

Módulo 4

Volume | 2

Carlos Farina de Souza  
Marcus Venicius Cougo Pinto  
Paulo Carrilho Soares Filho

| Física 1B



Fundação  
**CECIERJ**  
Consórcio Cederj





Fundação

**CECIERJ**

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

## Física 1B

Volume 2 - Módulo 4

Carlos Farina de Souza  
Marcus Venicius Cougo Pinto  
Paulo Carrilho Soares Filho



SECRETARIA DE  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA



Ministério  
da Educação



Apoio:



Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo  
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

# Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001  
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

## Presidente

Masako Oya Masuda

## Vice-presidente

Mirian Crapez

## Coordenação do Curso de Física

Luiz Felipe Canto

## Material Didático

### ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

Carlos Farina de Souza  
Marcus Venicius Cougo Pinto  
Paulo Carrilho Soares Filho

### COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL

Cristine Costa Barreto

### DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO

Ana Tereza de Andrade  
Carmen Irene Correia de Oliveira  
José Meyohas  
Leonardo Villela

### COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM

Maria Angélica Alves

## Departamento de Produção

### EDITORA

Tereza Queiroz

### COORDENAÇÃO EDITORIAL

Jane Castellani

### REVISÃO TIPOGRÁFICA

Patrícia Paula

### COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO

Jorge Moura

### PROGRAMAÇÃO VISUAL

Marcelo Freitas

### ILUSTRAÇÃO

Equipe Cederj

### CAPA

Eduardo de Oliveira Bordoni  
Fabio Muniz

### PRODUÇÃO GRÁFICA

Oséias Ferraz  
Patrícia Seabra

Copyright © 2005, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

S729f

Souza, Carlos Farina de  
Física 1B. v.2 / Carlos Farina de Souza. – Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.  
208 p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-7648-111-1

1. Mecânica. I. Pinto, Marcus Venicius Cougo.  
II. Soares Filho, Paulo Carrilho. III. Título.

CDD: 531

# Governo do Estado do Rio de Janeiro

**Governador**  
Sérgio Cabral Filho

**Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia**  
Alexandre Cardoso

## Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO  
NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**  
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO  
RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Ricardo Vieiralves

**UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE**  
Reitor: Roberto de Souza Salles

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL  
DO RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO  
DO RIO DE JANEIRO**  
Reitora: Malvina Tania Tuttman



**SUMÁRIO**

<b>Aula 30</b> - Movimento de um sistema de partículas e momento linear do sistema	7
<b>Aula 31</b> - Energia de um sistema de partículas	39
<b>Aula 32</b> - Medição de momento linear e energia cinética em colisões	67
<b>Aula 33</b> - Momento angular de um sistema de partículas	71
<b>Aula 34</b> - Rotação de corpo rígido em torno de eixo fixo	99
<b>Aula 35</b> - Cálculo de momentos de inércia	127
<b>Aula 36</b> - Centro de massa e momento de inércia de distribuições contínuas de matéria	147
<b>Aula 37</b> - Movimento geral de um corpo rígido	171
<b>Aula 38</b> - Medindo momento de inércia	205



## Aula 30 – Movimento de um sistema de partículas e momento linear do sistema

### Objetivos

- Listar as informações sobre o movimento geral de um sistema que podem ser obtidas a partir do movimento de seu centro de massa.
- Dar a definição correta de momento linear de um sistema e explicar a sua relação com a força externa total sobre o sistema.
- Demonstrar o Teorema da Conservação do Momento Linear do Sistema e saber aplicá-lo sempre que necessário.
- Aplicar a teoria desenvolvida ao estudo de choques e explosões, e ao movimento de foguetes.

### Introdução

Os sistemas físicos com os quais trabalhamos até o momento são constituídos por uma única partícula ou por corpos rígidos, como blocos, vigas ou esferas, em movimento de translação. Os movimentos de uma única partícula são determinados pela Segunda Lei de Newton,  $m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ , onde  $\mathbf{r}$  é o vetor-posição da partícula e  $\mathbf{F}$  é a força total que age sobre ela nesse instante. Já os movimentos de translação de um corpo rígido são determinados pela equação  $M \mathbf{a}_{cm} = \mathbf{F}^{ex}$ , onde  $M$  é a massa total do sistema,  $\mathbf{a}_{cm}$  é a aceleração de seu centro de massa e  $\mathbf{F}^{ex}$  é a força externa total que atua sobre o sistema. Nesses dois casos, temos apenas uma única equação para determinar o movimento da partícula ou do centro de massa do corpo rígido.

Como foi discutido na Aula 17, no caso de uma translação pura o movimento do centro de massa de um corpo rígido determina inteiramente o seu movimento. Se não for esse o caso, e o corpo apresentar também movimento de rotação, o conhecimento do movimento de seu centro de massa não será suficiente para nos permitir descrever o movimento do corpo. Nesse caso, além de  $M \mathbf{a}_{cm} = \mathbf{F}^{ex}$ , outras equações se fazem necessárias. Quando o corpo em estudo não for rígido, o movimento de seu centro de massa, embora importante, certamente não será suficiente para determinar completamente o seu movimento. Lembre-se de que um corpo é um sistema formado por diversas partículas; conseqüentemente, o estudo do movimento de um corpo requer, em geral, a utilização

de diversas equações. Essas equações são obtidas aplicando-se a Segunda Lei de Newton a diversas partes do sistema ou derivando outras equações importantes a partir dessa lei. Isso torna o estudo difícil, de modo que, nesse caso, devemos nos contentar com informações parciais sobre o movimento do sistema ou nos restringir a sistemas com características particularmente simples. Esse estudo dos movimentos genéricos de diversas partículas é chamado Mecânica do Sistema de Partículas e constitui o assunto do Módulo 4, que se inicia com esta aula.

Na cinemática do sistema de partículas, estudamos como descrever os movimentos do sistema e, na dinâmica do sistema de partículas, estudamos as relações entre os movimentos do sistema e as forças que agem sobre ele. É claro que um sistema de partículas pode ter uma única partícula, de modo que o estudo que faremos agora tem como caso particular o estudo de uma única partícula, feito anteriormente. Contudo, no contexto em que estamos, quando nos referimos a um sistema de partículas, supomos, em princípio, que ele tenha mais de uma partícula.

Neste módulo, começaremos estabelecendo as equações de movimento do sistema e, em seguida, tiraremos conclusões importantes a partir dessas equações, que serão aplicadas a exemplos interessantes. Nesta aula, apresentaremos a primeira dessas conclusões, que diz respeito à grandeza conhecida como momento linear de um sistema de partículas. A discussão a ser feita é uma continuação natural de resultados obtidos na Aula 17. Por esse motivo, começaremos esta aula recordando alguns resultados da Aula 17. Sugerimos fortemente que você releia, agora, a Introdução da Aula 17 e as duas seções que a seguem, a saber, a do movimento do centro de massa de um sistema de partículas e a do movimento de translação de um corpo rígido. Depois dessa leitura, você estará pronto para estudar a próxima seção da presente aula.

Finalizaremos esta aula usando o conceito de momento linear de um sistema para estudar colisões de partículas e o movimento de um foguete. No entanto, devido à dificuldade desse último tema, resolvemos retirá-lo do texto principal da aula e apresentá-lo como leitura suplementar, após os problemas propostos. Numa primeira leitura desta aula você pode ignorar o estudo do movimento de foguetes. Isso não comprometerá em nada o seu entendimento das próximas aulas. Nos problemas propostos, você poderá aplicar a teoria aprendida também ao estudo de explosões, mas como você verificará, evitamos inserir problemas sobre movimentos de foguetes.

## Movimento do centro de massa e momento linear de um sistema de partículas

Seja um sistema físico constituído de  $N$  partículas, de massas  $m_1, m_2, \dots, m_N$ . Denotaremos suas posições por  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ , suas velocidades por  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N$  e suas acelerações por  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N$ , respectivamente. Aplicando a Segunda Lei de Newton às partículas do sistema, obtemos

$$m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1, \quad m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_2, \quad \dots, \quad m_N \mathbf{a}_N = \mathbf{F}_N, \quad (30.1)$$

onde  $\mathbf{F}_1$  é a força total exercida sobre a partícula 1,  $\mathbf{F}_2$  é a força total exercida sobre a partícula 2 e assim sucessivamente, até  $\mathbf{F}_N$ , que é a força total exercida sobre a partícula  $N$ .

A força total sobre cada partícula pode ser decomposta na soma de duas parcelas. A primeira é a soma de todas as forças externas que atuam sobre ela, isto é, a soma das forças que agem sobre ela, mas que são exercidas por partículas que não pertencem ao sistema. A segunda é a soma das forças internas que agem sobre ela, isto é, a soma das forças que atuam sobre ela e que são exercidas por outras partículas do próprio sistema. Sendo  $\mathbf{F}_i^{ex}$  a soma das forças externas sobre a partícula  $i$ , e  $\mathbf{F}_i^{in}$  a soma das internas, a força total  $\mathbf{F}_i$  sobre a partícula  $i$  pode ser escrita como  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{ex} + \mathbf{F}_i^{in}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Portanto, as equações (30.1) tomam a forma

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{a}_1 &= \mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{F}_1^{in}, \\ m_2 \mathbf{a}_2 &= \mathbf{F}_2^{ex} + \mathbf{F}_2^{in}, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ m_N \mathbf{a}_N &= \mathbf{F}_N^{ex} + \mathbf{F}_N^{in}. \end{aligned} \quad (30.2)$$

Como já comentamos, não é possível resolver esse sistema de equações diferenciais sem alguma hipótese simplificadora. Mas podemos obter algumas informações gerais sobre o movimento do sistema que são muito importantes. Um exemplo foi dado na Aula 17, quando obtivemos uma única equação que determina o movimento do centro de massa do sistema de partículas. Para isso, somamos todas as equações escritas em (30.2) e verificamos que as forças internas somadas se anulam, ou seja,  $\mathbf{F}_1^{in} + \mathbf{F}_2^{in} + \dots + \mathbf{F}_N^{in} = \mathbf{0}$ . De fato, nessa soma, as forças internas aparecem somente em pares de ação e reação

e, portanto, se cancelam pela Terceira Lei de Newton. A força  $\mathbf{F}_{ij}$ , exercida sobre a partícula  $i$  pela partícula  $j$ , aparece como uma das parcelas da força interna total  $\mathbf{F}_i^{in}$  sobre a partícula  $i$ . Inevitavelmente, a força  $\mathbf{F}_{ji}$ , exercida sobre a partícula  $j$  pela partícula  $i$ , também aparece como uma das parcelas da força interna total  $\mathbf{F}_j^{in}$  sobre a partícula  $j$ . Conseqüentemente, na soma total das forças internas, haverá o cancelamento  $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = \mathbf{0}$ . Com isso, a soma das equações escritas em (30.2) nos leva a

$$m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + m_N \mathbf{a}_N = \mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{F}_2^{ex} + \cdots + \mathbf{F}_N^{ex} . \quad (30.3)$$

A soma vetorial no lado direito dessa equação é  $\mathbf{F}^{ex}$ , a força externa total sobre o sistema, de modo que ela pode ser escrita como

$$m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + m_N \mathbf{a}_N = \mathbf{F}^{ex} , \quad (30.4)$$

enquanto o lado esquerdo é igual ao produto da massa total  $M$  do sistema pela aceleração  $\mathbf{a}_{cm}$  do seu centro de massa. Temos, então,

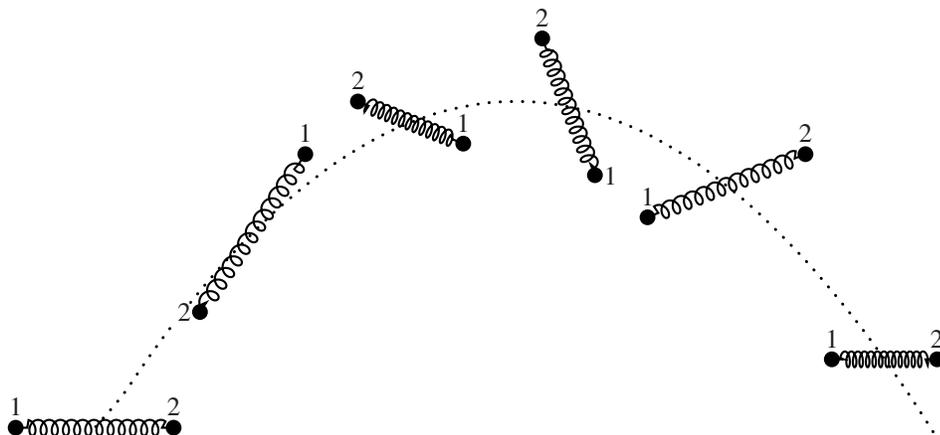
$$M \mathbf{a}_{cm} = \mathbf{F}^{ex} , \quad (30.5)$$

que costumamos chamar Segunda Lei de Newton para o centro de massa do sistema. Na Aula 17, essa equação foi cuidadosamente demonstrada e ficou bem enfatizado que o centro de massa do sistema não é uma partícula, mas um ponto imaginário que está sempre entre as partículas do sistema e cuja posição não coincide, necessariamente, com a posição de qualquer partícula desse sistema. Ainda assim, a equação (30.5) mostra que o centro de massa do sistema se move como se fosse uma única partícula com massa igual à massa total do sistema e sujeita a uma força resultante igual à força externa total sobre ele. Se não há hipóteses simplificadoras, a equação (30.5) dá uma informação bem limitada sobre o sistema, mas ainda assim útil. Ela não diz nada sobre os movimentos das diversas partículas do sistema, mas determina qual é o movimento de um ponto que está sempre entre elas, o centro de massa. Os exemplos a seguir ilustram essa idéia.

### Exemplo 30.1

Este exemplo apresenta uma situação na qual os movimentos das partes que compõem um sistema são muito complicados, muito embora o movimento do centro de massa do sistema seja extremamente simples. Considere uma mola ideal que tem presa a cada uma de suas extremidades uma pequena esfera. Por simplicidade, suponha que as duas esferas sejam idênticas. Imagine que no instante inicial as esferas tenham as velocidades indicadas na **Figura 30.1** e considere desprezível a resistência do ar.

As forças que a mola exerce sobre cada esfera, juntamente com os respectivos pesos das esferas, determinam, a cada instante, as respectivas acelerações das esferas. No entanto, como a força elástica sobre uma esfera depende também da posição da outra, a equação diferencial de seu movimento é complicada. Ou seja, os movimentos possíveis das esferas são muito complicados.



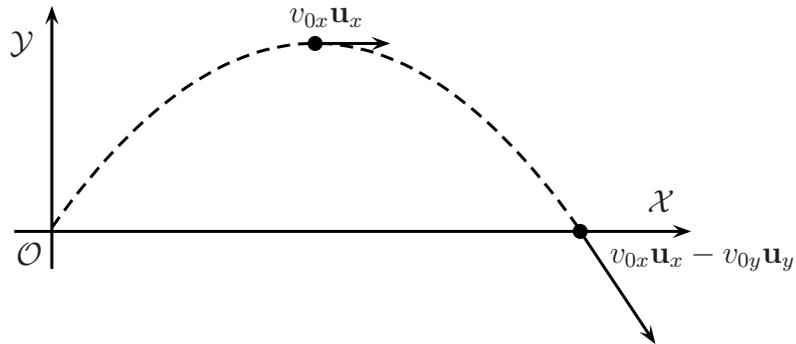
**Figura 30.1:** Enquanto as massas e a mola estiverem em movimento sem tocar o solo, a trajetória do centro de massa do sistema será uma parábola.

No entanto, as forças entre a mola e as esferas são forças internas ao sistema formado pela mola e as duas esferas. Conseqüentemente, elas não influem no movimento do centro de massa do sistema. Como as únicas forças externas ao sistema são os respectivos pesos das esferas, é imediato concluir que a aceleração do centro de massa do sistema é simplesmente a aceleração da gravidade  $g$ . Portanto, a trajetória do centro de massa será um arco de parábola, como mostra a **Figura 30.1**. É importante enfatizar que essa será a trajetória do centro de massa enquanto o sistema não tocar o solo, pois quando isso ocorrer haverá outras forças externas agindo sobre o sistema - a saber, as reações normais exercidas pelo solo sobre a parte do sistema que estiver em contato com ele.

### Exemplo 30.2

Imagine que um projétil seja arremessado com velocidade de lançamento  $\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{u}_x + v_{0y}\mathbf{u}_y$  e que a resistência do ar seja desprezível durante o seu movimento. Ele percorre uma trajetória parabólica e atinge o chão em um ponto  $A$  bem determinado e num instante bem definido; sua trajetória está indicada na **Figura 30.2**. Nessa figura, desenhamos, por conveniência, o projétil no instante em que atinge o ponto mais alto de sua trajetória e no instante em que atinge o

solo. Note que, nesses instantes, suas velocidades são, respectivamente,  $v_{0x}\mathbf{u}_x$  e  $v_{0x}\mathbf{u}_x - v_{0y}\mathbf{u}_y$ .

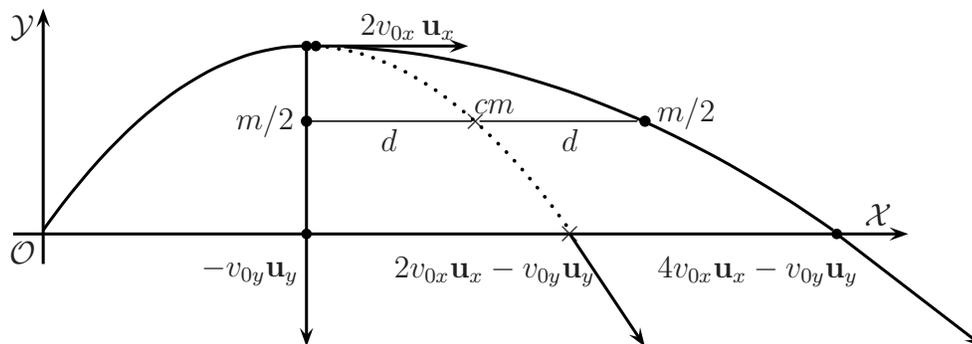


**Figura 30.2:** Trajetória parabólica de um projétil desde o instante de seu lançamento até o instante em que toca o solo.

Considere, agora, que o mesmo projétil seja lançado novamente do mesmo ponto, com a mesma velocidade inicial, mas exploda ao atingir o ponto mais alto da sua trajetória, se partindo em dois fragmentos de mesma massa. Para simplificar ainda mais esse exemplo, suponha que logo após a explosão, cuja duração é desprezível, uma das metades do projétil tenha velocidade nula, enquanto a outra passa a ter uma velocidade horizontal  $2v_{0x}\mathbf{u}_x$  (você verificará no problema proposto 1 que essa situação pode, de fato, ocorrer). Com isso, a trajetória de um dos fragmentos do projétil após a explosão será um segmento de reta vertical do ponto mais alto da trajetória do projétil até o solo, atingindo o solo com a velocidade  $-v_{0y}\mathbf{u}_y$ , após descrever um movimento retilíneo uniformemente variado.

Já a trajetória da outra metade será parabólica, mas não coincidente com a parábola mostrada na **Figura 30.2**, isto é, aquela descrita pelo projétil caso não tivesse ocorrido a explosão. Essa metade atinge o solo com velocidade  $2v_{0x}\mathbf{u}_x - v_{0y}\mathbf{u}_y$ . Essas duas trajetórias estão indicadas na **Figura 30.3** por linhas contínuas que começam no ponto mais alto atingido pelo projétil.

No entanto, mesmo após a explosão, o centro de massa do projétil descreverá uma trajetória parabólica idêntica à descrita no caso em que não há explosão alguma. Isso ocorre pois as forças que separam as duas metades do projétil durante a explosão são forças internas ao sistema e em nada influem no movimento do centro de massa do projétil. A linha tracejada na **Figura 30.3** indica a trajetória do centro de massa depois da explosão.



**Figura 30.3:** O projétil descreve uma trajetória parabólica até atingir o ponto mais alto de sua trajetória (linha contínua do ponto de lançamento até esse ponto); após a explosão, um dos fragmentos descreve um movimento vertical, enquanto o outro, um arco de parábola (linhas contínuas do ponto mais alto até o solo). A linha tracejada indica a trajetória do centro de massa do projétil após a explosão.

Como um último comentário a respeito desse exemplo, note que, para qualquer instante após a explosão, o centro de massa do projétil está no ponto médio entre as suas partes, uma vez que elas possuem a mesma massa.

Nos dois exemplos anteriores, os sistemas são relativamente simples (no primeiro, duas esferas presas aos extremos de uma mola ideal e no segundo um projétil que se parte ao meio). No entanto, o fato de o movimento do centro de massa de um sistema sofrer influência apenas das forças externas ao sistema é geral e vale para qualquer sistema, por mais complexo que ele seja. Por exemplo, nos saltos inacreditáveis de nossa campeã de ginástica olímpica Daiane dos Santos, o centro de massa da atleta descreverá, enquanto ela estiver totalmente no ar, uma trajetória parabólica, por mais complicadas que pareçam as suas acrobacias. O mesmo ocorre em qualquer salto ornamental dado por um atleta de uma plataforma a dez metros de altura; depois que ele deixa a plataforma o seu centro de massa descreverá uma parábola até o instante em que alguma parte de seu corpo tocar a água da piscina, não importando se ele saltou de frente, de costas ou do número de voltas completas até chegar na água.

Poderíamos prosseguir fornecendo mais e mais exemplos que ilustrassem o fato de que somente as forças externas a um sistema influenciam no movimento de seu centro de massa. Há uma infinidade deles. No entanto, deixaremos para você mesmo a tarefa de imaginar alguns desses exemplos, o que não deverá lhe exigir muito esforço.

Voltemos à equação (30.4) e, em vez de usar nesse resultado o conceito de centro de massa, vamos reescrevê-lo em termos dos momentos lineares das partículas do sistema. No lado esquerdo de (30.4), podemos escrever as acelerações como derivadas das velocidades,

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} + \dots + m_N \frac{d\mathbf{v}_N}{dt} = \mathbf{F}^{ex}, \quad (30.6)$$

e as massas, por serem constantes, podem ser passadas para dentro dos símbolos de derivação,

$$\frac{d(m_1\mathbf{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\mathbf{v}_2)}{dt} + \dots + \frac{d(m_N\mathbf{v}_N)}{dt} = \mathbf{F}^{ex}. \quad (30.7)$$

Usando o fato de que a soma das derivadas é a derivada da soma, obtemos

$$\frac{d}{dt}(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \dots + m_N\mathbf{v}_N) = \mathbf{F}^{ex}. \quad (30.8)$$

A quantidade entre parênteses é a soma vetorial dos momentos lineares de todas as partículas do sistema. Essa soma é um vetor que chamamos **momento linear do sistema de partículas** e que representamos por  $\mathbf{P}$ , ou seja,

$$\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \dots + m_N\mathbf{v}_N. \quad (30.9)$$

Usando essa definição, podemos escrever nosso resultado (30.8) como

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{ex}, \quad (30.10)$$

isto é,

*a taxa instantânea de variação do momento linear de um sistema de partículas é igual à força externa total sobre o sistema.*

Podemos chamar esse resultado **Teorema do Momento Linear e Força de um Sistema de Partículas**. No caso de o sistema ser constituído por uma única partícula, esse resultado se reduz ao obtido na Aula 28, que, praticamente, em nada difere da Segunda Lei de Newton para uma partícula. Já o resultado (30.10) traz consigo a informação importante de que a quantidade vetorial  $\mathbf{P}$ , apesar de depender das velocidades de todas as partículas do sistema, não é afetada pelas força internas que agem sobre elas. Somente as forças externas podem mudar o momento linear do sistema de partículas.

Note que, pelas próprias definições de velocidade do centro de massa de um sistema de partículas ( $\mathbf{v}_{cm}$ ) e de momento linear do sistema ( $\mathbf{P}$ ), temos

$$\mathbf{P} = M \mathbf{v}_{cm}, \quad (30.11)$$

---

Em aulas anteriores, usamos  $\mathbf{P}$  para representar o peso total de um corpo. É claro que não vamos confundí-lo com o conceito de momento linear do sistema, apesar de usarmos a mesma letra para denotar ambos. Infelizmente, há poucas letras para muitos conceitos...

---

onde  $M$  é a massa total do sistema. Desse modo, podemos afirmar que

*o momento linear do sistema é o momento que teria uma partícula cuja massa fosse a massa total do sistema e a velocidade fosse a do seu centro de massa.*

Consideremos, agora, um certo movimento do sistema de partículas. Digamos que as funções-movimento das partículas 1, 2, ..., N sejam dadas, respectivamente, por  $f_1, f_2, \dots, f_N$ . Temos, então,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= f_1(t), & \mathbf{r}_2 &= f_2(t), & \dots, & \mathbf{r}_N &= f_N(t) \quad \text{e} \\ \mathbf{v}_1 &= \dot{f}_1(t), & \mathbf{v}_2 &= \dot{f}_2(t), & \dots, & \mathbf{v}_N &= \dot{f}_N(t). \end{aligned} \quad (30.12)$$

As forças externas que agem sobre as partículas do sistema são funções do tempo, das posições e das velocidades das partículas. Conseqüentemente, a força externa total  $\mathbf{F}^{ex}$  é função do tempo e das posições e velocidades das partículas. Mas, em um dado movimento do sistema, como especificado em (30.12), as posições e velocidades também são funções do tempo. Então, em um dado movimento, a força externa total  $\mathbf{F}^{ex}$  é uma função do tempo e, por esse motivo, podemos integrá-la em um certo intervalo  $[t_1, t_2]$ . O momento linear total  $\mathbf{P}$  é uma função das velocidades das partículas do sistema, como é óbvio na definição (30.11). Em um movimento do sistema, como especificado em (30.12), as velocidades são funções dadas do tempo, de modo que, durante tal movimento, o momento linear total  $\mathbf{P}$  também é uma função do tempo, podendo ser integrado no intervalo  $[t_1, t_2]$ . Conseqüentemente, podemos integrar os dois membros da equação (30.10) no intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$  e obter

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{P}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}^{ex} dt, \quad (30.13)$$

onde está subentendido que estamos considerando um dado movimento do sistema, especificado pelas equações (30.12). De (30.13), obtemos

$$\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}^{ex} dt, \quad (30.14)$$

onde  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  representam o momento linear total nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ , respectivamente. A integral da força externa total no intervalo  $[t_1, t_2]$  é chamada **impulso** da força externa total transmitido ao sistema no intervalo em consideração. Portanto, o resultado (30.14) afirma que

*a variação do momento linear total de um sistema de partículas durante um intervalo de tempo do movimento do sistema é igual ao impulso da força externa total transmitido ao sistema nesse intervalo.*

Esse é o Teorema do Momento Linear e Impulso de um Sistema de Partículas.

Um resultado que se obtém imediatamente da equação (30.10), ou também de (30.14), é chamado **Teorema da Conservação do Momento Linear de um Sistema**, e afirma que

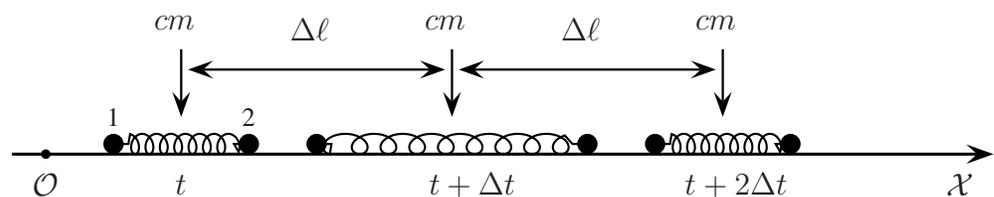
*se a força externa total sobre um sistema é nula, o seu momento linear se conserva:*

$$\mathbf{F}^{ex} = \mathbf{0} \implies \mathbf{P} = \text{constante.} \quad (30.15)$$

Esse é um dos teoremas mais importantes da Mecânica Clássica. Ele nos informa que em um sistema isolado, isto é, livre de influências externas, a soma dos produtos das massas pelas velocidades das partículas permanece constante, não importa como as velocidades das partículas estejam mudando. Se o sistema não estiver isolado, mas ainda assim as forças externas se cancelarem, valerá a mesma conclusão, isto é, a quantidade  $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \dots + m_N\mathbf{v}_N$  permanecerá constante enquanto a força total externa for nula.

### Exemplo 30.3

Para ilustrar o teorema que acabamos de demonstrar, considere duas partículas de mesma massa presas aos extremos de uma mola ideal. Suponha que as partículas se movimentem em linha reta sobre uma superfície horizontal sem atrito e ao longo da direção da mola que as une. Escolheremos o eixo  $\mathcal{OX}$  como tendo essa direção, como ilustra a **Figura 30.4**.



**Figura 30.4:** Por ser nula a resultante das forças externas sobre o sistema o seu centro de massa descreve um MRU.

Nesse caso, como a força externa total é nula (os pesos das partículas são cancelados pelas reações normais exercidas pela mesa e todas as outras forças exercidas entre a mola e as partículas são internas ao sistema). Com isso, o momento linear do sistema  $P = Mv_{cm}$  e, conseqüentemente, a velocidade de seu centro de massa permanecerão constantes durante o movimento. Ou seja, o centro

de massa descreve um MRU, muito embora os movimentos das duas partículas sejam mais complicados (não é difícil mostrar que cada partícula descreve, nesse caso, uma superposição de um MRU com uma oscilação harmônica, mas demonstrar esse resultado foge um pouco aos nossos objetivos no momento).

A **Figura 30.4** mostra o sistema em três instantes diferentes,  $t$ ,  $t + \Delta t$  e  $t + 2\Delta t$ , em situações em que a mola ora está comprimida, ora distendida. Note que o centro de massa se move com velocidade constante, e por isso percorre distâncias iguais em intervalos de tempo iguais.

Suponhamos que em um certo instante, que chamamos inicial, as velocidades das partículas 1, 2, ...,  $N$  sejam dadas por  $\mathbf{v}_{10}$ ,  $\mathbf{v}_{20}$ , ...,  $\mathbf{v}_{N0}$ , respectivamente. Nesse instante, o momento linear do sistema é  $m_1\mathbf{v}_{10} + m_2\mathbf{v}_{20} + \dots + m_N\mathbf{v}_{N0}$ . Se a força externa total sobre o sistema for nula, o momento linear total do sistema em qualquer instante terá o mesmo valor que tinha no instante inicial:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \dots + m_N\mathbf{v}_N = m_1\mathbf{v}_{10} + m_2\mathbf{v}_{20} + \dots + m_N\mathbf{v}_{N0} . \quad (30.16)$$

Se forem conhecidas as velocidades iniciais das partículas do sistema, esta será uma equação com  $N$  incógnitas, as velocidades  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ , ...,  $\mathbf{v}_N$  das partículas em um outro instante arbitrário. É claro que somente essa equação é insuficiente para encontrar os valores das  $N$  velocidades nesse outro instante, mas já é uma informação relevante sobre elas.

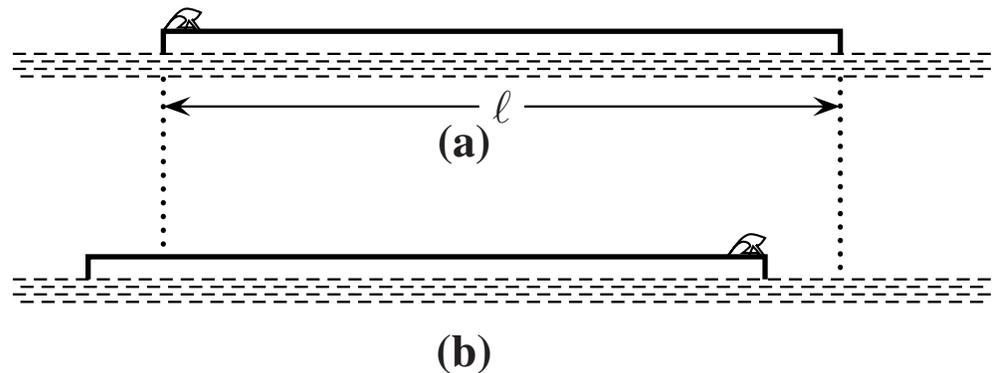
Por exemplo, se além das velocidades das partículas no instante inicial, conhecermos as velocidades de  $N - 1$  partículas em um outro instante arbitrário, a velocidade desconhecida da  $N$ -ésima partícula nesse instante poderá ser determinada pela conservação do momento linear (30.16).

De qualquer modo, estaremos, de início, considerando situações simples, nas quais o Teorema do Momento Linear e Força e o Teorema da Conservação do Momento Linear nos permitirão obter os resultados desejados.

Note que, se dividirmos o momento linear total de um sistema de partículas pela massa total do sistema, obteremos a velocidade do centro de massa do sistema. Com isso, as afirmações sobre o momento linear total podem ser expressas em termos da velocidade do centro de massa. Por exemplo, dizer que o momento linear total é constante é equivalente a dizer que a velocidade do centro de massa é constante.

**Exemplo 30.4**

Considere um sapo de massa  $m$  situado numa das extremidades de uma plataforma de comprimento  $\ell$  e massa  $M$  e em repouso relativamente a ela. A plataforma flutua, em repouso, sobre as águas paradas de um lago, como ilustra a parte superior da **Figura 30.5**. O sapo caminha em linha reta até a outra extremidade da plataforma e aí permanece em repouso. Suponha que a plataforma se movimenta apenas horizontalmente e despreze, nesse exemplo, a força de resistência exercida pela água sobre ela. Desejamos saber qual foi o deslocamento total da plataforma.



**Figura 30.5:** (a) Sapo na extremidade esquerda da plataforma, ambos em repouso relativamente às águas paradas do lago; (b) sapo em repouso após atingir a extremidade direita da plataforma.

Uma vez que é desprezível a força de atrito com a água, novamente aqui a resultante das forças sobre o sistema sapo-plataforma é nula, de modo que o momento linear total do sistema permanece constante durante todo o movimento. Como esse momento linear é nulo no instante inicial  $t_i$ , permanecerá nulo durante todo o movimento até o instante final  $t_f$  em que o sapo atinge a outra extremidade. Escolhendo o eixo  $\mathcal{O}\mathcal{X}$  na direção e sentido do movimento do sapo, com a sua origem na posição inicial do sapo, podemos escrever

$$mv_{sx} + Mv_{px} = 0,$$

onde  $v_{sx}$  e  $v_{px}$  são, respectivamente, as velocidades do sapo e da plataforma num instante genérico do movimento. Integrando a equação anterior no tempo, desde  $t_i$  até  $t_f$ , temos

$$m \int_{t_i}^{t_f} v_{sx} dt + M \int_{t_i}^{t_f} v_{px} dt = 0 \quad \Longrightarrow \quad m\Delta x_s + M\Delta x_p = 0.$$

Como o comprimento da plataforma é  $\ell$ , podemos relacionar  $\Delta x_s$  e  $\Delta x_p$ , eliminando assim  $\Delta x_s$  da última equação. É imediato perceber que

$$\Delta x_s = \ell + \Delta x_p, \quad (30.17)$$

relação que substituída na fórmula anterior nos fornece

$$m\ell + (m + M)\Delta x_p = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta x_p = -\frac{m}{m + M} \ell.$$

O sinal negativo no resultado anterior significa que enquanto o deslocamento do sapo foi positivo, isto é, da esquerda para a direita, o da plataforma foi negativo. A partir da equação (30.17) pode-se mostrar que  $\Delta x_s = M\ell/(m + M)$ . No caso em que as massas forem iguais, os respectivos deslocamentos também serão os mesmos. Seria conveniente que, nesse momento, você tentasse resolver os problemas propostos 2 e 3.

## Colisões de duas partículas

Consideremos um sistema de duas partículas, de massas  $m_1$  e  $m_2$ . Suponhamos que o sistema esteja isolado, isto é, que não haja forças externas agindo sobre ele. Nesse caso, permanecem constantes o momento linear total do sistema e a velocidade de seu centro de massa. No entanto, as velocidades individuais das partículas - e, portanto, os seus momentos lineares individuais - podem mudar devido às forças internas que cada uma das partículas do sistema pode exercer sobre a outra. Desejamos considerar o caso específico em que essas forças internas entre as partículas existem somente durante um intervalo de tempo muito pequeno, durante o qual elas estão em contato. O qualificativo muito pequeno, aplicado ao intervalo, significa pequeno o bastante para que durante esse intervalo os impulsos transmitidos por forças externas sejam desprezíveis. Não precisamos nos preocupar agora com essa condição, que voltaremos a discutir. Por ora, basta imaginar informalmente que o intervalo é pequeno diante dos outros intervalos de tempo considerados nos movimentos das partículas.

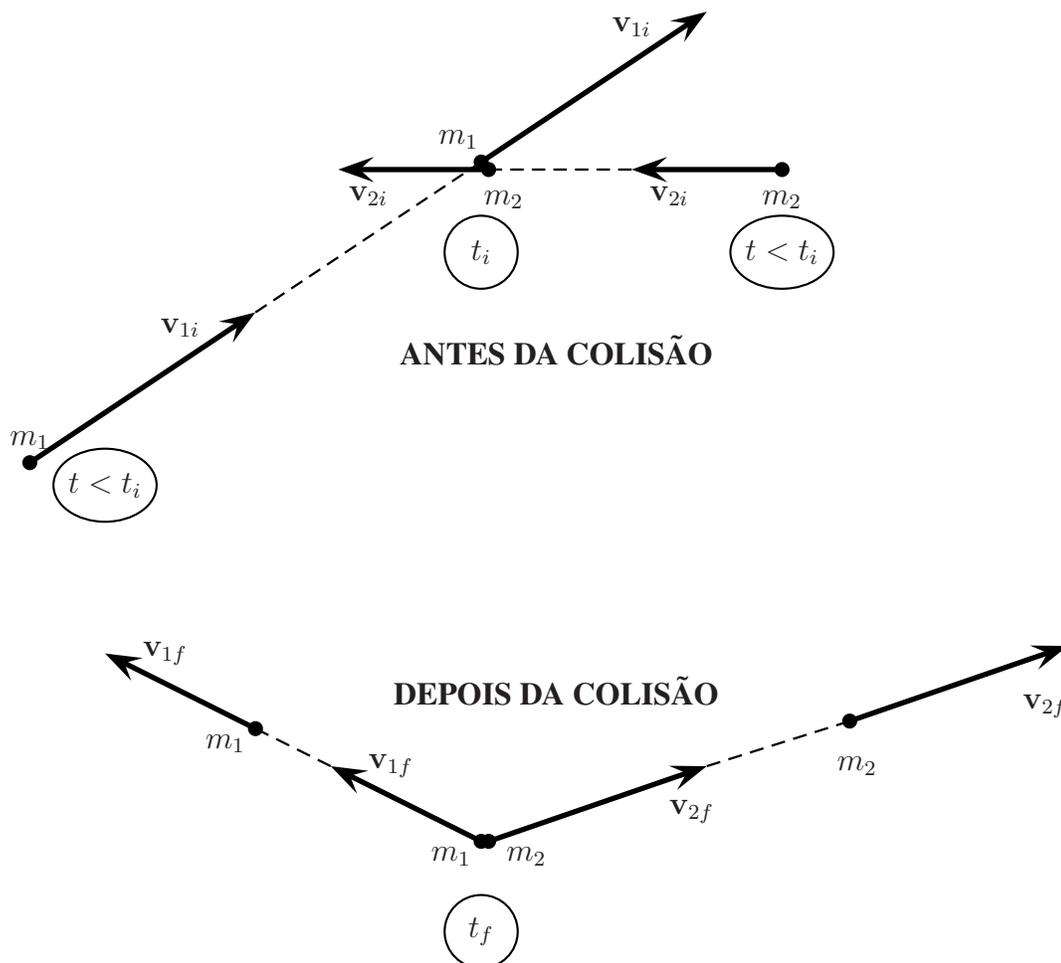
Digamos que as forças internas entre as partículas surjam em um instante  $t_i$  e desapareçam após o instante  $t_f$  e que o intervalo de tempo de  $t_i$  a  $t_f$  seja muito pequeno. Dizemos, então, que as partículas colidiram entre si durante o intervalo

de tempo de  $t_i$  a  $t_f$  ou, mais genericamente, que elas sofreram uma colisão durante esse intervalo de tempo. Antes de começar a colisão, no instante  $t_i$ , não há forças externas nem internas agindo sobre as partículas e, conseqüentemente, suas velocidades são constantes e iguais às velocidades que têm no instante em que vai começar a colisão. Chamemos  $v_{1i}$  e  $v_{2i}$  as velocidades, nesse instante, das partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente. Durante a colisão, as forças internas entre as partículas vão mudando suas velocidades até que, ao final da colisão, no instante  $t_f$ , as partículas estejam com as respectivas velocidades  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$ . Após esse instante, não há mais forças internas ou externas agindo sobre as partículas e elas permanecem com velocidades constantes e iguais àquelas com que terminaram as colisões. A **Figura 30.6** mostra duas bolinhas fazendo o papel das partículas em colisão, conforme acabamos de descrever. A parte superior da figura mostra as duas partículas com suas velocidades constantes antes da colisão,  $v_{1i}$  e  $v_{2i}$ . Elas colidem e, ao final da colisão, as suas velocidades mudaram para  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$ . A parte inferior da figura mostra as partículas com essas velocidades constantes após a colisão. A colisão propriamente dita, que ocorre no curto intervalo de tempo de  $t_i$  a  $t_f$ , não está ilustrada na figura. Nos processos de colisão, é comum podermos observar os movimentos do sistema antes e depois da colisão. Os movimentos que ocorrem durante a colisão geralmente permanecem desconhecidos (lembre-se de que a duração de uma colisão é, em geral, muito pequena).

A colisão descrita na **Figura 30.6** parece muito abstrata, mas podemos visualizá-la em uma situação muito corriqueira. No jogo infantil com bolinhas de gude, elas são arremessadas e rolam no chão horizontal. Os pesos das bolinhas são cancelados pelas normais exercidas pelo chão sobre elas. Já o atrito entre elas e o chão não é relevante quando as bolinhas são arremessadas com grandes velocidades e colidem logo em seguida. Assim, podemos supor que não há forças externas sobre as bolinhas e que a duração do choque entre elas é muito pequena, imperceptível para uma pessoa sem o auxílio de instrumentos apropriados. As bolinhas sofrem uma colisão tal como descrevemos anteriormente até que o atrito entre elas e o solo se torne perceptível, e elas comecem a diminuir suas velocidades e seus movimentos deixem de se enquadrar no padrão descrito na **Figura 30.6**.

No caso das bolinhas de gude, uma situação muito comum é aquela em que uma das bolinhas está parada e a outra é arremessada contra ela. Para que as bolinhas tivessem o comportamento descrito na **Figura 30.6**, a bolinha de massa  $m_1$  teria de ser arremessada com velocidade  $v_{1i}$  e acertar a bolinha de massa  $m_2$ , já em movimento, com velocidade  $v_{2i}$ . Meninos espertos, como os que brincavam

com bolinhas de gude nos anos sessenta, eram capazes de fazer isso, e a colisão provocada entre as bolinhas tinha o aspecto da **Figura 30.6**.



**Figura 30.6:** A figura superior mostra as partículas em MRU antes da colisão, em um instante  $t$  anterior à colisão e no instante  $t_i$  em que vai começar a colisão. A figura inferior mostra as partículas em MRU depois da colisão, no instante  $t_f$  em que termina a colisão e em um instante  $t'$  posterior à colisão.

Para analisar a situação ilustrada na **Figura 30.6**, vamos usar o fato de que não há forças externas sobre as partículas e, portanto, o momento linear total do sistema constituído por elas se conserva, isto é,

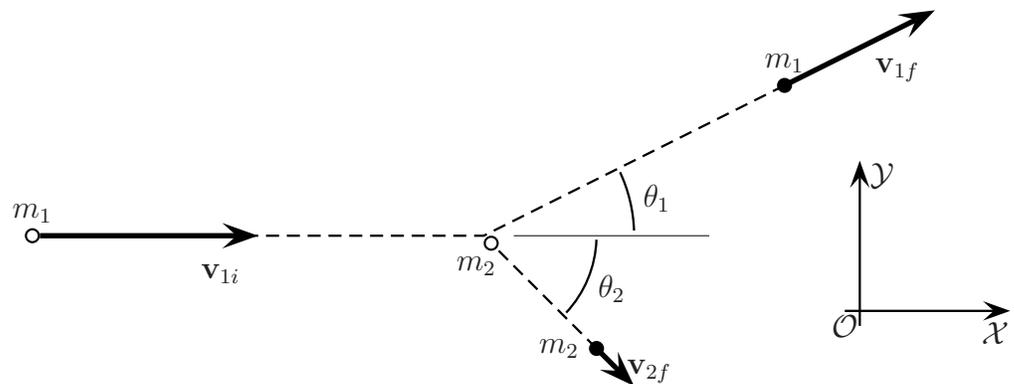
$$m_1 \mathbf{v}_{1i} + m_2 \mathbf{v}_{2i} = m_1 \mathbf{v}_{1f} + m_2 \mathbf{v}_{2f} . \quad (30.18)$$

Essa é uma equação vetorial que envolve 4 vetores, as velocidades inicial e final das duas partículas, e dois números, as massas das partículas. Se todas essas quantidades forem desconhecidas, a partir da única equação (30.18) podemos tirar apenas algumas conclusões muito genéricas sobre a colisão. Para fazermos uma

análise mais interessante, começaremos supondo que sejam conhecidas as massas das partículas e suas velocidades iniciais, sendo nula a velocidade inicial da segunda partícula, isto é,  $\mathbf{v}_{2i} = \mathbf{0}$ . Essa é uma situação comum, na qual chamamos alvo, a partícula inicialmente parada, e projétil, a outra partícula, arremessada contra ela com velocidade  $\mathbf{v}_{1i}$ . Após a colisão, o projétil tem velocidade  $\mathbf{v}_{1f}$  e o alvo ganha uma velocidade  $\mathbf{v}_{2f}$ . Nesse caso, a conservação do momento linear durante a colisão nos permite escrever

$$m_1 \mathbf{v}_{1i} = m_1 \mathbf{v}_{1f} + m_2 \mathbf{v}_{2f} . \quad (30.19)$$

A **Figura 30.7** ilustra esse processo de colisão. Note que os dois vetores constantes  $\mathbf{v}_{1i}$  e  $\mathbf{v}_{1f}$  determinam um plano, que é o plano da trajetória do projétil, a partícula de massa  $m_1$ .



**Figura 30.7:** colisão de um projétil de massa  $m_1$  e velocidade  $\mathbf{v}_{1i}$  com um alvo de massa  $m_2$  em repouso. A figura também mostra os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , que as velocidades finais fazem com a inicial, e um sistema de eixos  $\mathcal{OXY}$  que pode ser utilizado para decompor as velocidades.

Da conservação do momento linear (30.19), concluímos que a trajetória da partícula-alvo também se encontra nesse plano. De fato, da conservação do momento linear (30.19), obtemos

$$\mathbf{v}_{2f} = (m_1/m_2)(\mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{1f}) .$$

Essa igualdade mostra que, em qualquer instante após a colisão, a velocidade final  $\mathbf{v}_{2f}$  da partícula-alvo está no plano determinado pelas velocidades  $\mathbf{v}_{1i}$  e  $\mathbf{v}_{1f}$ , que é o plano da trajetória do projétil; conseqüentemente, toda a trajetória do alvo também se encontra nesse plano, como afirmamos. Em suma, a conservação do momento linear determina que as trajetórias das duas partículas envolvidas na colisