores. De qualquer modo, tente resolver os problemas propostos envolvendo a força gravitacional entre duas partículas encontrados no final da aula. A **Figura 14.4** ilustra as grandezas relacionadas com a força gravitacional que estamos considerando.

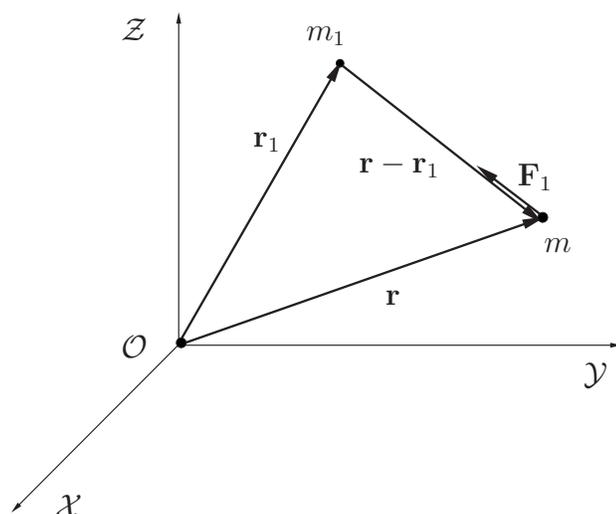


Figura 14.4: Força gravitacional F_1 sobre partícula em estudo, exercida pela única partícula nas vizinhanças da partícula em estudo.

Na fórmula (14.18), vemos que a força é proporcional ao produto das massas das partículas do problema. Quanto maior a massa da partícula sobre a qual a força é exercida, maior a força. Quanto maior a massa da partícula que exerce a força, maior a força. Se qualquer das massas fosse zero, não haveria força gravitacional. A massa é a propriedade de uma partícula que dá origem à força gravitacional. Acontece que essa massa é a que foi definida anteriormente e que chamamos massa inercial. Ela é dita inercial porque é a quantidade que mede a dificuldade que uma partícula oferece para ser acelerada. É interessante, ou mesmo surpreendente, que a mesma grandeza que mede a dificuldade que uma partícula oferece para ser acelerada também dá origem à força gravitacional com que uma partícula atrai ou é atraída por outra partícula. Sobre essa questão, voltaremos a falar mais adiante.

A fórmula (14.18) dá a força gravitacional em função da posição \mathbf{r} da partícula em estudo e da posição \mathbf{r}_1 da partícula em suas vizinhanças. Essa é a fórmula que diz qual é a função-força \mathcal{F}_1 que aparece em (14.16). Vemos em (14.18) que a força gravitacional não depende das velocidades das partículas do problema, isto é, a força não depende das variáveis \mathbf{v} e \mathbf{v}_1 que aparecem em (14.16). Por isso, vamos seguir as observações já feitas sobre essa questão e abolir as velocidades do símbolo $\mathcal{F}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$ para escrevê-lo como $\mathcal{F}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$. Usando essa notação simplificada e comparando (14.18) com (14.16), obtemos:

$$\mathcal{F}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = -G \frac{m m_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}. \quad (14.20)$$

Esse é um bom exemplo de função-força. Nele, está claro como a função \mathcal{F}_1 associa, a cada par de vetores \mathbf{r} e \mathbf{r}_1 , um único vetor $\mathcal{F}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$.

Exemplo 14.2

Neste exemplo, vamos estudar um outro tipo de função-força, mas também de extrema importância em mecânica. Trata-se de uma força que depende apenas da posição da partícula em estudo (e nada mais, nem de sua velocidade e tampouco das posições e velocidades das partículas vizinhas), e é proporcional à sua posição. Consideremos, então, a força

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}, \quad (14.21)$$

onde k é uma constante positiva. Para simplificar, vamos estudar aqui apenas movimentos retilíneos que, por conveniência, escolheremos ao longo do eixo \mathcal{OX} . Desse modo, temos $\mathbf{F} = F_x \mathbf{u}_x = -kx \mathbf{u}_x$ e a utilização da notação vetorial torna-se dispensável. Em outras palavras, a Segunda Lei de Newton aplicada a esse movimento pode ser escrita na forma:

$$a_x = -\frac{k}{m} x = -\omega^2 x, \quad (14.22)$$

onde m é a massa da partícula em estudo e definimos a constante positiva $\omega^2 := k/m$. Nosso objetivo aqui não é encontrar os movimentos possíveis de uma partícula que está sob a ação de uma força desse tipo. Ou seja, nosso intuito não é determinar que funções-movimento são compatíveis com a equação anterior, mas sim fazer um estudo qualitativo desses movimentos a fim de exibir algumas de suas propriedades mais importantes.

Dito isso, nossa primeira observação é quanto ao sinal relativo entre a aceleração da partícula e sua posição em qualquer instante de tempo durante o movimento. Note que o sinal de a_x é sempre oposto ao de x , exceto quando ambos são

Não importa, no momento, entrar nos detalhes de que tipo de vizinhança de uma dada partícula pode provocar esse tipo de força. No entanto, talvez você já tenha o conhecimento de que uma partícula presa a uma mola, sob certas circunstâncias, pode estar sujeita a uma força proporcional à sua própria posição. Além disso, você verá mais adiante que a maioria dos movimentos vibratórios estão associados a esse tipo de força.

nulos. conseqüentemente, quando a partícula se encontra no semi-eixo positivo \mathcal{OX} , isto é, quando $x > 0$, sua aceleração é negativa, ou seja, $a_x < 0$. Nesse caso numa linguagem mais coloquial, vemos que se ela estiver com velocidade positiva, estará se desacelerando e se estiver com uma velocidade negativa, estará acelerando. Analogamente, quando a partícula se encontra no semi-eixo negativo \mathcal{OX} , isto é, quando $x < 0$, a sua aceleração é positiva, ou seja, $a_x > 0$. Nesse caso, novamente usando uma linguagem bastante coloquial, vemos que se ela estiver com velocidade negativa, estará se desacelerando e se estiver com uma velocidade positiva, estará acelerando.

Quando a partícula se encontra na origem, a sua aceleração é nula. Somente nesse ponto sua aceleração é nula. No entanto, em pontos muito próximos da origem, a sua aceleração tem módulo bem pequeno, de modo que seu movimento num intervalo bem pequeno em torno da origem pode ser muito bem aproximado por um MRU. Devemos comentar sobre uma situação muito particular, a saber, o caso em que a partícula é colocada na origem com velocidade nula. Nesse caso, por não possuir aceleração, a sua velocidade não tenderá a sofrer mudanças e, como esta velocidade por hipótese também é nula, a partícula não sairá da origem, permanecendo em repouso neste ponto até que alguma outra força venha provocar uma aceleração.

Tudo isso que foi dito no parágrafo anterior pode ser resumido graficamente de uma forma muito ilustrativa. Embora não saibamos exatamente que funções-movimento a partícula pode ter, podemos afirmar que, se fizermos um gráfico genérico da posição da partícula *versus* tempo, a sua concavidade no semi-plano positivo ($x > 0$) será obrigatoriamente negativa, enquanto a sua concavidade no semi-plano negativo ($x < 0$) será necessariamente positiva. Conseqüentemente, o gráfico cruzará o eixo dos tempos, ou seja, a partícula passará pela origem e, quando o fizer, terá aceleração nula. Graficamente, isso significa que os trechos do gráfico próximos ao eixo dos tempos são, aproximadamente, segmentos de reta. A **Figura 14.5** resume tudo que acabamos de discutir.

Vemos, então, que esse tipo de força leva a movimentos oscilantes em torno da origem. Essa é uma propriedade muito importante dos movimentos causados por forças proporcionais à posição da partícula em estudo, como a descrita na equação (14.21).

Neste exemplo, a origem é chamada ponto de equilíbrio, pois uma partícula colocada aí em repouso permanecerá nesse ponto (mais adiante estudaremos em detalhe como encontrar pontos de equilíbrio em várias situações, definir o que são pontos de equilíbrio estável e instável etc.).

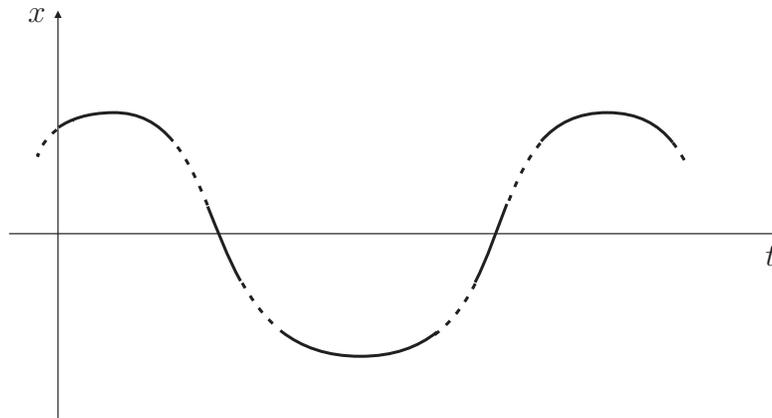


Figura 14.5: Descrição gráfica qualitativa do movimento de uma partícula sob a ação de uma força do tipo $F_x = -kx$, com $k > 0$.

Vamos agora discutir uma segunda propriedade, não menos importante que a anterior, de movimentos sob esse tipo de força. No entanto, para facilitar a compreensão de nossa discussão, vamos enunciá-la antes de apresentar a sua demonstração.

Se abandonarmos uma partícula em repouso em um ponto genérico do eixo \mathcal{OX} , que não coincida com a origem, o tempo gasto pela partícula para atingir a origem será o mesmo, qualquer que seja o ponto onde foi abandonada.

Passemos, então, à demonstração dessa propriedade tão peculiar. Nossa estratégia será comparar os tempos gastos pela partícula para atingir a origem quando ela é abandonada de dois pontos arbitrários distintos do eixo \mathcal{OX} , denotados por X_0 e x_0 . Não seremos capazes de demonstrar aqui quanto vale esse tempo, mas mostraremos que ele é o mesmo, quer a partícula seja abandonada de X_0 , quer seja abandonada de x_0 . Por conveniência, vamos escolher esses pontos no semi-eixo positivo \mathcal{OX} , mas a demonstração é em tudo análoga, caso eles fossem escolhidos no semi-eixo negativo.

Tomemos dois pontos, X_1 e x_1 , bem próximos aos pontos X_0 e x_0 , mas escolhidos de tal modo que

$$\frac{X_0 - X_1}{x_0 - x_1} = \frac{X_0}{x_0} =: R, \quad (14.23)$$

onde definimos a razão fixa R (note que é sempre possível fazer essa escolha). A **Figura 14.6** ilustra essa escolha.

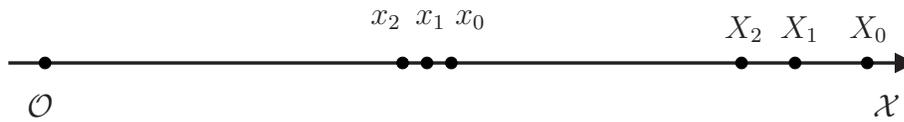


Figura 14.6: A partícula sob a ação de uma força $F_x = -kx$ abandonada, respectivamente, nos pontos X_0 e x_0 .

Devido à proximidade de X_1 e x_1 em relação a X_0 e x_0 , podemos supor com ótima aproximação (pode ser tão boa quanto queiramos, basta tomar os pontos X_1 e x_1 mais e mais próximos de X_0 e x_0) que os movimentos seguidos pela partícula de X_0 até X_1 e de x_0 até x_1 são ambos MRUV, ou seja, com acelerações constantes e iguais às acelerações iniciais. Usando o fato de que $a_x = F_x/m = -\omega^2 x$, as acelerações nesses primeiros trechos são dadas, respectivamente, por: $A_0 = -\omega^2 X_0$ (no trecho X_0 até X_1) e $a_0 = -\omega^2 x_0$ (no trecho x_0 até x_1). Como, por hipótese, a partícula parte do repouso tanto de X_0 quanto de x_0 , escrevemos

$$\begin{aligned} X_1 - X_0 &= 0 + \frac{1}{2} A_0 (\Delta T_1)^2 = -\frac{1}{2} \omega^2 X_0 (\Delta T_1)^2 \\ x_1 - x_0 &= 0 + \frac{1}{2} a_0 (\Delta t_1)^2 = -\frac{1}{2} \omega^2 x_0 (\Delta t_1)^2, \end{aligned} \quad (14.24)$$

onde definimos ΔT_1 e Δt_1 como sendo os tempos gastos para a partícula percorrer os trechos de X_0 até X_1 e de x_0 até x_1 , respectivamente. Tomando as equações anteriores, dividindo uma pela outra e fazendo uso da equação (14.23), obtemos

$$\frac{X_1 - X_0}{x_1 - x_0} = \frac{X_0 (\Delta T_1)^2}{x_0 (\Delta t_1)^2}; \quad \implies \quad \Delta T_1 = \Delta t_1. \quad (14.25)$$

Ou seja, o tempo gasto para a partícula atingir o ponto X_1 , quando abandonada de X_0 , é exatamente igual àquele gasto por ela para atingir x_1 , quando abandonada de x_0 .

No entanto, ao atingir os pontos X_1 e x_1 , a partícula possui velocidades não-nulas V_1 e v_1 , respectivamente. Para essas velocidades, podemos escrever

$$V_1 = A_0 \Delta T_1 = -\omega^2 X_0 \Delta T_1 \quad \text{e} \quad v_1 = a_0 \Delta t_1 = -\omega^2 x_0 \Delta t_1. \quad (14.26)$$

Tomando as expressões escritas na equação anterior, dividindo uma pela outra, usando a equação (14.23) e o fato de que $\Delta T_1 = \Delta t_1$, obtemos

$$\frac{V_1}{v_1} = \frac{X_0}{x_0} = R. \quad (14.27)$$

Definimos agora outros dois pontos, X_2 e x_2 , muito próximos aos pontos X_1 e x_1 , respectivamente (veja novamente a **Figura 14.6**), mas de tal modo que

$$\frac{X_1 - X_2}{x_1 - x_2} = \frac{X_1}{x_1} . \quad (14.28)$$

Esta é uma escolha possível. No entanto, com ela é fácil mostrar que

$$\frac{X_1}{x_1} = \frac{X_0}{x_0} \frac{\left(1 - \frac{(X_0 - X_1)}{X_0}\right)}{\left(1 - \frac{(x_0 - x_1)}{x_0}\right)} = \frac{X_0}{x_0} = R , \quad (14.29)$$

onde usamos a equação (14.23). Calculemos, então, os tempos gastos ΔT_2 e Δt_2 pela partícula nos percursos de X_1 até X_2 e de x_1 até x_2 , respectivamente. Devido à proximidade de X_2 e x_2 em relação a X_1 e x_1 , podemos supor novamente que em ambos os trechos a partícula descreve um MRUV, só que agora com as acelerações $A_1 = -\omega^2 X_1$ e $a_1 = -\omega^2 x_1$, respectivamente. Usando novamente nossos conhecimentos de MRUV, podemos escrever:

$$X_2 - X_1 = V_1 \Delta T_2 + \frac{1}{2} A_1 (\Delta T_2)^2 \quad (14.30)$$

$$x_2 - x_1 = v_1 \Delta t_2 + \frac{1}{2} a_1 (\Delta t_2)^2 . \quad (14.31)$$

Note agora que, devido às equações (14.27), (14.28), e devido ao fato de que $A_1 = -\omega^2 X_1$ e $a_1 = -\omega^2 x_1$, podemos escrever as seguintes relações:

$$X_2 - X_1 = R(x_2 - x_1) ; \quad V_1 = Rv_1 ; \quad A_1 = Ra_1 . \quad (14.32)$$

Substituindo as relações anteriores na equação (14.30), esta equação toma a forma:

$$R(x_2 - x_1) = Rv_1 \Delta T_2 + \frac{1}{2} Ra_1 (\Delta T_2)^2 , \quad (14.33)$$

que, após a divisão por R , fica idêntica à equação (14.31), se nessa equação substituirmos Δt_2 por ΔT_2 . Portanto, comparando as duas equações do segundo grau (14.31) e (14.33), concluímos que as duas raízes para ΔT_2 são idênticas às duas raízes para Δt_2 . Como só há uma raiz positiva para a equação (14.31), fica demonstrado que $\Delta T_2 = \Delta t_2$ (lembre-se de que, por definição, ΔT_2 e Δt_2 são positivos). As velocidades V_2 e v_2 atingidas pela partícula nos pontos X_2 e x_2 , respectivamente, são dadas, então, por:

$$V_2 = V_1 + A_1 \Delta T_2 \quad (14.34)$$

$$v_2 = v_1 + a_1 \Delta t_2 . \quad (14.35)$$

Usando as duas últimas relações escritas em (14.32), isto é, $V_1 = Rv_1$ e $A_1 = Ra_1$, e o fato de que $\Delta T_2 = \Delta t_2$, obtemos

$$V_2 = R(v_1 + a_1 \Delta t_2) . \quad (14.36)$$

Comparando as equações (14.35) e (14.36), concluímos que $V_2 = Rv_2$. Portanto, se escolhermos novos pontos X_3, X_4, \dots , e x_3, x_4, \dots , de forma análoga ao que fizemos para os pontos X_1, X_2, x_1 e x_2 , é imediato perceber que os tempos gastos $\Delta T_3, \Delta T_4$, e assim sucessivamente, serão exatamente iguais aos tempos gastos $\Delta t_3, \Delta t_4$ etc. Como os pontos iniciais X_0 e x_0 são arbitrários, acabamos de demonstrar que: o tempo gasto por uma partícula sujeita a uma força do tipo $F_x = -kx$, onde $k > 0$, que é abandonada em repouso em um ponto situado a uma distância A da origem é independente do valor de A . Na Aula 15, você irá reobter esse resultado a partir das expressões explícitas das funções-movimento possíveis para uma partícula sob a ação desse tipo de força.

Exemplo 14.3

Neste último exemplo, vamos considerar o caso em que a força sobre um pequeno corpo, considerado como uma partícula, é proporcional à sua velocidade, mas com sentido sempre oposto ao da velocidade, isto é:

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{v}) = -b\mathbf{v} ,$$

onde b é uma constante positiva. Esse tipo de força ocorre quando corpos se movimentam com velocidades baixas dentro de fluidos como a água e o ar, desde que esses fluidos estejam em repouso no referencial inercial em uso (você estudará mais adiante as chamadas forças de viscosidade exercidas por fluidos em corpos rígidos). Por simplicidade, vamos estudar apenas movimentos unidimensionais, de modo que escreveremos a Segunda Lei de Newton como

$$ma_x \mathbf{u}_x = -bv_x \mathbf{u}_x \quad \implies \quad a_x = -\frac{b}{m}v_x . \quad (14.37)$$

Também nesse exemplo, nosso objetivo é fazer apenas uma pequena análise qualitativa dos possíveis movimentos que uma partícula pode executar sob a ação de uma força como essa.

Note, inicialmente, que a_x tem sempre o sinal oposto ao de v_x . Uma consequência imediata desse fato é que, durante o seu movimento, a partícula está sempre desacelerando, ou seja, o módulo de sua velocidade está sempre diminuindo enquanto ela se movimenta. Obviamente, se a partícula for colocada num certo ponto em repouso, ela permanecerá nesse ponto, pois sendo nula a sua velocidade inicial, também será nula a sua aceleração inicial, fazendo com que a sua velocidade não mude. Mas permanecendo nula a sua velocidade, também continuará sendo nula a sua aceleração, e assim por diante. Portanto, vamos supor que a partícula tenha uma velocidade inicial v_{x0} não-nula.

Apenas para raciocinarmos de uma forma mais concreta, suponhamos que a velocidade em $t_0 = 0\text{s}$ seja positiva, isto é, $v_{x0} > 0$ (o caso em que $v_{x0} < 0$ é totalmente análogo e será analisado num problema proposto). Como a aceleração inicial é negativa, passado um pequeno intervalo de tempo, a velocidade da partícula é ligeiramente menor do que v_{x0} . Uma vez que $a_x = -(b/m)v_x$, a aceleração da partícula tem seu módulo também diminuído.

No entanto, como a aceleração continua negativa, passado um outro pequeno intervalo de tempo, a velocidade terá diminuído um pouco mais, acarretando uma nova diminuição na aceleração, e assim sucessivamente. No entanto, esse processo ocorre de uma forma que a velocidade da partícula nunca mude de sinal, pois se a velocidade da partícula se anular (não sabemos ainda se isso acontece e, caso aconteça, em que instante isso ocorre), a aceleração se anulará também, fazendo com que a partícula permaneça em repouso na posição em que se encontrar nesse instante. Caso a velocidade venha a se anular em algum instante, pelo fato de a aceleração ser nula no mesmo, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de v_x versus t nesse instante também deverá ser nulo.

Podemos, então, afirmar que, num gráfico de v_x versus t , o módulo do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico diminui quando t aumenta. E mais ainda, esse coeficiente angular só será nulo quando a velocidade da partícula também for nula. Na próxima aula, analisaremos novamente esse problema e mostraremos que a velocidade da partícula se anula somente quando $t \rightarrow \infty$. Todos esses resultados estão ilustrados no gráfico mostrado na **Figura 14.7**. Nesse gráfico, estão desenhadas ainda as retas tangentes nos instantes t_1 e $t_2 > t_1$.

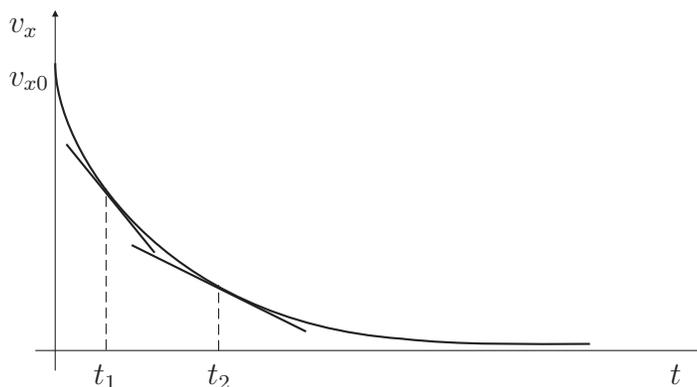


Figura 14.7: Gráfico de v_x versus t para o caso de uma partícula com $v_{x0} > 0$ e sob a ação da força $F_x = -b v_x$, com $b > 0$.

Analise esse gráfico e certifique-se de que ele está de acordo com tudo o que foi dito anteriormente.

Resumo

Nesta aula, você aprendeu a definição de massa inercial. Essa definição surge, de forma natural, de certos resultados experimentais. Verifica-se que, para um par isolado de partículas i e j , vale a relação: $\mathbf{a}_j = -m_{ij}\mathbf{a}_i$, onde $m_{ij} > 0$. Segue imediatamente que $m_{ij} = 1/m_{ji}$. Verifica-se então que $m_{ik}/m_{jk} = m_{ij}$. Essas propriedades nos permitem escolher uma partícula p como padrão e, formando pares desse padrão com todas as outras partículas, definir a chamada massa inercial de uma partícula em relação a esse padrão, dada numericamente por m_{ip} . Em seguida, enunciamos a lei do determinismo newtoniano, que resulta de uma quantidade enorme de experimentos. Esta lei afirma que o produto da massa pela aceleração de uma partícula, num dado instante, só depende de sua posição e sua velocidade e das posições e velocidades das partículas vizinhas, nesse mesmo instante. Designando esse produto por força sobre a partícula, obtivemos, desse modo, o conceito quantitativo de força. Enunciamos a Segunda Lei de Newton de forma sucinta, mas diversos comentários foram feitos sobre todas as informações que estão implícitas em seu enunciado.

A força gravitacional entre duas partículas é atrativa, tem a direção da reta que passa por elas e módulo proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as partículas. Uma partícula em movimento unidimensional ao longo do eixo \mathcal{OX} sob a ação da força total $\mathcal{F}_x = -kx$, com $k > 0$, descreve um movimento oscilante periódico com a propriedade peculiar de que o período de seu movimento não depende das condições iniciais. Uma partícula em movimento unidimensional ao longo do eixo \mathcal{OX} sob a ação da força total $\mathcal{F}_x = -bv_x$, com $b > 0$ e velocidade inicial $v_{x0} > 0$, descreve um movimento no qual tanto sua velocidade quanto sua aceleração decrescem indefinidamente, se anulando apenas no limite em que $t \rightarrow \infty$.

Questionário

1. Você saberia explicar, em poucas palavras, como é definida a massa inercial de uma partícula? Tente, por exemplo, escrever um pequeno texto, bem resumido, definindo massa inercial.

2. O que é a lei das acelerações das partículas de um par isolado e que propriedades decorrem dessa lei?
3. O que são partícula em estudo, partículas vizinhas e partículas do problema?
4. Enuncie a lei do determinismo newtoniano.
5. O que é a função-força? Em princípio, se houver N partículas vizinhas à partícula em estudo, de quantas variáveis vetoriais depende a função-força sobre a partícula em estudo?
6. Enuncie a Segunda Lei de Newton, de forma sucinta, mas, em seguida, complemente esse enunciado com as explicações que achar pertinentes.
7. Considere um par isolado de partículas. Responda se cada uma das afirmações feitas a seguir é falsa ou verdadeira:
 - (a) as acelerações das duas partículas são constantes, pois o par está isolado;
 - (b) as acelerações das duas partículas são iguais entre si;
 - (c) os módulos das acelerações das duas partículas são constantes;
 - (d) os módulos das acelerações das duas partículas são iguais entre si, mas podem variar com o tempo;
 - (e) as acelerações das duas partículas têm a mesma direção, mas possuem sentidos opostos;
 - (f) embora as acelerações das partículas mudem com o tempo, a razão entre seus módulos permanece constante.
8. Escreva uma sentença matemática para o item (e) da questão anterior (considere o par formado pelas partículas 1 e 2).
9. Qual é a expressão da força gravitacional que a partícula i , de vetor-posição \mathbf{r}_i e massa m_i , exerce sobre a partícula j , de vetor posição \mathbf{r}_j e massa m_j ?

Problemas propostos

1. Na primeira seção, enunciamos duas propriedades das acelerações das partículas de um par isolado. A primeira propriedade é dada pelas equações (14.1), (14.3) e (14.4) e a segunda pela equação (14.5). Essas propriedades foram usadas para definir massa e chegar à lei das acelerações das partículas

de um par isolado, dada pela equação (14.10). Desse modo, essa lei é consequência das duas propriedades citadas. É possível demonstrar também que as duas propriedades são consequências da lei e, com isso, fica estabelecido que a lei é equivalente às duas propriedades. Demonstre que as duas propriedades são consequências da lei, obtendo as equações (14.1), (14.3), (14.4) e (14.5) a partir da equação (14.10).

2. Considere um sistema isolado formado por duas estrelas, designadas por A e B , orbitando uma em torno da outra (é usual chamar tal sistema de **estrela dupla**). Verifica-se, por meio de medidas astronômicas, que ambas descrevem movimentos circulares uniformes, de raios, respectivamente, dados por r_A e r_B , tais que $r_A/r_B = 2$. Determine a razão de suas massas.

Sugestão: use a lei das acelerações das partículas de um par isolado e o fato de que, num movimento circular uniforme, a aceleração é centrípeta.

3. Considere a função $\Psi(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = |\mathbf{b}_1| \mathbf{b}_2$. Ela depende das duas variáveis vetoriais \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 . O módulo de um vetor \mathbf{b}_1 é um número e o produto desse número pelo vetor \mathbf{b}_2 é um vetor. Desse modo, a função Ψ associa um vetor bem definido a cada par de vetores \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 , isto é, o valor da função Ψ é sempre um vetor. Vamos identificar todos os vetores usando os unitários \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z de um sistema de eixos cartesianos $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$. Determine o valor da função Ψ nos seguintes casos:

(a) $\mathbf{b}_1 = 3\mathbf{u}_x - 4\mathbf{u}_y$ e $\mathbf{b}_2 = \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y$.

(b) $\mathbf{b}_1 = \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y$ e $\mathbf{b}_2 = (\mathbf{u}_z + \mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$.

4. Usando as propriedades dos vetores e das operações vetoriais, mostre que a equação (14.18) afirma que:
- a força sobre a partícula em estudo, exercida pela partícula 1, é proporcional ao inverso da distância entre elas ao quadrado;
 - a força sobre a partícula em estudo é atrativa e tem a direção da reta que passa por ela e pela partícula 1.
5. Considere duas estrelas idênticas de massa M cada uma. Elas interagem apenas gravitacionalmente e estão isoladas do resto do Universo. Sabe-se que ambas descrevem um MCU e deseja-se calcular o raio R de suas órbitas. Observando-se as variações de brilho do sistema, é possível obter o tempo T gasto por elas para executarem uma volta completa. Usando a Segunda Lei de Newton, calcule R em função de G , T e M .
6. Duas partículas de massas m_1 e m_2 , respectivamente, estão localizadas nas posições: $\mathbf{r}_1 = 3d\mathbf{u}_x$ e $\mathbf{r}_2 = 4d\mathbf{u}_y$.
- Calcule a força gravitacional \mathbf{F}_{12} que a partícula 2 exerce sobre a 1 e a força gravitacional \mathbf{F}_{21} que a partícula 1 exerce sobre a 2. Desenhe no plano \mathcal{OXY} setas representando as forças \mathbf{F}_{12} e \mathbf{F}_{21} .
 - Escolha uma nova posição \mathbf{r}'_1 para a partícula 1, mas de tal forma que o módulo da força gravitacional entre elas, nessa nova situação, seja a quarta parte do módulo das forças calculadas no item anterior. Qual foi a posição \mathbf{r}'_1 escolhida? Marque novamente no plano \mathcal{OXY} setas representando as novas forças gravitacionais entre as duas partículas.
7. Use argumentos de análise dimensional para mostrar que o tempo gasto por uma partícula de massa m , que é abandonada no ponto $x = A$ do eixo \mathcal{OX} , e está sob a ação da força $F_x = -kx$ não depende de A .

Sugestão: designando por τ o tempo gasto pela partícula para atingir a origem, note que ele só pode depender dos parâmetros k , m e A . Você sabe quais são as dimensões desses parâmetros (A tem dimensão de comprimento etc.). Escreva, então,

$$\tau = f k^\alpha m^\beta A^\gamma,$$

onde f é apenas um fator numérico e force que esse produto tenha dimensão de tempo (pois τ é um tempo!). Essa imposição implica um sistema de equações para α , β e γ , cuja única solução é dada por: $\alpha = -1/2$, $\beta = 1/2$ e $\gamma = 0$.

8. Reconsidere o Exemplo 14.3, mas agora suponha que $v_{x0} < 0$. Refaça toda a análise qualitativa feita no texto e faça um esboço do gráfico da velocidade da partícula *versus* tempo nesse caso. Desenhe, em dois instantes diferentes t_1 e $t_2 > t_1$, as retas tangentes a esse gráfico e verifique que o coeficiente da reta tangente em t_2 é menor do que o da reta tangente em t_1 .

Auto-avaliação

Esta aula foi bastante conceitual e, por isso, você encontrou poucos exemplos resolvidos e poucos problemas propostos. Aproveite esta “escassez” de problemas para entender muito bem todos os conceitos aqui introduzidos, pois eles formarão parte de um conjunto de conceitos que terão de ser aplicados conjuntamente, para que você possa compreender os fundamentos da mecânica newtoniana. Portanto, você deve ser capaz de responder ao questionário inteiro e de resolver todos os problemas propostos.

Aula 15 – Princípio da Superposição e Terceira Lei de Newton

Objetivos

- Entender o Princípio da Superposição.
- Entender a Terceira Lei de Newton.
- Analisar o conjunto das três leis de Newton do movimento como formador do arcabouço teórico da Mecânica Clássica.

Introdução

Na aula anterior, enunciamos a Segunda Lei de Newton. Ela afirma que o produto da massa pela aceleração de uma partícula é igual à força total que as partículas vizinhas exercem sobre ela. Essa força total depende das posições e velocidades de todas as partículas envolvidas no problema, e essa dependência pode ser muito complicada nas situações em que há muitas partículas vizinhas ou em que elas se movimentam de modo muito complicado. No entanto, há propriedades da força total que podem simplificar o estudo dos movimentos que ela causa. A mais importante e fundamental dessas propriedades é o chamado Princípio da Superposição. Ele será estudado no início desta aula.

Em seguida, enunciamos e estudamos a Terceira Lei de Newton. Juntamente com as duas primeiras leis, ela forma o conjunto completo das leis de movimento enunciadas por Newton. Essas três leis permitem estudar qualquer movimento em escala macroscópica, isto é, em uma escala bem maior que a atômica e bem menor que a cósmica. Portanto, há uma quantidade inimaginável de fenômenos que estão ao alcance das três leis de Newton. Nesta aula, discutiremos como essas leis permitem estudar qualquer movimento de uma única partícula em escala macroscópica. O estudo do movimento de um sistema de partículas será abordado no Módulo 4.

Na próxima aula, definiremos explicitamente o problema fundamental resolvido pelas três leis de Newton e apresentaremos alguns exemplos simples desse problema. Esses exemplos são importantes para a compreensão da presente aula. Por esse motivo, após terminar esta aula, passe imediatamente para a seguinte. Finalmente, uma última palavra de orientação: continuaremos ainda desenvolvendo e exemplificando as idéias contidas nas três leis de Newton até a Aula 19. Por-

Vale ressaltar que, embora na escala atômica a física newtoniana falhe totalmente, na escala cósmica ela é capaz de fornecer alguns resultados qualitativamente corretos.

tanto, você deve esperar uma compreensão satisfatória de tais leis somente depois de estudar o conjunto de todas as aulas, da 13 à 19. A tarefa é árdua, mas ao final você estará compreendendo uma das maiores glórias do pensamento humano: as três leis de Newton.

Princípio da superposição de forças

Voltemos ao problema geral que estudamos na aula anterior. Desejamos estudar o movimento de uma partícula em relação a um referencial inercial. Esta é chamada partícula em estudo; para distingui-la das demais partículas do problema, que são as partículas vizinhas da partícula em estudo. Representaremos a massa da partícula em estudo por m , e sua posição, velocidade e aceleração, em relação ao referencial inercial, por \mathbf{r} , \mathbf{v} e \mathbf{a} , respectivamente. Consideramos o caso genérico em que há N partículas vizinhas, que têm posições dadas por $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ e velocidades dadas por $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$. A Segunda Lei de Newton afirma que o produto da massa pela aceleração da partícula em estudo é igual à força total \mathbf{F} que as partículas vizinhas exercem sobre ela,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} , \quad (15.1)$$

sendo a força total um vetor que é dado em função das posições e velocidades das partículas do problema. Tal função é chamada função-força. Representando-a por \mathcal{F} , temos

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) . \quad (15.2)$$

Dada essa situação, em que há N partículas nas vizinhanças da partícula em estudo, vamos agora considerar uma situação hipotética na qual as partículas vizinhas, com exceção da primeira, estão infinitamente afastadas da partícula em estudo. Portanto, essa partícula tem agora uma única partícula vizinha, a partícula número 1, cuja posição e velocidade simbolizamos por \mathbf{r}_1 e \mathbf{v}_1 , respectivamente. As demais partículas não estão mais nas vizinhanças da partícula em estudo e, conseqüentemente, não exercem forças sobre ela, não mais influenciando seu movimento. Portanto, nessa situação hipotética, a partícula em estudo e a partícula 1 formam um par isolado de partículas. Então, a força total sobre a partícula em estudo é exercida apenas pela partícula número 1. Vamos representar por \mathbf{F}_1 essa força. Ela é uma força dada em função das posições e velocidades da partícula em estudo (que sofre a força) e da primeira partícula (que exerce a força). Escrevemos

$$\mathbf{F}_1 = \mathcal{F}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1) , \quad (15.3)$$

onde usamos o símbolo \mathcal{F}_1 para representar a função-força que determina a força \mathbf{F}_1 a partir das posições e velocidades da partícula em estudo e da primeira partícula vizinha.

Passemos agora à situação em que as partículas das vizinhanças, com exceção da segunda, estão infinitamente afastadas da partícula em estudo. Conseqüentemente, a partícula em estudo e a partícula 2 formam então um par isolado de partículas. Nessa situação hipotética, em que apenas a segunda partícula está nas vizinhanças da partícula em estudo, a força total sobre a mesma é a força que a partícula número 2 exerce sobre ela. Representando por \mathbf{F}_2 essa força total, temos

$$\mathbf{F}_2 = \mathcal{F}_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}, \mathbf{v}_2) , \quad (15.4)$$

onde \mathcal{F}_2 é a função-força que determina a força \mathbf{F}_2 a partir das posições e velocidades da partícula em estudo e da segunda partícula vizinha.

Esse procedimento, de supor que somente uma partícula permaneça nas vizinhanças da partícula em estudo enquanto as demais são eliminadas dessas vizinhanças, foi realizado anteriormente, supondo que a partícula que permaneceu foi a primeira ou a segunda. No entanto, tal procedimento pode ser repetido, supondo que a partícula que permanece nas vizinhanças da partícula em estudo seja uma outra partícula qualquer. Vamos supor que o procedimento de formar um par isolado de partículas, usando a partícula em estudo e uma das partículas vizinhas, tenha sido realizado para todas as N partículas vizinhas. Obtemos, então, a seguinte lista de N forças:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mathcal{F}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1) , \\ \mathbf{F}_2 &= \mathcal{F}_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}, \mathbf{v}_2) , \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \mathbf{F}_N &= \mathcal{F}_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}, \mathbf{v}_N) , \end{aligned} \quad (15.5)$$

onde, naturalmente, as duas primeiras forças são as dadas em (15.3) e (15.4). Temos, nessa lista, N forças exercidas sobre a partícula em estudo. A força \mathbf{F}_1 seria exercida pela primeira partícula das vizinhanças, se ela fosse a única partícula vizinha. A força \mathbf{F}_2 seria exercida pela segunda partícula das vizinhanças, se ela fosse a única partícula vizinha. Seguindo, temos sucessivamente as demais forças, até a última força \mathbf{F}_N , exercida pela N -ésima partícula das vizinhanças, se ela fosse a única partícula vizinha. Todas essas situações em que haveria uma única partícula nas vizinhanças são hipotéticas, pois estamos considerando como

situação real aquela em que todas as N partículas estão presentes. Na situação real, a força total \mathbf{F} sobre a partícula em estudo, também chamada **força resultante** sobre ela, é exercida por todas as N partículas das vizinhanças e é dada por (15.2). Chamamos cada força em (15.5) simplesmente força que a partícula correspondente exerceria sobre a partícula em estudo, sem usar o adjetivo “total”, reservando esse adjetivo apenas para a força \mathbf{F} , que o conjunto das partículas exerce sobre a partícula em estudo.

Uma enorme quantidade de experimentos mostra que existe a seguinte relação entre essa força total e as N forças dadas em (15.5):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N, \quad (15.6)$$

isto é,

a força total sobre uma partícula em estudo, exercida pelas suas partículas vizinhas, é igual à soma vetorial das forças que cada partícula vizinha exerceria se estivesse sozinha nas vizinhanças da partícula em estudo.

Esse resultado, embora simples, é extremamente importante e deve ser considerado como uma lei física que chamamos **princípio de superposição das forças**. Podemos expressar o seu conteúdo, dizendo que a força exercida por uma partícula das vizinhanças sobre a partícula em estudo independe da presença das outras partículas. Se a i -ésima partícula fosse a única nas vizinhanças, ela exerceria uma força $\mathbf{F}_i = \mathcal{F}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i, \mathbf{v}, \mathbf{v}_i)$, que seria a força total sobre a partícula em estudo. Estando presentes as outras partículas vizinhas, a i -ésima partícula exerce a mesma força $\mathbf{F}_i = \mathcal{F}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i, \mathbf{v}, \mathbf{v}_i)$, que agora se adiciona às demais forças exercidas pelas outras partículas vizinhas, para dar a força total sobre a partícula em estudo. Com isso, para qualquer $i = 1, 2, \dots, N$, chamamos \mathbf{F}_i força exercida sobre a partícula em estudo pela i -ésima partícula vizinha, sem a necessidade de fazer a ressalva de que seria a força exercida, caso a i -ésima fosse a única partícula vizinha. O princípio da superposição torna a ressalva desnecessária, pois a presença de outras partículas nas vizinhanças não afeta \mathbf{F}_i . Em suma: a força sobre uma partícula em estudo, exercida por uma partícula vizinha, é a mesma, quer as duas partículas formem um par isolado, quer não.

Exemplo 15.1

Suponhamos que se deseje estudar o movimento da Lua em relação a um referencial inercial fixo nas estrelas fixas e com origem no Sol. Esse movimento

pode ser obtido com grande precisão, supondo que o movimento da Lua é influenciado apenas pelo Sol e pela Terra e considerando ainda a Lua, o Sol e a Terra como partículas.

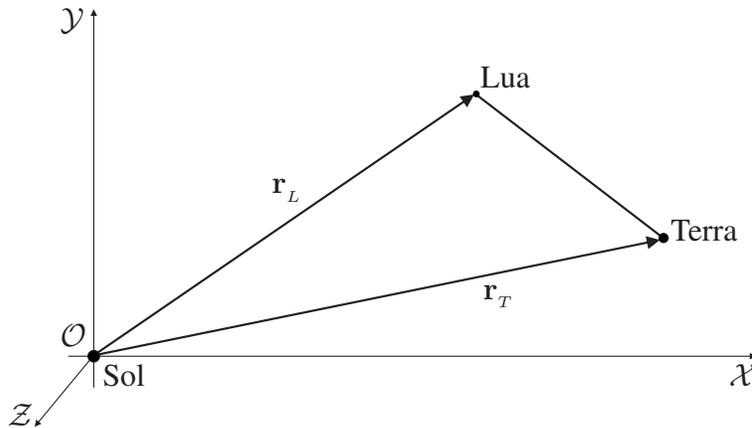


Figura 15.1: Representação das posições do Sol, da Terra e da Lua. A figura não está em escala, pois a distância entre a Lua e a Terra é, na verdade, muito menor do que a distância entre a Terra e o Sol mostrada nesta figura.

Para estudar o movimento da Lua, precisamos obter a força total sobre ela, exercida pela Terra e pelo Sol. Vejamos como essa força é dada pela Lei da Gravitação Universal e pelo Princípio da Superposição. O vetor-posição do próprio Sol é o vetor nulo, pois ele, por hipótese, está na origem do sistema de coordenadas. O vetor-posição da Terra será denotado por \mathbf{r}_T , e o da Lua, por \mathbf{r}_L . As massas do Sol, da Terra e da Lua serão denotadas por m_S , m_T e m_L , respectivamente. A situação está ilustrada na **Figura 15.1**

De acordo com a Lei da Gravitação Universal, a força exercida sobre a Lua pela Terra, caso somente ela estivesse presente nas vizinhanças da Lua, isto é, se não houvesse o Sol, seria dada por:

$$\mathbf{F}_{LT} = -G \frac{m_L m_T}{|\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_T|^2} \frac{\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_T}{|\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_T|}. \quad (15.7)$$

Suponhamos agora que a Terra estivesse infinitamente afastada da Lua, de modo que somente o Sol estivesse presente nas vizinhanças da Lua. Nesse caso, pela Lei da Gravitação Universal, a força sobre a Lua, exercida pelo Sol, seria dada por:

$$\mathbf{F}_{LS} = -G \frac{m_L m_S}{|\mathbf{r}_L|^2} \frac{\mathbf{r}_L}{|\mathbf{r}_L|}. \quad (15.8)$$

Na realidade, a Terra e o Sol estão presentes nas vizinhanças da Lua e, de acordo com o Princípio da Superposição, a força total sobre a Lua é a soma vetorial das

duas forças anteriores. Chamando essa força total sobre a Lua \mathbf{F}_L , temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_L &= \mathbf{F}_{LT} + \mathbf{F}_{LS} = \\ &= -G \frac{m_L m_T}{|\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_T|^2} \frac{\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_T}{|\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_T|} - G \frac{m_L m_S}{|\mathbf{r}_L|^2} \frac{\mathbf{r}_L}{|\mathbf{r}_L|}. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Na **Figura 15.2**, estão indicadas não apenas as forças exercidas pela Terra e pelo Sol sobre a Lua, dadas, respectivamente, por \mathbf{F}_{LT} e \mathbf{F}_{LS} , mas também a força total sobre a Lua, dada por \mathbf{F}_L .

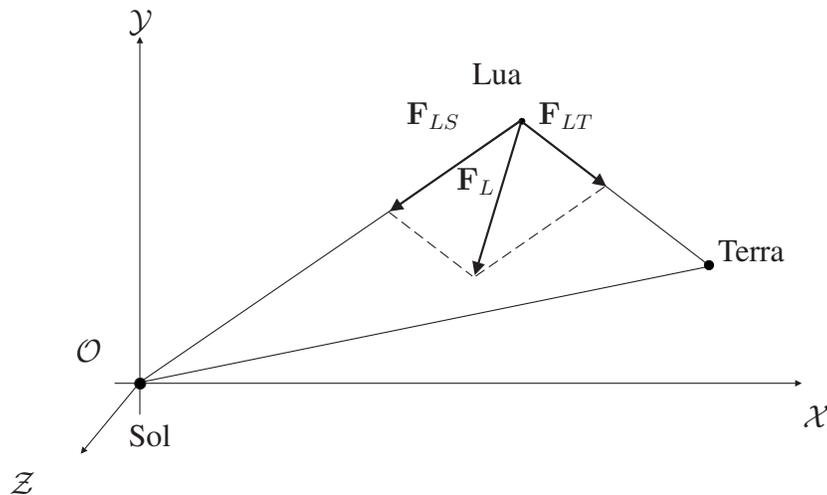


Figura 15.2: As forças \mathbf{F}_{LT} e \mathbf{F}_{LS} exercidas pela Terra e pelo Sol sobre a Lua, respectivamente, e a força total sobre a Lua \mathbf{F}_L .

Terceira Lei de Newton

Consideremos um par de partículas isoladas do resto do universo. Chamaremos uma delas partícula i e a outra partícula j . Consideremos i a partícula em estudo, e j sua partícula vizinha. Vamos chamar \mathbf{F}_{ij} a força sobre i , exercida por j . Sendo m_i a massa da partícula em estudo e \mathbf{a}_i sua aceleração, temos, pela Segunda Lei de Newton,

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_{ij}. \quad (15.10)$$

Vamos agora trocar os papéis das duas partículas: j é considerada como a partícula em estudo e i como sua única partícula vizinha. Denotamos por \mathbf{F}_{ji} a força sobre j , exercida por i . Sendo m_j a massa da partícula em estudo e \mathbf{a}_j sua aceleração, temos, pela Segunda Lei de Newton,

$$m_j \mathbf{a}_j = \mathbf{F}_{ji}. \quad (15.11)$$

Lembremo-nos agora da lei das acelerações das partículas de um par isolado, enunciada na aula anterior e expressa pela equação:

$$m_j \mathbf{a}_j = -m_i \mathbf{a}_i . \quad (15.12)$$

Substituindo os produtos de massas por acelerações, que aparecem nessa igualdade, pelas forças correspondentes dadas em (15.10) e (15.11), obtemos:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} . \quad (15.13)$$

Consideremos agora a situação em que as duas partículas i e j não formam necessariamente um par isolado. Nesse caso, se tomarmos i como partícula em estudo, ela pode ter em suas vizinhanças outras partículas além de j . No entanto, de acordo com o princípio da superposição, a força sobre a partícula em estudo i , exercida pela vizinha j , não depende de outras partículas vizinhas de i . Ela é exatamente igual à força \mathbf{F}_{ij} que seria exercida sobre i , se ela formasse um par isolado com j . Do mesmo modo, a força sobre a partícula em estudo j , exercida pela partícula vizinha i , é exatamente igual à força \mathbf{F}_{ji} que seria exercida sobre j , se ela formasse um par isolado com i . Portanto, graças ao princípio da superposição, podemos considerar que a relação (15.13) continua verdadeira, mesmo quando i e j não formam um par isolado. Nesse sentido geral, a relação é chamada **Terceira Lei de Newton**, que enunciamos da seguinte forma:

se \mathbf{F}_{ij} é a força sobre uma partícula i exercida por uma partícula j e \mathbf{F}_{ji} é a força sobre a partícula j exercida pela partícula i , então,

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} , \quad (15.14)$$

isto é, as duas forças têm o mesmo módulo, a mesma direção e sentidos opostos.

As duas forças \mathbf{F}_{ij} e \mathbf{F}_{ji} , mencionadas na Terceira Lei de Newton, são chamadas forças de **ação e reação**. Qualquer uma delas pode ser chamada força de ação e, nesse caso, a outra é chamada força de reação. Mais especificamente: é comum referir-se à força \mathbf{F}_{ij} como força de ação da partícula j sobre a partícula i . A força \mathbf{F}_{ji} é, então, chamada reação da partícula i sobre a partícula j . Nesse caso, também dizemos que a força \mathbf{F}_{ji} é a força de reação à força \mathbf{F}_{ij} . É claro que podemos nos referir à força \mathbf{F}_{ji} como força de ação da partícula i sobre a partícula j . Dessa forma, a força \mathbf{F}_{ij} é chamada força de reação da partícula j sobre a partícula i , ou ainda, força de reação à força \mathbf{F}_{ji} . É comum denominar o par de forças \mathbf{F}_{ij} e \mathbf{F}_{ji} como par de ação e reação. Se escolhermos uma das

forças do par para ser a força de ação, a outra é chamada força de reação. Usando esses conceitos de ação e reação, podemos enunciar a Terceira Lei de Newton, da seguinte forma abreviada:

a cada ação corresponde uma reação de mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto.

Notemos que as forças de ação e reação são sempre exercidas sobre partículas distintas. A força \mathbf{F}_{ij} é exercida sobre a partícula i e a força \mathbf{F}_{ji} sobre a partícula j , sendo que esteve sempre subentendido que i e j são designações para duas partículas distintas, e não dois nomes para uma mesma partícula. Devido aos nomes “ação” e “reação”, atribuídos às duas forças envolvidas na Terceira Lei de Newton, essa lei é também conhecida como **lei da ação e reação**.

Exemplo 15.2

Consideremos um par de partículas i e j de massas m_i e m_j e posições \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_j , respectivamente. De acordo com a lei da gravitação universal, a força gravitacional exercida pela partícula j sobre a partícula i é dada por:

$$\mathbf{F}_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (15.15)$$

A mesma lei da gravitação universal afirma que a força gravitacional exercida por i sobre j é dada por:

$$\mathbf{F}_{ji} = -G \frac{m_j m_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}. \quad (15.16)$$

Nessa equação, podemos trocar o produto $m_j m_i$ por $m_i m_j$, pois a multiplicação de números reais é comutativa. Nela, também podemos trocar $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$ por $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$, pois o vetor $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ e seu oposto $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ têm o mesmo módulo. Finalmente, podemos trocar o vetor $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ que aparece como numerador em (15.16) por $-(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ por motivos que ficam claros, se levarmos em conta a definição de diferença de dois vetores. Fazendo essas trocas, a expressão (15.16) toma a forma

$$\mathbf{F}_{ji} = +G \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (15.17)$$

Comparando (15.17) e (15.15), obtemos

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}. \quad (15.18)$$

Desse modo, fica verificado que as forças de gravitação entre duas partículas têm o mesmo módulo, a mesma direção e sentidos opostos, isto é, que elas satisfazem à Terceira Lei de Newton.

Tendo enunciado a Terceira Lei de Newton, fica completo o conjunto das leis de movimento, enunciadas por Newton. Essas leis são suficientes para estudarmos qualquer problema de Mecânica Clássica. Faremos a seguir uma discussão do conjunto delas.

As três leis de Newton e o problema fundamental da Mecânica Clássica

Uma vez que acabamos de discutir as três leis de Newton, vamos considerá-las como um conjunto e examinar o papel fundamental que desempenham no estudo dos problemas da Mecânica Clássica. Primeiramente, vamos enunciar-las juntas.

Primeira lei de Newton

Toda partícula permanece em estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme, a não ser que seja acelerada por forças exercidas sobre ela.

Segunda Lei de Newton

O produto da massa m de uma partícula pela sua aceleração \mathbf{a} é igual à força total \mathbf{F} exercida sobre a partícula:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} . \quad (15.19)$$

Terceira Lei de Newton

Se \mathbf{F}_{ij} é a força sobre uma partícula i exercida por uma partícula j e \mathbf{F}_{ji} é a força sobre a partícula j exercida pela partícula i , então,

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} , \quad (15.20)$$

isto é, as duas forças têm o mesmo módulo, a mesma direção e sentidos opostos.

Sabemos que essas leis estão escritas numa forma resumida e que nelas estão subentendidas várias informações. Primeiramente, nas três leis está subentendido que estamos analisando os movimentos das partículas em relação a um referencial inercial.

Na primeira lei, está pressuposto que qualquer força exercida sobre uma partícula é exercida pelos corpos que estão nas suas vizinhanças. Além disso,

essas forças desaparecem no limite em que os corpos nas suas vizinhanças são infinitamente afastados dela. Nesse caso, ela se torna uma partícula isolada e seu movimento é necessariamente um MRU (se o referencial usado não fosse inercial, isso não seria verdade).

Na segunda lei, está pressuposto que a força total sobre a partícula em estudo é dada pelo princípio da superposição:

a força total sobre uma partícula em estudo, exercida pelas partículas vizinhas, é igual à soma vetorial das forças que cada partícula vizinha exerceria se estivesse sozinha nas vizinhanças da partícula em estudo.

Além disso, a força que cada partícula exerce sobre a partícula em estudo é uma função apenas das posições e das velocidades das duas partículas. De um modo geral, a força \mathbf{F}_{ij} sobre uma partícula i , exercida por uma partícula j , é dada por

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j), \quad (15.21)$$

onde \mathcal{F}_{ij} é a função que dá essa força a partir da posição \mathbf{r}_i e da velocidade \mathbf{v}_i da partícula i , e da posição \mathbf{r}_j e da velocidade \mathbf{v}_j da partícula j . Um exemplo notável dessa função é a que dá a força gravitacional que uma partícula j exerce sobre uma partícula i :

$$\mathbf{F}_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (15.22)$$

Note que, nesse caso, a função \mathbf{F}_{ij} não depende das velocidades \mathbf{v}_i e \mathbf{v}_j . Como conseqüência de (15.21) e do princípio da superposição, a força total \mathbf{F} , na segunda lei (15.19), é uma função \mathcal{F} das posições e velocidades das partículas do problema. Desse modo, a segunda lei (15.19) pode ser escrita na seguinte forma explícita:

$$m\mathbf{a} = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N), \quad (15.23)$$

onde \mathbf{r} é a posição da partícula em estudo, \mathbf{v} sua velocidade, $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ são as posições das partículas vizinhas e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$ suas respectivas velocidades.

Dado um problema, isto é, uma partícula em estudo e seus corpos vizinhos, há movimentos que a partícula pode realizar e outros não. Por exemplo, se jogarmos uma pedra a alguns metros da superfície da Terra, podemos observar que ela pode realizar diferentes movimentos com trajetórias parabólicas diferentes para cada um deles, embora em todos esses movimentos a pedra tenha a mesma aceleração, vertical, para baixo e de módulo igual a $9,8 \text{ m/s}^2$. Há, ainda, a possibilidade de movimentos relativos com a direção vertical. Naturalmente, esses

são movimentos possíveis da pedra. Em contrapartida, nesse problema, a pedra jamais realiza um movimento circular ou um movimento com acelerações horizontais. Esses são movimentos que não são possíveis para a pedra no problema em consideração. É claro que em outros problemas, por exemplo, se usássemos um fio amarrado na pedra, ela poderia realizar movimentos circulares, mas no problema em que ela é jogada para cima, movimentos circulares não são possíveis. Os movimentos possíveis de uma partícula em um dado problema também são chamados movimentos reais da partícula.

Consideremos uma função f qualquer, que associa uma posição \mathbf{r} no espaço a cada instante t , em um certo intervalo de tempo. Como de costume, escrevemos $\mathbf{r} = f(t)$. Podemos dizer que f descreve um movimento de um ponto no espaço. Se a partícula no problema em consideração pode realizar tal movimento, dizemos que f é uma função-movimento da partícula, ou, mais explicitamente, que é uma função-movimento possível para a partícula nesse problema. Pode ocorrer também que a função f não descreva um dos movimentos possíveis da partícula. Quer a função f descreva um movimento possível da partícula, quer não descreva, vamos chamá-la **função-movimento no espaço**, ou simplesmente função-movimento, se não houver perigo de confusão.

A Segunda Lei de Newton determina quais os movimentos possíveis para uma partícula na presença de suas vizinhas, em um dado problema. Essa lei estabelece uma relação entre a aceleração da partícula em estudo e as posições e velocidades de todas as partículas do problema, como é evidente na expressão (15.23). Isso significa que qualquer movimento da partícula em estudo, na presença das partículas vizinhas do problema em pauta, deve respeitar essa relação. Dito de outro modo:

os movimentos possíveis para tal partícula em estudo são os que satisfazem a equação (15.23), ou seja, os que estão de acordo com a Segunda Lei de Newton.

Vamos tornar mais precisa a afirmação de que um certo movimento satisfaz à Segunda Lei de Newton. Consideremos, primeiramente, a situação em que os movimentos das partículas vizinhas sejam conhecidos e bem determinados, e que desejamos descobrir quais são os movimentos possíveis da partícula em estudo. Nesse caso, em todos os instantes do movimento procurado, sabemos, por hipótese, as posições e velocidades das N partículas vizinhas que aparecem em (15.23), isto é, conhecemos $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N$, em cada instante t .

Consideremos agora uma função-movimento no espaço que denotamos por f . Em cada um dos instantes do movimento, essa função determina uma posição

r , e suas derivadas determinam uma velocidade v e uma aceleração a . Substituindo na equação (15.23) esses valores e os valores das posições e velocidades das partículas vizinhas, em cada instante, pode resultar numa equação verdadeira ou não. Se for verdadeira, dizemos que o movimento dado por f satisfaz à equação ou que é uma solução da equação e, nesse caso, f é um movimento possível da partícula no problema em consideração. Se não for verdadeira, então f não satisfaz à equação, isto é, não é uma solução da equação e, nesse caso, f não é um movimento possível da partícula no problema em consideração.

Desse modo, a Segunda Lei de Newton se apresenta como um critério para estabelecer quais são os movimentos possíveis de uma partícula em um dado problema: são os que a satisfazem como equação. Essas idéias serão ilustradas na próxima aula, na qual usaremos a Segunda Lei de Newton para determinar movimentos possíveis de uma partícula em algumas situações simples.

Suponhamos que estejam determinados os movimentos possíveis de uma partícula em um dado problema. Seja agora um instante fixo t_0 e uma posição r_0 também fixada. Consideremos, dentre os movimentos possíveis da partícula, aqueles nos quais ela tem a posição r_0 no instante t_0 . Encontraremos uma infinidade de movimentos que satisfazem a essa condição. Acrescentemos agora a condição de que a velocidade do movimento no instante t_0 também esteja fixada; digamos que seja v_0 . Procuremos quais os movimentos da partícula, dentre os possíveis, que têm posição r_0 e velocidade v_0 no instante t_0 . A resposta é: um, e somente um! Dentre os movimentos possíveis de uma partícula existe um, e somente um, que satisfaz às condições de ter uma determinada posição e uma determinada velocidade em algum instante fixo. É comum chamar **instante inicial** o instante t_0 em que estão predeterminadas a posição r_0 e a velocidade v_0 da partícula, mesmo sabendo que normalmente há movimento antes de t_0 . Em conformidade com essa nomenclatura r_0 e v_0 são chamadas **posição inicial** e **velocidade inicial** da partícula, respectivamente. A essas duas informações, a posição e a velocidade iniciais, damos o nome **condições iniciais do movimento**.

Em Matemática, são estudadas as propriedades da Segunda Lei de Newton, que garantem essa capacidade de determinar um único movimento possível quando são fixadas as condições iniciais. Não tendo feito ainda esse estudo, devemos tomar essa capacidade de determinar univocamente o movimento (referida na próxima aula como Princípio da Existência e Unicidade das soluções) como um postulado implícito no enunciado da Segunda Lei de Newton.

As propriedades da Segunda Lei de Newton, que acabamos de discutir, oferecem a solução do seguinte problema:

dadas as forças que agem sobre uma partícula, bem como sua posição e sua velocidade em um dado instante, determinar o seu movimento.

Esse é o chamado **problema fundamental da Mecânica Clássica**. Como discutimos anteriormente, a Segunda Lei de Newton resolve esse problema determinando quais são os movimentos possíveis da partícula sob forças dadas e proporcionando, dentre esses movimentos possíveis, um único que possui, num certo instante, a posição e a velocidade predeterminadas no problema. Na próxima aula, estudaremos com mais detalhes o problema fundamental da Mecânica Clássica.

Resumo

Nesta aula, apresentamos inicialmente um fato experimental de suma importância, o chamado Princípio da Superposição. Tal princípio afirma que a força total sobre uma partícula em estudo, exercida pelas suas partículas vizinhas, é igual à soma vetorial das forças que cada partícula vizinha exerceria, se estivesse sozinha nas vizinhanças da partícula em estudo. Apresentamos a Terceira Lei de Newton, conhecida também com o nome de Lei da Ação e Reação. Esta lei pode ser enunciada de forma sucinta como: a cada ação corresponde uma reação de mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto. Lembre-se de que a ação e a reação estão aplicadas em corpos diferentes. Apresentamos, então, as três leis de Newton conjuntamente, enfatizando que elas formam o arcabouço teórico da Mecânica Clássica. O problema fundamental a ser resolvido nesse arcabouço teórico consiste em determinar o movimento de uma partícula, quando são dadas as forças que agem sobre ela e a posição e velocidade que ela tem no instante dito inicial. Posição e velocidade iniciais são chamadas, coletivamente, condições iniciais do movimento da partícula.

Questionário

1. Enuncie o princípio da superposição.
2. Enuncie a Terceira Lei de Newton
3. Defina força total que um corpo exerce sobre outro.

4. Qual é o problema fundamental da Mecânica Clássica?
5. O que são condições iniciais de um movimento?

Problemas propostos

1. Para resolver esse problema, use o referencial inercial copernicano, isto é, um sistema de eixos solidário às estrelas fixas, com o centro no Sol. Consideremos então o sistema constituído pelo Sol, pela Lua e pela Terra numa situação em que esses três astros estejam alinhados, como indica a **Figura 15.3**.

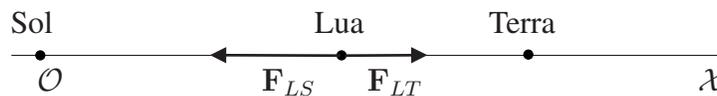


Figura 15.3: O Sol, a Lua e a Terra alinhados ao longo do eixo OX .

- (a) Utilizando os valores de G , das massas envolvidas no problema e as distâncias médias entre a Lua e o Sol, e a Lua e a Terra, determine a força total sobre a Lua, deixando claro o seu sentido. Expresse o módulo dessa força em newtons.
 - (b) Calcule a força sobre a Lua, também no caso em que os três astros estejam alinhados como antes, porém com a Terra entre a Lua e o Sol.
 - (c) Faça um esboço da trajetória da Lua, certificando-se de que as concavidades da curva estão de acordo com os resultados obtidos nos itens anteriores. Em outras palavras, a trajetória traçada deve ser compatível com o fato de a aceleração da Lua ter a mesma direção e sentido que a força total sobre ela.
2. Imagine que, em nosso sistema planetário, fosse possível o alinhamento total do Sol com todos os planetas, ou seja, suponha que o Sol e todos os planetas pudessem, de tempos em tempos, se situar exatamente sobre a mesma reta. Calcule o módulo da força total sobre a Terra, nessa situação. Calcule também o módulo da força exercida sobre a Terra, apenas pelo Sol. Ache a razão entre esses dois módulos e comente a respeito da importância, ou não, de levar em conta a presença dos outros planetas no estudo do movimento anual da Terra, numa primeira aproximação.

3. Duas partículas de massas m_1 e m_2 estão localizadas nas posições \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , dadas, respectivamente, por: $\mathbf{r}_1 = a \mathbf{u}_x + 5a \mathbf{u}_y$ e $\mathbf{r}_2 = 4a \mathbf{u}_x + a \mathbf{u}_y$.

(a) Calcule a força gravitacional \mathbf{F}_{12} exercida pela partícula de massa m_2 sobre de massa m_1 . Determine também a força gravitacional \mathbf{F}_{21} exercida pela partícula de massa m_1 sobre a de massa m_2 .

(b) Faça um desenho contendo os eixos cartesianos \mathcal{OXY} , as posições das duas partículas e as setas representativas das forças \mathbf{F}_{12} e \mathbf{F}_{21} .

4. Considere as partículas 1, 2 e 3, todas de massa m e localizadas nas seguintes posições: a primeira se encontra na origem dos eixos cartesianos; a segunda possui vetor posição $\mathbf{r}_2 = \ell\sqrt{3}/2 \mathbf{u}_x + \ell/2 \mathbf{u}_y$, enquanto a terceira, vetor posição $\mathbf{r}_3 = \ell\sqrt{3} \mathbf{u}_x$. Suponha que as três partículas estejam isoladas do resto do Universo e que só interajam gravitacionalmente.

(a) Determine a força total sobre cada uma das partículas, isto é, calcule $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13}$, $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23}$ e $\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}$.

(b) Determine a soma $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$ e interprete o resultado à luz da Terceira Lei de Newton.

(c) Faça um desenho contendo os eixos cartesianos \mathcal{OXY} , as posições das três partículas e as setas representativas das forças \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 e \mathbf{F}_3 . Indique, nesse mesmo desenho, os ângulos formados entre cada uma dessas forças e o eixo \mathcal{OX} .

5. (a) Considere um sistema isolado de 4 partículas e seja \mathbf{F}_i a força total sobre a partícula i exercida por todas as outras do sistema (naturalmente, $i = 1, 2, 3, 4$). Utilizando a Terceira Lei de Newton, determine a soma

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 .$$

(b) Refaça o item anterior, mas considerando um sistema com um número N arbitrário de partículas e calcule a soma

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N .$$

6. Determine a força total sobre a partícula de massa m_0 que resulta da soma vetorial das forças gravitacionais exercidas por todas as partículas vizinhas, nas seguintes situações:

(a) A partícula de massa m_0 se encontra num dos vértices de um quadrado de lado ℓ , enquanto as partículas vizinhas, todas elas de massa m , estão localizadas nos outros vértices, como indica a **Figura 15.4(a)**;

- (b) A partícula de massa m_0 está no centro de um hexágono de lado ℓ , enquanto as seis partículas vizinhas, todas elas de massa m , estão localizadas nos vértices do hexágono, como indica a **Figura 15.4(b)**;
- (c) A partícula de massa m_0 está no centro de um pentágono, enquanto as quatro partículas vizinhas, todas elas de massa m , ocupam apenas quatro dos cinco vértices do pentágono. Considere, nesse caso, que a distância entre o centro do pentágono e qualquer um de seus vértices seja ℓ , como indica a **Figura 15.4(c)**.

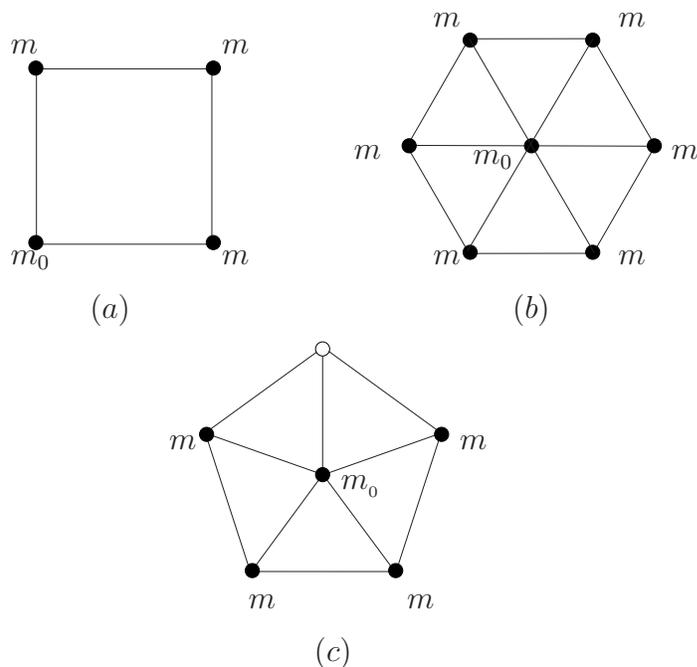


Figura 15.4: Partícula de massa m_0 localizada: (a) no vértice de um quadrado; (b) no centro de um hexágono e (c) no centro de um pentágono.

7. Escreva as componentes cartesianas das forças descritas nos itens abaixo:
- (a) Da força F_{12} , calculada no problema 3;
- (b) Das forças F_1 , F_2 e F_3 , calculadas no problema 4.

Auto-avaliação

Você deve ser capaz de responder a todas as perguntas do questionário e resolver todos os problemas propostos. Se você estiver dominando o formalismo vetorial estudado nas Aulas 8, 9 e 11, os problemas não devem causar nenhuma

dificuldade. Caso contrário, eles serão úteis para você aumentar seu domínio sobre o formalismo vetorial. Lembre-se de que muito da presente aula ficará mais facilmente compreensível após o estudo das aulas seguintes.

Aula 16 – O problema fundamental da Mecânica Clássica

Objetivo

- Entender qual é o problema fundamental da Dinâmica e como as Leis de Newton do movimento são usadas para resolvê-lo.

Introdução

Na aula anterior, apresentamos o conjunto completo das leis de movimento enunciadas por Newton. Nessas três leis, consideramos contidas, implicitamente, certas propriedades, como o Princípio da Superposição e o Princípio da Existência e Unicidade de soluções, que será discutido nesta aula. As três Leis de Newton permitem resolver o chamado problema fundamental da Mecânica Clássica, que enunciamos na aula anterior e estudaremos em mais detalhes nesta aula. Ele será enunciado na próxima seção e exemplificado na seguinte, onde apresentaremos alguns exemplos simples, nos quais usamos a Segunda Lei de Newton para encontrar os movimentos de uma partícula sob forças dadas. Esses exemplos são importantes para a compreensão desta aula.

Talvez esta seja uma das aulas mais difíceis de todo o curso de Física 1, senão a mais difícil. Por esse motivo, você deve estudá-la sem nenhuma pressa, lendo e meditando sobre o conteúdo de cada uma de suas seções. Em seguida, para saber se compreendeu corretamente todos os conceitos apresentados, passe para o questionário. Nessa altura do curso, você já deve ter percebido que as questões são praticamente um roteiro de estudo e, por esse motivo, devem sempre ser respondidas em sua totalidade.

Análise do problema fundamental da Mecânica Clássica

Vimos na aula anterior que no problema fundamental da Mecânica Clássica são dadas a posição e a velocidade da partícula em um único instante e é pedido o movimento da partícula, isto é, a função-movimento que dá a posição da partícula em todos os instantes durante o movimento. De posse da função-movimento, podemos obter a função-velocidade, que dá a velocidade da partícula em todos os instantes durante o movimento. O instante fixo em que são dadas a posição e a velocidade da partícula pode ser um instante qualquer. Como mencionamos, ele é

comumente chamado instante inicial do movimento, embora o movimento possa ter começado antes dele. Na verdade, o adjetivo “inicial” não é significativo, mas continua a ser usado por questão de tradição. Representaremos o instante inicial por t_0 . Sempre que for possível e conveniente, estabeleceremos que esse é o instante zero. Os valores da posição e da velocidade da partícula no instante inicial são chamados **posição inicial** e **velocidade inicial**, respectivamente. Representando a posição inicial por \mathbf{r}_0 e a velocidade inicial por \mathbf{v}_0 , temos.

$$\mathbf{r}_0 = f(t_0) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_0 = \dot{f}(t_0), \quad (16.1)$$

onde f é a função-movimento e \dot{f} é a função-velocidade do movimento procurado, sendo essa última, como sabemos, a derivada da função-movimento em relação ao tempo. Com base no que já aprendemos, podemos afirmar que, dadas as condições iniciais de um movimento, existe uma única função-movimento que satisfaz à Segunda Lei de Newton e a essas condições iniciais. Conseqüentemente, dadas a posição e a velocidade de uma partícula num instante qualquer, podemos dizer que o seu movimento futuro (e passado também) fica univocamente determinado pela Segunda Lei de Newton.

Vamos escrever a Segunda Lei de Newton (15.23) na forma usual que os matemáticos denominam equação diferencial. Para isso, consideremos uma função-movimento f . Ela dá a posição \mathbf{r} da partícula em qualquer instante t do movimento:

$$\mathbf{r} = f(t). \quad (16.2)$$

A derivada dessa função é uma função-velocidade \dot{f} , que dá a velocidade \mathbf{v} da partícula em qualquer instante t do movimento:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{f}(t). \quad (16.3)$$

A derivada da função-velocidade, em relação ao tempo, é a função aceleração \ddot{f} , que dá a aceleração \mathbf{a} da partícula em um instante qualquer t do movimento:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{f}(t). \quad (16.4)$$

Note que a aceleração pode ser escrita como a derivada da velocidade, em relação ao tempo, ou como a derivada segunda da posição em relação ao tempo:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (16.5)$$

Na expressão (15.23) da Segunda Lei, vamos usar as respectivas definições de velocidade e aceleração, (16.3) e (16.5), para escrever:

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}, \dots, \frac{d\mathbf{r}_N}{dt}). \quad (16.6)$$

Essa é uma equação que relaciona, a cada instante, o valor r da função f , com o valor dr/dt de sua derivada e o valor d^2r/dt^2 de sua derivada segunda. Lembre-se de que as posições e velocidades das partículas vizinhas em um instante arbitrário são quantidades supostamente conhecidas nos problemas em consideração. Posteriormente, voltaremos a discutir o caso em que as posições e velocidades das partículas vizinhas não são conhecidas para qualquer instante de tempo.

Uma equação como (16.6), que relaciona uma grandeza com suas derivadas, é chamada, em Matemática, uma **equação diferencial**. Além disso, uma equação diferencial é dita **de segunda ordem** se nela a derivada segunda é a de mais alta ordem. A Segunda Lei de Newton é, portanto, uma equação diferencial de segunda ordem.

Em contraste com as equações algébricas, nas equações diferenciais a incógnita é uma função, ou seja, as soluções dessa equação são as funções f que levam a valores de r , dr/dt e d^2r/dt^2 que satisfazem a equação, isto é, a tornam verdadeira em cada instante. Já sabemos que essas soluções são os movimentos possíveis da partícula no problema em questão. Dentre essas soluções existe uma, e somente uma, que satisfaz às condições iniciais (16.1). Em suma:

a Segunda Lei de Newton é uma equação diferencial de segunda ordem, cujas soluções são os movimentos possíveis de uma partícula em um dado problema.

Dentre essas soluções há uma, e apenas uma, que resolve o problema fundamental da Mecânica Clássica. Vamos sintetizar essa propriedade na forma:

se forem dadas as forças sobre a partícula, a Segunda Lei de Newton determina, para essa partícula, um, e somente um, movimento que satisfaz às condições iniciais dadas por uma posição e uma velocidade predeterminadas em algum instante fixo.

Essa propriedade da Segunda Lei de Newton é chamada **Princípio da Existência e Unicidade** das soluções do problema fundamental da Mecânica Clássica.

Por conveniência futura, é pertinente fazer, neste momento, um pequeno comentário. No problema fundamental da Mecânica, as forças envolvidas são consideradas conhecidas, isto é, como dados do problema em estudo. Isso significa que na Segunda Lei de Newton (15.23) é conhecida a função-força \mathcal{F} , que determina a força sobre a partícula em estudo para quaisquer que sejam as posições e velocidades das partículas do problema. No entanto, é natural perguntarmos como são obtidas essas funções-força. A resposta é que são obtidas a partir de

observações e experimentos, geralmente complementados por cálculos teóricos. Analisando-se vários movimentos da partícula em estudo e medindo-se, para cada um deles, as posições e as velocidades de todas as partículas do problema em vários instantes, podemos relacionar as acelerações da partícula em estudo com as posições e velocidades de todas as partículas do problema. A partir desses dados, e lembrando que a força total sobre a partícula em estudo é igual ao produto de sua massa por sua aceleração, é possível inferir expressões para a função-força que atua sobre a partícula em estudo, e que é exercida pelas partículas vizinhas. É claro que quanto maior for o número de medidas feitas (e maior for a precisão de tais medidas), mais próxima da realidade estará a nossa conclusão a respeito da função-força para um certo problema. Nesse sentido, encontrar as funções-força sobre uma partícula numa certa situação significa resolver o seguinte problema:

dados um ou mais movimentos de uma partícula na presença de partículas vizinhas, determinar a força total que age sobre a partícula exercida pelas partículas vizinhas.

Esse é o chamado **problema inverso da Mecânica Clássica**. Um exemplo de problema inverso, que teve um papel muito importante no desenvolvimento da Mecânica, foi resolvido por Newton, ao descobrir a Lei da Gravitação Universal. A partir dos movimentos dos planetas, dados pelas leis de Kepler, Newton determinou qual a força que o Sol exerce sobre cada planeta. Ele usou as leis de Kepler para concluir que a força é atrativa, tem a direção da reta que une cada planeta ao Sol e é inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa. Vamos nos contentar agora com esse exemplo do problema inverso da Mecânica Clássica e voltar ao assunto desta aula: o problema fundamental da Mecânica Clássica. Portanto, vamos continuar supondo que as forças já tenham sido obtidas experimentalmente e nos tenham sido dadas e, a partir delas, tentamos obter o movimento da partícula em estudo.

Note que a Segunda Lei de Newton é uma igualdade vetorial. Isto significa que os vetores, em ambos os lados de (15.19), podem ser decompostos em componentes ao longo dos eixos \mathcal{OX} , \mathcal{OY} e \mathcal{OZ} do referencial em uso, para obtermos três igualdades numéricas, equivalentes à igualdade vetorial

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \iff m a_x = F_x, \quad m a_y = F_y \quad \text{e} \quad m a_z = F_z, \quad (16.7)$$

onde as componentes da aceleração e da força total são escritas na notação habitual. As forças se apresentam em cada problema concreto como vetores, de modo que a Segunda Lei de Newton é aplicada ao problema inicialmente em forma vetorial. Essa também é a forma que permite a melhor compreensão das relações

entre as forças e as características do movimento que elas causam. É no momento de se realizar os cálculos que normalmente se torna útil a decomposição da Segunda Lei de Newton nas três igualdades numéricas escritas em (16.7). Na verdade, na maioria dos problemas de que tratamos, os movimentos são retilíneos ou planos, de modo a ser possível decompor a Segunda Lei de Newton em apenas uma ou duas igualdades numéricas. Naturalmente, essas considerações também se aplicam à Segunda Lei de Newton, na forma (16.6) de uma equação diferencial. Essa equação também é uma igualdade vetorial, equivalente a três igualdades numéricas, que são três equações diferenciais que relacionam as componentes da derivada segunda $d^2\mathbf{r}/dt^2$ com as componentes correspondentes da força total.

Note que ainda não usamos a Terceira Lei de Newton nesta seção, pois ela não se faz necessária no tipo de problema que estamos considerando. No entanto, ela desempenha um papel importante no estudo do movimento, como veremos a seguir.

Até agora, consideramos as posições e velocidades das partículas vizinhas como conhecidas em qualquer instante do tempo, isto é, consideramos como conhecidos os movimentos de todas as partículas vizinhas. Em alguns casos mais simples, isso realmente ocorre e, em outros, esses movimentos são desconhecidos. De qualquer modo, conhecer ou não o movimento das partículas vizinhas não afeta a força total sobre a partícula em estudo, quando as partículas do problema estão em certas posições e com certas velocidades, uma vez que a função-força só depende destas posições e velocidades e não do fato de algum observador já possuir alguma informação sobre o sistema. Em ambos os casos, a teoria explicada anteriormente permite resolver o problema fundamental da Mecânica Clássica.

No entanto, a situação mais comum, e mais complicada, é aquela na qual não conhecemos o movimento das partículas vizinhas. Não sabemos, então, quais são as posições e velocidades em um instante qualquer das partículas vizinhas que aparecem na Segunda Lei de Newton (16.6). Nesse caso, $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$ são incógnitas na equação diferencial (16.6), além das incógnitas \mathbf{r} , $d\mathbf{r}/dt$ e $d^2\mathbf{r}/dt^2$. Como você verá, quando estudar a teoria das equações diferenciais, há nesse caso incógnitas em excesso, o que torna impossível determinar o movimento da partícula em estudo, usando apenas a equação diferencial (16.6). O que fazer então para determinar esse movimento? A resposta é que a própria Segunda Lei deve ser usada para determinar o movimento também das partículas vizinhas. Isto é, devemos considerar cada uma das partículas 1, 2, ..., N como novas partículas em estudo e aplicar a cada uma delas a Segunda Lei de Newton. Desse modo, obtemos mais N equações diferenciais, além da equação diferencial (16.6).

Todas essas equações diferenciais juntas, com o auxílio da Terceira Lei de Newton, permitem, em princípio, encontrar os movimentos possíveis de todas as partículas do problema, da partícula que originalmente foi considerada como partícula em estudo e das suas N partículas vizinhas. Devido ao Princípio de Existência e Unicidade do problema fundamental da Mecânica, apropriadamente generalizado para o caso em que buscamos os movimentos de todas as partículas do problema, podemos afirmar que:

dadas as condições iniciais para todas as partículas do problema, ficam, em princípio, determinados univocamente pelas leis de Newton os movimentos de todas elas.

Entretanto, no caso geral, a solução do conjunto de equações diferenciais que determinam os movimentos possíveis de todas as partículas do problema é tão complicada, mas tão complicada, que ninguém, nem computador algum consegue resolvê-las na prática, a menos que sejam feitas hipóteses simplificadoras. Por isso, começaremos por estudar problemas nos quais suporemos conhecidos os movimentos das partículas vizinhas. Na verdade, o que faremos será considerar, primeiramente, situações as mais simples possíveis, nas quais somente a equação diferencial (16.6) é suficiente para resolver o problema fundamental da Mecânica. Posteriormente, voltaremos a analisar o movimento de todas as partículas do problema, da partícula em estudo e das partículas vizinhas, usando o conjunto das leis de Newton aplicadas a todas elas. Faremos isso com mais frequência na parte final de nosso curso, no estudo da mecânica do sistema de partículas.

Exemplos simples do problema fundamental da Mecânica Clássica

Nesta seção, consideramos algumas situações simples, nas quais a Segunda Lei de Newton, aplicada apenas a uma partícula em estudo, é suficiente para obter o seu movimento. Voltemos, então, à expressão (16.6) da Segunda Lei de Newton, aplicada a uma partícula em estudo de massa m e posição \mathbf{r} em um instante arbitrário. Nessa expressão da Segunda Lei de Newton também aparece a velocidade $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ da partícula em estudo, sua aceleração $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2$ e as posições $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ e velocidades $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$ das partículas vizinhas.

Consideremos agora a situação simples, na qual as partículas vizinhas da partícula em estudo são todas imóveis e ocupam posições conhecidas. Nesse caso, $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ são constantes conhecidas que denotamos, respectivamente, por $(\mathbf{r}_1)_0, \dots, (\mathbf{r}_N)_0$. As velocidades $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$ são, então, obviamente, todas nulas.

Nessa situação, a Segunda Lei de Newton (16.6) toma a forma:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathcal{F}(\mathbf{r}, (\mathbf{r}_1)_0, \dots, (\mathbf{r}_N)_0, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) . \quad (16.8)$$

A função-força \mathcal{F} , no membro direito dessa equação, depende apenas das variáveis \mathbf{r} e $d\mathbf{r}/dt$, pois as antigas variáveis, que davam as posições e velocidades das partículas vizinhas, têm todas um valor constante na presente situação. Nesse caso, a função-força \mathcal{F} dá uma força \mathbf{F} que depende apenas da posição \mathbf{r} e velocidade $d\mathbf{r}/dt$ da partícula em estudo, de modo que é conveniente escrever:

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) . \quad (16.9)$$

Nessa situação particular, a Segunda Lei de Newton (16.8) assume a forma mais simples:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathcal{F}\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) . \quad (16.10)$$

Nessa forma, fica claro que a Segunda Lei de Newton, aplicada à partícula em estudo, dá a aceleração dessa partícula em função apenas de sua posição e velocidade. Consideremos, nessa situação, o problema fundamental da Mecânica: dadas as forças que agem sobre a partícula, isto é, a função \mathcal{F} na equação (16.10), e a posição \mathbf{r}_0 e a velocidade \mathbf{v}_0 da partícula em um instante inicial t_0 , determinar o movimento da partícula. A Segunda Lei de Newton (16.10) é uma equação diferencial que estabelece quais são os movimentos possíveis da partícula sob a ação das forças que aparecem no problema.

Seja f uma função que associa uma posição a cada instante do tempo:

$$\mathbf{r} = f(t) . \quad (16.11)$$

Essa função determina a cada instante t uma posição \mathbf{r} , uma velocidade $d\mathbf{r}/dt$ e uma aceleração $d^2\mathbf{r}/dt^2$. A função f descreve um movimento possível da partícula se, e somente se, a seguinte condição é satisfeita: ao substituirmos \mathbf{r} , $d\mathbf{r}/dt$ e $d^2\mathbf{r}/dt^2$ na equação (16.10), verificamos que ela é satisfeita para qualquer instante de tempo. Dizemos, nesse caso, que f é uma solução da equação diferencial (16.10) ou que f é uma função-movimento que descreve um movimento possível, ou real, da partícula. Sendo a equação diferencial (16.10) a Segunda Lei de Newton, é pressuposto que ela tenha a seguinte propriedade: dentre as funções que são suas soluções, isto é, dentre os movimentos possíveis da partícula, há um, e somente um, movimento f que satisfaz às condições iniciais do problema proposto:

$$\mathbf{r}_0 = f(t_0) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_0 = \dot{f}(t_0) . \quad (16.12)$$

Determinado esse movimento, fica resolvido o problema fundamental da Mecânica que enunciamos anteriormente. Vejamos como essas propriedades da Segunda Lei de Newton aparecem em um exemplo muito simples.

Exemplo 16.1

Suponhamos que a função-força de um problema seja a função constante, isto é, para quaisquer valores da posição \mathbf{r} da partícula e de sua velocidade $d\mathbf{r}/dt$, a força total seja uma constante que chamaremos \mathbf{F}_0 :

$$\mathbf{F}_0 = \mathcal{F}\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right). \quad (16.13)$$

Nesse caso, a Segunda Lei de Newton (16.10) toma a forma:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}_0. \quad (16.14)$$

Com essa força constante \mathbf{F}_0 dada, desejamos determinar o movimento que satisfaz às condições iniciais arbitrárias (16.12). Para simplificar, vamos considerar que o instante inicial seja zero, isto é, $t_0 = 0$. Temos, então,

$$\mathbf{r}_0 = f(0) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_0 = \dot{f}(0). \quad (16.15)$$

Devido à forma da equação diferencial (16.14), suas soluções são funções que, derivadas duas vezes em relação ao tempo, dão um vetor constante \mathbf{F}_0/m . Uma função que, derivada duas vezes em relação ao tempo, dá um vetor constante é a função

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} + \mathbf{B}t + \mathbf{C}t^2, \quad (16.16)$$

onde \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são vetores constantes. De fato:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{B} + 2\mathbf{C}t \quad \text{e} \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 2\mathbf{C}. \quad (16.17)$$

Usando esse resultado na equação diferencial (16.14), concluímos que ela é satisfeita se, e somente se, o vetor constante \mathbf{C} é igual à metade do vetor \mathbf{F}_0/m , isto é, $\mathbf{C} = \mathbf{F}_0/2m$. Conseqüentemente, obtemos, a partir de (16.16), as seguintes soluções da equação diferencial (16.14):

$$\mathbf{r} = f(t) = \mathbf{A} + \mathbf{B}t + \frac{\mathbf{F}_0}{2m}t^2, \quad (16.18)$$

onde os vetores constantes \mathbf{A} e \mathbf{B} permanecem indeterminados. Desse modo, a partir de (16.16), sabemos que movimentos descritos pela equação (16.18) são movimentos possíveis da partícula sob a força constante \mathbf{F}_0 , quaisquer que sejam

os vetores constantes \mathbf{A} e \mathbf{B} em (16.18). Agora devemos verificar se, dentre esses movimentos possíveis, temos o movimento com condições iniciais (16.15). Impondo a condição $\mathbf{r}_0 = f(0)$ sobre (16.18), temos:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{A} + \mathbf{B} \times 0 + (\mathbf{F}_0/2m) \times 0^2, \quad \text{isto é,} \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{A}.$$

Para impor a condição $\mathbf{v}_0 = \dot{f}(0)$ sobre a função de movimento dada por (16.18), devemos, antes de tudo, derivá-la em relação ao tempo, para obter a função-velocidade:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{B} + \frac{\mathbf{F}_0}{m} t. \quad (16.19)$$

Exigimos, então, que tal função-velocidade satisfaça à condição $\mathbf{v}_0 = \dot{f}(0)$:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{B} + \frac{\mathbf{F}_0}{m} \times 0, \quad \text{isto é,} \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{B}.$$

Desse modo, no caso dos movimentos dados por (16.18), as condições iniciais (16.15) são equivalentes às equações:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{A} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{B}. \quad (16.20)$$

É claro que o vetor constante \mathbf{A} pode ser tomado como igual à posição inicial \mathbf{r}_0 , e o vetor constante \mathbf{B} , igual à velocidade inicial \mathbf{v}_0 . Em suma, as condições iniciais podem ser satisfeitas pela função-movimento (16.18), que nesse caso toma a forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{F}_0}{2m} t^2. \quad (16.21)$$

Termina, assim, a solução do problema fundamental da Mecânica, nesse caso particular simples. Encontramos em (16.21) o movimento da partícula sob a força constante \mathbf{F}_0 e com as seguintes condições iniciais: a partícula tem posição \mathbf{r}_0 e velocidade \mathbf{v}_0 no instante zero.

Note que, neste exemplo, o tipo de solução (16.18) proposta para a equação diferencial (16.14) depende de duas constantes vetoriais arbitrárias, \mathbf{A} e \mathbf{B} . Escolhendo diversos valores para essas constantes, a solução (16.18) vai nos proporcionando diversos movimentos possíveis para a partícula. É importante saber se, dentre esses movimentos, existe um que satisfaça às condições iniciais pre-estabelecidas. No presente problema, as constantes \mathbf{A} e \mathbf{B} podem, em (16.20), sempre ser escolhidas para satisfazer quaisquer condições iniciais, já que \mathbf{r}_0 e \mathbf{v}_0 são arbitrários.

No entanto, se tivéssemos proposto uma solução de outra forma, na qual não houvesse duas constantes arbitrárias, como \mathbf{A} e \mathbf{B} na solução (16.18), essa outra forma de solução não seria capaz de descrever movimentos com todas as

condições iniciais que somos capazes de exigir. De modo geral, não basta que as soluções propostas para (16.14) tenham duas constantes arbitrárias, a fim de que elas descrevam movimentos com quaisquer condições iniciais que se desejem. Em (16.18), fomos capazes de propor um tipo de solução capaz de satisfazer quaisquer condições iniciais que se desejem. A obtenção de soluções da equação diferencial (16.14), ainda mais desse tipo, pode dar a impressão de que foi por adivinhação, pois não explicamos de onde tiramos a expressão inicial (16.16), que resultou na solução (16.18). A resposta a essa questão é a seguinte: a equação diferencial (16.14) é tão simples, que um pouco de reflexão sobre ela nos leva a conjecturar uma solução para ela da forma (16.16); além disso, a equação diferencial (16.14) diz que a aceleração da partícula é um vetor constante (igual a \mathbf{F}_0/m) e nossa experiência com MRUV nos leva também a uma proposta de solução do tipo (16.16).

Para obter soluções de equações diferenciais mais complicadas é necessário estudar a Teoria das Equações Diferenciais e ter uma certa prática no assunto. A bem da verdade, duas considerações devem ser feitas. A primeira é que, exceto em casos muito simples, a solução de equações diferenciais exige pelo menos algumas conjecturas iniciais, que podemos chamar adivinhações. A segunda é que há uma infinidade de equações diferenciais sobre as quais não se tem a mínima idéia de como resolver. Felizmente, as equações que vamos considerar são todas muito simples. Nosso propósito não é aprender a resolver equações diferenciais complicadas, mas entender que a Segunda Lei de Newton é uma equação diferencial cujas soluções dão os movimentos possíveis do sistema e que existe um, e somente um, movimento que satisfaz às condições iniciais preestabelecidas.

No exemplo anterior, supusemos que a força sobre a partícula em estudo fosse um vetor constante, quaisquer que fossem a posição e a velocidade da partícula em estudo. Há situações concretas que são muito bem descritas por uma função-força desse tipo.

Consideremos, por exemplo, o caso de uma bolinha de chumbo de uns 5 centímetros de diâmetro que arremessamos para cima, de modo que ela atinja uma altura em torno de 5 metros. Nesse movimento, o tamanho da bolinha não ultrapassa 1% da altura atingida por ela, de modo que vamos considerá-la como uma partícula. As partículas vizinhas da bolinha são as do ar circundante e as da Terra. É possível verificar, em medidas experimentais, que o ar circundante não exerce sobre a bolinha qualquer força perceptível. Para uma força do ar sobre a bolinha tornar-se perceptível, a bolinha precisaria ter velocidades bem maiores do que as envolvidas neste problema (que são pequenas, uma vez que ela alcança

uma altura máxima de aproximadamente 5 metros). Podemos, pois, ignorar o ar no conjunto das partículas vizinhas da bolinha.

É possível verificar que a força total, exercida por todas as partículas que compõem a Terra sobre a bolinha (isto é, sobre todas as partículas que compõem a bolinha) é, com ótima aproximação, uma força constante, proporcional à massa da bolinha, com direção vertical e sentido de cima para baixo. Essa é a força **peso** da bolinha. Se a bolinha subisse a alturas consideráveis, observaríamos mudanças na força que a Terra exerce sobre ela; mas, com alturas tão pequenas comparadas com o raio da Terra, nenhuma variação é perceptível. Desse modo, não importa a posição e a velocidade da bolinha, dentro dos limites que estamos considerando, a força-peso tem sempre o mesmo valor e é a força total sobre a bolinha. Se representarmos essa força por F_0 , temos a função-força (16.13) e a Segunda Lei de Newton (16.14). Essa é uma situação bem concreta, que é descrita pelo exemplo anterior. Como consequência, o movimento da bolinha é dado por (16.21), caso a posição e a velocidade da mesma, no instante zero, sejam dadas por r_0 e v_0 , respectivamente.

De um modo geral, verifica-se experimentalmente que qualquer partícula nas vizinhanças da Terra sofre uma força (exercida pela Terra) proporcional à sua massa, com direção da reta que passa pela partícula e pelo centro da Terra e sentido apontando para o centro da Terra. Essa força pode ser considerada constante, se a partícula permanece nas proximidades da superfície da Terra. Com isso, queremos dizer que sua distância até a superfície da Terra permanece desprezível quando comparada ao raio da Terra. Essa força constante é chamada **peso da partícula** (nas proximidades da superfície da Terra). Representando o peso da partícula por P e levando em conta que é um vetor constante e proporcional à massa m da partícula, podemos escrever

$$P = m g , \quad (16.22)$$

onde, naturalmente, g é um vetor constante que aponta para o centro da Terra. Medições mostram que o módulo desse vetor é dado por

$$|g| = 9,8 \text{ N/kg} , \quad (16.23)$$

onde usamos o newton (N) como unidade para a força-peso e o quilograma (kg) como unidade para a massa da partícula.

Voltemos agora à função-força (16.9) e consideremos a situação particular em que ela não depende da variável dx/dt , isto é, a força F exercida sobre a partícula depende somente da sua posição r :

$$F = \mathcal{F}(r) . \quad (16.24)$$

Vale enfatizar que o peso de uma partícula nada mais é do que a resultante das forças gravitacionais que todas as partículas que compõem a Terra exercem sobre essa partícula.

Nessa situação particular, a Segunda Lei de Newton (16.10) assume a forma ainda mais simples, dada por:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathcal{F}(\mathbf{r}) . \quad (16.25)$$

Forças do tipo (16.24), que dependem apenas da posição da partícula, desempenham um papel importante em Mecânica, como veremos em outras aulas. Um exemplo notável é dado pela força gravitacional. Consideremos o sistema físico constituído pela Terra e pelo Sol e investiguemos como as Leis de Newton determinam o movimento anual da Terra em torno do Sol. Nesse problema, o Sol e a Terra podem ser considerados partículas. Na Aula 13, definimos um referencial copernicano como um referencial com um sistema de eixos $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ fixo em relação às estrelas fixas e com origem \mathcal{O} no Sol. Na Aula 13, explicamos que tal referencial é inercial. Vamos, pois, usá-lo para analisar o movimento da Terra. A força que os planetas e a Lua exercem sobre a Terra podem, em primeira aproximação, ser desprezadas diante da força que o Sol exerce sobre a Terra. Essa é uma força gravitacional dada pela fórmula (14.18), na qual m e \mathbf{r} simbolizam agora a massa e a posição da Terra, m_1 e \mathbf{r}_1 , a massa e a posição do Sol, e \mathbf{F}_1 , a força gravitacional que o Sol exerce sobre a Terra. Como estamos usando um referencial copernicano com origem no Sol, temos $\mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$. Além disso, vamos trocar o símbolo da massa da Terra para m_T , da massa do Sol para m_S , e da força sobre a Terra exercida pelo Sol para \mathbf{F}_{TS} . Com isso tudo, obtemos:

$$\mathbf{F}_{TS} = -G \frac{m_T m_S}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} . \quad (16.26)$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton à partícula em estudo, Terra, tendo como partícula vizinha apenas o Sol, obtemos a equação

$$m_T \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}_{TS} , \quad (16.27)$$

que, em virtude de (16.26), tem a forma:

$$m_T \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -G \frac{m_T m_S}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} . \quad (16.28)$$

Os movimentos possíveis da Terra na presença do Sol são os movimentos que satisfazem a essa equação, isto é, são os movimentos dados pela Segunda Lei de Newton. A Terra segue, é claro, apenas um desses movimentos, determinado pelas suas condições iniciais em algum momento específico. Na verdade, as soluções da equação diferencial (16.28) dão os movimentos possíveis de todos os planetas, quando ignoramos as pequenas alterações provocadas pelas forças que os planetas exercem entre si. Quem primeiro descreveu tais movimentos foi Kepler, por meio

das três leis que levam o seu nome. Quem primeiro demonstrou que essas leis e, portanto, os movimentos dos planetas, decorrem da Segunda Lei de Newton, foi o próprio Newton. A obtenção dos movimentos planetários a partir da Segunda Lei de Newton (16.28) é muito complicada para os nossos objetivos no momento. Agora queremos analisar apenas problemas simples solucionados pela Segunda Lei de Newton. Passemos a um deles.

Exemplo 16.2

Neste exemplo, vamos analisar o caso em que a força sobre a partícula é proporcional à sua própria. Esse tipo de força já havia sido estudado na aula anterior. No entanto, naquela aula, fizemos apenas um estudo qualitativo dos movimentos retilíneos possíveis de uma partícula sob a ação de tal tipo de força. Em particular, mostramos que o movimento é oscilante e com a propriedade muito particular de ter um período independente da amplitude das oscilações. Agora, nosso objetivo é resolver a equação diferencial (16.25) e encontrar os movimentos retilíneos possíveis da partícula. Verificaremos os resultados obtidos na aula anterior e ainda encontraremos a única solução que satisfaz às condições iniciais $x_0 = f_x(0)$ e $v_{x0} = \dot{f}(0)$. Considere, então, o caso específico em que

$$\mathbf{F} = -k \mathbf{r} , \quad (16.29)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade positiva. Com essa força resultante, a Segunda Lei de Newton (16.25) toma a forma:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k \mathbf{r} . \quad (16.30)$$

Vamos simplificar ainda mais o problema, supondo que a partícula se mova ao longo de uma reta que passe pela origem (num exemplo da Aula 19 você verá quais são os movimentos possíveis de uma partícula sob a ação desse tipo de força, quando ela se movimenta no plano $\mathcal{OX}\mathcal{Y}$). Podemos escolher o eixo \mathcal{OX} ao longo dessa reta, de modo que $\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x$, pois $y = 0$ e $z = 0$. Nesse caso, temos $\mathbf{F} = -k x \mathbf{u}_x$, de modo que as componentes da força resultante são dadas por $F_x = -k x$, $F_y = 0$ e $F_z = 0$. Para a aceleração, temos $d^2 \mathbf{r}/dt^2 = (d^2 x/dt^2) \mathbf{u}_x$, pois, em um movimento retilíneo no eixo \mathcal{OX} , não há componentes da aceleração ao longo dos demais eixos: $d^2 y/dt^2 = 0$ e $d^2 z/dt^2 = 0$. Portanto, na hipótese de movimento retilíneo ao longo do eixo \mathcal{OX} , a Segunda Lei de Newton (16.30) toma a forma:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \mathbf{u}_x = -k x \mathbf{u}_x , \quad (16.31)$$

isto é,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x . \quad (16.32)$$

Note que essa equação não envolve vetores, o que é natural, pois não é necessário usar vetores para estudar um movimento retilíneo. Essa é uma equação diferencial e suas soluções são as funções-movimento f_x que descrevem os movimentos possíveis da partícula sujeita a uma força proporcional à sua posição. De acordo com os postulados da Mecânica Clássica, dentre os movimentos possíveis f_x existe apenas um que satisfaz às condições iniciais do tipo

$$x_0 = f_x(0) \quad \text{e} \quad v_{x0} = \dot{f}_x(0). \quad (16.33)$$

A equação diferencial (16.32) tem uma propriedade importantíssima: qualquer solução da equação multiplicada por uma constante também é uma solução, e a soma de quaisquer duas soluções é uma solução. Num dos problemas propostos, você terá a oportunidade de demonstrar essa propriedade. Vamos usá-la para encontrar as soluções da equação que são capazes de satisfazer a quaisquer condições iniciais do tipo (16.33).

Para resolver a equação diferencial (16.32), começamos por observar que uma solução é uma função cuja derivada segunda em relação ao tempo é uma constante vezes a própria função. Pela nossa experiência, sabemos que a derivada segunda do seno e a derivada segunda do cosseno são iguais a menos o seno e a menos o cosseno, respectivamente. Como desejamos que apareça uma constante, multiplicando a derivada segunda (olhe para a equação (16.32) e compreenda essa exigência), basta nos lembrarmos da regra da cadeia das derivadas para obter as seguintes funções como boas candidatas a soluções de (16.32):

$$x_1 = \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad x_2 = \text{sen}(\omega t),$$

onde ω é uma constante. Substituindo essas funções na equação diferencial (16.32), concluímos que, de fato, elas são soluções, desde que a constante ω satisfaça à propriedade: $\omega^2 = k/m$. Basta, portanto, estabelecer

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (16.34)$$

para que $x_1 = \cos(\omega t)$ e $x_2 = \text{sen}(\omega t)$ sejam soluções da equação diferencial (16.32). De acordo com as propriedades já citadas, se multiplicarmos essas duas soluções por constantes e somarmos os resultados obtidos, a soma também será uma solução da equação diferencial (16.32). De fato, é fácil verificar que a função f_x , dada por

$$x = f_x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \text{sen}(\omega t), \quad (16.35)$$

é solução da equação diferencial (16.32). Para cada valor de C_1 e C_2 , essa é uma função-movimento de uma partícula sob a ação de uma força proporcional à

sua posição. A correspondente função-velocidade \dot{f}_x é obtida como derivada da função (16.35):

$$v_x = \dot{f}_x(t) = -\omega C_1 \text{sen}(\omega t) + \omega C_2 \text{cos}(\omega t). \quad (16.36)$$

Para que a função-movimento (16.35) satisfaça a qualquer condição inicial do tipo (16.33), devemos ter:

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 \text{cos}(0) + C_2 \text{sen}(0) = C_1 \\ v_{x0} &= -\omega C_1 \text{sen}(0) + \omega C_2 \text{cos}(0) = \omega C_2. \end{aligned} \quad (16.37)$$

Essas equações são satisfeitas se, e somente se, $C_1 = x_0$ e $C_2 = v_{x0}/\omega$. Portanto, dentre os movimentos possíveis da partícula dados em (16.35), há um que satisfaz às condições iniciais (16.33). É o movimento obtido pela substituição de (16.37) em (16.35):

$$x = x_0 \text{cos}(\omega t) + \frac{v_{x0}}{\omega} \text{sen}(\omega t). \quad (16.38)$$

O movimento descrito por essa função-movimento é chamado **movimento harmônico simples** e é abreviado com MHS. As funções seno e cosseno também são chamadas funções harmônicas simples. O adjetivo harmônico se origina do fato de que os chamados sons harmônicos musicais correspondem a movimentos de um certo meio material descritos por certas combinações de funções seno e cosseno.

Escrevemos as soluções possíveis da equação diferencial (16.32) na forma (16.35). No entanto, é comum também escrevê-las numa forma equivalente, a saber:

$$x = A \text{cos}(\omega t + \alpha), \quad (16.39)$$

onde A e α são constantes. A equação (16.35) e a anterior representam a mesma solução, se as constantes A e α estiverem relacionadas com as constantes C_1 e C_2 da seguinte forma (você demonstrará esses resultados num dos problemas propostos desta aula):

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \tan \alpha = -\frac{C_2}{C_1}. \quad (16.40)$$

Portanto, se impusermos as condições iniciais $x_0 = f_x(0)$ e $v_{x0} = \dot{f}_x(0)$, a equação (16.39) será a solução do problema, se escolhermos

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{x0}}{\omega}\right)^2}; \quad \tan \alpha = -\frac{v_{x0}}{\omega x_0}.$$

Nessa forma de escrever a função-movimento para um movimento harmônico, algumas de suas propriedades ficam mais evidentes. Por exemplo, como

As cordas de um violão ou de um piano produzem um som harmônico, porque seus pontos têm funções-movimento que são combinações específicas de funções senos e cossenos. Também as partículas de ar, dentro de uma flauta transversa, por exemplo, produzem sons harmônicos, quando possuem movimentos descritos por essas funções.

$|\cos(\omega t + \alpha)| \leq 1$, vemos que o movimento ocorre no intervalo $-A \leq x \leq A$. Mais precisamente, devido ao fato de que a função cosseno é periódica, de período 2π , a partícula oscila periodicamente entre $-A$ e A . A constante A é chamada **amplitude** do movimento harmônico e o período, que denotaremos por τ , é igual a $2\pi/\omega$, pois:

$$A \cos\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \alpha\right] = A \cos[\omega t + \alpha + 2\pi] = A \cos[\omega t + \alpha]. \quad (16.41)$$

Obviamente, o movimento também se repete em intervalos de tempo iguais a $n2\pi/\omega$, ($n = 2, 3, \dots$), mas chamamos período τ de um movimento retilíneo ao menor intervalo de tempo que satisfaça a condição $f_x(t + \tau) = f_x(t)$, para qualquer instante t do movimento. No movimento harmônico simples, com força dada por $\mathbf{F} = -kx\mathbf{u}_x$, o período é dado por:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (16.42)$$

A **Figura 16.1** ilustra um movimento harmônico genérico, no qual $x_0, v_0 > 0$.

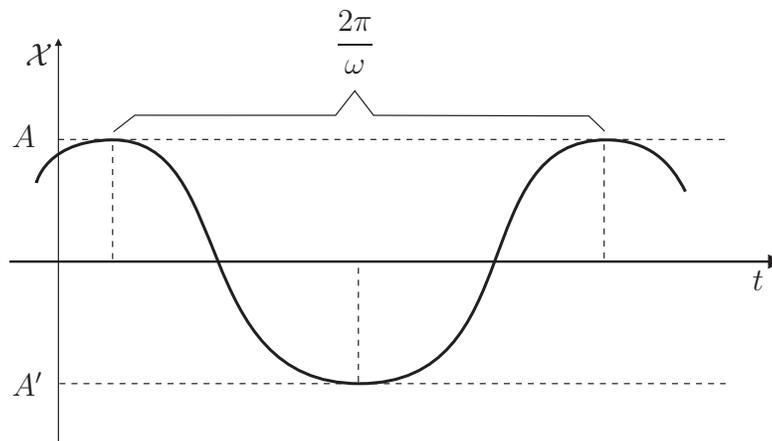


Figura 16.1: Movimento harmônico simples com $x_0, v_0 > 0$.

Forças proporcionais à posição da partícula podem ser obtidas, na prática, com o auxílio de molas, prendendo-se a partícula num de seus extremos e mantendo-se em repouso o seu outro extremo (fixando-o numa parede, por exemplo). Além disso, as molas não devem ser muito distendidas ou comprimidas, ou seja, a amplitude das oscilações da partícula deve ser pequena, se comparada com o tamanho natural da mola, e a origem do eixo $\mathcal{O}\mathcal{X}$ deve ser escolhida na posição da partícula para a qual a mola não está nem distendida, nem comprimida, mas com seu tamanho natural. Você estudará em detalhe o movimento harmônico no curso de Física 2.

Exemplo 16.3

Reconsideremos o caso em que a força sobre um pequeno corpo é proporcional à sua velocidade e dado por $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$, onde b é uma constante positiva. Como mencionamos, esse tipo de força ocorre quando corpos se movimentam dentro de fluidos como a água e o ar, se as velocidades do corpo forem baixas e o fluido estiver em repouso em relação ao referencial inercial utilizado. Novamente, por simplicidade, estudaremos apenas movimentos unidimensionais, de modo que escreveremos a Segunda Lei de Newton como:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b v_x, \quad (16.43)$$

ou ainda, lembrando que $v_x = dx/dt$, na forma:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{b}{m} v_x. \quad (16.44)$$

Como no exemplo anterior, a tarefa de encontrar os movimentos possíveis da partícula se resume em resolver a equação diferencial anterior. Analisando a equação anterior para a função-velocidade, fica claro que devemos buscar inicialmente um tipo de função cuja primeira derivada seja igual a uma constante vezes ela mesma. Na tentativa de adivinhar que funções satisfazem a essa propriedade (já que não dispomos, no momento, de técnicas sistemáticas para resolver equações diferenciais), somos levados naturalmente às funções exponenciais, que já apareceram em aulas anteriores, pois tais funções têm a propriedade: $d(e^{ax})/dx = a e^{ax}$. Com isso em mente, nossa tentativa para funções-velocidade possíveis são dadas por:

$$v_x = A e^{\lambda t}, \quad (16.45)$$

onde A e λ são constantes a serem determinadas de forma apropriada a seguir. Substituindo a equação anterior em (16.43), temos:

$$\lambda A e^{\lambda t} = -\frac{b}{m} A e^{\lambda t}; \implies \lambda = -\frac{b}{m}, \quad (16.46)$$

de modo que as funções-velocidade possíveis para esse movimento, quaisquer que sejam os valores de A , são dadas por

$$v_x = A e^{-(b/m)t}.$$

A constante A fica determinada, se escolhermos o valor da velocidade da partícula em algum instante. Seja, então, v_{x0} sua velocidade inicial, isto é, em $t_0 = 0s$. Impondo essa condição na expressão anterior, obtemos imediatamente:

$$v_x = v_{x0} e^{-(b/m)t}. \quad (16.47)$$

Esta é, portanto, a função-velocidade de uma partícula em movimento retilíneo, sujeita à força $F_x = -bv_x$ que satisfaz à condição $v_{x0} = \dot{f}(0)$. Se $x_0 = f_x(0)$ for a outra condição inicial necessária para determinarmos univocamente o movimento da partícula, a sua posição, num instante genérico t , é obtida por integração direta, já que $v_x = dx/dt$:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \int_0^t v_{x0} e^{-(b/m)t'} dt' \\ &= x_0 - \frac{mv_{x0}}{b} e^{-(b/m)t'} \Big|_0^t \\ &= x_0 + \frac{mv_{x0}}{b} [1 - e^{-(b/m)t}] . \end{aligned} \quad (16.48)$$

Algumas das propriedades desse movimento, assim como a construção e análise dos gráficos x versus t e v_x versus t , serão deixadas como tarefas para você num dos problemas propostos.

Resumo

Discutimos com bastante detalhe qual é o problema fundamental da Dinâmica e como as Leis de Newton do movimento são usadas para resolvê-los. Deve estar bem claro para você, neste momento, que os movimentos possíveis de uma partícula sob a ação de uma força são aqueles descritos por funções-movimento que satisfazem à Segunda Lei de Newton. No entanto, dentre todos os movimentos possíveis, somente um deles satisfaz às condições iniciais predeterminadas num certo problema. Desse modo, dadas as condições iniciais do movimento de uma partícula, isto é, a sua posição e a sua velocidade em um instante qualquer, seu movimento futuro (e passado) fica totalmente especificado. Referimo-nos a esse resultado como Princípio da Existência e Unicidade das soluções do problema fundamental da Mecânica. Ele vale também para um sistema de partículas. Reflita sobre ele, pois seu conteúdo é bastante abrangente e tem implicações profundas em como os sistemas da Mecânica Clássica evoluem com o tempo. Por fim, mostramos, nos exemplos desta aula, como resolver a Segunda Lei de Newton, vista como uma equação diferencial de segunda ordem no tempo. Foram escolhidos exemplos simples, mas ao mesmo tempo importantes em Mecânica, a saber, os casos em que $\mathcal{F}_x = F_0$, $\mathcal{F}_x = -kx$ e $\mathcal{F}_x = -bv_x$, respectivamente, onde \mathcal{F}_x é a força total sobre a partícula. No primeiro caso, temos um MRUV. No segundo, os movimentos possíveis são combinações lineares de $\sin(\sqrt{k/m}t)$ e

$\cos(\sqrt{k/m} t)$. Já no terceiro, a velocidade da partícula cai exponencialmente com o tempo e é dada por $v_x = v_{x0} e^{-bt/m}$.

Questionário

1. Responda novamente às últimas perguntas da aula anterior: qual é o problema fundamental da Mecânica Clássica e o que são condições iniciais de um movimento?
2. Dadas as posições de todas as partículas de um sistema isolado, num certo instante, a evolução temporal desse sistema estará univocamente determinada?
3. No movimento de uma partícula que está sob a ação de uma certa força total, podemos fixar arbitrariamente, num dado instante, a sua posição, a sua velocidade e a sua aceleração?
4. O que afirma o Princípio da Existência e Unicidade das soluções do problema fundamental da Mecânica Clássica?
5. Suponha que tenhamos encontrado os movimentos possíveis de uma partícula sujeita a uma certa força, ou seja, que tenhamos resolvido a Segunda Lei de Newton com essa força. Podemos impor a essa partícula, além das condições iniciais $\mathbf{r}_0 = \mathbf{f}(0)$ e $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{f}}(0)$, também as condições $\mathbf{r}_1 = \mathbf{f}(t_1)$ e $\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{f}}(t_1)$, onde $t_1 \neq 0$ e \mathbf{r}_1 e \mathbf{v}_1 são vetores quaisquer?
6. O que é um movimento harmônico simples? O que é a amplitude desse movimento?
7. Utilizando o conceito de função-movimento, explique o que você entende por um movimento retilíneo periódico e defina o período desse tipo de movimento.
8. Considere um movimento harmônico simples de uma partícula análogo ao que foi discutido no Exemplo 16.2. Se dermos a amplitude desse movimento e a velocidade inicial da partícula, a sua função-movimento estará univocamente determinada?

Problemas propostos

1. Durante alguns instantes, um vento forte exerce sobre um grão de poeira uma força horizontal constante \mathbf{F} . O grão é bastante leve para que seu peso seja desprezível à \mathbf{F} e, além disso, são também desprezíveis quaisquer outras forças que possam agir sobre o grão durante os instantes considerados. Para analisar o movimento, foi escolhido um eixo \mathcal{OX} com a direção e o sentido da força constante \mathbf{F} . Além disso, o eixo \mathcal{OY} foi escolhido no plano da força \mathbf{F} e da velocidade inicial \mathbf{v}_0 do grão, de modo que podemos escrever $\mathbf{v}_0 = v_{x0}\mathbf{u}_x + v_{y0}\mathbf{u}_y$. Considere v_{x0} e v_{y0} como dados do problema. Finalmente, a origem \mathcal{O} desses eixos foi escolhida na posição inicial do grão, isto é, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$.
 - (a) Determine o movimento do grão durante os instantes considerados.
 - (b) Obtenha a equação cartesiana da trajetória do grão e faça um esboço da mesma supondo que $v_{x0} < 0$ e $v_{y0} > 0$. Qual foi a curva encontrada?
 - (c) Se tivéssemos $v_{x0} = -v_{y0}$, quais seriam a posição, a velocidade e a aceleração do grão nos instantes $t_1 = mv_{y0}/F$ e $t_2 = 2mv_{y0}/F$? Desenhe esses vetores no esboço da trajetória do grão.

2. Mostre que a solução para um oscilador harmônico simples, de condições iniciais x_0 e v_{x0} , dada por $x = x_0 \cos(\omega t) + (v_{x0}/\omega) \sin(\omega t)$, pode ser escrita na forma:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha),$$

onde

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_{x0}/\omega)^2}; \quad \tan \alpha = -v_{x0}/\omega x_0.$$

3. Mostre que, se x_1 e x_2 forem duas soluções da equação diferencial (16.32), então $\alpha x_1 + \beta x_2$, onde α e β são duas constantes arbitrárias, também será uma solução.
4. Considere uma partícula de massa m em movimento harmônico simples ao longo do eixo \mathcal{OX} , sujeita a uma força total dada por $F_x = -kx$. Sejam A e T , respectivamente, a amplitude e o período do movimento no qual a partícula é lançada da origem, com velocidade v_{x0} positiva. Suponha agora que a partícula fosse lançada da origem com uma outra velocidade inicial $v'_{x0} = 3v_{x0}$ e denote, nesse caso, a amplitude por A' e o período por T' .
 - (a) Determine a razão T'/T .
 - (b) Determine a razão A'/A .

5. Uma partícula de massa m está restrita a mover-se no eixo \mathcal{OX} sob a ação de uma força total dada por $F_x = -kx + F_0$, onde k e F_0 são constantes positivas.
- Usando a Segunda Lei de Newton, escreva a equação diferencial para o movimento da partícula.
 - Agora, você verificará as vantagens do procedimento comum de mudar variáveis para simplificar um problema. Considere a variável $x' = x - (F_0/k)$ e escreva a equação diferencial correspondente para x' . Qual o significado da constante F_0/k ?
 - Resolva a equação diferencial obtida no item anterior e encontre as soluções que dão x' , em função do tempo.
 - Determine os possíveis movimentos da partícula, expressando x como função do tempo.
 - Dentre os movimentos encontrados no item anterior, determine aquele que satisfaz às seguintes condições iniciais: a partícula se encontra em repouso, na origem, no instante $t = 0$.
 - Mostre que a partícula realiza um movimento harmônico simples em torno do ponto $x = F_0/k$ e discuta como a força F_0 afeta o período da oscilação.
6. Considere o problema no qual a força sobre a partícula é dada por $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, onde k é uma constante positiva. Escreva condições iniciais, tais que a partícula descreva um MCU de raio R no plano \mathcal{OXY} . Com a sua escolha, o sentido do movimento é horário ou anti-horário (para um observador que vê o eixo \mathcal{OZ} apontando para os seus olhos)?
7. Considere que uma partícula de massa m se movimenta sob a ação de uma única força dada por

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}) = -k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_C),$$

onde k é uma constante positiva e $\mathbf{r}_C = a\mathbf{u}_x + b\mathbf{u}_y + c\mathbf{u}_z$, um vetor arbitrário.

- O que você pode dizer sobre a direção e o sentido dessa força? E a respeito de seu módulo?
- Suponha agora que, num dado instante, a partícula esteja na posição $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{u}_x + y_1\mathbf{u}_y + z_1\mathbf{u}_z$. Determine, nesse instante, as componentes cartesianas de sua aceleração.

8. Reconsidere o Exemplo 16.3, no qual temos uma partícula sob uma força total proporcional à sua velocidade: $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$.
- Determine a dimensão da constante m/b e dê um significado físico a ela.
 - Em que instante a partícula atinge o repouso? Qual a distância percorrida por ela desde $t = 0$ até parar?
 - Esboce os gráficos de v_x versus t e x versus t . Verifique se seus esboços estão coerentes com a relação $v_x = dx/dt$.

9. Considere o movimento de um pequeno corpo sujeito a uma força total dada por

$$\mathbf{F} = -b\mathbf{v} + m\mathbf{g} ,$$

onde b é uma constante positiva e \mathbf{g} , a aceleração dos corpos próximos à superfície terrestre (esta é a força total sobre um projétil que é lançado próximo à superfície terrestre com velocidade baixa). No entanto, para simplificar, consideraremos apenas movimentos retilíneos. Mais ainda, vamos supor que o corpo, considerado como partícula, seja abandonado do repouso de uma certa altura do solo. Escolhendo, por conveniência, o eixo \mathcal{OX} na direção vertical e apontando para baixo, a Segunda Lei de Newton pode ser escrita como a equação diferencial:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -bv_x + mg .$$

- (a) Determine as funções-velocidade possíveis para movimentos sob essa força total e mostre que são da forma:

$$v_x = Ae^{-(b/m)t} + \frac{mg}{b} ,$$

onde A é uma constante arbitrária (para adivinhar funções-velocidade que satisfaçam tal equação, use um pouco da experiência adquirida no último exemplo desta aula, com forças envolvendo a velocidade).

- Encontre, então, as funções-movimento possíveis desta partícula.
- Considerando as condições iniciais $x_0 = 0$ e $v_{x0} = 0$, determine a função-movimento e a função-velocidade desta partícula.
- Faça os gráficos de posição versus tempo e velocidade versus tempo para o movimento encontrado no item anterior. Verifique, nos gráficos desenhados, que a velocidade da partícula, num dado instante, é dada pelo coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de posição versus tempo no instante considerado.

Auto-avaliação

Você deve ser capaz de responder ao questionário inteiro e resolver a maioria dos problemas, já que não são em grande número. Nos problemas que envolvem forças que são funções da posição ou da velocidade, você pode encontrar alguma dificuldade. No entanto, tais dificuldades não são intransponíveis, pois os dois últimos exemplos desta aula mostram como resolver problemas desse tipo. Sempre que você não conseguir responder a algum deles, deve retornar e reler o texto da aula quantas vezes for necessário até encontrar a resposta correta. Uma vez respondido todo o questionário, você certamente terá mais condições de entender o que está sendo cobrado nos problemas e, conseqüentemente, respondê-los também corretamente. Não passe para a próxima aula sem ter compreendido os exemplos e resolvido os problemas relacionados a eles.

Aula 17 – Translação de um corpo rígido

Objetivos

- Entender o conceito de centro de massa de um sistema de partículas.
- Compreender, a partir do Princípio da Superposição, como a Segunda Lei de Newton se aplica a um sistema de partículas.
- Compreender, a partir do Princípio da Superposição, como a Terceira Lei de Newton se aplica a dois sistemas, cada um deles contendo várias partículas.
- Entender que, no caso de movimento de translação de um corpo rígido, podemos determinar completamente seu movimento a partir do movimento de seu centro de massa.

Introdução

Os corpos a que se referem as três Leis de Newton, são de dimensões desprezíveis, isto é, são partículas. Nas aulas anteriores, aprendemos como aplicar tais leis ao estudo do movimento de uma partícula. No entanto, principalmente em situações comuns do dia-a-dia, estamos interessados no movimento ou nas condições de repouso de corpos extensos, tais como caixotes, automóveis, vigas, líquidos em recipientes etc. Como qualquer corpo pode ser considerado como um conjunto de partículas, podemos aplicar as Leis de Newton a cada partícula de um corpo e tentar obter os movimentos de todas elas. Uma vez obtidos tais movimentos, é claro que saberemos qual o movimento do corpo como um todo. Para corpos quaisquer, em situações quaisquer, o problema a ser resolvido é de uma complexidade inimaginável. Há problemas desse tipo que certamente nunca serão resolvidos, por mais espertas que sejam as futuras gerações e poderosos os seus computadores. Para encontrarmos problemas solucionáveis, devemos supor condições simplificadoras para eles. Felizmente, existem condições que simplificam muito a teoria e descrevem, com excelente aproximação, muitas situações práticas. Uma delas consiste em supor que sejam rígidos os corpos cujos movimentos vamos estudar. Nesta aula, no momento oportuno, formularemos essa hipótese e acrescentaremos outra: a de que o movimento desses corpos rígidos é de translação. Com essas hipóteses, há muitos problemas interessantes que podem ser resolvidos com relativa facilidade.

Para descrever o movimento de um corpo, vamos introduzir os conceitos de centro de massa de um corpo e de força que um corpo exerce sobre outro. Esse último generaliza o conceito de força que uma partícula exerce sobre outra. Essas idéias são ilustradas no caso da força gravitacional entre corpos. Essa é uma força sempre presente nas situações do dia-a-dia. Nelas também ocorrem as chamadas forças de contato, que serão estudadas na próxima aula. Para se ter uma boa idéia das forças que aparecem nas situações mais comuns, você deve ler esta aula e a seguinte. Depois delas, você estará apto a resolver uma imensa quantidade de problemas interessantes.

Movimento do centro de massa de um sistema de partículas

Consideremos um sistema de N partículas, cujo movimento desejamos estudar. Por enquanto, esse sistema é arbitrário. Pode ser ou não um corpo rígido. Pode ser um líquido ou um gás, ou mesmo um sistema de partículas esparsas. Um sistema de partículas cujo movimento desejamos estudar será chamado **sistema em estudo**, ou simplesmente **sistema**, se não houver perigo de confusão. Além das N partículas que formam o sistema em estudo, podem existir outras partículas que não pertencem a ele, mas que exercem forças sobre as partículas do sistema em estudo. Essas outras partículas serão chamadas **partículas vizinhas externas** ao sistema em estudo ou simplesmente **partículas externas**. Para estudar o movimento do sistema, supomos que estamos usando um referencial inercial e aplicamos a Segunda Lei de Newton a cada uma de suas N partículas. Vamos numerar as partículas do sistema de 1 a N e representar suas massas por m_1, m_2, \dots, m_N , respectivamente. Sejam $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N$ as respectivas acelerações dessas partículas. Pela Segunda Lei de Newton, temos:

$$m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1, \quad m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_2, \quad \dots, \quad m_N \mathbf{a}_N = \mathbf{F}_N, \quad (17.1)$$

onde \mathbf{F}_1 é a força total exercida sobre a partícula 1, \mathbf{F}_2 é a força total exercida sobre a partícula 2 e assim sucessivamente, até \mathbf{F}_N , que é a força total exercida sobre a partícula N .

Se soubéssemos resolver todas as N equações que aparecem em (17.1), obteríamos o movimento de cada partícula do sistema e, com isso, saberíamos com todos os detalhes o movimento do sistema. Entretanto, isso em geral é impossível, principalmente quando o sistema tem um grande número de partículas, como no caso dos corpos que nos cercam no dia-a-dia. Vamos, então, nos contentar em obter uma informação menos detalhada do movimento do sistema. Podemos obter informações importantes sobre o seu movimento, se adicionarmos todas as

equações em (17.1). Veremos que a soma dos lados esquerdos dessas equações dá origem a uma quantidade importante na análise do movimento do sistema. Já na soma das forças que aparecem nos lados direitos das equações escritas (17.1), várias forças irão se cancelar, simplificando o resultado final. Vamos, então, somar vetorialmente as equações (17.1), de modo a obter:

$$m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + m_N \mathbf{a}_N = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N . \quad (17.2)$$

Primeiramente, vamos analisar o lado direito dessa equação. Ele é igual à soma vetorial das forças totais sobre todas as partículas do sistema, ou seja, é a soma vetorial de todas as forças que agem sobre todas as partículas do sistema. Cada partícula do sistema pode sofrer forças exercidas por partículas externas ao sistema ou por partículas que pertencem ao próprio sistema. Seja i uma qualquer das N partículas do sistema, isto é, i pode ser igual a qualquer número de 1 a N . A partícula i pode sofrer uma força \mathbf{F}_{ij} exercida por outra partícula j do sistema; naturalmente, j pode ser igual a qualquer número de 1 a N , com exceção de i , pois uma partícula não exerce força sobre ela mesma. A partícula i também pode sofrer forças exercidas por partículas que não pertencem ao sistema, por exemplo, uma força \mathbf{F}_{ie} , exercida por alguma partícula externa ao sistema, que chamamos partícula e . As forças exercidas sobre partículas do sistema por partículas do próprio sistema são chamadas **forças internas** do sistema. As forças exercidas sobre partículas do sistema por partículas externas ao sistema são chamadas **forças externas** sobre o sistema. A **Figura 17.1** ilustra tais conceitos. Nela, as N partículas do sistema em estudo estão envoltas pela linha tracejada. As partículas i e j são partículas do sistema. As partículas e , e' , e'' são externas ao sistema. A figura indica também duas forças sobre a partícula i do sistema: a força \mathbf{F}_{ij} exercida pela outra partícula j do sistema, e a força \mathbf{F}_{ie} exercida pela partícula e , externa ao sistema.

A soma vetorial de todas as forças externas exercidas sobre a partícula i é chamada **força externa total sobre a partícula i** , e é representada por \mathbf{F}_i^{ex} . A soma vetorial de todas as forças internas exercidas sobre a partícula i , isto é, a soma vetorial das forças exercidas sobre a partícula i pelas demais partículas do próprio sistema é chamada **força interna total sobre a partícula i** . A força interna total sobre a partícula i é representada por \mathbf{F}_i^{in} .

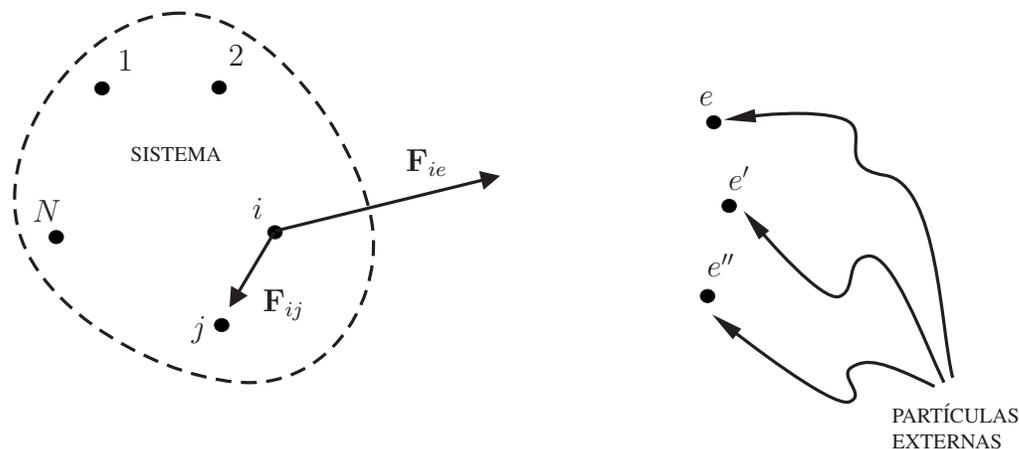


Figura 17.1: A partícula i do sistema em estudo pode sofrer forças externas, tais como \mathbf{F}_{ie} , e forças internas, tais como \mathbf{F}_{ij} .

Uma vez que a força total \mathbf{F}_i sobre a partícula i do sistema é a soma vetorial de todas as forças que agem sobre ela, tanto externas quanto internas, temos:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{ex} + \mathbf{F}_i^{in} . \tag{17.3}$$

Como a partícula i pode ser qualquer uma das partículas $1, 2, \dots, N$, a equação anterior é a forma genérica das seguintes N equações:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{F}_1^{in} , \\ \mathbf{F}_2 &= \mathbf{F}_2^{ex} + \mathbf{F}_2^{in} , \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \mathbf{F}_N &= \mathbf{F}_N^{ex} + \mathbf{F}_N^{in} . \end{aligned} \tag{17.4}$$

Vamos somar vetorialmente essas equações para obter:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N &= (\mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{F}_2^{ex} + \dots + \mathbf{F}_N^{ex}) + \\ &+ (\mathbf{F}_1^{in} + \mathbf{F}_2^{in} + \dots + \mathbf{F}_N^{in}) . \end{aligned} \tag{17.5}$$

No lado esquerdo dessa equação, temos a soma vetorial das forças exercidas sobre todas as partículas do sistema. No membro direito, estão somadas as forças externas, no primeiro par de parênteses, e as forças internas, no segundo par de parênteses. Essa separação de forças externas e internas é importante porque, como veremos a seguir, a soma das internas é exatamente igual a zero.

As forças internas totais sobre as N partículas do sistema são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^{in} &= \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \cdots + \mathbf{F}_{1N-1} + \mathbf{F}_{1N} , \\ \mathbf{F}_2^{in} &= \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \cdots + \mathbf{F}_{2N-1} + \mathbf{F}_{2N} , \\ \mathbf{F}_3^{in} &= \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} + \cdots + \mathbf{F}_{3N-1} + \mathbf{F}_{3N} , \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \mathbf{F}_N^{in} &= \mathbf{F}_{N1} + \mathbf{F}_{N2} + \mathbf{F}_{N3} + \cdots + \mathbf{F}_{NN-1} . \end{aligned} \quad (17.6)$$

No lado direito da primeira equação aparecem as forças internas exercidas sobre a partícula 1. Elas são exercidas pelas partículas 2, 3, ..., N e são representadas pelos símbolos \mathbf{F}_{12} , \mathbf{F}_{13} , ..., \mathbf{F}_{1N} . Obviamente, não aparece o símbolo \mathbf{F}_{11} , pois não existe força da partícula 1 sobre ela mesma. De um modo geral, no membro direito da i -ésima equação, aparecem as forças internas exercidas sobre a partícula i ; elas são exercidas por todas as partículas do sistema, com exceção da própria partícula i . Note que os lados direitos das equações foram bem alinhados, de modo que em cada linha apareçam todas as forças que cada partícula do sistema sofre das demais, e em cada coluna apareçam todas as forças que uma partícula do sistema exerce sobre todas as outras.

Observemos, agora, que nos lados direitos das N equações em (17.6), as forças sempre aparecem em pares de ação e reação, isto é, em pares do tipo \mathbf{F}_{ij} e \mathbf{F}_{ji} . Dentre as forças que foram explicitamente escritas nos lados direitos das igualdades (17.6), é fácil identificar o par constituído por \mathbf{F}_{12} e \mathbf{F}_{21} , ou o constituído por \mathbf{F}_{23} e \mathbf{F}_{32} , ou ainda, o constituído por \mathbf{F}_{3N} e \mathbf{F}_{N3} . De um modo geral, para cada força \mathbf{F}_{ij} que aparece na i -ésima equação, existe uma força \mathbf{F}_{ji} que aparece na j -ésima equação. De acordo com a Terceira Lei de Newton, a soma vetorial de qualquer par de ação e reação é igual a zero. De fato, para cada par \mathbf{F}_{ij} e \mathbf{F}_{ji} , a Terceira Lei e Newton afirma que $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ e, conseqüentemente, $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = \mathbf{0}$. Portanto, se somarmos todos os lados direitos das N equações em (17.6), o resultado será zero. É claro que essa soma é igual à soma de todos os lados esquerdos das N equações, de modo que obtemos

$$\mathbf{F}_1^{in} + \mathbf{F}_2^{in} + \mathbf{F}_3^{in} + \cdots + \mathbf{F}_N^{in} = \mathbf{0} , \quad (17.7)$$

ou seja,

é nula a soma vetorial de todas as forças internas de um sistema qualquer de partículas.

Substituindo o resultado (17.7) em (17.5), obtemos:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N = \mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{F}_2^{ex} + \cdots + \mathbf{F}_N^{ex} , \quad (17.8)$$

isto é, para encontrar a soma vetorial das forças totais sobre todas as partículas do sistema, basta somar vetorialmente todas as forças externas sobre o sistema. Substituindo o resultado (17.8) em (17.2), obtemos:

$$m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + m_N \mathbf{a}_N = \mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{F}_2^{ex} + \cdots + \mathbf{F}_N^{ex} . \quad (17.9)$$

A soma vetorial de todas as forças externas sobre o sistema é chamada **força externa total** sobre o sistema, e é representada por \mathbf{F}^{ex} . Temos, então,

$$\mathbf{F}^{ex} = \mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{F}_2^{ex} + \cdots + \mathbf{F}_N^{ex} . \quad (17.10)$$

Usando essa definição em (17.9), obtemos:

$$m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + m_N \mathbf{a}_N = \mathbf{F}^{ex} . \quad (17.11)$$

Voltemos agora nossa atenção para o lado esquerdo da equação (17.9). A forma com que ele se apresenta sugere que consideremos o seguinte vetor:

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \cdots + m_N \mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} , \quad (17.12)$$

no qual $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ são os vetores-posição das partículas 1, 2, ..., N , respectivamente. O vetor \mathbf{r}_{cm} é a média ponderada das posições das partículas do sistema, sendo que a ponderação é feita pelas respectivas massas das partículas. O vetor \mathbf{r}_{cm} dá a posição de um ponto do espaço que chamamos **centro de massa** do sistema, conforme ilustrado na **Figura 17.2**. Usaremos para a expressão centro de massa a abreviação cm , que você não deverá confundir com o símbolo cm , de centímetro.

Já o próprio vetor \mathbf{r}_{cm} é chamado **vetor-posição do centro de massa**, ou, simplesmente, posição do centro de massa. É possível demonstrar que o centro de massa tem uma posição intermediária entre as posições das partículas do sistema, isto é, ele se localiza entre as partículas. Se o sistema tem duas partículas, o centro está no segmento de reta que liga as duas partículas, mais próximo da partícula de maior massa. Se o sistema tem três partículas, o centro de massa está na superfície do triângulo cujos vértices são as partículas, mais próximos das partículas que têm maior massa. Nos problemas propostos, você poderá verificar essas propriedades do centro de massa. Por enquanto, elas não são necessárias para prosseguir em nossa análise da equação (17.11). É muito importante notar que o centro de massa é um ponto que obtemos a partir das posições das partículas do sistema, mas não é uma partícula. Ele nem mesmo precisa coincidir com a posição de uma das partículas do sistema, como fica claro no caso de duas partículas idênticas, no qual o centro de massa fica exatamente no ponto médio do segmento de reta que

O centro de massa de uma pessoa ereta fica no interior de seu corpo, normalmente a uma altura próxima a seu umbigo. Nas técnicas modernas de salto em altura, o atleta se contorce durante o salto, de modo que seu centro de massa acaba ficando fora de seu corpo, passando por baixo da barra horizontal, enquanto o próprio atleta passa por cima.

une as partículas e, portanto, não coincide com nenhuma delas. Também no caso de um anel circular homogêneo, o centro de massa não coincide com nenhuma partícula do anel. De fato, ele está no centro do círculo formado pelo anel e, logo, fora da região ocupada pelo material do anel.

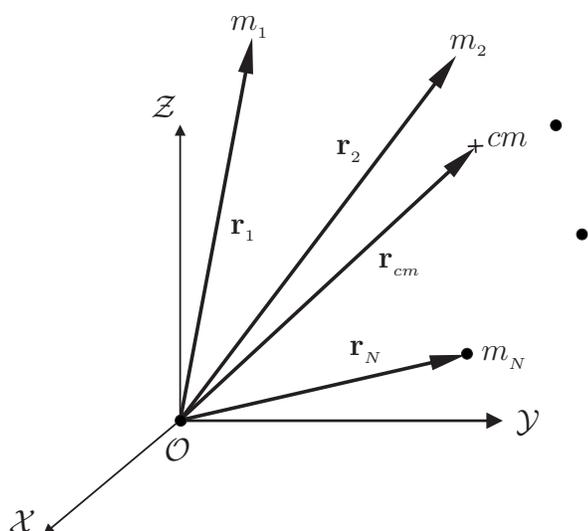


Figura 17.2: O centro de massa de um sistema de partículas é um ponto cuja posição é dada por \mathbf{r}_{cm} , que é a média das posições das partículas ponderada por suas massas.

Se o sistema de partículas está em movimento, o centro de massa também pode estar. Se derivarmos, em relação ao tempo, o vetor-posição do centro de massa, obtemos a chamada **velocidade do centro de massa**, que representamos por \mathbf{v}_{cm} , isto é,

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{d\mathbf{r}_{cm}}{dt}. \quad (17.13)$$

Usando a definição (17.12) de centro de massa e fazendo as derivadas necessárias, obtemos

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + m_N \mathbf{v}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}, \quad (17.14)$$

onde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N$ são as velocidades das partículas 1, 2, ..., N , respectivamente. Definimos também **aceleração do centro de massa** como sendo a derivada, em relação ao tempo, da velocidade do centro de massa. Representando por \mathbf{a}_{cm} essa aceleração, obtemos:

$$\mathbf{a}_{cm} = \frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt}. \quad (17.15)$$

Derivando (17.14) em relação ao tempo, obtemos:

$$\mathbf{a}_{cm} = \frac{m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + m_N \mathbf{a}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}. \quad (17.16)$$

A equação (17.14) mostra que a velocidade do centro de massa do sistema é uma média ponderada das velocidades das partículas do sistema e, analogamente, a equação (17.16) mostra que a aceleração do centro de massa do sistema é uma média ponderada das acelerações das partículas do sistema. Desse modo, a velocidade e a aceleração do centro de massa do sistema são grandezas apropriadas para descrever as idéias, respectivamente, de velocidade e aceleração do sistema como um todo.

Observemos agora que o numerador da fração em (17.16) é o lado esquerdo da equação (17.11). Isso não é uma coincidência, pois, na verdade, definimos posição do centro de massa em (17.12), exatamente para obter o numerador que aparece na expressão (17.16). Dessa expressão, obtemos $m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + m_N \mathbf{a}_N = (m_1 + m_2 + \cdots + m_N) \mathbf{a}_{cm}$. Substituindo esse resultado no lado esquerdo da equação (17.11), chegamos em:

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_N) \mathbf{a}_{cm} = \mathbf{F}^{ex}. \quad (17.17)$$

A soma das massas de todas as partículas de um sistema é chamada **massa total do sistema**, ou, simplesmente, **massa do sistema**. Representando por M a massa total do sistema, temos:

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_N. \quad (17.18)$$

Usando essa definição em (17.17), obtemos finalmente:

$$M \mathbf{a}_{cm} = \mathbf{F}^{ex}, \quad (17.19)$$

isto é,

o produto da massa total de um sistema pela aceleração de seu centro de massa é igual à força externa total que age sobre o sistema.

A equação (17.19) é semelhante à Segunda Lei de Newton aplicada a uma partícula de massa M sujeita a uma força total \mathbf{F}^{ex} . Essa semelhança permite que estudemos o movimento do centro de massa por um método análogo ao usado no estudo do movimento de uma partícula. É comum considerar que a força externa total esteja aplicada no ponto que chamamos centro de massa e aplicar a Segunda Lei de Newton como se esse ponto fosse uma partícula cuja massa é a massa total

do sistema. Desse modo, chegamos à equação (17.19). As informações obtidas sobre o movimento do centro de massa de um sistema são importantes para entendermos o movimento do mesmo, embora não sejam suficientes para determinar o movimento detalhado do sistema em uma situação geral. No entanto, no caso em que o movimento do sistema é de translação, conhecendo o movimento do centro de massa, conhecemos também o movimento de cada partícula do sistema. Voltaremos a esse ponto na próxima seção.

Se considerarmos que a aceleração do centro de massa é a aceleração do sistema em estudo como um todo, podemos encarar a equação (17.19) como uma versão da Segunda Lei de Newton para sistemas de partículas. Desse modo, embora a Segunda Lei de Newton tenha sido enunciada para uma única partícula, ela pode ser estendida para um corpo qualquer por meio da equação (17.19).

Os conceitos de ação e reação também foram definidos para um par de partículas, mas podem ser estendidos para um par de corpos. Consideremos dois sistemas de partículas A e B . As forças que agem no sistema A são as forças internas exercidas pelas próprias partículas do sistema A e as forças externas exercidas pelas partículas do sistema B . A soma de todas as forças internas é nula, de modo que a força total sobre o sistema A é igual à soma vetorial das forças externas exercidas pelas partículas do sistema B . Vamos chamar essa soma **força sobre o sistema A exercida pelo sistema B** , e representá-la por \mathbf{F}_{AB} . Do mesmo modo, temos a força \mathbf{F}_{BA} sobre o sistema B exercida pelo sistema A . É comum desenhar a força exercida sobre um sistema aplicada no seu centro de massa.

Para prosseguir nosso raciocínio, devemos observar que a força \mathbf{F}_{AB} sobre o sistema A , exercida pelo sistema B , é a soma das forças exercidas sobre todas as partículas do sistema A , por todas as partículas do sistema B e vice-versa. Desse modo, cada par constituído por uma partícula a , do sistema A , e uma partícula b , do sistema B , dá origem a uma força \mathbf{F}_{ab} sobre o sistema A e a uma força \mathbf{F}_{ba} sobre o sistema B . A força \mathbf{F}_{AB} é a soma vetorial das forças \mathbf{F}_{ab} obtidas pela consideração de todos os pares possíveis de partículas a e b . Analogamente, a força \mathbf{F}_{BA} é a soma vetorial das forças \mathbf{F}_{ba} , também obtidas pela consideração de todos os pares possíveis de partículas b e a . Mas, pela Terceira Lei de Newton, para cada par de partículas a e b , a força \mathbf{F}_{ba} é igual a $-\mathbf{F}_{ab}$; logo, as forças que somadas resultam em \mathbf{F}_{BA} são as forças opostas às que somadas resultam em \mathbf{F}_{AB} . Portanto:

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA} , \quad (17.20)$$

isto é,

a força total que um sistema de partículas exerce sobre outro sistema de partículas tem mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto ao da força total que o outro sistema exerce sobre o primeiro.

Na **Figura 17.3**, estão representados dois sistemas de partículas A e B , com linhas tracejadas envolvendo as partículas que pertencem aos respectivos sistemas. Nessa figura, está destacado um par constituído por uma partícula a , que pertence ao sistema A , e uma partícula b , que pertence ao sistema B . Além disso, estão indicadas as forças de ação e reação correspondentes a esse par de partículas.

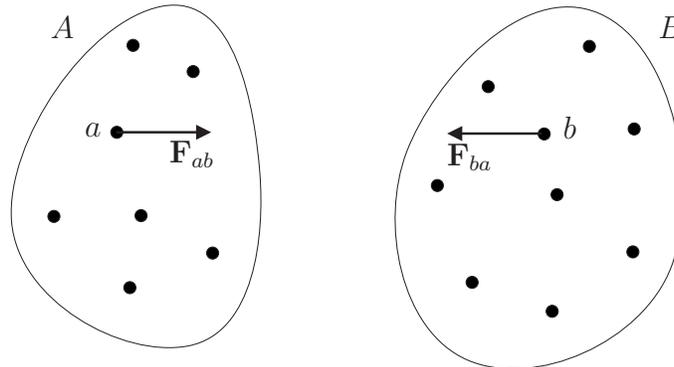


Figura 17.3: A força \mathbf{F}_{ab} é uma das parcelas que resulta na força \mathbf{F}_{AB} e a força \mathbf{F}_{ba} é uma das parcelas que resulta na força \mathbf{F}_{BA} .

O resultado (17.20) mostra que a Terceira Lei de Newton, que envolve um par de partículas, continua válida, se nela substituirmos a palavra “partícula” pela palavra “sistema de partículas”.

As forças \mathbf{F}_{AB} e \mathbf{F}_{BA} , envolvidas em (17.20), também são chamadas forças de ação e reação entre os sistemas de partículas A e B . É claro que as forças de ação e reação são sempre exercidas sobre sistemas diferentes. A força \mathbf{F}_{AB} é exercida sobre o sistema A e a força \mathbf{F}_{BA} é exercida sobre o sistema B . Lembrando que definimos corpo como sinônimo de sistema de partículas, podemos enunciar o resultado (17.20), dizendo:

as forças de ação e reação entre dois corpos têm mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos.

A **Figura 17.4** mostra as forças de ação e reação entre dois corpos A e B . Note que elas foram desenhadas com pontos de aplicação nos respectivos centros de massa.

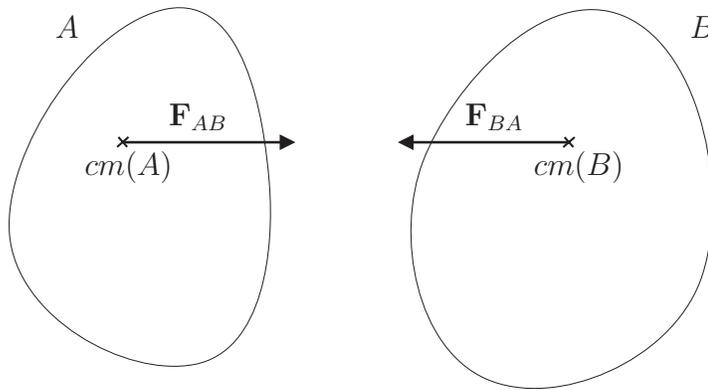


Figura 17.4: A força F_{AB} exercida sobre o corpo A pelo corpo B e a F_{BA} exercida sobre o corpo B pelo corpo A.

Movimento de translação de um corpo rígido

Dizemos que um sistema de partículas está em movimento de translação se, a cada instante, as velocidades de todas as suas partículas são iguais. Como consequência, durante o movimento, as distâncias entre as partículas do sistema permanecem invariáveis. A direção de uma reta que passe por qualquer par de partículas também se mantém invariável durante o movimento de translação. A **Figura 17.5** mostra, em três instantes consecutivos, um corpo em movimento de translação. Também são mostradas as trajetórias de algumas partículas do corpo.

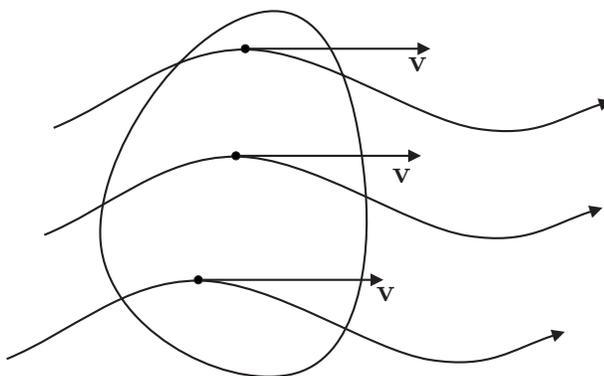


Figura 17.5: As trajetórias das partículas de um corpo em movimento de translação têm a mesma forma, isto é, são curvas congruentes. Se elas forem deslocadas no espaço, podem se tornar todas coincidentes.

Consideremos nosso sistema em estudo de n partículas, de acordo com o que estudamos na seção anterior. Sejam \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_j os vetores-posição de duas partículas quaisquer do sistema. A diferença vetorial $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ é um vetor que vai da partícula j até a partícula i . Representamos esse vetor por \mathbf{r}_{ij} e o chamamos **vetor de posição relativa**, de i em relação a j . Temos:

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j . \quad (17.21)$$

A **Figura 17.6** mostra duas partículas i e j de um corpo e o correspondente vetor de posição relativa \mathbf{r}_{ij} . É comum chamar o vetor de posição relativa simplesmente **posição relativa**.

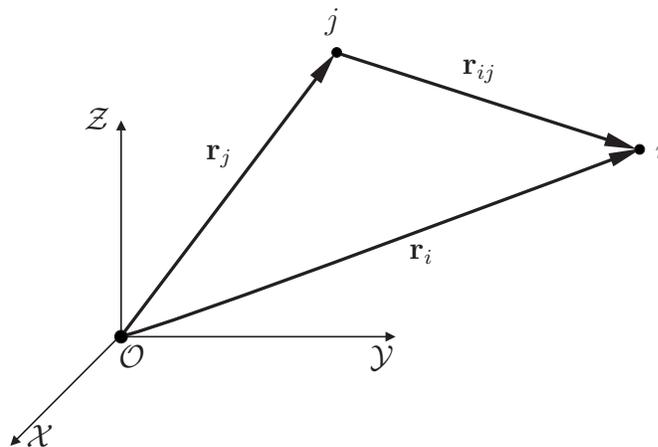


Figura 17.6: Vetor de posição relativa \mathbf{r}_{ij} da partícula i em relação à partícula j .

O vetor de posição relativa \mathbf{r}_{ij} tem módulo igual à distância entre as partículas i e j e sua direção é a da reta que passa pelas duas partículas.

Derivando o vetor $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j . \quad (17.22)$$

No caso em que o movimento do sistema é de translação, as velocidades de suas partículas são iguais e, portanto, $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$, para qualquer par de partículas i e j . Da equação (17.22) concluímos, então, que a derivada temporal de $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ é nula. Isso é verdade se, e somente se, $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ é um vetor constante. Concluímos, portanto, que durante um movimento de translação de um sistema os vetores de posição relativa \mathbf{r}_{ij} são todos vetores constantes:

$$\mathbf{r}_{ij} = \text{constante} . \quad (17.23)$$

Um vetor constante tem módulo, direção e sentido constantes. Uma vez que o módulo de \mathbf{r}_{ij} é a distância entre as partículas i e j , concluímos, a partir de (17.23), que as distâncias entre as partículas durante um movimento de translação devem permanecer constantes. Isso significa que, durante um movimento de translação, o sistema se comporta como um corpo rígido. Consideremos, pois, que o sistema, cujo movimento vamos agora estudar, seja um corpo rígido em movimento de translação.

Para determinar o movimento de um corpo rígido em movimento de translação, devemos dar as condições iniciais do movimento, isto é, as posições e velocidades de todas as partículas do corpo em um instante inicial t_0 . Supondo conhecidos, no instante inicial, os vetores-posição das partículas do sistema, também conhecemos as diferenças entre esses vetores-posição. Essas diferenças são os vetores de posições relativas \mathbf{r}_{ij} , conforme mostradas em (17.21). Mas, se as posições relativas são conhecidas no instante inicial, elas são conhecidas em qualquer instante, pois não mudam com o tempo, durante um movimento de translação, conforme estabelecido em (17.23). Somos, então, levados a concluir que, durante um movimento de translação de um corpo rígido, as posições relativas \mathbf{r}_{ij} são vetores constantes e conhecidos. Essa propriedade simplifica muito o estudo de tal movimento. Ela tem como conseqüência o fato de que, se for conhecido o movimento do centro de massa de um corpo rígido em translação, ficam automaticamente conhecidos os movimentos de todas as partículas do corpo. Vejamos como se obtém esse resultado.

Primeiramente, vamos considerar uma partícula qualquer i de um sistema e calcular a diferença vetorial entre o vetor-posição dessa partícula e o vetor-posição do centro de massa do sistema. Usando a definição (17.12) de centro de massa de um sistema, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm} &= \mathbf{r}_i - \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \cdots + m_N \mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} \\ &= \frac{(m_1 + m_2 + \cdots + m_N)\mathbf{r}_i - m_1 \mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{r}_2 - \cdots - m_N \mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} \\ &= \frac{m_1 (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1) + m_2 (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_2) + \cdots + m_N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_N)}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} \\ &= \frac{m_1 \mathbf{r}_{i1} + m_2 \mathbf{r}_{i2} + \cdots + m_N \mathbf{r}_{iN}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}. \end{aligned} \quad (17.24)$$

Portanto,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{cm} + \frac{m_1 \mathbf{r}_{i1} + m_2 \mathbf{r}_{i2} + \cdots + m_N \mathbf{r}_{iN}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}. \quad (17.25)$$

Desse modo, o vetor-posição de qualquer partícula do sistema é igual ao vetor-posição do seu centro de massa somado a uma expressão que depende apenas das posições relativas das partículas do sistema.

Agora, consideremos que o sistema seja um corpo rígido em movimento de translação. Nesse caso, as posições relativas \mathbf{r}_{i1} , $\mathbf{r}_{i2}, \dots, \mathbf{r}_{iN}$, que aparecem na fração em (17.25), são todas constantes e conhecidas. Conseqüentemente, a própria fração é uma constante conhecida, que representaremos por \mathbf{C}_i . Usando esse símbolo, a equação (17.25) pode ser escrita como: $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{cm} + \mathbf{C}_i$. Essa equação mostra que, se conhecemos o movimento do centro de massa, isto é, se conhecemos \mathbf{r}_{cm} em um instante qualquer, conhecemos automaticamente \mathbf{r}_i em um instante qualquer, pois \mathbf{C}_i é uma constante conhecida. Uma vez que conhecer \mathbf{r}_i em um instante qualquer é conhecer o movimento da partícula i , fica demonstrado que o conhecimento do movimento do centro de massa de um corpo rígido em translação implica, automaticamente, o conhecimento dos movimentos de todas as partículas do corpo, como havíamos afirmado anteriormente.

A conseqüência mais importante dessas nossas considerações é que, para determinar o movimento de translação de um corpo rígido, basta encontrar o movimento de seu centro de massa. Acontece que, para determinar o movimento do centro de massa, dispomos da equação (17.19), que permite determinar esse movimento a partir das forças externas que agem sobre o corpo. Portanto, para estudar corpos rígidos em movimentos de translação, resta apenas conhecer as forças externas que surgem nas situações em que estamos interessados. Uma força sempre presente é a gravitacional, que estudaremos na próxima seção. Outras forças importantes serão consideradas na próxima aula.

Forças gravitacionais

Forças gravitacionais são as forças decorrentes da Lei da Gravitação Universal, de Newton. São forças que os corpos sofrem e exercem exclusivamente pelo fato de terem massa. Examinemos agora algumas situações mais comuns em que encontramos essas forças. Consideremos, primeiramente, o caso da força gravitacional sofrida por uma partícula de massa m e vetor-posição \mathbf{r} . Como já vimos, a força gravitacional exercida sobre ela por uma única partícula de massa m_1 e vetor-posição \mathbf{r}_1 é dada por

$$\mathbf{F} = -G \frac{m m_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}. \quad (17.26)$$

No caso da atração gravitacional de um planeta, pelo Sol, ambos podem ser considerados partículas. Nesse caso, (17.26) dá a força sobre o planeta, exercida pelo

Sol, se considerarmos m e \mathbf{r} como a massa e o vetor-posição do planeta e m_1 e \mathbf{r}_1 como a massa e o vetor-posição do Sol. Sabemos que, nesse caso, podemos usar um referencial inercial no qual o Sol está fixo e, além disso, escolher a origem do sistema de eixos no próprio Sol. Com essas escolhas, o Sol permanece em repouso na origem e, conseqüentemente, temos sempre $\mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$. A fórmula da força gravitacional (17.26) assume, nesse caso, a forma mais simples

$$\mathbf{F} = -G \frac{m m_S}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \quad (17.27)$$

onde mudamos o símbolo da massa do Sol de m_1 para m_S .

Consideremos, agora, o caso em que a partícula sofre forças gravitacionais exercidas por N partículas, de massas m_1, m_2, \dots, m_N , e posições respectivas $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$. Pelo Princípio da Superposição, a força gravitacional total sobre a partícula é

$$\mathbf{F} = -G \frac{m m_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - G \frac{m m_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} - \dots - G \frac{m m_N}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_N|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_N}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_N|}. \quad (17.28)$$

Quando há muitas partículas exercendo forças, essa soma vetorial pode ser muito complicada. Há uma situação, entretanto, em que há um número enorme de partículas e que o resultado da soma parece milagrosamente simples. É quando as partículas que exercem as forças gravitacionais formam uma esfera homogênea de massa. A **Figura 17.7** mostra uma tal esfera de massa M , raio R e centro em um ponto C , cujo vetor-posição chamamos \mathbf{r}_C .

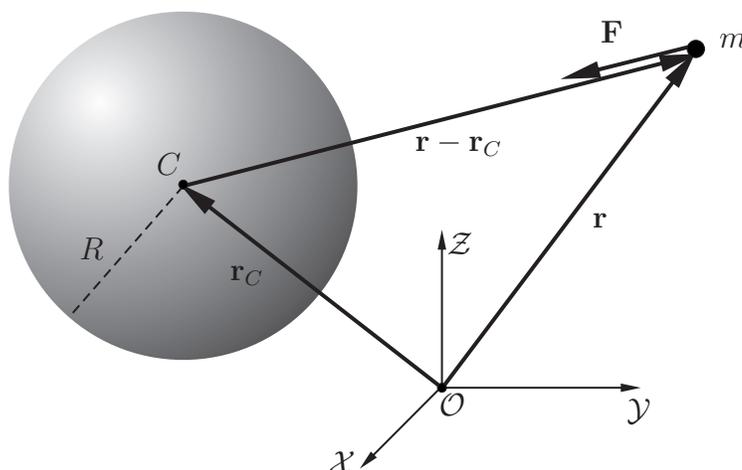


Figura 17.7: Uma esfera homogênea de raio R e centro em C atrai gravitacionalmente uma partícula de massa m posicionada em frente à esfera.

Em frente à esfera há uma partícula de massa m e vetor-posição \mathbf{r} . A esfera está toda cheia com a massa M , distribuída de forma homogênea, isto é, qualquer parte da esfera tem a mesma densidade de massa. Podemos imaginar essa esfera como um conjunto de pedacinhos bastante pequenos para serem considerados partículas. Vamos chamar N o número de pedacinhos, m_1, m_2, \dots, m_N suas massas e $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ suas respectivas posições (é claro que $m_1 + m_2 + \dots + m_N = M$). Podemos, então, usar a fórmula (17.28) para expressar a força total sobre a partícula que está em \mathbf{r} , exercida pelos N pedacinhos da esfera. Se o cálculo for feito com precisão, obtém-se o resultado: as forças gravitacionais, exercidas pelos diversos pedacinhos, combinam-se de modo a produzir a força total

$$\mathbf{F} = -G \frac{m M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_C|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_C}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_C|}, \quad (17.29)$$

que é, de fato, o resultado mais simples que se poderia esperar. Comparando esse resultado com a força gravitacional (17.26) exercida por uma única partícula, somos levados a concluir que a força exercida pela esfera é exatamente a força que seria exercida por uma única partícula, cuja massa é igual à massa M da esfera e cuja posição é a do seu centro C . Temos, pois:

a força gravitacional que uma esfera homogênea exerce sobre uma partícula situada fora dela é a mesma que seria exercida se toda a massa da esfera se localizasse em seu centro.

Na verdade, não é necessário que a esfera seja homogênea para obtermos o resultado (17.29). Para que a força de uma esfera seja a mesma que toda sua massa exerceria, se estivesse concentrada em sua origem, basta a densidade da esfera ser uma função apenas da distância até o seu centro, ou seja, possuir simetria esférica

Não vamos aqui demonstrar esse resultado, que o próprio Newton demorou muitos anos para conseguir. No seus cursos de Cálculo, ao estudar integração e o teorema da divergência de Gauss, você saberá como obter esse resultado de duas maneiras diferentes. Até lá, podemos considerá-lo como um resultado obtido experimentalmente, o que não deixa de ser verdade. Note que, de acordo com esse resultado, a força de atração exercida pela esfera aponta para o centro da esfera, e o módulo da força é proporcional ao inverso do quadrado da distância entre o centro da esfera e a partícula que sofre a força.

A atração gravitacional exercida por uma esfera homogênea torna-se importante quando aplicada ao caso da atração gravitacional terrestre sobre os corpos. De fato, a Terra pode, em boa aproximação, ser considerada como uma esfera homogênea de massa. Podemos, então, obter a força gravitacional que a Terra exerce sobre uma partícula fora dela, aplicando a fórmula (17.29), na qual no lugar de M colocamos a massa M_T da Terra, e consideramos \mathbf{r}_C como o vetor-posição de seu centro. Além disso, como discutido anteriormente, a Terra pode ser considerada como um referencial inercial para uma grande variedade de problemas. Vamos

supor essa situação e usar um sistema de eixos com origem no centro da Terra. Nesse caso, $\mathbf{r}_C = \mathbf{0}$ e a equação (17.29) assume a forma simples

$$\mathbf{F} = -G \frac{m M_T}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (|\mathbf{r}| \geq R_T), \quad (17.30)$$

onde R_T é o raio da Terra, e a ressalva $|\mathbf{r}| \geq R_T$ visa a lembrar que a fórmula é válida apenas no caso em que a partícula atraída pela Terra está fora dela, isto é, acima ou sobre a superfície da Terra. Vamos usar as convenções comuns de que o módulo $|\mathbf{r}|$ do vetor \mathbf{r} é representado simplesmente por r e o unitário $\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ é representado por $\hat{\mathbf{r}}$. Com isso, (17.30) toma a forma

$$\mathbf{F} = -G \frac{m M_T}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (r \geq R_T). \quad (17.31)$$

A **Figura 17.8** é uma ilustração da Terra e de uma partícula de massa m a uma certa altura da superfície da Terra.

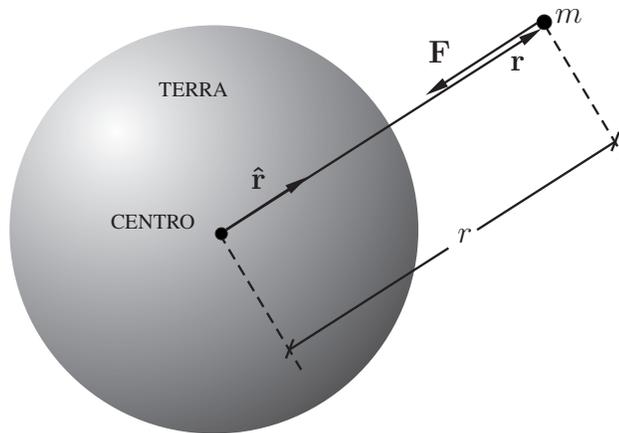


Figura 17.8: Uma partícula de massa m acima da superfície da Terra, a uma distância r do seu centro.

Uma vez que a origem do sistema de eixos está no centro da Terra, o vetor-posição \mathbf{r} da partícula vai do centro da Terra até a partícula. A distância r da partícula ao centro da Terra é o módulo de seu vetor-posição. O vetor unitário $\hat{\mathbf{r}}$ aponta no sentido do centro da Terra para o ponto onde está a partícula. O vetor unitário $\hat{\mathbf{r}}$ foi desenhado na figura com origem no centro da Terra, tal como o próprio vetor-posição \mathbf{r} que lhe deu origem. A força gravitacional \mathbf{F} da Terra sobre a partícula, dada por (17.31), foi desenhada com ponto de aplicação na partícula, como é habitual. Como os três vetores \mathbf{r} , $\hat{\mathbf{r}}$ e \mathbf{F} estão sobrepostos em uma mesma

reta, usamos um expediente para identificar os três vetores, sem confusão: pusemos os símbolos desses vetores próximos às suas respectivas extremidades finais. Note que a presença do sinal negativo em (17.31) faz com que \mathbf{F} e $\hat{\mathbf{r}}$ tenham sinais opostos, como se faz necessário, uma vez que a força gravitacional atrai a partícula para o centro da Terra. Um exemplo concreto da situação descrita na **Figura 17.8** é dado por um satélite de telecomunicação em órbita em torno da Terra, a uma altura $r - R_T$ de sua superfície.

Agora queremos considerar a situação na qual a partícula atraída gravitacionalmente pela Terra está bem próxima da sua superfície, de tal modo que possamos considerar a distância entre ela e o centro da Terra aproximadamente igual ao raio da Terra (mais precisamente, ligeiramente maior). Nesse caso, a força gravitacional exercida pela Terra sobre a partícula costuma ser chamada **peso da partícula** e ser simbolizada por \mathbf{P} . Para obter o valor aproximado do peso da partícula, fazemos, então, $r = R_T$ na fórmula (17.31), que dá a força gravitacional terrestre sobre a partícula, e trocamos o símbolo da força de \mathbf{F} para \mathbf{P} , para seguir a notação que adotamos para a força-peso. Obtemos

$$\mathbf{P} = -G \frac{m M_T}{R_T^2} \hat{\mathbf{r}} . \quad (17.32)$$

É conveniente, nessa equação, separar m dos demais fatores, de modo a termos

$$\mathbf{P} = m \frac{G M_T}{R_T^2} (-\hat{\mathbf{r}}) . \quad (17.33)$$

A quantidade em frente à massa costuma ser representada por \mathbf{g} ,

$$\mathbf{g} = \frac{G M_T}{R_T^2} (-\hat{\mathbf{r}}) , \quad (17.34)$$

de modo que o peso da partícula (17.33) pode ser escrito na forma

$$\mathbf{P} = m \mathbf{g} . \quad (17.35)$$

Usando os valores da constante universal da gravitação G , da massa da Terra M_T e de seu raio R_T , obtemos

$$\mathbf{g} = 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} (-\hat{\mathbf{r}}) , \quad (17.36)$$

cujos módulos já foram dados na Aula 16. Portanto, o vetor \mathbf{g} tem módulo igual a 9,8 em unidades de newtons por quilograma, sua direção e sentido são a direção e o sentido do vetor unitário $-\hat{\mathbf{r}}$. Obviamente, a direção desse vetor é a da reta que une o ponto em que está a partícula ao centro da Terra, e seu sentido aponta para esse centro. Para quem está na superfície da Terra (ou próximo dela), a superfície parece plana, a direção de \mathbf{g} é vertical e seu sentido é de cima para baixo. Esse ponto de vista, isto é, de quem está próximo à superfície da Terra, está ilustrado na **Figura 17.9**.

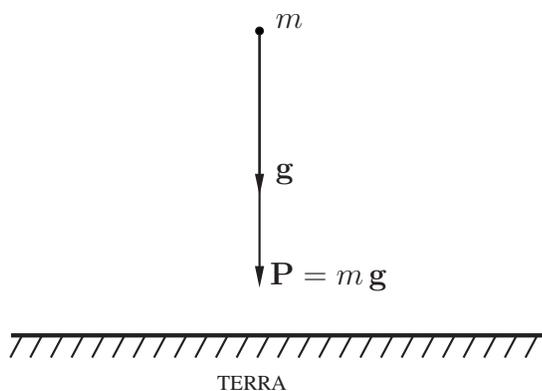


Figura 17.9: A figura mostra g e o peso $\mathbf{P} = m g$ de uma partícula de massa m . Esses vetores apontam para o centro da Terra, isto é, têm direção vertical e sentido para baixo.

Você deve ter notado que até o momento não demos um nome para o vetor g , que talvez você já conheça pelo nome de aceleração da gravidade. Continuaremos a usar esse nome para g , porque já é por demais comum, mas fomos reticentes em adotá-lo, porque ele exige um certo cuidado. Isto porque apenas em uma situação g é a aceleração da partícula. É quando a força total exercida sobre a partícula é o seu peso. Nesse caso, a Segunda Lei de Newton, aplicada à partícula, toma a forma $m \mathbf{a} = \mathbf{P}$. Usando nessa equação a expressão (17.35), que dá o peso em função do vetor g , obtemos: $m \mathbf{a} = m g$. Simplificando a massa em ambos os lados dessa equação, vemos que a aceleração da partícula, nesse caso, é igual ao vetor constante g , isto é, $\mathbf{a} = g$.

Se, além do peso, houver outras forças que contribuam para a força total sobre a partícula, a sua aceleração não será igual ao vetor g . Por exemplo, você pode pôr uma bolinha de chumbo de massa m sobre o chão e a bolinha ficar em repouso. Nesse caso, tanto a velocidade da bolinha quanto sua aceleração são iguais a zero. O peso da bolinha continua a ser igual à massa m multiplicada pelo vetor g , de módulo $9,8 \text{ N/kg}$, ao passo que g não é a aceleração da bolinha que, no caso, é nula: $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Note que a unidade natural para o módulo de g é N/kg , pois esse módulo é dado pela equação (17.35), da qual obtemos $g = P/m$. Sendo o peso uma força, a unidade de seu módulo é o newton. Como a unidade de massa é o quilograma, a unidade de g é o newton por quilograma. Acontece que o newton é igual a quilograma vezes metro por segundo ao quadrado, de modo que temos $\text{N/kg} = \text{m/s}^2$. Desse modo, tanto faz escrever $g = 9,8 \text{ N/kg}$ como $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Contudo, ao escrever $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, devemos ter em mente que nem sempre esse é o valor da aceleração da partícula. Esse é sempre o valor pelo qual devemos multiplicar a massa da partícula para obter o módulo do seu peso.

Podemos concluir, em resumo:

*o peso de uma partícula de massa m é uma força igual ao produto de sua massa pela chamada **aceleração gravitacional** \mathbf{g} , que é um vetor de direção vertical e sentido para baixo. Para partículas próximas à superfície terrestre, o módulo de \mathbf{g} é*

$$g = 9,8 \frac{m}{s^2}. \quad (17.37)$$

Se a força total que age sobre a partícula é apenas o peso, então a aceleração da partícula é igual à aceleração gravitacional.

Finalmente, consideremos a situação em que temos um sistema de partículas, isto é, um corpo, nas proximidades da superfície terrestre. Digamos que o corpo seja constituído pelas partículas de massas m_1, m_2, \dots, m_N . Sobre cada uma dessas partículas age uma força-peso, exercida pela Terra. Esses pesos são dados respectivamente por $\mathbf{P}_1 = m_1 \mathbf{g}$, $\mathbf{P}_2 = m_2 \mathbf{g}, \dots, \mathbf{P}_N = m_N \mathbf{g}$. A soma vetorial desses pesos é a força gravitacional total que a Terra exerce sobre o corpo. Vamos chamar essa força **peso do corpo**, e representá-la por \mathbf{P} . Desse modo, o peso do corpo é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_N \\ &= m_1 \mathbf{g} + m_2 \mathbf{g} + \dots + m_N \mathbf{g} \\ &= (m_1 + m_2 + \dots + m_N) \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (17.38)$$

isto é,

$$\mathbf{P} = M \mathbf{g}, \quad (17.39)$$

onde M é a massa total do corpo. Temos, então:

o peso de um corpo próximo à superfície terrestre é a força gravitacional total que a Terra exerce sobre ele e é igual ao produto da massa do corpo pela aceleração gravitacional \mathbf{g} .

Na verdade, a força-peso é aquela com a qual temos mais familiaridade, pois sentimos essa força em nós mesmos, na experiência ininterrupta de estarmos sendo atraídos para baixo, para o centro da Terra. Por isso nosso vocabulário coloquial está cheio de expressões que se referem à força-peso. Fala-se sobre o peso de um objeto para se referir ao que sabemos ser o módulo da força-peso que a Terra exerce sobre ele. Diz-se que um objeto é mais pesado do que outro para significar que seu peso é maior do que o do outro; nesse caso, também se diz que

o outro é mais leve do que ele. Esses são apenas alguns exemplos da presença do conceito de peso em nosso cotidiano.

O peso de um corpo é proporcional à sua massa. Um corpo é tanto mais pesado que outro quanto maior for a razão entre a massa dele e a do outro. Essa proporcionalidade dá origem a certos erros conceituais, como expressar o peso de um objeto em quilogramas. Sendo peso uma força, sua unidade é o newton e não o quilograma, que é unidade de massa. A cada quilograma de massa de um corpo corresponde um peso de $1 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2 = 9,8 \text{ N}$.

Finalmente, notemos que os corpos observados em nossa experiência diária também exercem forças gravitacionais uns sobre os outros, pois eles têm massas. Acontece que essas forças são normalmente imperceptíveis. De fato, não percebemos forças de atração gravitacionais entre mesas e cadeiras ou entre pessoas, por exemplo. Mesmo próximos a uma enorme montanha, não sentimos sua força gravitacional. O motivo de não percebermos forças gravitacionais entre esses corpos é que tais forças são absolutamente desprezíveis à força gravitacional da Terra. A montanha exerce uma força gravitacional sobre um corpo próximo e essa força pode ser medida. Acontece que a Terra também exerce uma força gravitacional sobre o corpo, que é o seu peso. Ao adicionarmos vetorialmente essas duas forças, o resultado obtido não é suficiente para ser distinguido do próprio peso do corpo, pois diante dele a força gravitacional da montanha é totalmente desprezível. Naturalmente, isso ocorre porque a massa da montanha é desprezível à da Terra.

Resumo

O vetor-posição do centro de massa de um sistema de partículas é dado pela média, ponderada pelas massas, dos respectivos vetores-posição das partículas. O centro de massa pode não coincidir com qualquer uma dessas partículas.

Usando o Princípio de Superposição e a Terceira Lei de Newton, conclui-se que a soma de todas as forças internas do sistema é nula. Usando-se esse mesmo princípio e a definição de centro de massa, obtém-se que a soma de todas as forças externas sobre o sistema é igual ao produto da massa total do sistema multiplicada pela aceleração do seu centro de massa. A Terceira Lei de Newton pode ser estendida para corpos que não são necessariamente partículas. Nesse caso geral, ela afirma que a força que um corpo A exerce sobre um corpo B tem mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto ao da força que o corpo B exerce sobre o corpo A.

Dizemos que um corpo rígido está em movimento de translação se, a cada instante, todas as partículas que o constituem têm a mesma velocidade.

A força gravitacional exercida por uma esfera homogênea sobre uma partícula é igual à força que seria exercida por uma partícula localizada no centro da esfera e com a massa igual à da esfera.

Questionário

1. O que é centro de massa de um sistema de partículas?
2. A posição do centro de massa de um sistema deve coincidir obrigatoriamente com a posição de alguma partícula do sistema? Ilustre sua resposta com alguns exemplos.
3. A que equação diferencial a função-movimento do centro de massa de um sistema satisfaz?
4. Enuncie a Terceira Lei de Newton para dois corpos.
5. Defina movimento de translação de um corpo rígido.
6. Podemos determinar completamente o movimento de translação de um corpo rígido a partir do movimento de seu centro de massa?
7. O que é peso de um corpo?
8. Qual é a força gravitacional que uma esfera homogênea exerce sobre uma partícula fora dela?

Problemas propostos

1. Considere duas partículas de massas m_1 e m_2 , e posições \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , respectivamente.
 - (a) Mostre que o centro de massa está localizado obrigatoriamente no segmento de reta que une m_1 e m_2 .

Sugestão: mostre, por exemplo, que $\mathbf{R}_{CM} - \mathbf{r}_1 = \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$, com $0 < \lambda < 1$ (interprete os casos em que $\lambda \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow 1$).

(b) Sendo d_1 a distância entre m_1 e o centro de massa, e d_2 a distância entre m_2 e o centro de massa, mostre que $d_1/d_2 = m_2/m_1$. Interprete o resultado. Faça um desenho para o caso em que $m_2/m_1 = 4$ e, nele, marque as posições das partículas (escolha como quiser) e a posição do centro de massa.

2. Considere três partículas de massas m_1 , m_2 e m_3 , e posições \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}_3 , respectivamente. Suponha que as posições das partículas não sejam colineares. Mostre que o centro de massa está localizado obrigatoriamente no plano determinado pelas três partículas e dentro do triângulo formado pelos três segmentos de reta que as une.

Sugestão: Mostre, por exemplo, que $\mathbf{R}_{CM} - \mathbf{r}_1 = \alpha(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \beta(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)$, onde α e β são positivos ou nulos e satisfazem a condição $\alpha + \beta < 1$.

3. Considere um sistema de N partículas de massas m_1, m_2, \dots, m_N , respectivamente. Separemos esse sistema em dois subsistemas: o primeiro deles constituído pelas partículas cujas massas são m_1, m_2, \dots, m_{N_1} , com $0 < N_1 < N$, e o segundo, formado pelas partículas restantes. Seja M_1 a massa total do primeiro subsistema ($M_1 = m_1 + m_2 + \dots + m_{N_1}$) e M_2 a massa total do segundo ($M_2 = m_{N_1+1} + m_{N_1+2} + \dots + m_N$). Sejam ainda \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 as respectivas posições dos centros de massa desses dois subsistemas.

(a) Mostre que a posição \mathbf{R} do centro de massa do sistema, formado por todas as N partículas, é dado por

$$\mathbf{R} = \frac{M_1\mathbf{R}_1 + M_2\mathbf{R}_2}{M_1 + M_2}$$

e interprete o resultado.

(b) Considere a Terra e a Lua como duas distribuições esféricas e homogêneas de massa. Aplique o resultado demonstrado no item anterior e encontre o centro de massa do sistema Terra-Lua (faz parte deste problema a pesquisa para encontrar os valores das massas da Terra e da Lua, assim como a separação entre seus centros). Faça um desenho, indicando a posição do centro de massa.

4. Considere um quadrado de lado ℓ . Suponha que em cada um de seus vértices esteja situada uma partícula de massa m , exceto num deles, onde não há partícula alguma. Determine a posição do centro de massa do sistema formado pelas três partículas.

5. (a) Considere uma barra retilínea como um conjunto de pedacinhos de mesmo volume. Além disso, considere o número de pedacinhos tão grande, que cada pedacinho seja pequeno o bastante para ser considerado como uma partícula. Se a barra é homogênea, todas essas partículas têm a mesma massa. Para fixar as idéias, considere que a barra tenha massa m , que o número de pedacinhos que consideramos seja N e que, portanto, cada pedacinho tenha massa $\Delta m = m/N$. Demonstre que o centro de massa dessa barra está no seu ponto médio.
- (b) Considere, agora, que uma barra retilínea de comprimento ℓ tenha sido construída de tal modo que uma de suas metades seja homogênea e de massa m , enquanto a outra, também homogênea, possua massa $3m$. Determine a posição do centro de massa dessa barra.
6. Uma esfera homogênea de raio a é lançada do solo com velocidade do centro de massa dada por \mathbf{V}_0 , conforme indicado na **Figura 17.10**. Usando-se a equação (17.19), foi determinado que o movimento do centro de massa da esfera é dado por

$$\mathbf{r}_{cm} = a\mathbf{u}_y + \mathbf{V}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2. \quad (17.40)$$

Esse movimento do centro de massa ocorre no plano dos vetores \mathbf{V}_0 e \mathbf{g} , que na **Figura 17.10** foi denominado plano \mathcal{OXY} .

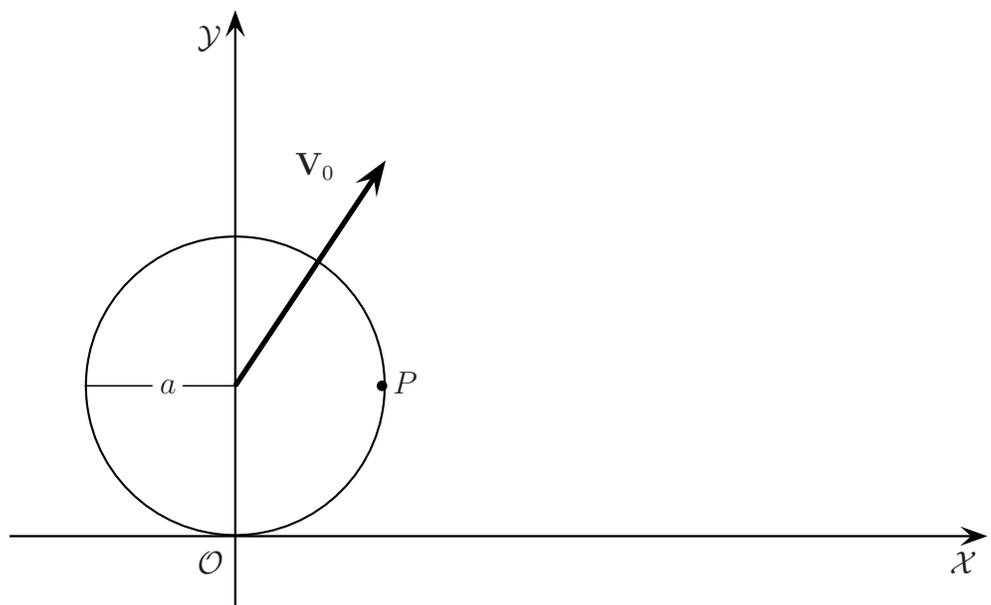


Figura 17.10: Uma esfera homogênea arremessada do solo com velocidade inicial de seu centro de massa igual a \mathbf{V}_0 .

Sabendo que a esfera realiza um movimento de translação até voltar ao solo, responda às questões que seguem.

- (a) Determine o movimento da partícula da esfera localizada no ponto P de sua superfície, conforme indicado na **Figura 17.10** (no momento do lançamento, esse ponto se encontra no plano \mathcal{OXY} e na mesma altura que o centro de massa).
- (b) Esboce as trajetórias do centro de massa e da partícula, desde o lançamento até a volta ao solo.
- (c) Desenhe as velocidades do centro de massa e da partícula no ponto mais alto das respectivas trajetórias.

Auto-avaliação

Como sempre, você deve ser capaz de responder a todo o questionário, pois este, na maioria das vezes, contém perguntas cujas respostas estão respondidas explicitamente no texto da aula. Quanto aos problemas, nem todos são muito simples. Você pode encontrar dificuldades na solução do problema 2. Mesmo não conseguindo resolver todos eles, passe ao estudo das próximas aulas. Em outra ocasião, você poderá voltar aos problemas ainda não resolvidos desta aula.

Aula 18 – Forças elásticas - forças dadas e forças vinculares

Objetivos

- Entender o conceito de forças elásticas e a Lei de Hooke.
- Entender os conceitos de forças de contato, forças de atrito e a distinção entre forças dadas e forças vinculares em geral.

Introdução

A força gravitacional entre dois corpos existe, estejam eles em contato ou não. É claro que não há contato entre o Sol e a Terra e, ainda assim, o Sol exerce uma força gravitacional sobre a Terra. Em contrapartida, há força entre corpos que ocorrem apenas quando eles entram em contato. A maioria das forças que observamos em torno de nós é desse tipo, como a força com que um pássaro flexiona o galho em que pousa, ou a força de um reboque sobre o automóvel que puxa, ou ainda a força que a água exerce sobre o corpo do nadador. As forças que requerem contato para serem exercidas são as forças de contato e as demais são as forças a distância. Na aula anterior, estudamos a força a distância mais importante em Mecânica Clássica, a gravitacional. Nesta aula, vamos estudar uma força de contato importantíssima, a força elástica. Ela existe em consequência das deformações causadas pelo contato entre os corpos. Dentro de certos limites da deformação, as forças elásticas obedecem à Lei de Hooke, que descreveremos em detalhe. Também consideramos situações muito idealizadas nas quais ocorrem forças de contato mas as deformações são desprezíveis. Essas são as forças chamadas vinculares, como a normal exercida por uma superfície rígida sobre corpos que a pressionam, ou a força exercida por um fio inextensível sobre corpos que o tensionam. Finalmente, consideramos as complicadíssimas forças de atrito, para as quais conseguimos enunciar algumas leis aproximadas.

Esta aula encerra uma seqüência de seis aulas que contêm, juntas, os fundamentos da mecânica newtoniana. Embora sejam, sem dúvida, as mais difíceis do curso, devem ser as mais bem estudadas, pois, uma vez compreendidas, você terá a seu dispor um arsenal teórico muito poderoso que lhe permitirá encarar, por conta própria, um dos grandes desafios que a Natureza nos oferece, o de entender os movimentos dos corpos em geral. Na próxima aula, as idéias desenvolvidas nessas seis aulas serão aplicadas a diversos exemplos interessantes.

Forças elásticas

Geralmente, corpos sólidos se deformam quando exercem forças um sobre o outro, e tais forças dependem dos estados de deformação dos corpos. A função-força que dá uma força deformante, a partir do estado de deformação, pode ser muito complicada, dependendo do corpo em consideração. Vamos então considerar corpos para os quais é simples a relação entre força e deformação. Primeiramente, vamos nos restringir aos chamados **corpos elásticos**. Quando não está sujeito a forças externas, além do próprio peso, um corpo elástico se apresenta sempre com a mesma forma, chamada **forma natural do corpo**. Forças externas podem retirá-lo dessa forma natural, mas ao cessarem essas forças, ele volta a ela. Em contraste com os corpos elásticos, há os **corpos plásticos**, que não voltam à forma original quando cessam as forças que o deformaram. Contudo, note que, se a deformação de um corpo elástico ultrapassar um certo limite, ele deixa de ser elástico e não mais retorna à forma original quando cessam as forças deformantes. Para que um corpo elástico permaneça como tal é necessário que não seja ultrapassado tal limite, chamado **limite de elasticidade** do corpo em consideração.

Dentre os corpos elásticos, os que apresentam as propriedades mais simples são as molas. Estudemos, então, no caso das molas, a função que relaciona força com deformação. O que aprenderemos tornará mais simples o entendimento das forças de deformação elástica, mesmo entre os corpos que não podem ser considerados molas.

Em uma mola há uma direção, ao longo da qual ela pode ser esticada ou comprimida como um corpo elástico. Além disso, ao ser esticada ou comprimida nessa direção, ela reage com uma força restauradora proporcional à variação de seu comprimento. Vamos descrever com mais precisão estas propriedades da mola. Vamos chamar a direção de deformações elásticas **direção longitudinal da mola** ou simplesmente **direção da mola**. Para simplificar nossas análises, vamos também supor que a mola não se flexione em relação a essa direção, de modo a permanecer sempre reta. A dimensão da mola ao longo de sua direção longitudinal é chamada **comprimento** da mola. Quando a mola está em sua forma natural, o seu comprimento é chamado **comprimento natural**. Quando não está esticada nem comprimida, dizemos que a mola está solta. Obviamente, uma mola solta permanece com seu comprimento natural. Quando a mola é esticada ou comprimida, ela abandona sua forma natural e seu comprimento aumenta ou diminui. A diferença entre o comprimento que a mola apresenta em um certo estado e o comprimento natural é chamada **elongação** da mola naquele estado. Se a mola está esticada, seu comprimento é maior do que o natural e sua elongação é positiva. Se

está comprimida, o seu comprimento é menor do que o natural e sua elongação é negativa. Representemos por ℓ o comprimento da mola em um estado qualquer e por ℓ_0 o seu comprimento natural. Portanto, se a mola tem comprimento ℓ , sua elongação é $\ell - \ell_0$.

A **Figura 18.1** mostra uma mola em três situações: esticada, comprimida e solta. A fim de ser esticada ou comprimida, ela está presa em uma de suas extremidades a uma parede e, na outra extremidade, a um bloco rígido sobre uma mesa horizontal. A parede e o bloco exercem sobre a mola as forças que a esticam ou comprimem. As extremidades da mola estão presas a uma mesma altura, de modo que a mola permanece na horizontal. Lembre-se de que supusemos que a mola não se flexiona em relação à sua direção longitudinal. Devemos, pois, supor que uma mola é leve bastante para não se vergar ao próprio peso.

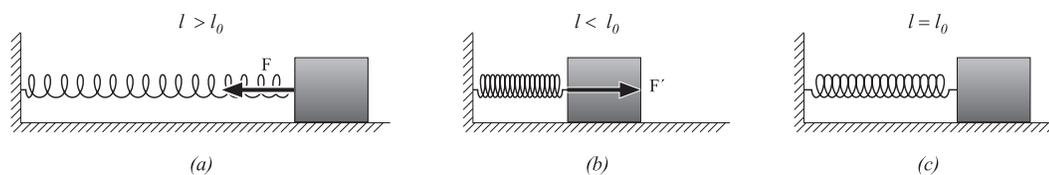


Figura 18.1: (a) Mola esticada pela parede e pelo bloco. (b) Mola comprimida pela parede e pelo bloco. (c) Mola solta, em seu comprimento natural.

Na **Figura 18.1(a)**, a mola está esticada por forças exercidas em suas extremidades. Seja F a força de reação da mola sobre o bloco. Essa força tem a direção longitudinal da mola e o sentido que se opõe ao esticamento da mola, que é o sentido da direita para a esquerda, como ilustra a **Figura 18.1(a)**. Suponhamos que sejam feitas medições do módulo F da força, para diferentes comprimentos da mola, que não ultrapassem o seu limite de elasticidade. O resultado obtido é que, em boa aproximação, o módulo da força é proporcional à elongação $\ell - \ell_0$. A constante de proporcionalidade é positiva e será representada por k , o que nos leva a escrever: $F = k(\ell - \ell_0)$.

Consideremos a situação em que a mola está comprimida, como na **Figura 18.1(b)**. Agora seu comprimento ℓ é menor do que o natural e a elongação $\ell - \ell_0$ é negativa. A força F' , que a mola exerce sobre o bloco, tem novamente a direção longitudinal da mola, mas seu sentido é o que se opõe à compressão da mola, o sentido da esquerda para a direita, como ilustra a **Figura 18.1(b)**. No caso em que a mola é comprimida, a variação de comprimento $\ell - \ell_0$ é negativa, de modo que devemos usar o módulo da variação para enunciar o seguinte resultado: medições feitas para diferentes comprimentos da mola mostram que, em boa aproximação, o módulo da força é proporcional ao módulo da elongação, sendo a constante de proporcionalidade igual à obtida no caso de esticamento da mola. Em suma, tanto

no caso de esticamento quanto no de compressão, temos

$$F = k |\ell - \ell_0| . \quad (18.1)$$

A constante positiva k é uma constante característica da mola, denominada **constante elástica da mola**. Fixada uma alongação, a força exercida pela mola é tanto maior quanto maior for a constante elástica da mola. Por esse motivo, dizemos que uma mola é tanto mais forte quanto maior for sua constante elástica. De acordo com (18.1), a mola não exerce força sobre o bloco quando sua alongação é nula. Esse é o resultado esperado, pois, nesse caso, a mola não está sendo comprimida nem esticada pelo bloco.

Para indicar que o sentido da força exercida pela mola sempre se opõe à deformação, seja ela compressão ou esticamento, vamos dizer que a força exercida pela mola é **restauradora**, pois é uma força que tenta restaurar a mola à sua forma natural. Podemos então resumir as propriedades obtidas para a força exercida pela mola, da seguinte maneira:

a força exercida por uma mola sobre um corpo preso em sua extremidade é uma força restauradora na direção longitudinal da mola e com um módulo proporcional ao módulo de sua alongação, sendo a constante de proporcionalidade uma característica da mola.

Esse resultado experimental sobre as propriedades da força exercida por uma mola é chamado **Lei de Hooke**.

Esta lei pode ser expressa em forma matemática sucinta, se usarmos um eixo ao longo da direção da mola e expressarmos o resultado em termos da componente da força ao longo desse eixo. De fato, a força tem apenas essa componente, que é igual a mais ou menos o módulo da força. A vantagem de usar a componente em vez do módulo é que a componente de uma força pode ser positiva ou negativa, ao passo que o módulo de força não pode ser negativo. Vamos, pois, considerar um eixo \mathcal{OX} ao longo do comprimento da mola, apontando no sentido em que a mola se estica, tal como indicado na **Figura 18.2**.

Para escrever a alongação, podemos usar a coordenada da extremidade P da mola, que está em contato com o bloco. Quando a mola está esticada ou comprimida, temos um valor para a coordenada de P e quando ela está solta temos um outro valor. A diferença entre o primeiro e o segundo é a alongação. Contudo, para os nossos propósitos, é mais conveniente usar a coordenada do centro de massa do bloco, que será denotada por x . Se x_0 é o valor dessa coordenada, quando a mola está no seu comprimento natural, então $x - x_0$ é a alongação da mola. Na **Figura 18.2**, tal alongação está indicada em uma situação da mola esticada.

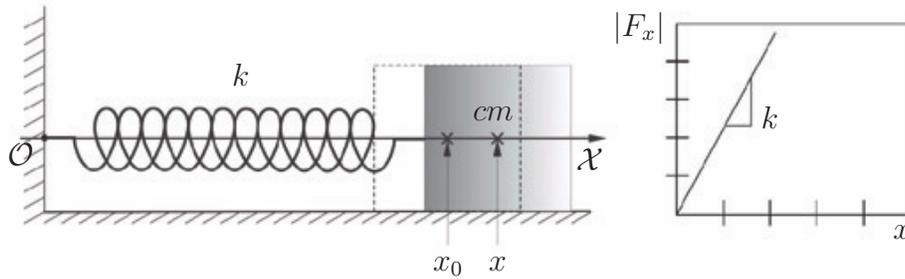


Figura 18.2: Eixo $\mathcal{O}\mathcal{X}$ ao longo do comprimento da mola, apontando no sentido em que a mola se estica.

Dado que a força \mathbf{F} da mola sobre o bloco tem a direção longitudinal da mola, ao longo da qual escolhemos o eixo $\mathcal{O}\mathcal{X}$, temos $\mathbf{F} = F_x \mathbf{u}_x$, onde F_x é a componente da força ao longo de $\mathcal{O}\mathcal{X}$. Como já mencionamos anteriormente, a força tem somente essa componente. Podemos, então, expressar a Lei de Hooke na forma:

$$F_x = -k(x - x_0). \quad (18.2)$$

Nessa equação, o sinal negativo é essencial para que ela descreva corretamente o caráter restaurador da força da mola. Você verificará com facilidade que, graças a esse sinal, a componente F_x tem o sinal correto que indica o sentido da força nos casos de esticamento ou compressão. Na **Figura 18.2**, aparece enquadrado à direita o gráfico de $|F_x|$ versus x .

Quando a mola está com seu comprimento natural, o centro de massa do bloco ocupa uma posição bem determinada. No lugar de escolher a origem do eixo $\mathcal{O}\mathcal{X}$ de modo arbitrário, como fizemos na **Figura 18.2**, podemos escolher essa origem exatamente nessa posição do centro de massa. Com essa nova escolha, temos $x_0 = 0$ e (18.2) assume a forma:

$$F_x = -kx. \quad (18.3)$$

Já afirmamos que as molas consideradas são leves o bastante para não se vergarem, devido ao próprio peso. Para entender melhor essa hipótese, consideremos agora que a mola tenha um peso que a deixe levemente vergada, como indicado na **Figura 18.3(a)**. As setinhas verticais, ao longo da mola, indicam os pesos das diversas partículas que a compõem, e a soma vetorial desses pesos é justamente o peso total \mathbf{P} da mola.

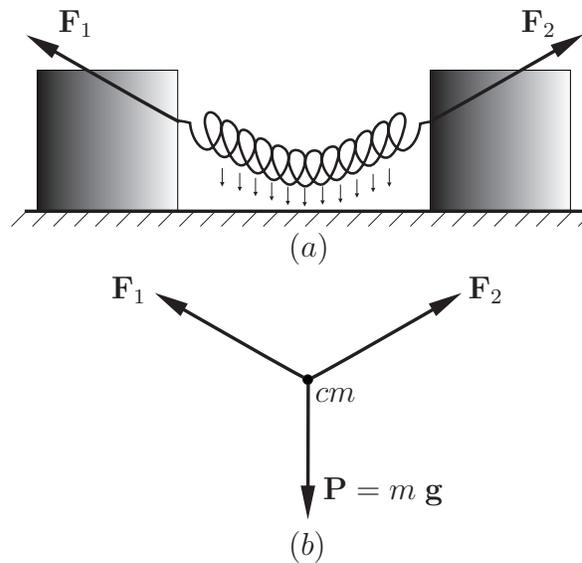


Figura 18.3: Uma mola presa a dois blocos.

A mola está presa a dois blocos rígidos, que exercem sobre ela as forças denotadas por \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 . Os únicos corpos vizinhos à mola são a Terra e os dois blocos, de modo que a força externa total que age sobre a mola é $\mathbf{P} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. A **Figura 18.3(b)** mostra as forças de todas as vizinhanças da mola aplicadas no seu centro de massa. Aplicando a Segunda Lei de Newton (17.19) à mola, obtemos

$$m \mathbf{a}_{cm} = m \mathbf{g} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \quad (18.4)$$

onde m é a massa da mola, e \mathbf{a}_{cm} , a aceleração de seu centro de massa. Vejamos, então, as conseqüências de a massa da mola ser desprezível. Fazendo $m = 0$ nessas equações, obtemos

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2, \quad (18.5)$$

ou seja, as forças exercidas pelos blocos nas duas extremidades da mola são de mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos, se a massa da mola é desprezível. Nesse caso, também podemos supor que a mola não se verga em decorrência de seu próprio peso e permanece reta, e as duas forças \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 têm a direção da própria mola. Para representar essa situação de massa desprezível, devemos fazer as seguintes modificações na **Figura 18.3**: eliminar os vetores que representam os pesos e desenhar a mola e as forças \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 ao longo de uma mesma reta (que é horizontal na figura).

Seja \mathbf{F}'_1 a força de reação a \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}'_2 a força de reação a \mathbf{F}_2 . \mathbf{F}'_1 é a força que a mola exerce sobre o bloco da esquerda; \mathbf{F}'_2 é a força que ela exerce sobre

o bloco da direita. Pela Terceira Lei de Newton, temos $\mathbf{F}'_1 = -\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}'_2 = -\mathbf{F}_2$. Usando (18.5), obtemos $\mathbf{F}'_1 = -\mathbf{F}'_2$, isto é, uma mola de massa desprezível exerce, sobre corpos presos em suas duas extremidades, forças de mesma direção, mesmo módulo e sentidos opostos. Uma vez que uma dessas forças obedece à Lei de Hooke, concluímos que a outra também obedece.

Exemplo 18.1

Ilustraremos aqui alguns conceitos que aprendemos sobre forças elásticas e a Lei de Hooke. Utilizaremos a Segunda Lei de Newton para encontrar a configuração de equilíbrio de um sistema formado por duas pequenas esferas e duas molas de massas desprezíveis ligadas entre si da seguinte forma: a mola de constante elástica k' e comprimento natural ℓ' tem uma de suas extremidades presa ao teto e a outra, a uma pequena esfera de massa m_1 . Esta, por sua vez, está presa a uma mola de constante elástica k e comprimento natural ℓ , cujo outro extremo está preso a uma pequena esfera de massa m_2 . O sistema está em repouso, com as molas na vertical. Determinaremos as posições das esferas (consideradas partículas) na configuração de equilíbrio, isto é, configuração na qual o sistema permanece em repouso. Considere o eixo \mathcal{OY} como o da **Figura 18.4**. As posições de equilíbrio das esferas superior e inferior serão chamadas, respectivamente, y_{1e} e y_{2e} , como mostra a **Figura 18.4**.

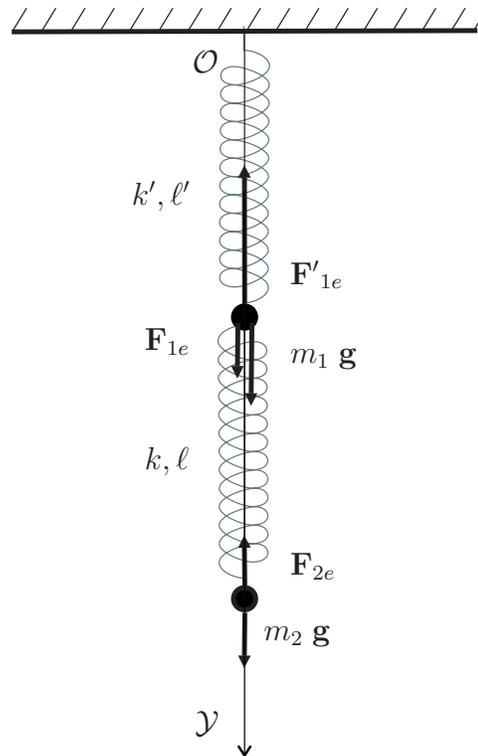


Figura 18.4: Sistema de molas e esferas em equilíbrio sob a ação da gravidade.

Como as esferas permanecem em repouso, a Segunda Lei de Newton, aplicada a cada esfera, nos permite afirmar que a força total sobre cada uma delas é nula. Portanto, as componentes ao longo de \mathcal{OY} dessas forças totais também são nulas. Para calcularmos as forças elásticas envolvidas, será necessário, inicialmente, expressar as elongações das molas (com o sistema em equilíbrio) em termos de seus comprimentos naturais ℓ' e ℓ , e das posições de equilíbrio das esferas y_{1e} e y_{2e} que desejamos determinar. A partir da **Figura 18.4** não é difícil perceber que a mola superior está distendida de $y_{1e} - \ell'$, enquanto a inferior, de $y_{2e} - y_{1e} - \ell$. Na esfera inferior atuam duas forças, a saber, o seu peso $m_2\mathbf{g}$ (que a Terra exerce sobre ela), vertical e para baixo, e a força elástica da mola inferior \mathbf{F}_{2e} , vertical e para cima, de modo que podemos escrever:

$$\mathbf{F}_{2e} + m_2\mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \implies \quad -k(y_{2e} - y_{1e} - \ell) + m_2g = 0. \quad (18.6)$$

Já na esfera superior, atuam três forças: o seu peso $m_1\mathbf{g}$, vertical e para baixo, a força elástica da mola inferior \mathbf{F}_{1e} , vertical e para baixo, e a força da mola superior \mathbf{F}'_{1e} , vertical e para cima, de modo que, nesse caso, temos:

$$\mathbf{F}'_{1e} + \mathbf{F}_{1e} + m_1\mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \implies \quad -k'(y_{1e} - \ell') + k(y_{2e} - y_{1e} - \ell) + m_1g = 0. \quad (18.7)$$

As cinco forças que aparecem nas duas últimas equações estão indicadas na **Figura 18.4**. Verifique se você concorda com suas direções e sentidos.

As equações (18.6) e (18.7) formam um sistema de duas equações com duas incógnitas, y_{1e} e y_{2e} . Devemos, então, resolver esse sistema. Somando essas duas equações, obtemos:

$$-k'(y_{1e} - \ell') + m_1g + m_2g = 0 \implies y_{1e} = \ell' + \frac{(m_1 + m_2)g}{k'}. \quad (18.8)$$

Para obter y_{2e} , basta substituir o resultado anterior em (18.6), isto é,

$$-k \left\{ y_{2e} - \left[\ell' + \frac{(m_1 + m_2)g}{k'} \right] - \ell \right\} + m_2g = 0,$$

de onde obtemos:

$$y_{2e} = \ell' + \ell + \frac{[m_2k' + (m_1 + m_2)k]g}{k'k}. \quad (18.9)$$

As equações (18.8) e (18.9) dão as respectivas posições de equilíbrio das esferas superior e inferior desse problema. Finalizamos este exemplo fazendo um comentário a respeito da Terceira Lei de Newton, que nos parece relevante: as forças F_{1e} e F_{2e} , embora tenham a mesma direção, o mesmo módulo e sentidos opostos, não formam um par de ação e reação. A explicação é simples: note, por exemplo, que, sendo F_{1e} a força que a mola inferior exerce sobre a esfera superior, a sua reação deve estar aplicada na mola inferior e não na esfera inferior (no problema proposto 7 você terá de responder em que corpos estão aplicadas todas as reações às forças marcadas na **Figura 18.4**).

Forças de contato, atrito e forças vinculares

Um corpo exerce força gravitacional sobre outro, independentemente de estar em contato com ele. O Sol atrai os planetas, mesmo estando a distâncias enormes deles. A Terra atrai a Lua, sem estar em contato com ela. Também o peso com que a Terra nos atrai existe independentemente de estarmos em contato com ela; é óbvio que a força-peso que age sobre nós continua a existir, quando pulamos. Em contrapartida, há forças entre corpos que somente aparecem quando eles entram em contato e que, por esse motivo, são chamadas **forças de contato**. Uma mola precisa estar em contato com o outro corpo para exercer força sobre ele, de modo que a força da mola é um exemplo de força de contato. Na verdade, são as forças de contato o que mais freqüentemente notamos no dia-a-dia. Para que apareça a força com a qual empurramos uma mesa, é necessário que entremos em contato com ela. Para que o cabo de um guincho puxe um automóvel, é necessário que o cabo entre em contato com o automóvel, ou mais especificamente, que fique amarrado a ele.

De um modo geral, os corpos sólidos exercem forças de contato uns sobre os outros. Os corpos que observamos em nossa experiência diária também exercem forças gravitacionais uns sobre os outros, mas, como observamos, essas forças são normalmente imperceptíveis diante dos próprios pesos dos corpos. Contudo, as forças de contato que observamos entre os corpos, de modo algum são desprezíveis quando comparadas aos pesos desses corpos. Para prosseguir com o exemplo anterior, podemos empurrar uma mesa contra uma cadeira até derrubá-la, de modo que a força de contato entre a mesa e a cadeira é obviamente perceptível.

Consideremos um bloco de massa m , em repouso, sobre uma mesa horizontal, como indicado na **Figura 18.5(a)**. Os corpos vizinhos ao bloco são a Terra, que o atrai verticalmente para baixo e a mesa, que o impede de cair sob essa atração. A Terra exerce sobre o bloco a força-peso $P = mg$ e a mesa exerce

sobre o bloco uma força que chamaremos \mathbf{F}_{BM} . Obviamente, é necessário que exista essa força, pois, se houvesse apenas o peso, o bloco estaria caindo com aceleração igual a g . É fácil verificar que a força \mathbf{F}_{BM} somente existe enquanto há contato entre o bloco e a mesa. \mathbf{F}_{BM} é uma força de contato. Estando o bloco em repouso, a aceleração de seu centro de massa é nula. Conseqüentemente, aplicando ao bloco à Segunda Lei de Newton (17.19), obtemos: $\mathbf{P} + \mathbf{F}_{BM} = \mathbf{0}$, isto é, $\mathbf{F}_{BM} = -\mathbf{P}$. Desse modo, no caso em consideração, a força de contato sobre o bloco, exercida pela mesa, é igual a menos o peso do bloco. Dizemos que a força \mathbf{F}_{BM} impede que o peso faça o bloco penetrar na mesa. Note que, embora \mathbf{F}_{BM} e \mathbf{P} tenham o mesmo módulo, a mesma direção e sentidos opostos, essas forças não formam um par de ação e reação, como você deve ser capaz de explicar facilmente.

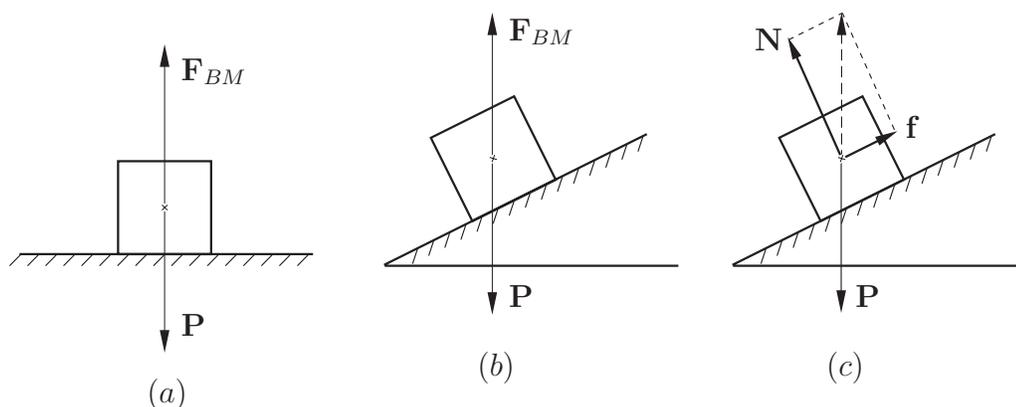


Figura 18.5: Bloco em repouso sobre: (a) a superfície horizontal de uma mesa e (b) a superfície inclinada de uma mesa.

Suponhamos agora que a mesa esteja levemente inclinada, como na **Figura 18.5(b)**, e que o bloco permaneça em repouso. Novamente, a força de contato \mathbf{F}_{BM} sobre o bloco, exercida pela mesa, continua a ser igual a menos o peso do bloco. Note que \mathbf{F}_{BM} pode ser decomposta em duas componentes vetoriais bem determinadas: uma componente f , paralela à superfície da mesa, e uma componente \mathbf{N} , normal à superfície da mesa, de modo que $\mathbf{F}_{BM} = \mathbf{N} + f$. A **Figura 18.5(c)** mostra essas componentes, a paralela e a normal, da força que a mesa exerce no bloco. A componente normal impede que o bloco penetre na mesa e a componente paralela impede que ele escorregue sobre a superfície da mesa. A componente \mathbf{N} é chamada **força normal**, que a mesa exerce sobre o bloco, e a componente f é chamada **força de atrito**, que a mesa exerce sobre o bloco. Ambas são forças de contato. Naturalmente, na **Figura 18.5(a)**, a mesa exerce apenas uma força normal sobre o bloco.

A **Figura 18.6(a)** mostra dois corpos sólidos A e B em contato. Naturalmente, o contato se estabelece entre suas superfícies. Consideramos que haja contato em apenas um ponto de suas superfícies, que chamamos ponto P . As nossas análises podem ser estendidas com facilidade às situações em que há vários pontos de contato. Chamamos \mathbf{F}_{AB} a força de contato sobre o corpo A exercida pelo corpo B . Pela Terceira Lei de Newton, o corpo B sofre a reação a essa força, que denotamos por \mathbf{F}_{BA} . Naturalmente, \mathbf{F}_{BA} é a força de contato sobre o corpo B exercida pelo corpo A . Dizemos que \mathbf{F}_{AB} e \mathbf{F}_{BA} são forças de interação por contato entre os corpos A e B .

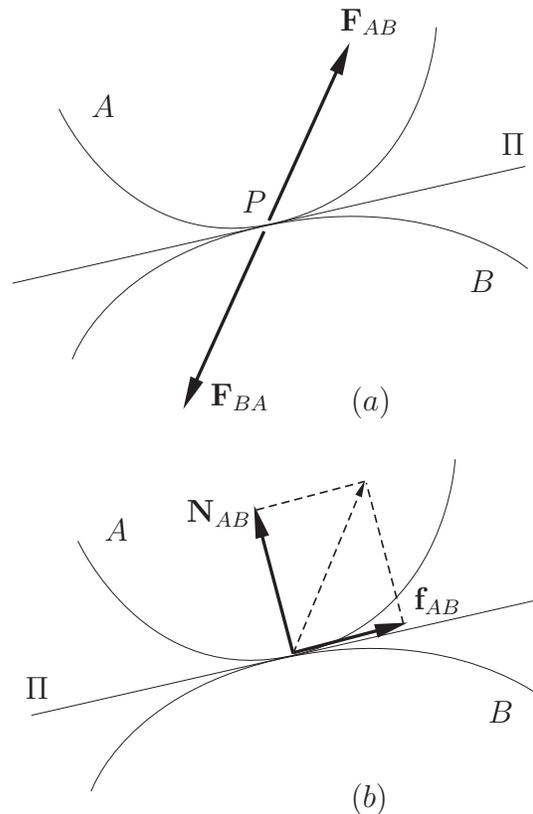


Figura 18.6: Dois corpos sólidos em contato.

Fixemos nossa atenção na força de contato \mathbf{F}_{AB} . Vamos considerar apenas corpos cujas superfícies tenham formas suaves. Para elas, podemos considerar o plano tangente a ambas as superfícies no ponto de contato. Denotamos por P o ponto de contato e por Π o plano tangente, conforme indicado na **Figura 18.6(a)**. Podemos decompor a força \mathbf{F}_{AB} em duas componentes bem determinadas: uma componente normal ao plano tangente, denotada por \mathbf{N}_{AB} , e uma componente paralela ao plano tangente, denotada por \mathbf{f}_{AB} . Temos, então,

$$\mathbf{F}_{AB} = \mathbf{N}_{AB} + \mathbf{f}_{AB} , \quad (18.10)$$

onde \mathbf{N}_{AB} e \mathbf{f}_{AB} são univocamente determinadas por \mathbf{F}_{AB} e pelo plano tangente no ponto de contato, como indicado na **Figura 18.6(b)**. A força \mathbf{N}_{AB} é chamada **força normal** sobre o corpo A exercida pelo corpo B , no ponto de contato P . A força \mathbf{f}_{AB} é chamada **força tangencial** ou **força de atrito** sobre o corpo A exercida pelo corpo B , no ponto de contato P . Tanto a força normal quanto a força de atrito são forças de contato. É comum dizer que as forças de contato entre os corpos são forças de contato entre suas superfícies.

Consideremos, primeiramente, a força normal entre dois corpos sólidos em contato. A **Figura 18.7** mostra dois corpos A e B em contato, que foram pressionados um contra o outro. Na **Figura 18.7(a)**, os corpos ainda não estão se pressionando; estão apenas no limiar do contato, de modo que a força de contato entre eles é nula. Na **Figura 18.7(b)**, eles estão em franco contato e aparecem deformados, devido à pressão mútua. Cada um agora exerce uma força de contato sobre o outro. Concentremos nossa atenção na força normal \mathbf{N}_{AB} sobre o corpo A , devido ao corpo B . Essa força é uma função das posições e velocidades das partículas do problema, isto é, as partículas dos dois corpos. Para simplificar a análise, podemos nos restringir à situação comum, na qual a força \mathbf{N}_{AB} é uma função apenas das posições das partículas dos dois corpos. Na situação descrita na **Figura 18.7(a)**, as posições das partículas são tais que há ausência total de deformação dos corpos e, portanto, $\mathbf{N}_{AB} = \mathbf{0}$. Na situação da **Figura 18.7(b)**, as partículas têm posições que mostram estarem deformados os corpos e, conseqüentemente, $\mathbf{N}_{AB} \neq \mathbf{0}$. Descrevemos o fato de que a força \mathbf{N}_{AB} depende do estado de deformação desses corpos, dizendo que \mathbf{F}_{AB} é uma força de deformação.

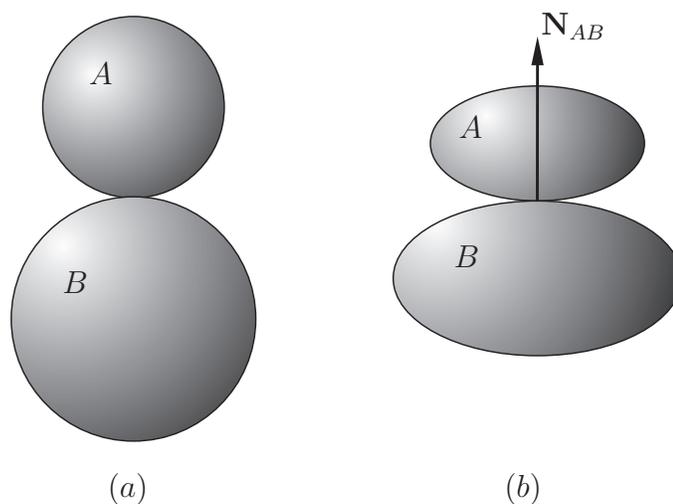
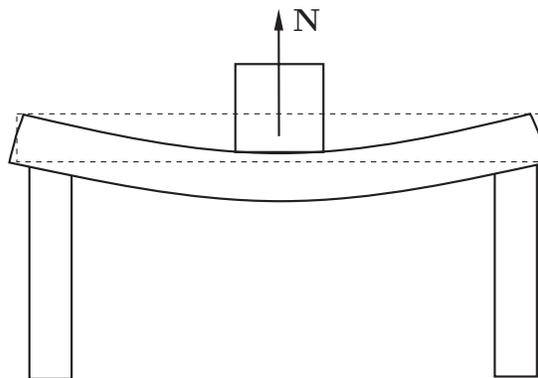


Figura 18.7: Dois corpos sólidos exercendo forças entre si que dependem de quanto estão deformados.

A relação entre força de contato e deformação foi dada no caso em que os corpos em contato são uma mola e um corpo rígido. É a relação dada pela Lei de Hooke. Em outros casos, essa relação pode ser bem mais complicada do que a Lei de Hooke.

Consideremos o caso de um bloco rígido sobre uma mesa horizontal, conforme ilustrado na **Figura 18.8**. A linha tracejada na figura representa o perfil da mesa antes de ela entrar em contato com o bloco. A linha contínua representa o perfil deformado da mesa, devido à pressão do bloco sobre ela. Se o bloco for deixado sobre a mesa, essa pressão ocorre, simplesmente, porque a Terra puxa o bloco para baixo. Essa pressão pode aumentar ou diminuir, se algum outro agente exercer uma força vertical sobre o bloco, para baixo ou para cima, respectivamente. Variando a pressão do bloco sobre a mesa, podemos variar a deformação da mesa. Note que, devido à deformação, o bloco penetra em uma região que, antes da deformação, era ocupada pela mesa (região dentro da linha tracejada).



Não desenhamos a deformação do bloco porque estamos interessados na força de contato que a mesa exerce sobre ele e essa força depende da deformação da mesa.

Figura 18.8: Um bloco sobre a mesa deforma a mesma, que responde sobre o bloco com uma força N proveniente da deformação.

A força normal N da mesa sobre o bloco é uma função da deformação da mesa. Podemos tentar encontrar essa função, mas, em geral, ela é muito complicada. Contudo, em muitas situações, a deformação da mesa é muito pequena, a ponto de podermos desprezá-la e considerarmos a mesa como perfeitamente rígida. Na **Figura 18.8**, essa idealização corresponde a considerar que o perfil da mesa permanece sempre igual ao perfil não deformado da linha tracejada, qualquer que seja a pressão que o bloco exerça sobre a mesa. Nesse caso, para um mesmo perfil da mesa, a força normal N pode ter diferentes valores, dependendo da pressão que o bloco exerce sobre a mesa. Portanto, o resultado de nossa idealização, de que a mesa é perfeitamente rígida, é que a força normal não pode

ser dada como função da deformação da mesa, isto é, das posições das partículas da mesa. Mas força foi definida originalmente como uma quantidade dada em função das posições e velocidades das partículas do problema. Conseqüentemente, na idealização extrema de uma mesa perfeitamente rígida, a força normal deixa de ser uma força, no sentido original da palavra.

Para expressar o fato de que a força normal não é dada em função das posições e velocidades das partículas do problema, mas pode assumir qualquer valor necessário para garantir a rigidez da mesa contra qualquer pressão do bloco, dizemos que a força normal é uma **força de vínculo**. A palavra **vínculo** significa que o bloco, ou qualquer outro corpo, tem o seu movimento restrito, ou vinculado, de modo a não penetrar jamais na região ocupada pela mesa, devido à sua rigidez absoluta. As forças usuais, como a gravitacional e a elástica, são dadas no começo do problema, em função das posições e das velocidades das partículas do problema (essas duas citadas como exemplo são dadas apenas em função das posições). Por esse motivo, as forças usuais são, muitas vezes, chamadas **forças dadas**, em oposição às **forças de vínculo**, que não são dadas em função de posições e velocidades das partículas do problema, e que impõem algum vínculo ao movimento. As forças de vínculo também são chamadas forças vinculares. Os exemplos de forças vinculares que veremos tornarão esse conceito cada vez mais claro.

Exemplo 18.2

Considere um pequeno bloco de massa m , deslizando sem atrito sobre a superfície mostrada na **Figura 18.9**, que passaremos a descrever com mais precisão. Imagine a parábola descrita por $z = (1/2)\alpha y^2$. Trata-se de uma parábola no plano \mathcal{OYZ} com a concavidade para cima e cujo ponto mínimo coincide com a origem. Imagine agora que giramos essa parábola em torno do eixo \mathcal{OZ} , gerando, assim, uma superfície de revolução que possui simetria sob rotações em torno do eixo \mathcal{OZ} , ou seja, todos os pontos dessa superfície, que têm o mesmo valor da coordenada z , estão equidistantes do eixo \mathcal{OZ} . No caso em questão, como a curva girada para gerar a superfície de revolução foi uma parábola, referimo-nos a essa superfície como parabolóide de revolução. Os movimentos possíveis do bloco sobre o parabolóide são, em geral, muito complicados para serem estudados detalhadamente aqui. No entanto, alguns deles são suficientemente simples para que possamos analisar e extrair informações interessantes como, por exemplo, os movimentos circulares uniformes do bloco. Um dos objetivos aqui é mostrar que a força normal sobre o bloco, exercida pelo parabolóide, não é um dado do problema, mas uma incógnita a ser determinada na solução do mesmo lembre-se de que a força normal não é uma força dada, mas uma força de vínculo).

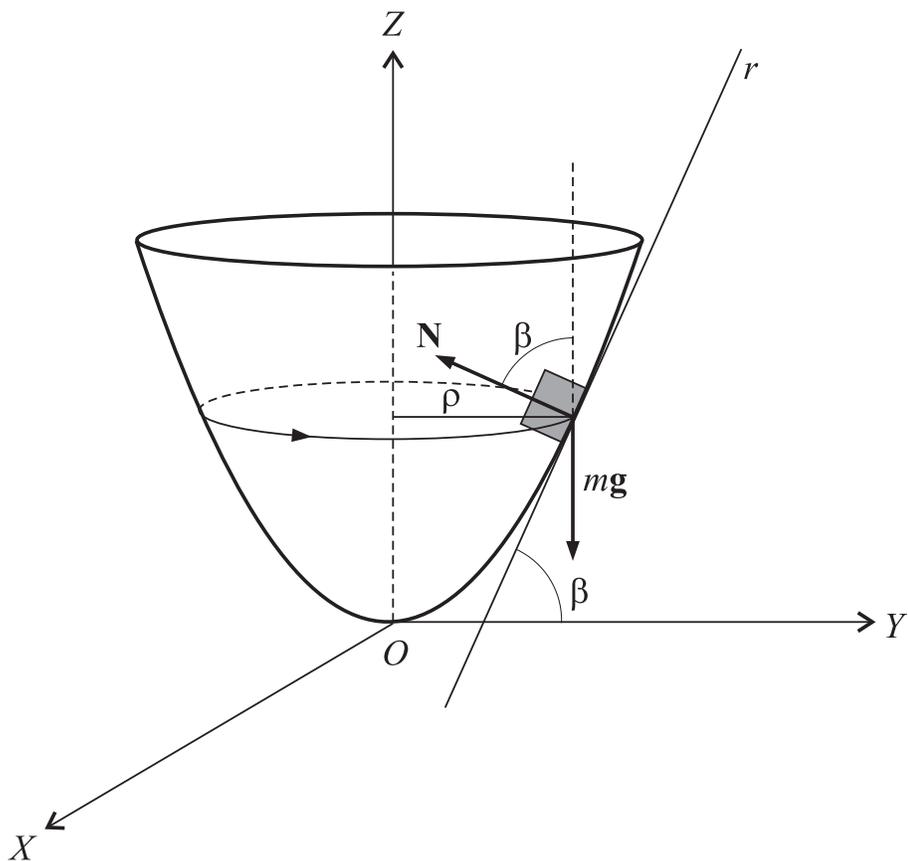


Figura 18.9: Pequeno bloco deslizando sem atrito sobre a superfície interna de um parabolóide de revolução em MCU.

Suponhamos que o bloco descreva um movimento circular uniforme de raio ρ , como indica a **Figura 18.9** (ficará claro, ao longo da solução do problema, que este é um movimento possível do bloco). Desejamos calcular o módulo v da velocidade do bloco e o módulo da força normal sobre o bloco, exercida pela superfície.

As únicas forças que atuam no bloco são o seu peso \mathbf{P} e a normal \mathbf{N} , ambas indicadas na **Figura 18.9**. Por conveniência, desenhamos o bloco num instante em que ele se encontra no plano \mathcal{OYZ} . Da Segunda Lei de Newton, temos $\mathbf{P} + \mathbf{N} = m\mathbf{a}$. Para escrevermos esta equação por componentes, devemos determinar as componentes horizontal e vertical da normal. Seja β o ângulo entre a reta tangente ao parabolóide na posição do bloco (e pertencente ao plano \mathcal{OYZ}) e o eixo \mathcal{OY} . Essa reta tangente está indicada, na **Figura 18.9**, pela letra r . Com isso, podemos escrever

$$N_z = N \cos\beta; \quad N_y = -N \sin\beta, \quad (18.11)$$

onde $N = |\mathbf{N}|$ e o coeficiente angular da reta r é dado por:

$$\tan\beta = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2} \alpha y^2 \right)_{y=\rho} = \alpha \rho. \quad (18.12)$$

Utilizando, então, a Segunda Lei de Newton, as equações escritas em (18.11) e lembrando que num MCU a aceleração tem apenas componente centrípeta, podemos escrever:

$$N \cos\beta = mg \quad (18.13)$$

$$N \sin\beta = m \frac{v^2}{\rho}. \quad (18.14)$$

Dividindo (18.14) por (18.13) e usando a equação (18.12), obtemos

$$\tan\beta = \frac{v^2}{g\rho} \implies \alpha\rho = \frac{v^2}{g\rho} \implies v = \sqrt{\alpha g} \rho. \quad (18.15)$$

O módulo da normal N pode ser obtido simplesmente adicionando o quadrado da equação (18.13) ao quadrado da equação (18.14) e usando, a partir da equação (18.15), o fato de que $v^2 = \alpha g \rho^2$, ou seja,

$$N^2 = m^2 g^2 + m^2 \alpha^2 g^2 \rho^2 \implies N = mg \sqrt{1 + \alpha^2 \rho^2}, \quad (18.16)$$

onde usamos a identidade $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$.

O problema que acabamos de resolver exhibe uma propriedade muito peculiar, que não ocorre se considerarmos, no lugar do parabolóide de revolução, uma outra superfície de revolução. É o fato de que, embora o módulo da velocidade do bloco dependa do raio da trajetória circular (inspecionando a equação (18.15), vemos que v aumenta quando ρ cresce); o mesmo não acontece com o tempo gasto para o bloco dar uma volta completa. Por incrível que pareça, qualquer que seja a trajetória circular do bloco, ele descreve uma circunferência completa exatamente no mesmo tempo. Isso pode ser verificado diretamente, tomando-se o perímetro de uma circunferência genérica ($2\pi\rho$) e dividindo pelo módulo da velocidade do bloco quando ele descreve um MCU, tendo esta circunferência como trajetória ($v = \sqrt{\alpha g} \rho$). Esse intervalo de tempo, que chamaremos período do movimento em questão e denotaremos por τ , é dado então por

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha g}}. \quad (18.17)$$

Christiaan Huygens utilizou a propriedade contida na equação (18.17) de uma forma genial para construir, na segunda metade do século XVII, um pêndulo cônico isócrona, isto é, um pêndulo cônico que mantinha sempre o mesmo período de revoluções, mesmo que o ângulo entre o pêndulo e a vertical variasse lentamente. Você verá o que é um pêndulo cônico no próximo exemplo.

Além da força normal exercida por superfícies rígidas, temos um outro exemplo muito comum de força de vínculo: a chamada tensão de um fio inextensível esticado. Na **Figura 18.10**, temos um fio inextensível de comprimento a , com uma de suas extremidades presa a um ponto O do teto de uma sala. Na outra extremidade do fio, está presa uma bolinha de massa m .

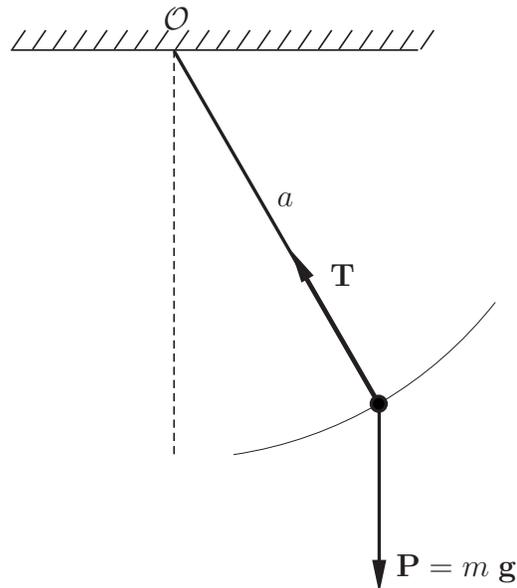


Figura 18.10: Bolinha oscilando em um plano vertical, a uma distância constante a do ponto P do teto.

Os corpos vizinhos à bolinha são a Terra, o fio inextensível e o ar que a circunda (em muitos casos, a influência do ar é desprezível). A Terra exerce sobre a bolinha a força dada $m g$. O fio inextensível exerce a força vincular T , que costuma ser chamada **tensão** do fio sobre a bolinha. O vínculo imposto à bolinha é que ela não pode afastar-se do ponto O a uma distância maior do que o comprimento a do fio, pois, por hipótese, este é inextensível. Para isso, a tensão é uma força com a direção do fio e o sentido que aponta para o ponto O do teto. Nesse caso, o módulo da tensão depende do peso e da posição da bolinha. Mas a posição e a velocidade da bolinha mudam durante o seu movimento, de modo que, para determinarmos o módulo de T , devemos encontrar o movimento da bolinha, isto é, resolver o problema. Em outras palavras, a tensão é uma incógnita do problema, a ser determinada juntamente com a solução do problema.

Aplicando a Segunda Lei de Newton à bolinha, é fácil obter a seguinte expressão para o módulo da tensão: $T = m|a - g|$. Suponhamos que conseguimos encontrar a função-movimento da bolinha. Então, sabemos sua posição em

qualquer instante, ou seja, sabemos sua aceleração a em qualquer instante. Substituindo a aceleração encontrada na expressão do módulo da tensão, obtemos seu valor em um instante qualquer. Desse modo, a tensão é obtida com a solução final do problema. Com isso, fica determinado o movimento da partícula e a força vincular \mathbf{T} , e o problema é considerado totalmente resolvido. Voltaremos posteriormente à discussão da solução desse problema. Nesse último parágrafo, quisemos apenas mostrar qual a lógica seguida na obtenção de uma força vincular.

Exemplo 18.3

Considere um fio ideal e, portanto, inextensível e de massa desprezível, cujo extremo superior está preso ao teto, e o inferior, preso a uma partícula de massa m . Seja ℓ o seu comprimento. Suponha que essa partícula descreva um movimento circular uniforme. Para que isso aconteça, o ângulo entre o fio e a vertical não pode ser nulo. Designemos por θ esse ângulo, como indica a **Figura 18.11**. Esse sistema é conhecido como **pêndulo cônico**. Observe, novamente, que a força exercida pelo fio sobre a partícula não é um dado do problema, mas uma incógnita, como ocorreu com a força normal no exemplo anterior (lembre-se de que ambas são forças vinculares). Desejamos obter aqui, em função dos dados do problema, o módulo da velocidade da partícula e o módulo da tensão no fio, além de verificar que o período de revolução do pêndulo depende do ângulo θ .

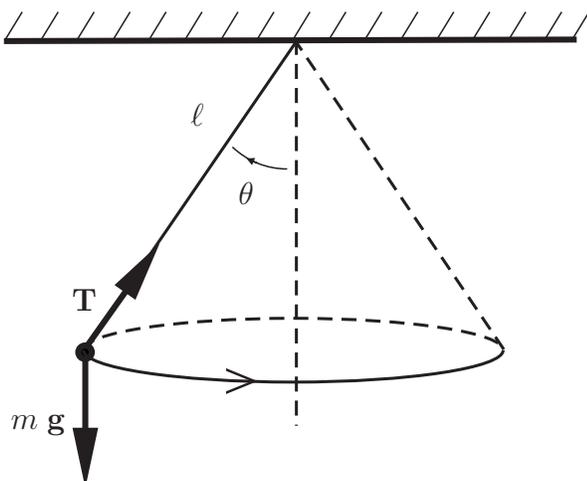


Figura 18.11: Pêndulo cônico em movimento circular uniforme.

Uma vez que a partícula só possui componente centrípeta de aceleração, aplicando a Segunda Lei de Newton, obtemos

$$T \cos\theta = mg \quad (18.18)$$

$$T \sin\theta = m \frac{v^2}{\ell \sin\theta}, \quad (18.19)$$

onde $T = |\mathbf{T}|$ e usamos o fato de que o raio da trajetória circular é $\ell \sin\theta$. Da equação (18.18), obtemos diretamente o módulo da tensão:

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}. \quad (18.20)$$

Para obter o módulo da velocidade, basta dividir (18.19) por (18.18):

$$\tan\theta = \frac{v^2}{g\ell \sin\theta} \implies v = \sqrt{\frac{g\ell}{\cos\theta}} \sin\theta. \quad (18.21)$$

De posse desse último resultado, podemos verificar se o período depende ou não do ângulo (já antecipamos que vai depender!). Com esse objetivo, dividimos o perímetro da circunferência pelo módulo da velocidade. Obtemos, então, o período:

$$\tau = \frac{2\pi\ell \sin\theta}{\sqrt{(g\ell/\cos\theta)} \sin\theta} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell\cos\theta}{g}}. \quad (18.22)$$

Da fórmula anterior, podemos obter resultados interessantes. Note, inicialmente, que o período não é o mesmo para diferentes ângulos do pêndulo com a vertical. Além disso, essa fórmula nos indica que à medida que o ângulo θ vai diminuindo (e, portanto, a partícula vai descrevendo trajetórias circulares de raios cada vez menores), o período vai aumentando, mas não indefinidamente, ou seja, vai tendendo para o valor $2\pi\sqrt{\ell/g}$. Em contrapartida, à medida que o ângulo θ vai crescendo e tendendo a $\pi/2$ (e, portanto, a partícula vai descrevendo trajetórias circulares de raios cada vez mais próximos de ℓ), o período vai ficando cada vez menor, tendendo a zero quando $\theta \rightarrow \pi/2$. Reflita sobre esse caso limite.

Passemos, agora, à força de atrito. Essa força entre sólidos é uma das mais complicadas que observamos na Natureza. Dentro da concepção da mecânica newtoniana, ela é uma função das posições e velocidades das partículas dos corpos em contato. Mas a tentativa de descobrir essa função-força nos obriga a considerar que tais partículas são as moléculas dos corpos na região de contato. Acontece que o número de moléculas nos corpos que nos cercam é enorme e, além disso, a mecânica newtoniana não é suficiente para descrevê-las. Como consequência, as propriedades do atrito podem ser muito complicadas e difíceis de descrever.

Existem algumas leis de atrito simples, mas que são válidas de modo apenas aproximado e exclusivamente para corpos sólidos com superfícies secas e de formatos suaves. Para enunciar tais leis, que chamaremos, simplesmente, leis do atrito, devemos, em primeiro lugar, tornar preciso o conceito de deslizamento entre corpos em contato.

Consideremos duas partículas quaisquer i e j , de vetores-posição \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_j , e velocidades \mathbf{v}_i e \mathbf{v}_j . A posição relativa da partícula i em relação à partícula j foi definida na aula anterior, e é dada por $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Definamos agora o conceito de velocidade relativa da partícula i em relação à partícula j como a derivada em relação ao tempo da posição relativa:

$$\mathbf{v}_{ij} = \frac{d\mathbf{r}_{ij}}{dt} . \quad (18.23)$$

Naturalmente:

$$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j . \quad (18.24)$$

Dizemos que as duas partículas i e j estão em contato se elas estão na mesma posição, isto é, $\mathbf{r}_{ij} = 0$. Se no instante t_c em que as duas partículas têm a mesma posição, elas não tiverem a mesma velocidade, isso significa que perderão o contato após o instante t_c . Não ter a mesma velocidade significa dizer que a velocidade relativa \mathbf{v}_{ij} é diferente de zero. Resumindo: duas partículas i e j estão em contato em um instante t_c se, e somente se, a posição relativa \mathbf{r}_{ij} é zero nesse instante. Se no instante t_c a velocidade relativa \mathbf{v}_{ij} não é zero, então o contato desaparece após esse instante.

Voltemos aos corpos da **Figura 18.6**. Dissemos que os dois corpos estão em contato no ponto P . Com isso, queremos dizer que uma partícula da superfície do corpo A , que chamaremos partícula a , está no mesmo ponto P que uma partícula da superfície de B , que chamaremos partícula b . Seja \mathbf{v}_{ab} a velocidade relativa da partícula a em relação à partícula b em um instante t_c de contato. Se essa velocidade não é zero, a partícula a perderá o contato com a partícula b após o instante t_c . Consideremos, então, a situação em que $\mathbf{v}_{ab} \neq \mathbf{0}$. No ponto de contato passa o plano Π , tangente às superfícies dos corpos A e B , como mostra a **Figura 18.6**. Se a velocidade relativa \mathbf{v}_{ab} tem componente neste plano, dizemos que há **deslizamento** entre as superfícies dos corpos A e B . Se \mathbf{v}_{ab} não tem componente neste plano, então \mathbf{v}_{ab} é perpendicular ao plano e o contato se perde, sem que haja deslizamento entre as superfícies. Estamos interessados, agora, apenas no caso em que \mathbf{v}_{ab} está inteira nesse plano, como indicado na **Figura 18.12**.

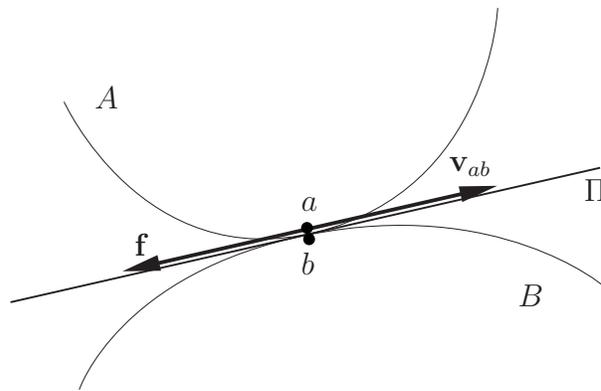


Figura 18.12: Deslizamento entre as superfícies dos corpos A e B .

Os casos que mais freqüentemente consideraremos são os de contato entre duas superfícies planas, como as de um bloco e uma mesa, e o de uma superfície circular e um plano, como as de uma roda e um piso. O deslizamento entre a roda e o piso é descrito, em linguagem habitual, como a roda derrapando no piso.

A força de atrito entre as superfícies, quando há deslizamento entre elas, é chamada **força de atrito cinético**. Consideremos a força de atrito cinético \mathbf{f}_{AB} exercida no corpo A pelo corpo B . Por definição, ela está no plano tangente Π . Uma variedade de experimentos mostra que \mathbf{f}_{AB} tem a mesma direção e sentido oposto ao da velocidade relativa \mathbf{v}_{ab} , como indicado na **Figura 18.12**. Além disso, o módulo de \mathbf{f}_{AB} é proporcional ao módulo da força normal \mathbf{N}_{AB} , exercida sobre o corpo A pelo corpo B . A constante de proporcionalidade é chamada **coeficiente de atrito cinético** e é uma característica dos corpos em contato. Representando esse coeficiente por μ_c , temos, então,

$$|\mathbf{f}_{AB}| = \mu_c |\mathbf{N}_{AB}|, \quad \text{para o atrito cinético.} \quad (18.25)$$

O fato de que a força de atrito cinético tem sentido oposto ao vetor velocidade relativa é descrito dizendo que o atrito cinético sempre se opõe ao movimento relativo entre as superfícies em contato, isto é, ao deslizamento entre elas.

Voltemos a considerar os pontos que estão em contato, o ponto a do corpo A e o ponto b do corpo B . Suponhamos agora que eles permaneçam em contato durante um certo intervalo de tempo, digamos do instante t_c ao instante t'_c . Temos, então, que entre esses dois instantes $\mathbf{v}_{ab} = \mathbf{0}$ e, portanto, não há deslizamento entre as superfícies. Enquanto essa velocidade relativa é nula, a força de atrito entre as superfícies é chamada **força de atrito estático**. Consideremos a força de atrito estático \mathbf{f}_{AB} exercida no corpo A pelo corpo B . Por definição, ela está no

plano tangente II. Entretanto, o seu módulo, a sua direção e o seu sentido dependem das outras forças do problema e dos movimentos dos corpos em contato. A força de atrito estático não é conhecida de antemão e é determinada ao se solucionar o problema em consideração, como no caso das forças vinculares. A única coisa que sabemos de antemão é o valor máximo que o módulo da força de atrito estático pode ter. Esse valor máximo é proporcional ao módulo da força normal N_{AB} . A constante de proporcionalidade é chamada **coeficiente de atrito estático** e é uma característica dos corpos em contato. Representando esse coeficiente por μ_e , temos

$$|\mathbf{f}_{AB}| \leq \mu_e |\mathbf{N}_{AB}| \quad \text{para o atrito estático.} \quad (18.26)$$

A força de atrito estático cumpre o papel de impedir o deslizamento entre as superfícies. Essa força não existe em qualquer situação que exigisse de seu módulo, para impedir o deslizamento, um valor maior do que o seu máximo. Nessa situação, o deslizamento de fato ocorre e a força de atrito que existe é de atrito cinético.

Existem superfícies entre as quais podemos, em certas situações, desprezar a força de atrito. Descrevemos essas superfícies de forma idealizada, dizendo que não há forças de atrito entre elas. Uma superfície que nunca exerce forças de atrito sobre outras que entram em contato com ela é chamada **superfície lisa**. Por definição, uma superfície lisa só pode exercer forças de contato normais. Embora o conceito de uma superfície perfeitamente lisa seja uma idealização, ele é útil, pois existem muitos problemas nos quais as superfícies envolvidas exercem atritos tão pequenos que podem ser desprezados.

Exemplo 18.4

Este exemplo tem como objetivo principal ilustrar como se pode obter, de um modo relativamente simples, o coeficiente de atrito estático entre um bloco e uma superfície.

Imagine, inicialmente, que o bloco esteja em repouso sobre essa superfície, supostamente na horizontal. Nessa situação, aplicando a Segunda Lei de Newton, temos simplesmente:

$$\mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (18.27)$$

uma vez que a aceleração do bloco é nula. No entanto, como o peso e a normal estão ambas na direção vertical, enquanto a força de atrito é, por definição, tangente à superfície, temos, nesse caso (lembre-se de que a força de atrito estático pode assumir valores entre zero e um valor máximo, cujo módulo vale $\mu_e |\mathbf{N}|$):

$$\mathbf{P} + \mathbf{N} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (18.28)$$

Verifica-se experimentalmente que o coeficiente de atrito cinético μ_c é sempre menor que o coeficiente de atrito estático entre o mesmo par de superfícies.

Imagine agora que a superfície esteja ligeiramente inclinada, formando um ângulo θ com a horizontal, mas de tal modo que o bloco ainda esteja em repouso, como ilustra a **Figura 18.13**.

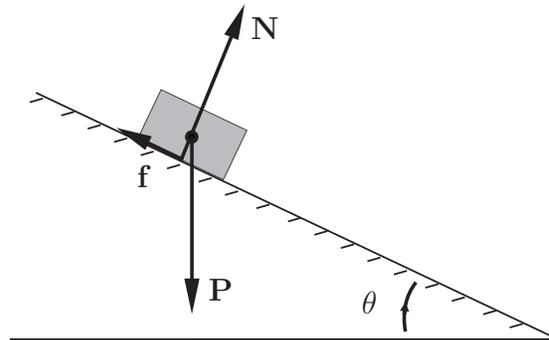


Figura 18.13: Bloco em repouso sobre uma superfície inclinada com atrito.

Novamente, a força total sobre o bloco deve ser nula e, portanto, a equação (18.27) deve ser válida. No entanto, nessa nova situação, embora a normal continue sendo perpendicular à superfície (lembre-se de que ela foi definida justamente como a componente normal à superfície da força sobre o bloco, exercida por essa superfície), o peso passa a ter uma componente não-nula na direção tangencial à superfície. Aplicando novamente a Segunda Lei de Newton e projetando apropriadamente as forças nas direções perpendicular e tangencial à superfície inclinada, temos:

$$\begin{cases} N - P \cos\theta = 0, \\ P \sin\theta - f = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N = P \cos\theta, \\ f = P \sin\theta. \end{cases} \quad (18.29)$$

Portanto, a força de atrito já não é mais nula. Inclusive, se aumentarmos a inclinação da superfície e o bloco permanecer em repouso, o módulo da força de atrito aumenta, pois $\sin\theta$ aumenta quando aumentamos θ a partir de zero. No entanto, se formos aumentando gradativamente a inclinação com a horizontal, haverá um ângulo crítico θ_c , acima do qual o bloco entrará em movimento. Imagine que, após muitas tentativas, você tenha determinado esse ângulo θ_c e que tenha conseguido chegar a ele com o bloco ainda em repouso (não importa quanto tempo isso tenha lhe custado). Nessa situação, as equações escritas em (18.29) continuam válidas, mas com $\theta = \theta_c$, ou seja:

$$\begin{cases} N = P \cos\theta_c, \\ f = P \sin\theta_c. \end{cases} \quad (18.30)$$

No entanto, como o bloco está na iminência de entrar em movimento, a força de atrito tem seu módulo máximo, pois, em caso contrário, poderíamos elevar mais ainda a inclinação da superfície, sem que o bloco entrasse em movimento e, conseqüentemente, esse não seria o ângulo crítico, violando a nossa hipótese. Portanto, para $\theta = \theta_c$, o módulo da força de atrito vale $\mu_e N$. Dividindo uma equação pela outra em (18.30), obtemos:

$$\mu_e = \tan\theta_c . \quad (18.31)$$

Obviamente, quanto maior for o θ_c encontrado numa experiência, maior será o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície em questão.

Resumo

Um corpo elástico é aquele que se deforma quando está sujeito a forças externas, mas que retorna à sua forma natural quando tais forças deixam de agir sobre ele. A Lei de Hooke afirma que a força exercida por uma mola sobre um corpo preso a uma de suas extremidades é restauradora na direção da mola e proporcional à sua elongação.

Forças de contato entre dois corpos são aquelas que só aparecem quando tais corpos entram em contato, e cessam quando cessa o contato entre eles. É comum separar a força de contato exercida por uma superfície sobre um corpo em duas componentes: uma normal à superfície e outra paralela à mesma. A primeira delas é chamada força normal, enquanto a segunda, força de atrito.

Forças de vínculo são forças que restringem o movimento de uma partícula ou de um corpo a certas regiões do espaço, como a força normal da superfície de um corpo rígido que impede os outros corpos de nele penetrarem. Elas são idealizações de forças dadas e, como tais, não são dadas, de antemão, como funções das posições e velocidades das partículas envolvidas. Por isso, elas se apresentam nos problemas como incógnitas a serem determinadas a partir dos dados e das leis de Newton.

A força de atrito entre superfícies em contato é dita força de atrito cinético ou estático, conforme haja ou não deslizamento entre as superfícies no ponto de contato. O módulo da força de atrito estático pode variar entre zero e um valor máximo, dado por $\mu_e |N|$, onde μ_e é o coeficiente de atrito estático entre as duas superfícies. Já o módulo da força de atrito cinético vale $\mu_c |N|$, onde μ_c é o coeficiente de atrito cinético entre as superfícies. Os coeficientes de atrito cinético e estático dependem das particularidades de cada par de superfícies em contato, mas verifica-se que $\mu_c < \mu_e$ para o mesmo par de superfícies.

Questionário

1. O que é corpo elástico e força elástica?
2. O que é a Lei de Hooke?
3. Considere dois corpos A e B cujas superfícies sejam suaves e suponha que estejam em contato num ponto. Defina a força normal e a força de atrito sobre o corpo A .
4. O que significa dizer que há deslizamento entre duas superfícies em contato?
5. A força de atrito estático entre duas superfícies só pode assumir um único valor? Explique detalhadamente.
6. Defina coeficiente de atrito estático e coeficiente de atrito cinético entre um par de superfícies.
7. Explique, com suas próprias palavras, o que são forças de vínculo. Dê exemplos simples.

Problemas propostos

1. Considere novamente o Exemplo 18.1, mas agora supondo que $m_1 = m_2 = m$ e $k' = k$. Nessa situação particular, como ficam as equações (18.8) e (18.9)? Verifique, nesse caso, que a distensão da mola superior é o dobro da distensão da mola inferior. Interprete esse resultado.
2. Considere uma mola de massa desprezível, constante elástica k e tamanho natural ℓ , cujo extremo superior está preso ao teto, e o inferior, preso a uma partícula de massa m . Designe por \mathcal{OY} o eixo vertical com sentido positivo para baixo e origem no ponto de suspensão da mola.
 - (a) Calcule a posição de equilíbrio y_e da partícula (suponha que a distensão da mola seja bastante pequena para que a Lei de Hooke possa ser aplicada).
 - (b) Suponha agora que a partícula se movimenta verticalmente em torno de sua posição de equilíbrio, mas de tal modo que a Lei de Hooke ainda seja válida. Usando a Segunda Lei de Newton, escreva a equação diferencial para a função-movimento da partícula e mostre que a única

solução correspondente às condições iniciais $f_y(0) = y_0$ e $\dot{f}_y(0) = v_{y0}$ é dada por

$$y = \ell + \frac{mg}{k} + \left[y_0 - \left(\ell + \frac{mg}{k} \right) \right] \cos(\omega t) + \frac{v_{y0}}{\omega} \text{sen}(\omega t) .$$

- (c) A partir da solução anterior, verifique que se a partícula for abandonada em repouso da posição $y = \ell + mg/k$ ela permanecerá nessa posição. Compare esse resultado com o obtido no item (a).
3. Considere duas molas de massas desprezíveis e de constantes elásticas k_1 e k_2 , respectivamente. Um dos extremos da mola 1 está preso a uma parede vertical, enquanto o outro está preso a um dos extremos da mola 2. A junção da mola 1 com a mola 2 é feita por meio de um nó de massa desprezível. Na extremidade restante da mola 2, está presa uma partícula de massa m que pode movimentar-se sobre uma superfície horizontal lisa. Considere apenas movimentos retilíneos da partícula ao longo da direção comum das molas. Escolha esta direção como a do eixo \mathcal{OX} e situe a origem na posição de equilíbrio da partícula (ou seja, quando a partícula está na origem, as molas se encontram com seus tamanhos naturais, nem distendidas, nem comprimidas).
- (a) Qual é a equação diferencial satisfeita pelas funções-movimento possíveis dessa partícula? (lembre-se de que, além do peso e da normal, atua na partícula apenas a força elástica proveniente da mola 2; note ainda que a posição x da partícula não corresponde à distensão nem à compressão da mola 2).
- (b) Determine o período das oscilações harmônicas dessa partícula.
4. A partir de um certo instante, passa a atuar sobre um bloco de massa m , que está inicialmente em repouso sobre uma superfície lisa horizontal, uma força constante \mathbf{F} , que forma com a horizontal um ângulo θ , como ilustra a **Figura 18.14**.
- (a) Determine o módulo da aceleração do bloco.
- (b) Determine o módulo da reação normal exercida pela superfície sobre o bloco.

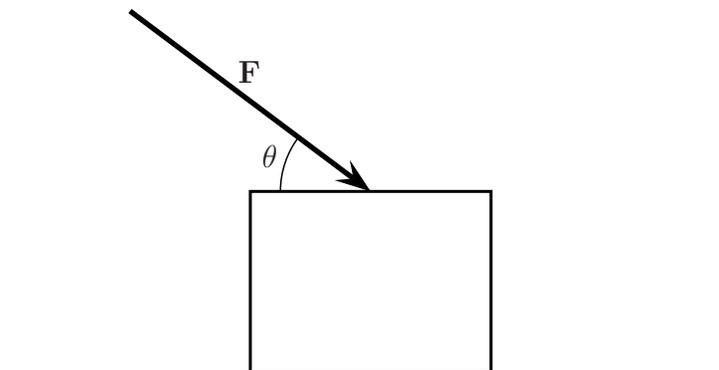


Figura 18.14: Bloco sobre superfície lisa horizontal sendo empurrado por uma força inclinada F .

5. Considere a mesma situação descrita no problema anterior, mas agora suponha que haja atrito entre a superfície e o bloco. Seja μ_e o coeficiente de atrito estático entre eles.

Para um dado ângulo θ , calcule o maior valor de $|\mathbf{F}|$, para que o bloco não entre em movimento. Verifique que a partir de um certo valor de θ , que designaremos por θ_0 , por maior que seja $|\mathbf{F}|$, o bloco nunca entra em movimento. Determine θ_0 .

6. Considere um bloco sobre uma superfície horizontal na situação em que há atrito entre o bloco e a superfície. Suponha que você deva exercer sobre o bloco uma força de módulo e direção inclinada prefixados. Você estará empurrando ou puxando o bloco, conforme o sentido da força. Determine, a partir das leis da Mecânica, se é mais fácil empurrar ou puxar o bloco. Obviamente, sua resposta pode ser conferida com sua experiência em situações semelhantes à descrita neste problema.
7. Considere a situação descrita no Exemplo 18.1. Responda em que corpos estão aplicadas as reações às forças \mathbf{F}'_{1e} , \mathbf{F}'_{1e} , \mathbf{F}'_{2e} , \mathbf{F}'_{2e} , $m_1\mathbf{g}$ e $m_2\mathbf{g}$, que aparecem nesse exemplo. Desenhe setas, indicando cada uma dessas forças de reação.
8. Considere um bloco de massa m que se encontra em repouso sobre uma rampa inclinada de um ângulo θ com a horizontal. Além do seu peso,

atuam sobre ele a força exercida pela superfície e uma força horizontal \mathbf{F}_h , exercida por um agente externo (uma pessoa segurando o bloco, por exemplo). Suponha que \mathbf{F}_h aponte no sentido de pressionar o bloco contra a superfície. Considere ainda que $\theta > \theta_c$, onde θ_c é o ângulo crítico acima do qual o bloco deslizaria sobre a rampa, caso não houvesse a força \mathbf{F}_h . Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície da rampa vale μ_e , determine o menor valor de $|\mathbf{F}_h|$ que consegue manter o bloco em repouso.

9. Considere novamente um bloco de massa m que se encontra em repouso sobre uma rampa inclinada de um ângulo θ com a horizontal, onde $0 < \theta < \pi/2$. Sobre ele atuam seu peso, a força exercida pela superfície e uma força horizontal \mathbf{F}_h que, por hipótese, aponta no sentido de pressionar o bloco contra a superfície.
 - (a) Pode-se mostrar que existe um ângulo θ_0 acima do qual o bloco permanecerá em repouso mesmo que $|\mathbf{F}_h| \rightarrow \infty$. Calcule θ_0 .
 - (b) Supondo agora que $0 < \theta < \theta_0$, existe um valor de $|\mathbf{F}_h|$ acima do qual o bloco entra em movimento. Determine esse valor, isto é, o valor máximo de $|\mathbf{F}_h|$ incapaz de colocar o bloco em movimento.
10. Suponha que um bloco esteja em repouso sobre uma superfície que faz com a horizontal um ângulo $\theta = \arctan \mu_e$, onde μ_e é o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície. Perturba-se ligeiramente o bloco, de modo a colocá-lo em movimento de descida sobre a rampa.
 - (a) Explique por que o bloco não pára novamente nem descreve um MRU.
 - (b) Sendo μ_c o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície, determine o módulo da aceleração do bloco.
11. Considere um pêndulo simples, formado por um fio ideal de comprimento ℓ , cujo extremo superior está preso ao teto, e uma partícula de massa m , fixa em sua extremidade inferior. Considere apenas movimentos planos do pêndulo, de tal forma que o fio se afaste muito pouco da vertical. Seja θ o ângulo entre o fio e a vertical, e escolha o sentido positivo da maneira que mais lhe convier (a hipótese de pequenas oscilações significa que a condição $|\theta| \ll 1$ deve ser sempre satisfeita).
 - (a) A partir da Segunda Lei de Newton, mostre que os movimentos possíveis do pêndulo para pequenas oscilações são aqueles para os quais

(você poderá usar as aproximações $\sin\theta \approx \theta$ e $\cos\theta \approx 1$, válidas para $|\theta| \ll 1$):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0 .$$

- (b) Escreva as soluções possíveis dessa equação diferencial.
- (c) Suponha que o pêndulo tenha sido abandonado do repouso de um ângulo θ_0 em $t = t_0$. Obtenha o movimento do pêndulo para $t > t_0$.

Auto-avaliação

Como sempre, você deve ser capaz de responder a todo o questionário, pois este, na maioria das vezes, contém perguntas cujas respostas estão respondidas explicitamente no texto da aula. Você pode encontrar dificuldades na solução dos problemas 1, 2 e 5. Não se assuste se não conseguir resolvê-los, pois daqui para frente você fará muitos exercícios. Em particular, na próxima aula, você encontrará inúmeros exemplos resolvidos e uma lista enorme de problemas para praticar, ou mesmo rever pontos que não ficaram muito claros. Deliberadamente, não sobrecarregamos essa aula com muitos problemas, pois, como mencionamos, ela finaliza uma série de aulas cujos objetivos principais são apresentar os conceitos e leis fundamentais da Mecânica Newtoniana. Não faltarão oportunidades de aplicações de tais conceitos. Portanto, mesmo que você não tenha resolvido todos os problemas desta aula, você pode, e deve, passar para a próxima.

Aula 19 – Aplicações das leis de Newton

Objetivos

- Relembrar o significado do Princípio do Determinismo Newtoniano e enfatizar qual é o problema fundamental da Mecânica.
- Entender em que circunstâncias uma força passa a depender explicitamente do tempo.
- Aplicar a Segunda Lei de Newton a situações simples, nas quais a força total sobre a partícula em estudo é uma função apenas da posição, e a situações nas quais também aparecem as chamadas forças de vínculo.

Introdução

O objetivo principal desta aula é mostrar como a Segunda Lei de Newton deve ser aplicada para se encontrar o movimento de uma partícula. Nos exemplos abordados, utilizaremos definições e conceitos já estudados anteriormente. Nesse sentido, não introduziremos, praticamente, nenhum conceito novo nesta aula. Incluímos desde exemplos nos quais a força total sobre a partícula em estudo é uma função apenas de sua posição até exemplos em que também aparecem forças de vínculo. Como vimos, tais reações vinculares são também incógnitas do problema e devem ser encontradas juntamente com o movimento do sistema. A única situação nova, mas que, como veremos, está contida nas discussões feitas nas aulas anteriores, é a idéia de força total sobre uma partícula dependente explicitamente do tempo. Não enfatizamos, anteriormente, em que circunstâncias isso pode ocorrer e, por esse motivo, discutiremos, nesta aula, em que circunstâncias uma força passa a depender explicitamente do tempo.

Embora esta aula seja, essencialmente, uma aula de exercícios e aplicações das leis de Newton, achamos por bem iniciá-la relembrando o conteúdo do Princípio do Determinismo Newtoniano e o que são movimentos possíveis de uma partícula. Mostramos, ainda, como esse princípio nos leva ao Princípio da Existência e Unicidade das Soluções da Segunda Lei de Newton e, dessa forma, estabelecemos o problema fundamental da Mecânica.

A Segunda Lei de Newton e os Movimentos Possíveis de um Sistema

A Lei do Determinismo Newtoniano afirma, como vimos anteriormente, que o produto da massa pela aceleração de uma partícula pertencente a um dado sistema, isto é, a força sobre essa partícula, é uma função das posições e velocidades dessa partícula e de todas as outras do sistema. Conseqüentemente, quando aplicamos a Segunda Lei de Newton a cada partícula do sistema, obtemos um sistema de equações diferenciais que devem ser resolvidas simultaneamente. As incógnitas desse sistema são funções, as funções-movimento vetoriais que as partículas do mesmo podem possuir. Existe, em geral, uma infinidade de soluções possíveis, isto é, há uma infinidade de funções que, quando substituídas nesse sistema de equações diferenciais, o tornam verdadeiro. Dizemos que tais soluções são funções-movimento possíveis das partículas desse sistema. A palavra “possíveis”, empregada anteriormente, foi utilizada para enfatizar a diferença entre os movimentos que o sistema pode descrever, mas que não descreve, necessariamente, e o movimento real que o sistema de partículas possui quando determinadas condições iniciais são dadas.

Lembre-se, por exemplo, de que quando você resolveu a equação diferencial para um oscilador harmônico unidimensional, a saber, $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, você encontrou as soluções $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$. Note que essa expressão contém duas constantes arbitrárias, C_1 e C_2 , de modo que, para quaisquer valores reais dessas constantes, ela é uma solução da equação diferencial anterior. Ou seja, $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ corresponde a uma função-movimento possível do oscilador.

Dentre as infinitas possibilidades, o movimento seguido por um oscilador harmônico, quando condições iniciais específicas são dadas, será descrito por apenas uma dessas funções-movimento, de acordo com o Princípio da Existência e Unicidade das soluções (que discutiremos novamente na próxima seção). Por exemplo, se especificarmos as condições iniciais $f_x(0) = x_0$ e $\dot{f}_x(0) = v_0$, teremos $C_1 = x_0$ e $C_2 = v_0/\omega$ e, com isso, a função-movimento real desse oscilador será dada por $x = f_x(t) = x_0 \cos(\omega t) + (v_0/\omega) \sin(\omega t)$.

Vamos apresentar a seguir dois exemplos para que fique bem clara a idéia de que, quando aplicamos a Segunda Lei de Newton às partículas de um sistema, as incógnitas são funções, isto é, que a Segunda Lei de Newton nos leva, na verdade, a um sistema de equações diferenciais e que, no caso geral, tal sistema é extremamente difícil de ser resolvido.

Exemplo 19.1

Suponha que duas partículas de massas iguais a m_1 e m_2 , respectivamente, estejam ligadas por uma mola ideal de constante elástica k e comprimento natural ℓ_0 . Suponha, ainda, que não haja nenhuma outra força atuando sobre elas, exceto a força elástica exercida pela mola, ou então, que todas as outras forças que porventura existam sejam desprezíveis aos nossos propósitos ou se cancelem quando somadas. Essa situação pode ser facilmente simulada, se colocarmos dois corpos bem pequenos, ligados por uma mola ideal sobre uma mesa lisa, cujo tampo está na horizontal, de modo que o peso de cada um deles seja anulado pelas respectivas reações normais exercidas pela superfície da mesa sobre eles; além disso, a atração gravitacional entre os corpos é desprezível.

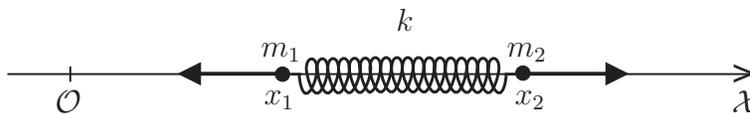


Figura 19.1: Duas partículas presas por uma mola ideal em movimento retilíneo. As forças marcadas correspondem a uma situação em que a mola está comprimida.

Consideremos, por simplicidade, apenas movimentos retilíneos ao longo da direção da mola e orientemos o eixo \mathcal{OX} ao longo dessa direção, como ilustra a **Figura 19.1**. Além disso, vamos supor que $x_2 > x_1$, ou seja, que a segunda partícula esteja mais à frente do que a primeira (levando-se em consideração o sentido positivo do eixo \mathcal{OX}).

Seja $\mathcal{F}_1(x_1, x_2)$ a força elástica sobre a primeira partícula e $\mathcal{F}_2(x_1, x_2)$ a força elástica sobre a segunda, quando as partículas se encontram nas posições x_1 e x_2 , respectivamente. Aplicando a Segunda Lei de Newton para cada partícula desse sistema, obtemos:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = \mathcal{F}_1(x_1, x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = \mathcal{F}_2(x_1, x_2) . \end{cases} \quad (19.1)$$

Supondo que a mola satisfaça à Lei de Hooke, as forças elásticas $\mathcal{F}_1(x_1, x_2)$ e $\mathcal{F}_2(x_1, x_2)$ são dadas por:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(x_1, x_2) = k(x_2 - x_1 - \ell_0) \\ \mathcal{F}_2(x_1, x_2) = -k(x_2 - x_1 - \ell_0) . \end{cases} \quad (19.2)$$

Embora as duas forças \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 na equação (19.2) tenham o mesmo módulo e sinais contrários, elas não correspondem a um par “ação e reação”. Note, por exemplo, que a reação à força $\mathcal{F}_1(x_1, x_2)$, exercida pela mola sobre a primeira partícula, é a força que esta partícula exerce sobre a mola, aplicada na mola, enquanto a força $\mathcal{F}_2(x_1, x_2)$ está aplicada na segunda partícula, e não na mola.

Substituindo em (19.1) as expressões para $\mathcal{F}_1(x_1, x_2)$ e $\mathcal{F}_2(x_1, x_2)$, que acabamos de escrever, obtemos o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - \ell_0) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - \ell_0) . \end{cases} \quad (19.3)$$

Nosso objetivo, neste momento, não é resolver esse sistema de equações diferenciais, muito embora, nesse caso, seja possível encontrar todas as suas soluções (mais adiante, você terá a oportunidade de resolvê-lo sem grandes dificuldades). No entanto, utilizaremos esse sistema de equações para tecer alguns comentários e ilustrar afirmações que fizemos anteriormente.

Note, inicialmente, que não podemos resolver cada equação diferencial separadamente, pois para encontrar um movimento possível da primeira partícula necessitamos conhecer um movimento possível da segunda e vice-versa. Em outras palavras, na equação em que aparece a aceleração da primeira, \ddot{x}_1 , está presente não apenas x_1 , mas também x_2 , o mesmo ocorrendo para a equação em que aparece a aceleração da segunda. Dizemos, nesse caso, que se trata de um sistema de equações diferenciais acopladas e, justamente por isso, tais equações devem ser resolvidas simultaneamente. Esse é o caso mais comum nos sistemas físicos, com os quais nos deparamos no cotidiano.

Mesmo tratando-se de um sistema de equações acopladas, daremos alguns exemplos simples de movimentos possíveis desse sistema (não importa como descobrimos isso, no momento). Lembre-se de que movimentos possíveis do sistema são dados por funções f_{x_1} e f_{x_2} , onde $x_1 = f_{x_1}(t)$ e $x_2 = f_{x_2}(t)$ que quando substituídas nas equações diferenciais escritas em (19.3) as convertem em identidades matemáticas.

Por exemplo, um tipo de movimento possível desse sistema é caracterizado pelas funções:

$$x_1 = Ct \quad \text{e} \quad x_2 = \ell_0 + Ct,$$

em que C é uma constante real arbitrária, pois ao substituirmos essas expressões em (19.3) encontramos imediatamente, para cada equação, a identidade $0 = 0$. No entanto, isso não significa que o sistema vá se movimentar dessa forma, pois não especificamos as condições iniciais (você saberia dizer que condições iniciais deveriam ser impostas para que esse fosse o movimento real do sistema?).

Vejam um outro exemplo de movimento possível desse sistema. Por simplicidade, considere agora o caso particular em que as massas são iguais, isto é,

$m_1 = m_2 = m$. Nesse caso, um tipo de movimento possível é caracterizado pelas funções:

$$x_1 = -\frac{\ell_0}{2} - A \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t\right) \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{\ell_0}{2} + A \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t\right), \quad (19.4)$$

em que A é uma constante positiva muito menor do que ℓ_0 , para que a Lei de Hooke não seja violada. Por substituição direta nas equações diferenciais escritas em (19.3), você poderá verificar que as expressões anteriores são, de fato, movimentos possíveis do sistema (veja o problema proposto 1).

Exemplo 19.2

Considere um sistema formado por três partículas de massas m_1 , m_2 e m_3 , respectivamente, que interagem entre si apenas gravitacionalmente, estando o sistema isolado do resto do Universo, como ilustra a **Figura 19.2**.

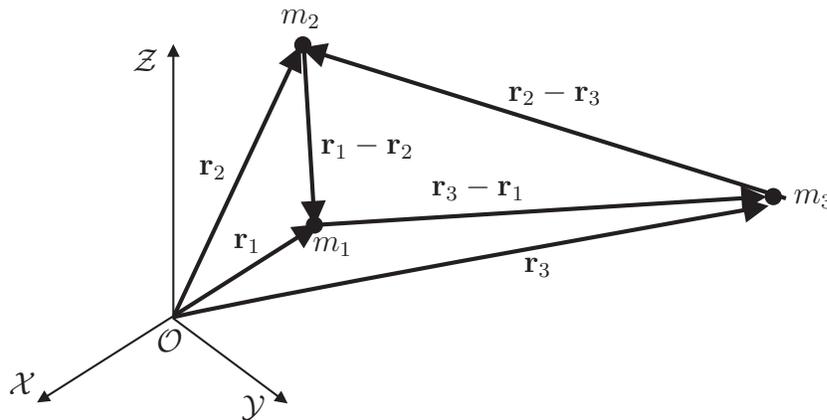


Figura 19.2: Três partículas interagindo apenas gravitacionalmente, mas, de resto, isoladas de todas as outras partículas do Universo.

Consideremos uma configuração genérica do sistema, caracterizado pelas respectivas posições das partículas \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}_3 . Usando a Segunda Lei de Newton e o Princípio da Superposição, podemos escrever:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} \\ m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} \end{cases}, \quad (19.5)$$

em que, como de costume, \mathbf{F}_{ij} é a força exercida sobre a partícula i pela partícula j . Como já vimos em aulas anteriores, a força gravitacional que uma partícula de massa m_j exerce sobre uma outra de massa m_i é dada por

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

Usando expressões desse tipo para as forças gravitacionais que aparecem em (19.6), obtemos

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^2} \frac{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} - \frac{Gm_1m_3}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3|^2} \frac{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3|} \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_2m_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^2} \frac{(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|} - \frac{Gm_2m_3}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|^2} \frac{(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|} \\ m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 = -\frac{Gm_3m_1}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|^2} \frac{(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|} - \frac{Gm_3m_2}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2|^2} \frac{(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2|} \end{cases} \quad (19.6)$$

Como no exemplo anterior, trata-se de um sistema de equações diferenciais acopladas, pois, para descobrirmos os movimentos possíveis de uma partícula qualquer do sistema, precisamos conhecer também os movimentos possíveis das outras duas. No entanto, ao contrário do caso discutido no exemplo anterior, o problema de três corpos interagindo gravitacionalmente trata-se, na verdade, de um sistema tão complicado de equações diferenciais acopladas que, até o momento, não foram encontradas todas as soluções. Apenas para situações muito particulares é que se consegue obter os movimentos possíveis das três partículas. Dentre esses casos, as situações mais notáveis e interessantes foram obtidas por **Lagrange**, supondo que o movimento dos três corpos ocorresse no mesmo plano e considerando certas condições sobre os valores de suas massas. Apenas como ilustração, daremos a seguir um exemplo de um tipo de movimento possível desse sistema numa situação extremamente particular.

Considere, por simplicidade, que as três partículas tenham a mesma massa, isto é, $m_1 = m_2 = m_3 := m$. Nesse caso, pode-se mostrar, por substituição direta em (19.6), que um tipo de movimento possível do sistema é caracterizado pelas funções

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{0} ; \quad \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_3 = A [\cos(\omega t) \mathbf{u}_x + \text{sen}(\omega t) \mathbf{u}_y] , \quad (19.7)$$

em que A e ω são constantes positivas que devem estar relacionadas entre si pela relação $\omega^2 A^3 = (5/4)Gm$ (veja o problema proposto 2). É fácil perceber que, nessa situação, a primeira partícula permanece em repouso na origem, enquanto as outras duas descrevem um movimento circular uniforme de raio A e frequência angular $\omega = (5Gm/4A^3)^{1/2}$, estando as três massas sempre alinhadas, como indica a **Figura 19.3**.

Louis de Lagrange (1736 - 1813), astrônomo e matemático francês, estudou detalhadamente o problema de três corpos interagindo gravitacionalmente e conseguiu encontrar alguns movimentos possíveis para situações particulares desse sistema, como a descrita no Exemplo 19.5, discutido mais adiante nesta aula.

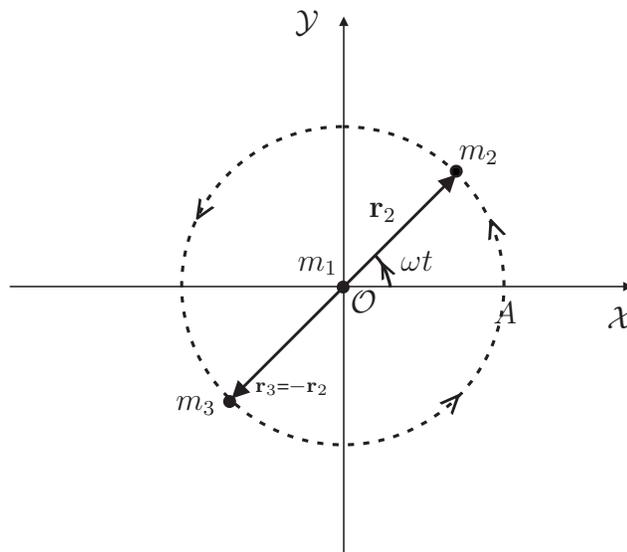


Figura 19.3: Um movimento possível para o problema de três partículas interagindo apenas gravitacionalmente, no qual uma delas está em repouso e as outras duas em MCU.

O Princípio do Determinismo Newtoniano e o Princípio da Existência e Unicidade das Soluções

Como mencionamos em diversas ocasiões, em aulas anteriores, dadas as posições e as velocidades das partículas de um certo sistema em um único instante, o movimento de todas elas fica totalmente determinado. Em outras palavras, dentre todas as (infinitas) soluções encontradas para o sistema de equações diferenciais, obtidas quando aplicamos a Segunda Lei de Newton a todas as partículas do sistema, existe apenas uma solução que satisfaz a uma certa condição inicial para o sistema. Referimo-nos a esse resultado de implicações tão profundas como Princípio da Existência e Unicidade das Soluções do sistema de equações diferenciais em questão. Pode-se mostrar que o resultado decorre do fato de a aceleração de uma partícula, num dado instante, ser uma função apenas das posições e velocidades de todas as partículas do sistema, incluindo ela própria. Nesta seção, não pretendemos demonstrar rigorosamente esse resultado, mas apenas utilizar um exemplo bem simples, para dar um argumento de plausibilidade para a afirmação feita anteriormente.

Para nossos propósitos, basta considerar um oscilador harmônico unidimensional de frequência angular ω . Nesse movimento, a aceleração da partícula, em qualquer instante, é proporcional à sua posição e dada por:

$$a_x = -\omega^2 x. \quad (19.8)$$

Suponhamos que as condições iniciais sejam dadas, isto é, que em $t = 0$ a partícula esteja na posição x_0 com velocidade v_{x0} . Desejamos mostrar que, conhecidos os valores de x_0 e v_{x0} e satisfeita a equação diferencial (19.8), o movimento subsequente da partícula estará totalmente determinado. No entanto, em lugar de resolver essa equação diferencial e mostrar que as condições iniciais selecionam apenas uma dentre as infinitas soluções matemáticas, vamos utilizar um processo iterativo que pode ser aplicado a qualquer equação diferencial na qual a aceleração seja uma função da posição da partícula e de sua velocidade (o argumento pode ser generalizado para um sistema de partículas sem maiores dificuldades; apenas a discussão fica mais longa, pelo fato de termos um número muito maior de equações).

Inicialmente, observamos que, a partir de x_0 e v_{x0} , podemos obter a posição da partícula num instante posterior ao inicial, mas infinitesimalmente próximo a este, por exemplo, num instante $t_1 = \varepsilon$, sendo ε uma quantidade infinitesimal. Designando por x_1 a posição nesse instante, temos:

$$x_1 \approx x_0 + v_{x0}\varepsilon, \quad (19.9)$$

em que supusemos que no intervalo $[0, \varepsilon]$ o movimento do oscilador é um MRU com a velocidade inicial v_{x0} . Esse resultado pode se tornar tão exato quanto desejarmos, bastando para isso tornar ε cada vez menor. Como conhecemos x_0 e v_{x0} , a posição x_1 fica totalmente determinada.

Vejam agora como obter a velocidade do oscilador no instante t_1 . Designando por v_{x1} a velocidade nesse instante e usando um raciocínio análogo ao anterior, escrevemos

$$v_{x1} \approx v_{x0} + a_{x0}\varepsilon, \quad (19.10)$$

em que a_{x0} é a aceleração inicial do oscilador e, também aqui, essa equação pode se tornar tão exata quanto queiramos. Como a_{x0} não faz parte das condições iniciais, poderíamos pensar que seria impossível obter o valor de v_{x1} . No entanto, a Segunda Lei de Newton ou, se você preferir, o Princípio do Determinismo Newtoniano, nos diz que a aceleração de uma partícula é uma função das posições e velocidades de todas as partículas do sistema, de modo que, conhecidas tais posições e velocidades, sua aceleração fica totalmente determinada. No problema que estamos considerando, isso significa dizer que a_{x0} pode ser obtida a partir da equação diferencial (19.8). Essa equação nos permite escrever:

$$a_{x0} = -\omega^2 x_0.$$

Substituindo essa expressão na equação (19.10), obtemos:

$$v_{x1} \approx v_{x0} - \omega^2 x_0 \varepsilon. \quad (19.11)$$

Observando as equações (19.9) e (19.11), vemos que fomos capazes de determinar completamente os valores de x_1 e v_{x1} a partir das condições iniciais e da Segunda Lei de Newton. Podemos, então, repetir exatamente esse procedimento, para obter a posição e a velocidade do oscilador no instante $t_2 = 2\varepsilon$, designadas, respectivamente, por x_2 e v_{x2} a partir dos valores de x_1 e v_{x1} . Temos, portanto:

$$\begin{cases} x_2 \approx x_1 + v_{x1}\varepsilon \\ v_{x2} \approx v_{x1} - \omega^2 x_1 \varepsilon, \end{cases} \quad (19.12)$$

em que usamos o fato de que $t_2 - t_1 = \varepsilon$; da equação (19.8) obtivemos o valor da aceleração do oscilador no instante t_1 , $a_{x1} = -\omega^2 x_1$. Uma vez que os valores de x_1 e v_{x1} já foram obtidos, fica claro que os valores de x_2 e v_{x2} também estão totalmente determinados. Considerando ε cada vez menor e seguindo esse raciocínio iterativo *ad infinitum*, podemos obter a posição e a velocidade do oscilador em qualquer instante de seu movimento com a precisão que desejarmos.

Como último comentário, deve ficar claro para você que o sucesso da aplicação desse tipo de raciocínio não é uma peculiaridade do problema do oscilador harmônico unidimensional. De fato, esse procedimento pode ser aplicado a qualquer sistema para o qual valha o Princípio do Determinismo Newtoniano. Desse modo, podemos afirmar:

o fato de as condições iniciais de um sistema determinarem univocamente seu movimento é uma decorrência direta do Princípio do Determinismo Newtoniano.

Além disso, esse raciocínio iterativo permite que cálculos numéricos sejam feitos para qualquer problema, por mais difíceis que sejam, como, por exemplo, o problema de três corpos, discutido no exemplo anterior.

Forças dependentes do tempo

Você já deve estar se acostumando com o fato de que as chamadas forças aplicadas a uma certa partícula são, em princípio, funções das posições e velocidades de todas as partículas do sistema, incluindo a partícula em estudo. Usamos a expressão “em princípio”, porque essas forças não dependem, necessariamente, das posições e velocidades de todas as partículas do sistema, mas podem depender apenas das posições de algumas delas, ou apenas de suas velocidades etc. Nunca é demais lembrar o caso da força gravitacional que uma partícula exerce sobre outra; tal força depende apenas das posições das duas partículas.

Na verdade, a força gravitacional exercida por uma partícula sobre outra depende apenas da posição relativa entre elas. Mais especificamente, a força gravitacional que a partícula i exerce sobre a partícula j é função apenas de $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$.

No entanto, em algumas situações, a força total aplicada a uma partícula pode depender também do instante de tempo considerado. Isso pode ocorrer por diversos motivos. A seguir, utilizaremos alguns exemplos para ilustrar situações nas quais isso pode acontecer. Nos próximos três exemplos, apenas apresentaremos situações nas quais forças dependentes do tempo aparecem, sem nos preocuparmos em encontrar a função-movimento da partícula que sofre tais forças. Já no último exemplo desta seção, consideraremos a força total sobre uma partícula em estudo como dependente única e exclusivamente do tempo e, conhecidas as condições iniciais, encontraremos a sua função-movimento.

Exemplo 19.3

Para exemplificar uma situação como a descrita anteriormente, imagine, inicialmente, que estejamos considerando o sistema formado pela Terra, a Lua e o Sol. Se esse for um sistema isolado do resto do Universo, as leis de Newton aplicadas a cada um desses corpos levam a um sistema de equações diferenciais totalmente análogo ao do exemplo 2, dado anteriormente, com m_1 , m_2 e m_3 representando, por exemplo, as massas da Terra, da Lua e do Sol, respectivamente. Suponha agora que quiséssemos levar em conta a diminuição da massa do Sol com o passar do tempo (pode-se mostrar que isso realmente ocorre, pelo fato de estar o Sol emitindo continuamente radiação eletromagnética). Nesse caso, nas equações diferenciais para as funções-movimento da Terra (equação para \mathbf{r}_1) e da Lua (equação para \mathbf{r}_2), devemos substituir m_3 pela função temporal que caracteriza essa diminuição da massa do Sol (num dado intervalo de tempo poderia ser algo do tipo $m_3 = M_0 e^{-\alpha(t-t_0)}$, com $\alpha > 0$ e M_0 sendo a massa do Sol no instante t_0). Conseqüentemente, as forças gravitacionais exercidas pelo Sol sobre a Terra e a Lua passariam a depender explicitamente do tempo. Assim, as equações diferenciais para \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 seriam dadas por:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_1 m_2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \frac{Gm_1 M_0 e^{-\alpha(t-t_0)} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_2 m_1 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} - \frac{Gm_2 M_0 e^{-\alpha(t-t_0)} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^2 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} \end{cases} \quad (19.13)$$

Observe, portanto, que a força total sobre a Terra (e o mesmo ocorre com a força total sobre a Lua) depende não apenas das posições da Terra (\mathbf{r}_1), da Lua (\mathbf{r}_2) e do Sol (\mathbf{r}_3), mas também do instante considerado.

A equação para a função-movimento do Sol (equação para \mathbf{r}_3) seria mais complicada do que as equações para as funções-movimento da Terra e da Lua, e

Pode-se mostrar que as ondas eletromagnéticas transportam energia e, ao serem emitidas pelo Sol ou por qualquer outra estrela, diminuem a sua energia. Pela Teoria da Relatividade Restrita, concebida em sua forma final por A. Einstein, em 1905, há uma equivalência entre massa e energia, de modo que, ao perder energia, o Sol também está perdendo massa, ou seja, está “emagrecendo”.

não seria obtida apenas pela substituição anterior, pois quando a massa inercial de um corpo varia com o tempo, termos adicionais podem aparecer na aplicação da Segunda Lei de Newton. No entanto, não é nosso objetivo aqui tratar desse tipo de problema e, por esse motivo, não prosseguiremos com essa discussão. Apenas utilizamos um exemplo de que a massa de um corpo varia com o tempo para ilustrar, numa situação concreta, como uma força pode passar a depender do tempo. Note, nesse caso, que o sistema não está mais isolado, pois a radiação eletromagnética emitida pelo Sol não mais pertence ao sistema Terra, Lua e Sol. Esse é o primeiro de uma série de exemplos que ilustram o fato de que, quando um sistema não está isolado, as forças aplicadas a uma determinada partícula do sistema podem depender explicitamente do tempo.

Exemplo 19.4

Vamos reconsiderar o Exemplo 19.1, mas supondo, agora, que o sistema não esteja isolado. Vamos imaginar que outras forças, além da elástica, exercida pela mola, atuem na primeira partícula, fazendo com que seu movimento seja um MRU com velocidade igual a V_1 . Não importa, nesse momento, que corpos estejam exercendo forças sobre a primeira partícula nem quais são as expressões dessas forças, ou mesmo se há reações vinculares atuando sobre ela, para que essa partícula descreva um tal MRU. Simplesmente sabemos que ela descreve, de fato, um MRU com velocidade V_1 . Escrevemos, então: $x_1 = x_{10} + V_1 t$.

De posse dessa informação, podemos nos perguntar como fica a equação diferencial para a função-movimento da segunda partícula, isto é, para x_2 . Ora, basta aplicar a Segunda Lei de Newton e, onde aparecer a função-movimento da primeira partícula, em lugar de escrever x_1 , escrevemos a expressão $x_{10} + V_1 t$, explicitando, assim, a sua dependência temporal de x_1 :

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k[x_2 - (x_{10} + V_1 t) - \ell_0]. \quad (19.14)$$

Nesse sentido, a força que atua na segunda partícula depende não apenas de sua posição, mas também do instante de tempo considerado, pois t aparece explicitamente na equação anterior.

Se, em lugar de descrever um MRU, a primeira partícula fosse obrigada a oscilar harmonicamente em torno da origem, com amplitude A_1 e frequência angular ω_1 , descrevendo o movimento harmônico $x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t)$, a equação diferencial para a função-movimento da segunda partícula seria dada por:

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k[x_2 - A_1 \cos(\omega_1 t) - \ell_0]. \quad (19.15)$$

Novamente, vemos que a força total sobre a segunda partícula depende não apenas de sua posição, mas também do instante de tempo considerado.

Exemplo 19.5

Vamos descrever, neste exemplo, uma situação em que o sistema em consideração está isolado, mas, mesmo assim, nas circunstâncias a serem descritas: a força sobre uma partícula do sistema passará a depender do tempo explicitamente. Para isso, reconsideremos o problema de três corpos interagindo apenas gravitacionalmente, apresentado no Exemplo 19.2. No entanto, vamos considerar uma situação bastante particular, na qual o movimento dos três corpos ocorre sempre no mesmo plano (escolhido como plano \mathcal{OXY}) e as massas do segundo e do terceiro são muito maiores do que a massa do primeiro, isto é, $m_2, m_3 \gg m_1$. Vamos supor ainda que o primeiro corpo esteja longe dos outros dois o suficiente para que ele não influencie o movimento dos outros dois corpos do sistema. Nessa situação, é como se o conjunto formado pelo segundo e terceiro corpos estivesse isolado do resto do Universo. Em contrapartida, ao aplicarmos a Segunda Lei de Newton ao primeiro corpo, a fim de obtermos a equação diferencial para a sua função-movimento, devemos levar em consideração as forças gravitacionais exercidas pelos outros dois corpos. Finalmente, vamos supor que os movimentos do segundo e terceiro corpos sejam conhecidos e dados, respectivamente, por:

$$\mathbf{r}_2 = R_2 (\cos\omega t \mathbf{u}_x + \text{sen}\omega t \mathbf{u}_y) \quad (19.16)$$

$$\mathbf{r}_3 = -\frac{m_2}{m_3} R_2 (\cos\omega t \mathbf{u}_x + \text{sen}\omega t \mathbf{u}_y). \quad (19.17)$$

As hipóteses feitas anteriormente correspondem a uma situação em que tanto o segundo corpo quanto o terceiro descrevem movimentos circulares uniformes. De fato, tais movimentos são soluções das equações diferenciais para \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}_3 , desde que uma certa relação entre m_2, m_3, R_2, R_3 e G seja cumprida, como você terá oportunidade de demonstrar no problema proposto 3. As trajetórias circulares desses dois corpos estão indicadas na **Figura 19.4**.

Mas como fica a equação diferencial para \mathbf{r}_1 ? Ou seja, como ficam as forças gravitacionais sobre o primeiro corpo, exercidas pelos outros dois? É provável que você já saiba responder a essas perguntas. Em analogia ao que foi feito anteriormente, basta aplicar a Segunda Lei de Newton ao primeiro corpo e, nas expressões das forças gravitacionais que atuam sobre ele, substituir \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}_3 pelas expressões dependentes explicitamente do tempo escritas no lado direito das equações (19.16) e (19.17), respectivamente. Seguindo esse procedimento, obtemos:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = - Gm_1 m_2 \frac{[\mathbf{r}_1 - R_2 (\cos\omega t \mathbf{u}_x + \text{sen}\omega t \mathbf{u}_y)]}{|\mathbf{r}_1 - R_2 (\cos\omega t \mathbf{u}_x + \text{sen}\omega t \mathbf{u}_y)|^3} - Gm_1 m_3 \frac{[\mathbf{r}_1 + \frac{m_2 R_2}{m_3} (\cos\omega t \mathbf{u}_x + \text{sen}\omega t \mathbf{u}_y)]}{|\mathbf{r}_1 + \frac{m_2 R_2}{m_3} (\cos\omega t \mathbf{u}_x + \text{sen}\omega t \mathbf{u}_y)|^3}. \quad (19.18)$$

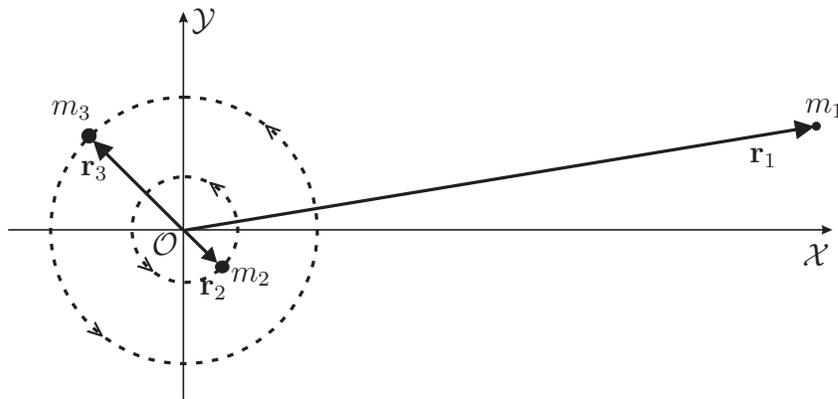


Figura 19.4: Caso particular de movimento de três corpos, no qual dois deles descrevem movimentos circulares uniformes, e o terceiro é muito pequeno e está distante o suficiente para não influenciar no movimento dos outros dois.

Note que as forças exercidas sobre o corpo de massa m_1 dependem explicitamente do tempo. Observe ainda que, nesse exemplo, o sistema formado pelos três corpos nunca deixou de ser isolado, mas mesmo assim, pelo simples fato de os movimentos dos outros dois corpos já estarem especificados, as forças sobre o primeiro corpo passaram a depender do tempo.

Tentamos mostrar, a partir dos últimos exemplos apresentados, que as forças exercidas sobre uma determinada partícula de um sistema podem depender, em princípio, não apenas das posições e velocidades das partículas do sistema, mas também do instante de tempo considerado. Muitas vezes, as forças dependem somente das posições das partículas envolvidas, como ocorre com as forças gravitacionais e elásticas. Já em outros casos, as forças podem depender apenas das velocidades dos corpos em estudo, como acontece quando levamos em consideração a força de resistência do ar. Pode ocorrer ainda que uma determinada força sobre uma partícula dependa única e exclusivamente do tempo. Partículas carregadas eletricamente, na presença de campos elétricos uniformes no espaço, mas variáveis no tempo, são exemplos desse último caso (partículas carregadas sofrendo a ação de ondas eletromagnéticas com grandes comprimentos de onda, ou mesmo dentro das placas de um capacitor que esteja sendo carregado ou descarregado etc.). Nesse caso, conhecida a força, basta integrar duas vezes, em relação ao tempo, a Segunda Lei de Newton, para obtermos os possíveis movimentos da partícula. O próximo exemplo ilustra uma dessas situações.

Exemplo 19.6

Suponhamos que a força total que atua sobre uma partícula de massa m seja uma função apenas do instante de tempo considerado e que sua expressão seja dada por $\mathcal{F}(t) = F_0 \text{sen}(\omega t) \mathbf{u}_x$, em que tanto ω quanto F_0 são constantes positivas. Desejamos encontrar o movimento dessa partícula, sabendo que, no instante inicial $t_0 = 0$, ela se encontra em repouso na origem, isto é, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ e $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$.

Com essas condições iniciais e observando que as componentes da força nas direções de \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z são nulas, é óbvio que o movimento da partícula será retilíneo, ao longo do eixo $\mathcal{O}\mathcal{X}$, ou seja, $y = 0$ e $z = 0$. Para encontrar o seu movimento ao longo desse eixo, escrevemos, a partir da Segunda Lei de Newton:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{F_0}{m} \text{sen}(\omega t) .$$

Integrando em relação ao tempo, obtemos:

$$v_x - v_0 = \int_0^t \frac{F_0}{m\omega} \text{sen}(\omega t') dt' \implies v_x = \frac{F_0}{m\omega} [1 - \cos(\omega t)] .$$

Note que v_x se anula nos instantes $t_n = n(2\pi/\omega)$, com $n = \mathbb{Z}^+$.

Usando o fato de que $dx/dt = v_x$ e integrando uma vez mais em relação ao tempo, temos:

$$x - x_0 = \int_0^t \frac{F_0}{m\omega} [1 - \cos(\omega t')] dt' \implies x = \frac{F_0}{m\omega^2} [\omega t - \text{sen}(\omega t)] . \tag{19.19}$$

A **Figura 19.5** mostra o gráfico da posição da partícula ao longo do eixo $\mathcal{O}\mathcal{X}$ versus tempo:

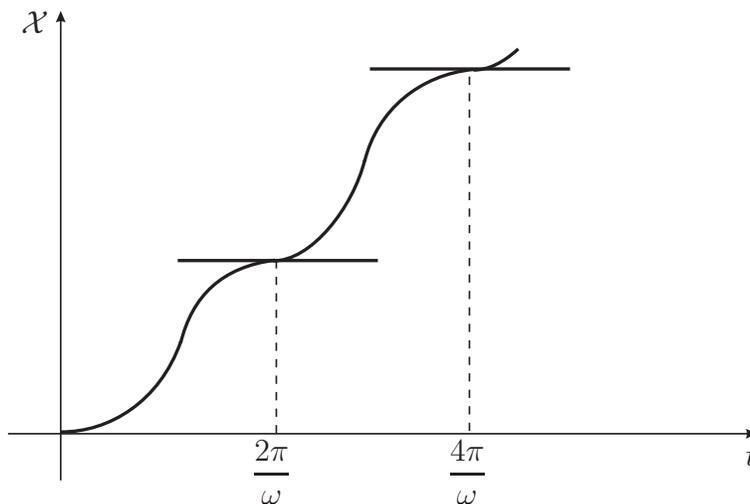


Figura 19.5: Gráfico da posição da partícula ao longo de $\mathcal{O}\mathcal{X}$ versus tempo. No gráfico, estão marcados os instantes τ , 2τ . Note que, nesses instantes e em qualquer outro múltiplo inteiro de τ , a velocidade da partícula é nula.

Vale comentar que, embora a força que atua sobre a partícula seja oscilante com o tempo ou, mais especificamente, varie harmonicamente com o tempo (com período $\tau = 2\pi/\omega$), a posição da partícula ao longo de \mathcal{OX} contém um termo que cresce linearmente com o tempo. Isso significa que, se calcularmos a velocidade média num intervalo de tempo igual a um período de oscilação da força, encontraremos um resultado não-nulo:

$$\begin{aligned} \langle v_x \rangle [t, t + \tau] &= \frac{f_x(t + \tau) - f_x(t)}{\tau} \\ &= \frac{F_0}{m\omega^2} \left\{ \frac{[\omega(t + 2\pi/\omega) - \text{sen}(\omega t + 2\pi)] - [\omega t - \text{sen}(\omega t)]}{2\pi/\omega} \right\} \\ &= \frac{F_0}{m\omega}. \end{aligned} \quad (19.20)$$

No entanto, se considerarmos outras condições iniciais, poderemos encontrar uma velocidade média nula no intervalo $[t, t + \tau]$, como você poderá verificar a partir da solução do problema proposto 4.

Aplicações da Segunda Lei de Newton em Diversas Situações

Nesta seção, aplicaremos a Segunda Lei de Newton a diversas situações. Os exemplos escolhidos contêm desde forças dependentes da posição até as chamadas reações vinculares. Lembre-se de que essas últimas deixam de ser funções das posições e velocidades das partículas do sistema e tornam-se incógnitas a serem determinadas durante a solução do problema. No entanto, seus efeitos, isto é, as restrições impostas por elas ao movimento do sistema, usualmente chamados vínculos, são utilizados também como equações na solução do problema. Incluiremos, aqui, apenas exemplos simples de reações vinculares, envolvendo fios ideais e superfícies rígidas.

Exemplo 19.7

A **Figura 19.6** mostra um pêndulo simples, de comprimento ℓ e massa m , preso ao teto de uma sala. A partícula de massa m , no extremo inferior do pêndulo, está presa a uma das extremidades de uma mola ideal de constante elástica k . A outra extremidade dessa mola está fixa a uma parede vertical. Suponha ainda que, quando o pêndulo está na vertical, a direção da mola é horizontal e ela não está distendida nem comprimida, tendo, nessa situação, comprimento ℓ_0 , como indicado na **Figura 19.6**.

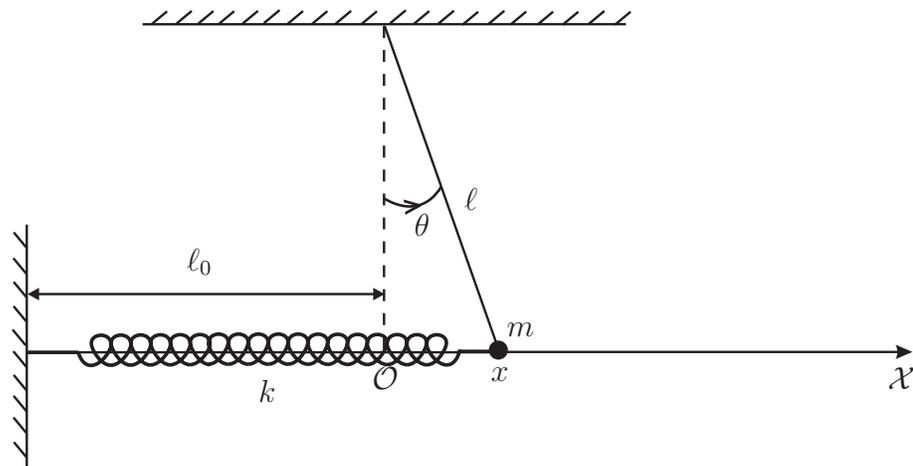


Figura 19.6: Pêndulo preso ao teto de uma sala, cujo extremo inferior está preso a uma mola ideal.

Por simplicidade, vamos considerar, neste exemplo, apenas movimentos do pêndulo que se desviem muito pouco da vertical e que estejam sempre num mesmo plano, determinado pela vertical e pela direção da mola, como indica a **Figura 19.6**. Nosso objetivo aqui é aplicar a Segunda Lei de Newton a esse sistema e encontrar os seus movimentos possíveis. Para pequenas oscilações, o movimento da partícula é aproximadamente retilíneo, ao longo do eixo \mathcal{OX} , por hipótese. Escolhendo a origem coincidindo com a posição da partícula, quando o pêndulo está na vertical, a força elástica que atua sobre a partícula, quando ela está numa posição genérica, é dada por $\mathbf{F}_e = -kx \mathbf{u}_x$. Além dessa força, atuam sobre a partícula o seu peso $\mathbf{P} = -mg \mathbf{u}_y$ e a tensão do fio $\mathbf{T} = -T \sin\theta \mathbf{u}_x + T \cos\theta \mathbf{u}_y$, onde $T = |\mathbf{T}|$.

A hipótese de pequenas amplitudes de oscilação nos permite escrever: $\sin\theta \approx x/\ell$ e $\cos\theta \approx 1$. Além disso, sendo o movimento somente ao longo de \mathcal{OX} , não há aceleração na direção de \mathcal{OY} e, conseqüentemente, $T \approx mg$. Com esses resultados, a Segunda Lei de Newton nos fornece:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_e + \mathbf{T} + \mathbf{P} \implies m\ddot{x} = -kx - mg\frac{x}{\ell},$$

ou seja,

$$\ddot{x} + \left(\omega_0^2 + \frac{g}{\ell}\right)x = 0, \quad (19.21)$$

em que definimos $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Essa equação diferencial é totalmente análoga à estudada em aulas anteriores para um oscilador harmônico simples. A única diferença é que, em lugar de ω_0 , a frequência angular dos movimentos possíveis

desse pêndulo é dada por $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + g/\ell}$. Portanto, qualquer solução da equação diferencial (19.21) pode ser escrita na forma:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha), \quad \text{com } \omega = \sqrt{\omega_0^2 + g/\ell}. \quad (19.22)$$

Na expressão anterior, A e α são constantes arbitrárias que ficam determinadas a partir das condições iniciais. O caso particular de um pêndulo simples (no qual a mola está ausente) pode ser obtido simplesmente fazendo-se $k = 0$ nas expressões anteriores. Observe que $\omega > \omega_0$, isto é, a frequência angular do pêndulo tratado neste exemplo, com a mola presente, é maior do que a de um pêndulo simples (sem a mola presente) de mesmo comprimento.

Exemplo 19.8

Consideraremos, neste exemplo, o movimento de uma partícula de massa m sujeita a uma força do tipo $\mathbf{F} = \mathcal{F}\mathbf{r} = -k\mathbf{r}$, onde $k > 0$. Já havíamos considerado esse tipo de força anteriormente, mas nos restringimos ao caso particular em que o movimento da partícula em estudo era retilíneo. Nosso objetivo aqui é considerar os movimentos sob a ação dessa força, que ocorrem num mesmo plano escolhido como \mathcal{OXY} . Esse problema é usualmente chamado oscilador bidimensional. Portanto, encontraremos os possíveis movimentos de um oscilador bidimensional. Aplicando a Segunda Lei de Newton e utilizando a independência linear entre os vetores unitários \mathbf{u}_x e \mathbf{u}_y , temos:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r} \quad \implies \quad \begin{cases} m\ddot{x} = -kx \\ m\ddot{y} = -ky \end{cases}, \quad (19.23)$$

ou seja,

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \end{cases}, \quad (19.24)$$

em que definimos $\omega = \sqrt{k/m}$. As equações diferenciais anteriores já nos são bastante familiares. Suas respectivas soluções são dadas por:

$$\begin{cases} x = A_x \cos(\omega t + \alpha_x) \\ y = A_y \cos(\omega t + \alpha_y) \end{cases}, \quad (19.25)$$

em que as quatro constantes arbitrárias A_x , A_y , α_x e α_y ficam determinadas a partir das condições iniciais. Pode-se mostrar, mas não o faremos aqui, que as trajetórias possíveis de um oscilador bidimensional são elipses, cujos centros coincidem com a origem, mas cujos semi-eixos maior e menor não coincidem, necessariamente,

com os eixos cartesianos (lembre-se de que semi-retas e círculos podem ser pensados como casos particulares de elipses). Apenas como ilustração, obtemos o movimento desse oscilador para o caso das seguintes condições iniciais:

$$x_0 = a ; v_{x0} = 0 ; y_0 = 0 \text{ e } v_{y0} \neq 0 .$$

Impondo tais condições iniciais nas soluções escritas em (19.25), obtemos (veja o problema proposto 6):

$$\begin{cases} x = a \cos(\omega t) \\ y = \frac{v_{y0}}{\omega} \sin(\omega t) \end{cases} . \quad (19.26)$$

Eliminando o tempo dessas equações, obtemos a equação cartesiana da trajetória do oscilador bidimensional para as condições iniciais dadas:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(v_{y0}/\omega)^2} = 1 ,$$

que nada mais é do que a equação cartesiana de uma elipse de semi-eixos a e $b = |v_{y0}|/\omega$ ao longo dos eixos \mathcal{OX} e \mathcal{OY} , respectivamente. A **Figura 19.7** mostra essa trajetória, supondo que $v_{y0} > 0$ e $a > b$. Nela, está indicado o sentido do movimento seguido pelo oscilador. Um sistema físico que se aproxima muito de um oscilador bidimensional é o pêndulo simples, quando se consideram apenas movimentos para os quais o ângulo do pêndulo com a vertical é bem pequeno (veja o problema proposto 9).

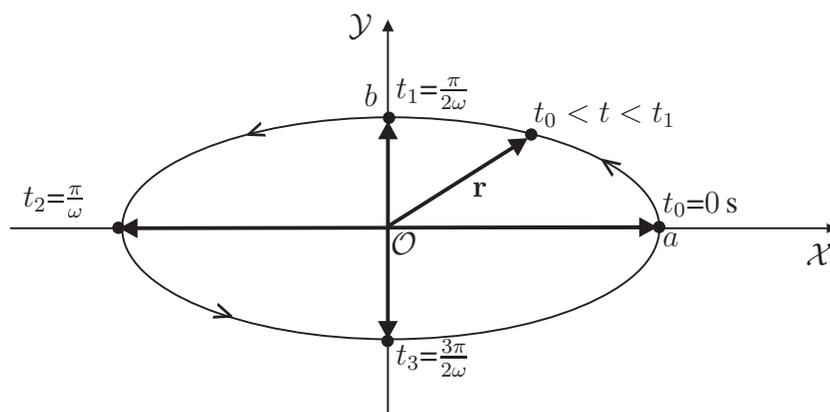


Figura 19.7: Trajetória elíptica de um oscilador bidimensional.

Exemplo 19.9

Considere duas partículas, de massas respectivamente iguais a m_1 e m_2 , que estão ligadas por meio de um fio ideal de comprimento ℓ , que passa por um pequeno buraco na superfície lisa de uma mesa. Suponha que a primeira partícula se movimente, sem nunca perder o contato com a superfície da mesa, e que descreva um MCU de raio R , enquanto a segunda permanece em repouso, a uma distância $\ell - R$ abaixo do buraco da mesa, como indica a **Figura 19.8**. Desejamos aqui responder às seguintes questões:

- 1) quais são os módulos das forças de vínculo que atuam no sistema?
- 2) qual é a relação entre o módulo da velocidade da primeira partícula (que designaremos por v_1), o raio de sua trajetória circular (R) e o módulo da aceleração da gravidade (g), para que a situação que acabamos de descrever seja verdadeira?

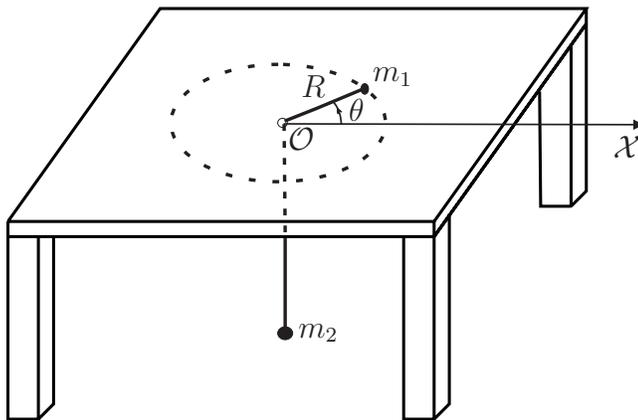


Figura 19.8: Duas partículas ligadas por um fio ideal que passa por um pequeno buraco no tampo horizontal de uma mesa; uma delas executa um MCU, enquanto a outra está em repouso.

Antes de tudo, observe que há três forças de vínculo nesse problema. São elas: a reação normal que a superfície da mesa exerce sobre a primeira partícula; a força que o fio faz sobre essa mesma partícula e a força que o fio exerce sobre a segunda partícula. Embora os efeitos das forças de vínculo sejam conhecidos (por exemplo, a reação normal exercida pela mesa sobre a primeira partícula não deixa que ela penetre na superfície da mesa), tais forças não são conhecidas *a priori*, mas deverão ser encontradas durante a solução do problema.

Vamos aplicar a Segunda Lei de Newton a cada partícula do sistema:

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{g} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{T}_1 &= m_1 \mathbf{a}_1 \\ m_2 \mathbf{g} + \mathbf{T}_2 &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (19.27)$$

em que \mathbf{T}_1 é a força que o fio exerce sobre m_1 , \mathbf{T}_2 é a força que o fio exerce sobre m_2 , \mathbf{N}_1 é a reação normal que a superfície da mesa exerce sobre m_1

e \mathbf{a}_1 é a aceleração dessa partícula. Note que, por se tratar de um fio ideal, $|\mathbf{T}_1| = |\mathbf{T}_2| =: T$. Escolhendo os eixos cartesianos, de modo que a superfície da mesa coincida com o plano $\mathcal{OX}\mathcal{Y}$, que o eixo \mathcal{OZ} aponte para cima e a origem esteja localizada no buraco da mesa, podemos escrever

$$\begin{aligned}(N_1 - m_1g) \mathbf{u}_z - T \mathbf{u}_r &= -m_1 \frac{v_1^2}{R} \mathbf{u}_r \\ (T - m_2g) \mathbf{u}_z &= \mathbf{0},\end{aligned}\quad (19.28)$$

em que \mathbf{u}_r é o unitário na direção radial e $N_1 = |\mathbf{N}_1|$. Usando, então, a independência linear entre \mathbf{u}_z e \mathbf{u}_r , concluímos:

$$\begin{aligned}N_1 &= m_1g \\ T &= m_1 \frac{v_1^2}{R} \\ T &= m_2g.\end{aligned}\quad (19.29)$$

Nesse problema, as forças de vínculo têm módulos constantes, dados pela primeira e última equações escritas em (19.29). Para obter a relação desejada entre v_1 , R e g , basta utilizar as duas últimas equações:

$$\frac{m_2}{m_1}gR = v_1^2.$$

Note que quanto maior a massa m_2 e, portanto, maior a tensão no fio, maior deverá ser a velocidade da primeira partícula, para que ela descreva um MCU com o mesmo raio R .

Exemplo 19.10

Considere um pêndulo cônico idêntico ao que consideramos na Aula 16, mas suponha agora que o bloco, na extremidade inferior do pêndulo, esteja apoiado sobre a superfície lisa de um cone cujo ângulo entre sua superfície e a vertical valha θ , como indica a **Figura 19.9**. Seja ℓ o comprimento do pêndulo, m a massa do bloco e, suponha, ainda, que esse bloco descreva um MCU com velocidade de módulo igual a v . Desejamos, essencialmente, encontrar os módulos da tensão e da reação normal sobre o bloco e descobrir qual deve ser o valor de v , para que a reação normal tenha módulo nulo.

Nesse problema, há duas forças de vínculo atuando sobre o bloco, a saber, a reação normal exercida pela superfície rígida do cone e a tensão exercida pelo fio, supostamente ideal. A partir da Segunda Lei de Newton, podemos escrever

$$\mathbf{T} + \mathbf{N} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}.$$

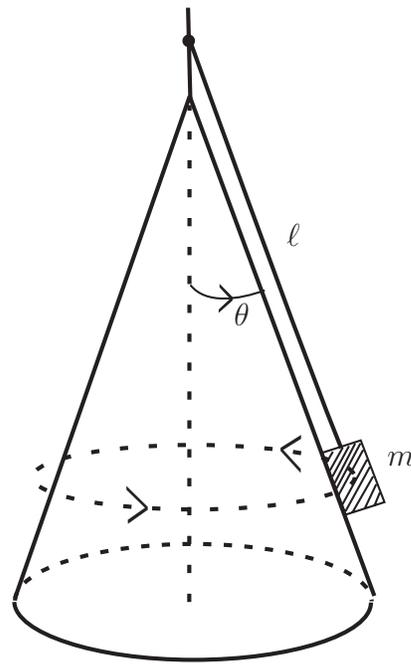


Figura 19.9: Movimento circular uniforme de um pêndulo que está apoiado sobre a superfície lisa de um cone.

Uma vez que o movimento é circular e uniforme no plano horizontal, não há componente da aceleração na direção vertical e, por conseguinte, a componente vertical da força total sobre o bloco é nula:

$$T \cos\theta + N \sin\theta = mg . \quad (19.30)$$

Já para a componente centrípeta da força, temos:

$$T \sin\theta - N \cos\theta = m \frac{v^2}{\ell \sin\theta} . \quad (19.31)$$

Para obtermos o módulo da reação normal a partir das expressões anteriores, basta multiplicarmos a equação (19.30) por $\sin\theta$ e, da equação resultante, subtrair a equação (19.31) multiplicada por $\cos\theta$. Tal procedimento nos leva ao resultado

$$N = m \left(g \sin\theta - \frac{v^2}{\ell} \cot\theta \right) , \quad (19.32)$$

em que usamos a identidade trigonométrica $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Para obtermos o módulo da tensão, substituímos a expressão de N , dada pela equação (19.32), em qualquer uma das equações (19.30) ou (19.31). O resultado é dado por

$$T = m \frac{v^2}{\ell} + mg \cos\theta . \quad (19.33)$$

Podemos analisar, agora, alguns casos particulares interessantes. Vejamos, inicialmente, o caso em que o bloco se encontra em repouso. Nesse caso, temos $v = 0$ e, conseqüentemente, as equações (19.32) e (19.33) se reduzem, respectivamente, às equações

$$\begin{aligned} N &= mg \operatorname{sen}\theta \\ T &= mg \operatorname{cos}\theta . \end{aligned} \quad (19.34)$$

O resultado anterior pode ser verificado diretamente, projetando-se o peso do bloco ao longo das direções do fio e da reação normal e usando o simples fato de que, para $v = 0$, $\mathbf{T} + \mathbf{N} + m\mathbf{g} = \mathbf{0}$.

Vejamos, agora, como o módulo da reação normal varia com o módulo da velocidade do bloco. Analisando a equação (19.32), observe que, para ℓ e θ fixos, à medida que v cresce a partir de zero, N decresce a partir do valor $mg \operatorname{sen}\theta$. Isso ocorrerá até um valor crítico v_c , para o qual o valor de N se tornará nulo. Para encontrar v_c , basta impor à equação (19.32) a condição $N = 0$:

$$0 = m \left(g \operatorname{sen}\theta - \frac{v_c^2}{\ell} \operatorname{cotg}\theta \right) \implies v_c = g\ell \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{cos}\theta} . \quad (19.35)$$

Exemplo 19.11

Um carro se movimenta ao longo de uma pista circular, cuja superfície está inclinada de θ em relação ao plano horizontal. Ele descreve um MCU cujo raio de curvatura vale R , como indica a **Figura 19.10**.

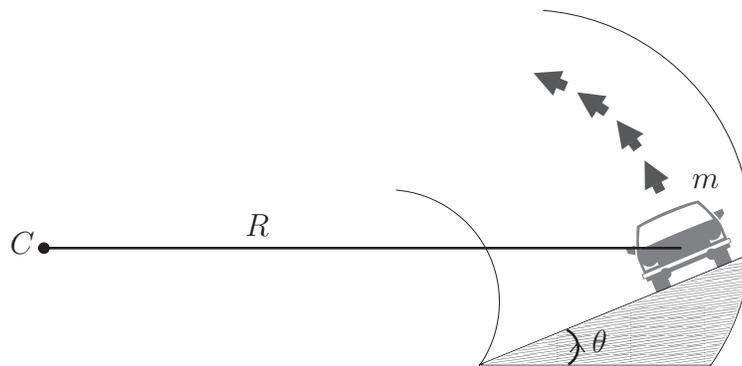


Figura 19.10: Carro em movimento circular uniforme numa pista inclinada.

Suponha que exista atrito entre os pneus e a pista, sendo μ_e o coeficiente de atrito estático correspondente. No entanto, considere que a força de atrito não possua componente ao longo da direção do movimento do carro, isto é, suponha que a força de atrito sobre os pneus seja paralela à superfície da pista e perpendicular à velocidade do carro. Essa hipótese é bastante razoável, pois, como o carro

se movimentar com MCU, o módulo de sua velocidade permanece constante (se o motorista apertasse o acelerador ou o freio, apareceria uma componente da força de atrito ao longo da direção do movimento do carro). Desejamos analisar aqui algumas situações interessantes. Mais especificamente, gostaríamos de responder às seguintes perguntas:

- 1) qual deve ser o módulo da velocidade do carro, para que a força de atrito sobre os pneus seja nula?
- 2) qual é o valor crítico para o módulo da velocidade do carro, acima do qual ele começa a derrapar?

Como primeiro comentário, devemos dizer que, embora o carro não seja um sistema rígido (os pneus giram em relação ao eixo etc.), vamos tratá-lo aproximadamente como tal. Para responder ao primeiro item, basta aplicar a Segunda Lei de Newton, e lembrar que o carro não possui componente vertical de aceleração, mas possui uma componente centrípeta não-nula, uma vez que descreve um MCU. Sendo v_0 o módulo da velocidade do carro, temos, então:

$$\mathbf{N} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} N \cos\theta = mg \\ N \sin\theta = m\frac{v_0^2}{R} \end{cases}.$$

Dividindo a equação de baixo pela de cima, obtemos:

$$v_0^2 = gR \operatorname{tg}\theta. \quad (19.36)$$

A partir da equação anterior, vemos, por exemplo, que quanto mais veloz estiver o carro, mais inclinada deverá ser a pista, para que ele descreva um MCU com o mesmo raio R sem o auxílio da força de atrito exercida pela pista sobre os pneus.

Em contrapartida, para uma mesma inclinação da pista em relação à horizontal, quanto maior for a velocidade maior será o raio do MCU descrito pelo carro. Portanto, se um carro entrar numa curva circular de raio R com uma velocidade maior do que $v_0 = \sqrt{gR \operatorname{tg}\theta}$, ele tenderá a derrapar para cima, a não ser que a força de atrito estática seja grande o suficiente para mantê-lo na curva de raio R . Suponhamos, então, que isso aconteça, isto é, que o carro esteja com uma velocidade de módulo $v > v_0$ mas que, mesmo assim, devido ao atrito entre os pneus e a superfície da pista, ele descreva um MCU de raio R . Calculemos, nesse caso, o módulo da força de atrito em termos de v , θ , m , g e R .

Como o carro tende a derrapar, deslizando para cima da pista, a força de atrito, que é tangente às superfícies em contato, aponta para baixo. Da Segunda Lei de Newton, temos:

$$\mathbf{N} + \mathbf{f}_{at} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a} \implies \begin{cases} N \cos\theta - f_{at}\sin\theta - mg = 0 \\ N \sin\theta + f_{at}\cos\theta = m\frac{v^2}{R} . \end{cases}$$

Obtemos, assim, um sistema de duas equações e duas incógnitas, (N e f_{at}). Da primeira delas, escrevemos:

$$N = \frac{mg + f_{at}\sin\theta}{\cos\theta} . \quad (19.37)$$

A substituição da equação (19.37) na segunda equação do sistema anterior nos leva a:

$$\left(\frac{mg + f_{at}\sin\theta}{\cos\theta}\right)\sin\theta + f_{at}\cos\theta = m\frac{v^2}{R}$$

e, conseqüentemente, ao resultado

$$f_{at} = m\frac{v^2}{R}\cos\theta - mg\sin\theta . \quad (19.38)$$

Note que essa última equação é consistente com o resultado escrito em (19.36), pois, se substituirmos na equação anterior $v = v_0$, com v_0 dado pela equação (19.36), obteremos um valor nulo para f_{at} , como esperado.

Para obter o valor de N , devemos substituir em (19.37) o valor de f_{at} , dado por (19.38). Com isso, é fácil mostrar que (verifique como exercício):

$$N = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}\sin\theta . \quad (19.39)$$

Analisando a equação (19.38), vemos que se v cresce a partir do valor $v_0 = gR\tg\theta$, o módulo da força de atrito f_{at} cresce a partir do valor nulo. No entanto, f_{at} não pode aumentar indefinidamente, pois, como sabemos, existe um valor máximo para o módulo da força de atrito entre duas superfícies em contato, dado por $\mu_e N$. Portanto, existe um valor máximo para v , que designaremos v_{max} , acima do qual o carro derrapará sobre a pista, no sentido para cima. Para descobrirmos o valor de v_{max} , basta substituir em (19.38) o valor máximo do módulo da força de atrito, ou seja, basta escrever $f_{at} = \mu_e N$, com N dada pela equação (19.39). Seguindo esse procedimento, obtemos:

$$\mu_e \left(mg\cos\theta + m\frac{v_{max}^2}{R}\sin\theta \right) = m\frac{v_{max}^2}{R}\cos\theta - mg\sin\theta ,$$

ou seja,

$$v_{max}^2 = gR \frac{(\sin\theta + \mu_e\cos\theta)}{(\cos\theta - \mu_e\sin\theta)} . \quad (19.40)$$

Como último comentário a respeito desse exemplo, note que, se v decrescer a partir do valor $v_0 = gR \operatorname{tg}\theta$, o módulo da força de atrito também aumenta a partir do valor nulo, porém com uma diferença importante em relação ao caso que acabamos de tratar: a força de atrito sobre os pneus do carro aponta para cima, pois o carro tende a derrapar para baixo. Supondo que a inclinação da pista em relação à horizontal seja maior do que o ângulo crítico $\theta_c = \operatorname{arctg}\mu_e$, haverá um valor mínimo v_{min} para o módulo da velocidade do carro, abaixo do qual ele irá derrapar para baixo na pista. O cálculo de v_{min} é pedido problema proposto 11.

Exemplo 19.12

Considere um pequeno bloco de massa m que está apoiado sobre um bloco maior, de massa M . Esse último, por sua vez, está apoiado sobre uma superfície horizontal lisa. Sobre o bloco maior atua uma força \mathbf{F} , horizontal e para a direita, e de módulo constante $F = |\mathbf{F}|$, como indica a **Figura 19.11**.

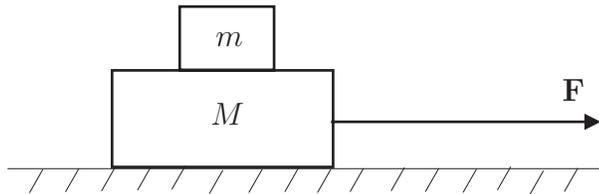


Figura 19.11: Um pequeno bloco de massa m em repouso relativo ao bloco de massa M que se movimenta em relação à superfície horizontal lisa.

Embora não haja atrito entre o bloco maior e a superfície horizontal, existe atrito entre as superfícies dos dois blocos. Seja μ_e o coeficiente de atrito estático entre essas duas superfícies. Quando a força \mathbf{F} é aplicada, os blocos se encontram em repouso. Desejamos saber qual é o maior valor que F pode ter, sem que haja deslizamento entre os blocos.

Da Segunda Lei de Newton, aplicada ao sistema formado pelos dois blocos, podemos escrever

$$F = (M + m)a ,$$

em que a é o módulo da aceleração do sistema ao longo da direção de \mathbf{F} . A equação anterior mostra que quanto maior a aceleração, maior o valor de F necessário para manter o sistema com tal aceleração. No entanto, a condição para que não haja deslizamento entre os blocos impõe uma restrição sobre a aceleração: seu módulo não pode ser superior a um certo valor, pois da Segunda Lei de Newton, aplicada ao bloco de cima, temos $f_{at} = ma$, e como f_{at} pode valer, no máximo, $\mu_e N_m$, em que N_m é o módulo da reação normal exercida pelo bloco de

baixo sobre o de cima, o maior valor possível para a é dado por $a_{max} = \mu_e N_n / m$. Usando novamente a Segunda Lei de Newton para o bloco de cima, e observando que este não possui componente vertical de aceleração, podemos escrever: $N_m = mg$. Com esses resultados, obtemos o valor máximo de F , a saber:

$$F_{max} = (M + m)a_{max} = \mu_e(M + m)g .$$

Ou seja, se o módulo de F possuir valores entre zero e $\mu_e(M + m)g$, os blocos se moverão juntos, sem que haja deslizamento entre eles. É claro que, quanto maior for F , maior será o módulo da força de atrito entre os blocos e, no caso em que $F = \mu_e(M + m)g$, o módulo da força de atrito terá seu valor máximo. No entanto, caso F excedesse esse valor, a força total sobre o bloco de cima, para que ele não deslizesse sobre o bloco de baixo, deveria ter um módulo superior ao valor máximo permitido para o módulo da força de atrito. Justamente por esse motivo, para valores de F superiores a $\mu_e(M + m)g$, passa a existir deslizamento entre os blocos, sendo que a aceleração do bloco de baixo possuirá uma aceleração de módulo maior do que a do bloco de cima (veja o problema proposto 12).

Resumo

Embora esta aula tenha sido, essencialmente, de aplicações das leis de Newton, aproveitamos para lembrar, no início dela, alguns pontos muito importantes do estudo da Mecânica, a saber: o significado do Princípio do Determinismo Newtoniano e qual é o problema fundamental da Mecânica. Mostramos, ainda, por meio de um exemplo simples, que uma consequência natural do Princípio do Determinismo Newtoniano é o fato de que as condições iniciais de um sistema, isto é, as posições e as velocidades de todas as partículas do sistema num dado instante determinam, univocamente, o movimento subsequente desse sistema. Em seguida, utilizamos alguns exemplos para explicar de que modo uma força passa a depender explicitamente do tempo. Vimos que isso pode ocorrer quando as funções-movimento de uma ou mais partículas do sistema forem conhecidas (não importa como). Desse ponto da aula em diante, passamos a fazer aplicações das leis de Newton em diversas situações, envolvendo não apenas forças que dependem somente das posições das partículas do sistema, mas também as chamadas forças de vínculo como, por exemplo, as reações normais exercidas por superfícies rígidas ou tensões feitas por fios ideais. Obviamente, poderíamos ter feito mais aplicações nesta aula, incluindo um número maior de exemplos, já que são incontáveis os problemas que a Mecânica pode oferecer. No entanto, procuramos escolher os exemplos de forma que, mesmo com um pequeno

número deles, pudéssemos abranger os pontos principais das leis de Newton e deixar para você a tarefa de fazer muitas outras aplicações, a começar pelas questões e problemas propostos a seguir.

Questionário

1. Crie alguns exemplos nos quais uma partícula sofre a ação de várias forças. Escolha seus exemplos de modo que haja, pelo menos, uma força dependente de sua posição e uma reação vincular. Identifique as reações vinculares que aparecerem em cada exemplo.
2. Explique em que circunstâncias uma força que atua sobre uma partícula pode depender explicitamente do tempo. Dê um exemplo.
3. É muito comum alunos confundirem a reação normal que uma superfície rígida exerce sobre um corpo colocado sobre ela com a reação (do par de ação e reação) ao peso do corpo. Para que fique evidente que a reação ao peso de um corpo não é a reação normal exercida pela superfície sobre ele, dê alguns exemplos em que o módulo dessa força é maior do que o módulo do peso, e outros tantos em que é menor do que o módulo do peso.
4. Dê uma explicação qualitativa simples para o fato de o período do pêndulo tratado no Exemplo 19.7 ser menor do que o de um pêndulo simples, no qual a mola está ausente.
5. Reconsidere a situação discutida no Exemplo 19.8, no qual uma partícula de massa m , que só pode se movimentar no plano \mathcal{OXY} , está sujeita a uma força $\mathbf{F} = -kr$. Descreva, qualitativamente, qual o movimento dessa partícula, caso ela seja abandonada em repouso de um ponto qualquer do plano \mathcal{OXY} , não necessariamente pertencente a um dos eixos cartesianos.
6. Reconsidere o problema discutido no Exemplo 19.12, mas suponha que $M > m$. Suponha, ainda, que não haja deslizamento entre os blocos. Em que situação o módulo da força de atrito entre os blocos é maior, com o mais pesado embaixo ou em cima?

Problemas propostos

1. Verifique, por substituição direta, que as expressões escritas em (19.4) correspondem, de fato, a movimentos possíveis do sistema descrito no Exemplo 19.1. Ou seja, mostre que essas expressões são soluções do sistema de equações diferenciais escrito em (19.3). Interprete tais soluções fazendo, por exemplo, desenhos que indiquem os movimentos seguidos por cada partícula do sistema.
2. Reconsidere o problema dos três corpos, discutido no Exemplo 19.2, mas suponha que as massas dos três corpos sejam todas iguais a m . Mostre que as expressões para \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}_3 , escritas em (19.7), correspondem a um movimento possível desse sistema, somente se as constantes A e ω estiverem relacionadas entre si pela relação $\omega^2 A^3 = (5/4)Gm$.
3. Verifique que as equações (19.16) e (19.17) são, de fato, soluções das equações diferenciais para as funções-movimento \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}_3 , escritas em (19.6), se desprezarmos as forças gravitacionais exercidas pelo primeiro corpo sobre os outros dois e se uma certa relação entre as constantes m_2 , m_3 , R_2 , R_3 e G for cumprida. Encontre essa relação.
4. Repita o Exemplo 19.6, considerando $x_0 \neq 0$ e $v_{x0} \neq 0$.
5. Repita o Exemplo 19.6, considerando agora que a força total sobre a partícula seja dada por $\mathcal{F}(t) = F_0 \cos(\omega t) \mathbf{u}_x$.
6. Considere o movimento do oscilador harmônico bidimensional, discutido no Exemplo 19.8. Encontre os movimentos seguidos por esse oscilador para as seguintes condições iniciais:
 - (a) $x_0 = a$; $v_{x0} = 0$; $y_0 = 0$ e $v_{y0} \neq 0$. Nesse caso, verifique se a sua resposta coincide com a escrita no Exemplo 19.8.
 - (b) $x_0 = 0$; $v_{x0} \neq 0$; $y_0 = b$ e $v_{y0} = 0$. Supondo que $v_{x0} > 0$, faça um esboço, nesse caso, da trajetória seguida por esse oscilador

Verifique, em ambos os casos, que são trajetórias elípticas, com os semi-eixos da elipse coincidindo com os eixos cartesianos.

7. Considere, novamente, o problema do oscilador harmônico bidimensional tratado no Exemplo 19.8. Encontre o movimento desse oscilador para as condições iniciais dadas a seguir:

(a) $x_0 = a$; $y_0 = 0$; $v_{x0} = 0$ e $v_{y0} = \omega a$, ($\omega^2 = k/m$).

(b) $x_0 = a$; $y_0 = a$; $v_{x0} = \omega a$ e $v_{y0} = -\omega a$, ($\omega^2 = k/m$).

Verifique que, em ambos os casos, a trajetória seguida pela partícula é circular. Encontre seus respectivos raios. Faça, em cada caso, um esboço da trajetória da partícula indicando, em seu desenho, o sentido de seu movimento, a sua posição inicial e a sua velocidade inicial.

8. Dê condições iniciais para o oscilador harmônico bidimensional, tratado no Exemplo 19.8, tais que a trajetória seja uma elipse com o semi-eixo maior na direção da bissetriz entre os eixos cartesianos \mathcal{OX} e \mathcal{OY} , isto é, formando um ângulo de 45° com o eixo \mathcal{OX} .

Sugestão: basta escolher, por exemplo, uma posição inicial na bissetriz entre \mathcal{OX} e \mathcal{OY} e uma velocidade inicial perpendicular a essa direção, mas com um módulo menor do que ω vezes a distância desse ponto à origem (pense por quê).

9. Considere o movimento genérico de um pêndulo cônico de comprimento ℓ , mas suponha que o ângulo do fio com a vertical seja pequeno o suficiente para que o movimento do corpo (de massa m) no extremo inferior do pêndulo seja, com ótima aproximação, um movimento plano, no plano $\mathcal{OX}\mathcal{Y}$. Escolha os eixos de tal forma que, na situação de equilíbrio, o corpo esteja na origem. Utilizando a Segunda Lei de Newton e as aproximações válidas para pequenos ângulos, mostre que o movimento desse pêndulo é em tudo análogo ao do oscilador harmônico bidimensional, discutido no Exemplo 19.8. A única diferença é que, no caso em consideração, a frequência angular é dada por $\omega = \sqrt{g/\ell}$ e não por $\sqrt{k/m}$, como Exemplo 19.8.

10. Este problema se baseia no Exemplo 19.10 e tem por objetivo fazer com que você compreenda um pouco mais a situação física descrita.

(a) Obtenha o resultado (19.33) substituindo a equação (19.32) na equação (19.30).

(b) Reobtenha o resultado (19.33), mas agora substituindo a equação (19.32) na equação (19.31).

- (c) Analise qualitativamente o que acontece com os valores de N e T nas equações escritas em (19.34), quando θ varia. Inclua na sua discussão os casos limites em que $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$. Interprete esses dois últimos resultados.
- (d) Descreva qualitativamente o que acontece ao imprimirmos ao pêndulo uma velocidade maior do que v_c .
- (e) Mostre que o resultado escrito em (19.35) está de acordo com a discussão feita para o pêndulo cônico usual, isto é, sem nenhuma superfície rígida presente embaixo do bloco, tratado na Aula 16.
11. Reconsidere o Exemplo 19.11. Considere ainda que o ângulo de inclinação com a horizontal seja maior do que o ângulo crítico, isto é, $\theta > \arctg\mu_e$, de modo que, se abandonássemos o carro em repouso na pista inclinada, ele deslizaria para baixo. Com essas hipóteses, determine o valor do módulo da velocidade do carro, abaixo do qual ele derraparia para baixo na pista, durante a curva.
12. Considere o problema dos dois blocos, discutido no Exemplo 19.12, mas agora suponha que a força \mathbf{F} tenha um módulo superior ao valor $\mu_e(M + m)g$, de modo que haverá deslizamento entre os blocos. Sendo μ_c o coeficiente de atrito cinético, determine os módulos das acelerações de cada bloco.
13. Considere uma superfície lisa dada pela metade inferior de uma casca esférica de raio R . Suponha que uma partícula de massa m deslize em seu interior descrevendo MCU caracterizado pelo ângulo θ , indicado na **Figura 19.12**.

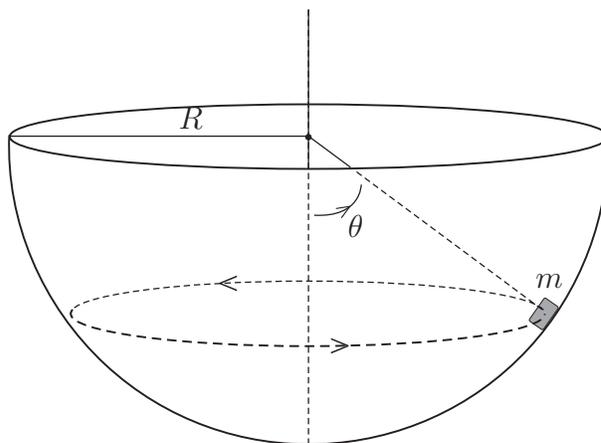


Figura 19.12: Partícula em MCU no interior de uma superfície esférica lisa.

Calcule o período de revolução, isto é, o tempo gasto pela partícula para dar uma volta completa e verifique que, em contraste com o exemplo feito na Aula 16 para o caso de um parabolóide de revolução, ele é diferente para diferentes órbitas circulares, isto é, para diferentes valores de θ . Você percebe alguma analogia com o problema do pêndulo cônico, discutido na Aula 18?

14. Um bloco de massa m está em repouso sobre uma rampa inclinada de um ângulo $\theta = \arctg^{-1}(\mu_e)$, onde μ_e é o coeficiente de atrito estático entre a superfície da rampa e o bloco. Portanto, o bloco está na iminência de entrar em movimento. Perturba-se ligeiramente o bloco, de modo que ele comece a descer a rampa com um movimento uniformemente acelerado. Sendo μ_c o coeficiente de atrito cinético entre as superfícies em contato, mostre que o módulo da aceleração do bloco pode ser escrito na forma:

$$a = \frac{(\mu_e - \mu_c)}{\sqrt{1 + \mu_e^2}} g .$$

15. Considere um sistema formado por um pequeno bloco de massa m e uma mola de constante elástica k e massa desprezível, no qual um dos extremos da mola está preso ao bloco, e o outro, a um ponto fixo. Imagine que o sistema seja colocado sobre uma rampa inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal, como ilustra a **Figura 19.13**. Considere desprezível o atrito entre o bloco e a superfície da rampa e suponha que a mola satisfaça à lei de Hooke.

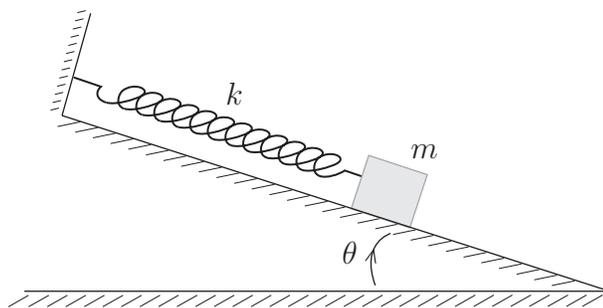


Figura 19.13: Sistema massa-mola oscilando sobre uma rampa inclinada sem atrito.

- Calcule quanto a mola está distendida quando o sistema se encontra na situação de equilíbrio.
- Suponha que o sistema seja colocado para oscilar com pequenas amplitudes de oscilação. Você saberia responder, sem fazer praticamente nenhuma conta, se o período das oscilações com a rampa inclinada é igual, maior ou menor do que o período com a rampa na horizontal? Calcule esse período e verifique se a sua intuição estava correta.

Perturbar o bloco, aqui, significa introduzir uma pequeníssima força adicional, isto é, além das que já atuam sobre ele, apenas com a finalidade de tirá-lo do repouso, fazendo com que comece a descer a rampa. Porém, essa perturbação é tão pequena, que podemos considerar a velocidade inicial do bloco como nula.

16. Considere uma calha cilíndrica de raio R e um pequeno bloco de massa m que desliza em seu interior descrevendo, por hipótese, um movimento plano. Seja θ o ângulo entre a semi-reta que vai do bloco ao eixo do cilindro e é perpendicular a este eixo e a direção vertical, como indica a **Figura 19.14**. O atrito entre o bloco e a superfície da calha é desprezível.

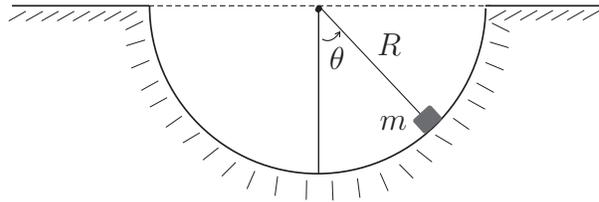


Figura 19.14: Pequeno bloco deslizando sem atrito sobre uma calha cilíndrica de raio R .

- (a) Utilizando o arco percorrido na trajetória s , tomando como origem o ponto mais baixo da trajetória do bloco e a Segunda Lei de Newton, mostre que:

$$\ddot{s} = -g \operatorname{sen} \theta .$$

- (b) Essa equação diferencial é muito complicada. Supondo, então, pequenas oscilações, isto é, $|\theta| \ll 1$ e relacionando s e θ , obtenha a nova equação diferencial, válida apenas para pequenas oscilações:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \theta = 0 .$$

- (c) Escreva a solução geral dessa equação diferencial e obtenha o movimento real seguido por esse bloco, no caso de ele ser abandonado do repouso de um ângulo θ_0 .
17. Considere o problema de duas massas, m_1 e m_2 , presas por uma mola de constante elástica k e massa desprezível, em movimento retilíneo sobre uma superfície horizontal lisa, como discutido no Exemplo 19.1. Aplicando a Segunda Lei de Newton para cada massa, obtivemos, no texto, as equações diferenciais escritas em (19.3). Pois bem, some essas equações e interprete o resultado (lembre-se da definição de centro de massa de um sistema).
18. Um brinquedo comum em parques de diversão é o chamado “cilindro da morte”. Esse brinquedo consiste em um grande cilindro de raio R , onde as pessoas entram quando ele ainda está em repouso e se posicionam encostando-se na parede interna do cilindro que começa, então, a girar em torno de seu eixo vertical com velocidades angulares cada vez maiores (as pessoas

vão sentido uma força cada vez maior entre a parede interna do cilindro e suas costas). Depois que a velocidade angular fica superior a um valor crítico ω_c , o chão do cilindro se abre, de modo que os pés das pessoas não mais tocam o chão, apenas as suas costas permanecem em contato com a parede interna do cilindro. Sendo μ_e o coeficiente estático entre as costas de uma pessoa e a parede do cilindro, determine ω_c .

19. Se a Terra for considerada uma esfera homogênea, de massa M e raio R , pode-se mostrar que, dentro dela, a força gravitacional exercida por ela sobre uma partícula de massa m é dada por:

$$\mathbf{F} = -mg \frac{r}{R} \mathbf{u}_r,$$

onde $g = GM/R^2$ é o módulo da aceleração da gravidade na superfície terrestre, r é a distância da partícula de massa m ao centro da Terra e \mathbf{u}_r , como de costume, o vetor unitário na direção radial, tomando o centro da Terra como origem dos eixos. Imagine, agora, que se faça um túnel retilíneo, bem estreito, de um lado a outro da Terra, passando pelo seu centro.

- (a) Mostre que, se uma partícula fosse abandonada em repouso em uma das extremidades desse túnel, ela descreveria um movimento harmônico simples dentro dele. Suponha que a partícula não toque as paredes do túnel.
- (b) Calcule o tempo gasto para a partícula atingir um ponto diametralmente oposto à superfície terrestre (se você fez corretamente os cálculos, deve estar impressionado com a rapidez com que esse percurso seria feito e, certamente, deve estar pensando em por que não se constroem “trens gravitacionais” utilizando essa idéia, certo?).
20. Uma pessoa consegue se mover verticalmente para cima, vencendo a gravidade, com uma corda do seguinte modo: um dos extremos da corda está preso no corpo da pessoa; a corda passa, então, por uma polia fixa e lisa, de modo que não há atrito entre a corda e a polia e volta até a pessoa, que a segura pelas mãos, como ilustra a **Figura 19.15** (a polia tem apenas o papel de mudar a direção da corda, no caso de um ângulo igual a π radianos).
- (a) Supondo, inicialmente, que a pessoa esteja em repouso, que seu peso tenha módulo igual a 600N e que os dois trechos da corda, que vão da polia até a pessoa, sejam paralelos, calcule o módulo da tensão no fio.

- (b) Imagine, agora, que a pessoa esteja puxando a corda, de tal modo que o módulo de sua aceleração, nesse instante, seja $(1/20)g$. Calcule o módulo da tensão no fio nesse instante.

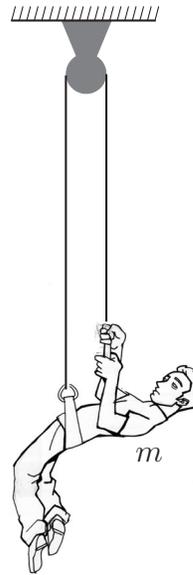


Figura 19.15: Pessoa se movendo verticalmente com o auxílio de uma corda passando por uma roldana ideal.

21. Considere o movimento retilíneo de uma partícula, ao longo do eixo \mathcal{OX} , por hipótese, sob a ação da força total $F = -bv_x$, $b > 0$. Suponha que em $t = 0$ s, a sua velocidade seja v_{x0} . Queremos que você obtenha a velocidade da partícula em um instante qualquer de seu movimento, por meio de um procedimento análogo ao que foi discutido no texto, para o caso de um oscilador harmônico unidimensional. Para isso, siga os passos sugeridos:
- (a) Usando a definição de aceleração e a Segunda Lei de Newton, calcule a velocidade v_{x1} da partícula no instante $t_1 = \varepsilon$ (ε infinitesimal) em termos de v_{x0} , ε , b e da massa m da partícula.
- (b) Usando um raciocínio análogo, obtenha as velocidades v_{x2} , v_{x3} , ..., v_{xn} nos instantes $t_2 = 2\varepsilon$, $t_3 = 3\varepsilon$, ..., $t_n = n\varepsilon$, respectivamente, e mostre que v_{xn} pode ser escrita na forma

$$v_{xn} \approx \left(1 - \frac{b}{m}\varepsilon\right)^n v_{x0} .$$

- (c) A fim de obter o limite do contínuo e encontrar a velocidade v_x no instante genérico t , tome o limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, mas de tal modo que $n\varepsilon = t$. Substitua $\varepsilon = \frac{t}{n}$ no resultado do item anterior, tome esse limite e use a fórmula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{-\alpha},$$

e mostre, finalmente, que

$$v_x = e^{-(b/m)t} v_{x0}.$$

Auto-avaliação

Esta foi, essencialmente, uma aula de exercícios, na qual aplicamos a Segunda Lei de Newton em diversas situações para obter o movimento do sistema físico em questão. Nesse sentido, essa aula consistiu na aplicação de conceitos estudados em aulas anteriores e, presumivelmente, sobre as quais você já deve ter refletido bastante. Portanto, você não deve ter tido dificuldade em entender a maioria dos exemplos feitos no texto. Isso não significa que você consiga fazer todos os problemas propostos sem dificuldade, pois alguns deles são difíceis. Mas, no mínimo, você deve ser capaz de resolver, pelo menos, um problema correspondente a cada tópico abordado nos exemplos apresentados na aula. No entanto, sugerimos que você tente fazer e discutir com seus colegas o maior número possível de problemas da lista proposta.

Aula 20 – E Newton tinha razão...

Objetivos

- Observar e analisar o movimento de um corpo que desce um plano inclinado.
- Determinar a incerteza de uma medida indireta.
- Comparar um resultado experimental com um resultado obtido a partir de um modelo teórico.
- Medir o valor da aceleração da gravidade.
- Verificar a distribuição gaussiana dos valores obtidos num experimento.

Introdução

Nesta aula, observaremos, analisaremos e mediremos algumas grandezas físicas relevantes no estudo de um movimento uniformemente acelerado de um carrinho sobre um trilho de ar inclinado em relação à direção horizontal. É muito importante, portanto, que você reveja nas aulas teóricas o movimento de um corpo sobre um plano inclinado sem atrito. Como os resultados das grandezas medidas nessa prática são obtidos por métodos indiretos, teremos de seguir procedimentos que levem em consideração a propagação de erros nas medidas. Nesse sentido, será muito útil que você leia o apêndice sobre medidas indiretas, que se encontra no final desta aula.

Você certamente realizará este experimento em um laboratório fixo na Terra, no qual medirá posições ao longo de um eixo na direção do trilho de ar em intervalos de tempo definidos pelo centelhador. Você usará um referencial que, para o nosso experimento, pode ser considerado inercial. Com isso, estará usando a Primeira Lei de Newton, que preconiza referenciais inerciais para a análise dos movimentos. Usando a Segunda e a Terceira Leis de Newton, você pode calcular a aceleração do carrinho que desliza sobre o trilho. As medições que você fará nesta aula confirmarão resultados que você já obteve em aulas anteriores, usando as leis de Newton. Você poderá concluir, ao final da prática, que Newton tinha razão ao propor as suas leis sobre o movimento. Esse experimento é mais um dentre uma imensidão de outros que sempre e sempre confirmam as leis de movimento desse que foi um dos maiores físicos e matemáticos de todos os tempos.

Procedimento Experimental

O procedimento a seguir será executado, no mínimo, quatro vezes. Mais adiante, você verá o porquê disto.

- Incline ligeiramente o trilho de ar, levantando um de seus pontos de apoio, como indicado na **Figura 20.1**. Observe que esta figura não está em escala. Escolha inclinações diferentes para cada repetição do procedimento.

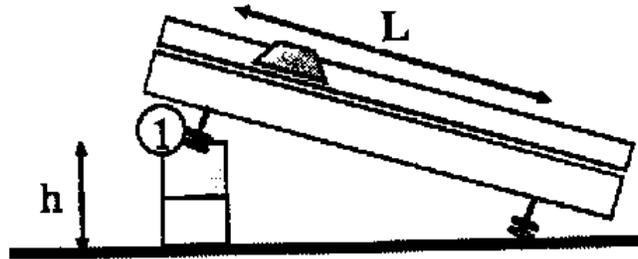


Figura 20.1: O trilho de ar inclinado.

- Determine o seno do ângulo de inclinação θ , medindo as distâncias h e L dos lados do triângulo retângulo formado pelo trilho de ar e a mesa.
- Faça a ligação elétrica do centelhador ao trilho de ar, como feito na experiência anterior.
- Sem a fita termossensível, simule uma aquisição de dados, observando se a inclinação do trilho de ar é suficientemente pequena, de forma a permitir um número razoável de centelhamentos durante o movimento do carrinho ao longo do trilho. Observe que, para isso, você também pode alterar a frequência do centelhador.
- Ao fazer a tomada de dados, é importante que o carrinho esteja inicialmente em repouso. Utilize um lápis para mantê-lo parado.

Lembre-se de que o trilho de ar está submetido à alta tensão, devido à ligação ao centelhador; por isso usamos um material isolante (lápiz).

- Faça finalmente a tomada de dados, registrando o movimento do carrinho através do centelhamento sobre a fita de papel. Retire a fita do trilho e proceda à leitura dos dados obtidos.

- Construa, para cada inclinação do trilho, uma tabela como a seguinte. Vamos supor que a velocidade do carrinho, num determinado instante de tempo t , seja a velocidade média entre os instantes $t + \Delta t$ e $t - \Delta t$. Repare que não é possível, desta maneira, calcular as velocidades nos instantes inicial e final. Observe que, para a obtenção da última coluna, será preciso adotar um procedimento de propagação de erros, conforme explicado no apêndice.

Tabela 1: Tabela a ser criada.

| P | t (s) | x (cm) | δx (cm) | v (cm/s) | δv (cm/s) |
|---|-------|--------|-----------------|----------|-------------------|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |

Observe que este procedimento, para calcular a velocidade do carrinho em um determinado instante de tempo t , é o mais apropriado, pois leva em consideração, de uma forma simétrica, o movimento do carrinho imediatamente antes e depois do instante t . Isso não ocorreria, por exemplo, se usássemos para esta grandeza as posições nos tempos t e $t + \Delta t$. Para entender melhor esse fato, veja a primeira atividade extra, sugerida ao final dessa experiência.

Análise dos dados

- Construa um gráfico da velocidade em função do tempo em papel milimetrado para cada inclinação do trilho. Não se esqueça de marcar as incertezas nas velocidades para cada ponto. Não marque as incertezas relativas ao eixo do tempo, já que elas são muito pequenas e, portanto, não apareceriam no gráfico.
- Verifique se os pontos experimentais deste gráfico podem ser considerados pontos pertencentes a uma mesma reta. Nesse caso, podemos afirmar que o movimento do carrinho é uniformemente acelerado. Trace, então, usando uma régua transparente, a reta que melhor se ajusta aos seus dados. Obtenha, a partir dela, a aceleração do carrinho para aquela inclinação do trilho. Faça uma estimativa visual das retas mais e menos inclinadas que poderiam ser ajustadas aos seus dados. Determine, a partir delas, a imprecisão na aceleração achada.
- Usando o que você aprendeu nas aulas sobre as Leis de Newton, obtenha uma expressão para a aceleração do carrinho como uma função do ângulo de inclinação θ e da aceleração da gravidade g .
- Com o que você obteve no item anterior, você já seria capaz de entender por que fizemos quatro repetições da experiência para ângulos diferentes. No entanto, caso você não tenha ainda entendido o porquê, faça o item seguinte e você entenderá!

Existem diversas maneiras, mais ou menos precisas, para determinar "a melhor reta" que se ajusta a dados experimentais. Em cursos de laboratórios posteriores, isso será discutido mais profundamente.

- Note que o ângulo θ foi obtido indiretamente a partir de duas distâncias medidas com imprecisões. Obtenha, então, a imprecisão para cada ângulo θ , assim como para o seu seno. Faça uma tabela onde constem os valores do seno e a aceleração correspondente, assim como suas imprecisões.
- Faça um gráfico, num papel milimetrado, da aceleração do carrinho *versus* $\sin \theta$. Não esqueça de indicar no gráfico as incertezas, quando as mesmas não forem desprezíveis.
- Determine a aceleração da gravidade a partir do coeficiente angular do gráfico traçado no item anterior.
- Não esqueça de entregar ao seu tutor o valor da aceleração da gravidade obtido por você, para que ele possa ser usado na segunda atividade extra desta aula.
- Como já mencionamos anteriormente, é sempre importante e instrutivo que você escreva um relatório sobre sua experiência!

Atividades extras

- Demonstre que a hipótese feita para determinar a velocidade do carrinho num instante t é verdadeira para um movimento uniformemente acelerado, isto é, mostre que, nesse caso:

$$\dot{f}_x(t) = \frac{f_x(t + \Delta t) - f_x(t - \Delta t)}{2 \Delta t}. \quad (20.1)$$

- O tutor possui uma tabela com os valores da aceleração da gravidade obtidos por diversos alunos que fizeram esta experiência. Construa, a partir dessa tabela, um **histograma** dos valores medidos. Se as medidas foram bem feitas, espera-se que a forma desse histograma seja aproximadamente uma função gaussiana, cuja expressão matemática genérica é

$$f(x) = A \exp\left(\frac{-(x - \langle x \rangle)^2}{2 (\delta x)^2}\right) \quad (20.2)$$

e tem a forma apresentada na **Figura 20.2**.

Um **histograma** é um gráfico em que se coloca no eixo horizontal a faixa de valores da grandeza obtida, e no eixo vertical o número de vezes que ela foi obtida ao se repetir a experiência. Na prática, divide-se o eixo horizontal em subfaixas convenientemente escolhidas, de tal forma que exista um número razoável de valores em cada subfaixa. Esse procedimento será explicado mais detalhadamente no curso de Física II.

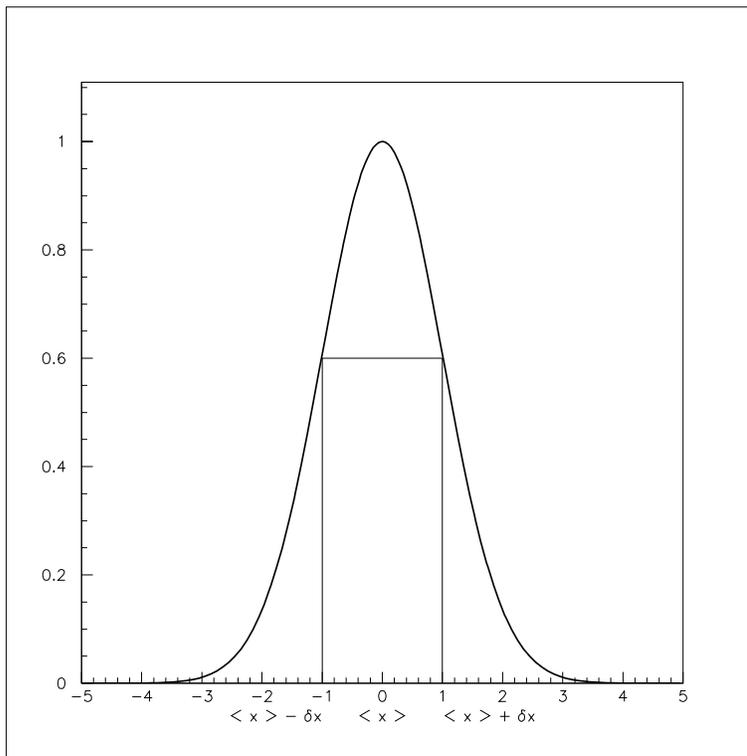


Figura 20.2: A função gaussiana.

A forma da função gaussiana é determinada pelas duas quantidades $\langle x \rangle$ e δx . A quantidade $\langle x \rangle$, também representada por \bar{x} , é a abscissa do valor máximo da gaussiana e é chamada **valor médio** da mesma. Ela é o valor mais provável da grandeza que está sendo medida. A quantidade δx é a distância, nas abscissas, definida pela seguinte propriedade: 68% das medidas estão compreendidas entre $\langle x \rangle - \delta x$ e $\langle x \rangle + \delta x$. Ela é chamada **desvio-padrão** desta distribuição gaussiana e é tomada como a incerteza da medida. Estime, então, com base no histograma obtido, o valor da aceleração da gravidade e sua incerteza. Compare com o valor aceito para a cidade do Rio de Janeiro, que é $g = (978,7 \pm 0,1) \text{ cm/s}^2$.

Apêndice - medidas indiretas e propagação de incertezas

Nós já vimos que, ao medirmos a posição de um ponto centelhado na fita de papel termossensível, usando uma régua, incorremos num erro de leitura. Este tipo de medida é chamado medida direta, pois é obtido diretamente do aparelho de medida e não de outras quantidades. Frequentemente, defrontamo-nos com a questão de obter uma grandeza indiretamente, a partir de outras. Por exemplo, nesta prática temos de obter velocidades a partir de medidas de posições e tempos.

Como essas últimas são medidas com incertezas, devemos adotar um procedimento que nos permita propagar tais incertezas corretamente até o resultado final, que é a velocidade. Definimos, pois, dois tipos de grandeza, no que se refere à sua obtenção por meio de medições experimentais: uma grandeza, cujo valor é obtido diretamente como o valor acusado por um instrumento de medição, chamada **grandeza direta**; outra grandeza, cujo valor é obtido por meio de cálculos que a relacionam em última análise a grandezas diretas, chamada **grandeza indireta**. A existência de incerteza nas grandezas diretas implica incertezas nas indiretas. Existem fórmulas que permitem obter as incertezas das grandezas indiretas a partir das incertezas nas diretas. Em Física 2, você aprenderá como essas fórmulas são obtidas. Agora, vamos aprender que fórmulas são essas e usá-las para adquirir prática.

Consideremos uma grandeza indireta w que dependa de N grandezas diretas e não correlacionadas. Dizemos que duas grandezas quaisquer não são correlacionadas quando a medida de uma delas não afeta a medida da outra. Vamos considerar $N = 3$ por conveniência, mas você notará que a fórmula que vamos descrever tem generalização óbvia para um N qualquer. Vamos representar por a , b e c as grandezas diretas e por f a função que dá a indireta em termos das diretas:

$$w = f(a, b, c) . \quad (20.3)$$

Suponhamos que as grandezas diretas a , b e c foram medidas e foram obtidos para elas, respectivamente, os valores mais prováveis \bar{a} , \bar{b} e \bar{c} , com incertezas δa , δb e δc . Desejamos obter o valor mais provável \bar{w} e a incerteza δw correspondentes da grandeza indireta w . Para o valor mais provável da grandeza indireta, temos:

$$\bar{w} = f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) . \quad (20.4)$$

Para obter a incerteza δw da grandeza indireta, devemos usar os passos dados a seguir.

- Tomamos a derivada de f em relação à primeira grandeza direta a , considerando as outras grandezas como constantes. Isto, em Matemática, é chamado tomar a derivada parcial de f em relação a a . A derivada obtida é representada por

$$\frac{\partial w}{\partial a} . \quad (20.5)$$

Por exemplo, se $w = a^3 b^4 c^2$, temos: $\partial w / \partial a = 3a^2 b^4 c^2$.

- Substituímos, na derivada parcial obtida, os valores mais prováveis das grandezas diretas. O valor resultante, obtido para a derivada, é

$$\left. \frac{\partial w}{\partial a} \right|_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}} . \quad (20.6)$$

No exemplo que acabamos de considerar, o valor resultante da derivada parcial seria $(\partial w / \partial a)|_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}} = 3\bar{a}^2 \bar{b}^4 \bar{c}^2$.

- Multiplicamos o valor resultante da derivada parcial do item anterior pela incerteza da primeira grandeza direta e elevamos o produto resultante ao quadrado. Obtemos, então:

$$\left(\left. \frac{\partial w}{\partial a} \right|_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}} \right)^2 (\delta a)^2 . \quad (20.7)$$

- Repetimos os procedimentos dos três itens anteriores para as demais grandezas diretas, de modo a obter:

$$\left(\left. \frac{\partial w}{\partial b} \right|_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}} \right)^2 (\delta b)^2 \quad \text{e} \quad \left(\left. \frac{\partial w}{\partial c} \right|_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}} \right)^2 (\delta c)^2 . \quad (20.8)$$

- Adicionamos as contribuições das grandezas diretas, (20.7) e (20.8), e extraímos a raiz quadrada da soma assim obtida. Esse resultado é a incerteza da grandeza indireta:

$$\delta w = \sqrt{\left(\left. \frac{\partial w}{\partial a} \right|_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}} \right)^2 (\delta a)^2 + \left(\left. \frac{\partial w}{\partial b} \right|_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}} \right)^2 (\delta b)^2 + \left(\left. \frac{\partial w}{\partial c} \right|_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}} \right)^2 (\delta c)^2} . \quad (20.9)$$

Voltemos ao exemplo considerado anteriormente, $w = a^3 b^4 c^2$. Aplicando a essa fórmula os valores $\bar{a} = 2$, $\bar{b} = 1$ e $\bar{c} = 0,2$, com incertezas $\delta a = 0,001$, $\delta b = 0,002$ e $\delta c = 0,01$, obtemos:

$$\begin{aligned} \delta w &= \sqrt{(3\bar{a}^2 \bar{b}^4 \bar{c}^2)^2 (\delta a)^2 + (\bar{a}^3 4\bar{b}^3 \bar{c}^2)^2 (\delta b)^2 + (\bar{a}^3 \bar{b}^4 2\bar{c})^2 (\delta c)^2} \\ &= 0,034 . \end{aligned} \quad (20.10)$$

A fórmula (20.9) da incerteza da grandeza indireta costuma ser expressa na notação simplificada:

$$\delta w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial a} \right)^2 (\delta a)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial b} \right)^2 (\delta b)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial c} \right)^2 (\delta c)^2} . \quad (20.11)$$

As fórmulas (20.4) e (20.9), que dão o valor mais provável e a incerteza da grandeza w em função dos valores mais prováveis e das incertezas das grandezas a , b e c , foram apresentadas para o caso em que todas as grandezas a , b e c são diretas. No entanto, elas continuam válidas no caso geral em que, dentre as grandezas a , b e c , algumas são diretas e algumas são indiretas. É claro que, nesse caso, os valores mais prováveis e as incertezas de a , b e c foram obtidos em cálculos anteriores que usaram as próprias fórmulas (20.4) e (20.9).

Apresentamos, a seguir, uma tabela que exemplifica esta fórmula para casos particulares, mas que serão os casos mais freqüentes neste curso. Você pode praticar, aplicando a fórmula (20.9) às funções que aparecem na coluna esquerda, para verificar a exatidão dos resultados correspondentes que aparecem na coluna direita. Nesta tabela, α e β representam constantes.

| função | incerteza |
|--------------------------|---|
| $w = a + b$ | $(\delta w)^2 = (\delta a)^2 + (\delta b)^2$ |
| $w = a - b$ | $(\delta w)^2 = (\delta a)^2 + (\delta b)^2$ |
| $w = \alpha a$ | $(\delta w)^2 = (\alpha \delta a)^2$ |
| $w = \alpha a + \beta b$ | $(\delta w)^2 = (\alpha \delta a)^2 + (\beta \delta b)^2$ |
| $w = ab$ | $\left(\frac{\delta w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta b}{b}\right)^2$ |
| $w = a^2$ | $(\delta w)^2 = (2a \delta a)^2$ |
| $w = \frac{a}{b}$ | $\left(\frac{\delta w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta b}{b}\right)^2$ |

Resumo

Nesta aula, obtivemos um resultado experimental para a aceleração da gravidade, usando um modelo teórico fundamentado nas Leis de Newton. Com base nos resultados obtidos você poderia, agora, pensar no título desta aula: “E Newton tinha razão...”. Paralelamente a isso, você aprendeu a determinar incertezas de medidas indiretas, por intermédio de um procedimento chamado propagação de erros. Você deve ter verificado também, através de um histograma construído com os valores obtidos por todos os seus colegas, a distribuição gaussiana dos resultados.

Auto-avaliação

Compare o valor da aceleração da gravidade obtido por você com o valor mencionado no texto, para essa grandeza. Verifique em que ponto seu resultado ficaria no histograma construído com os resultados de outros colegas. Observe que este procedimento dá uma medida do quanto você se afastou ou se aproximou da maioria dos dados obtidos pelos outros. Caso essa “distância” seja muito grande (os físicos experimentais dizem que o valor está no “rabo” da gaussiana), isso quer dizer que seu resultado está muito diferente da maioria dos resultados dos seus colegas. Considere, então, a hipótese de refazer a sua experiência. De qualquer modo, faça um relatório sobre o que você fez. Como já mencionamos em aulas experimentais anteriores, é na confecção de tais relatórios que as dúvidas aparecem e são sanadas.

ISBN 85-7648-242-8



9 788576 482420



UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense



Universidade Federal Fluminense

uff



UNIRIO



Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro



**GOVERNO DO
Rio de Janeiro**

SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA



**UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL**

Ministério
da Educação



BRASL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL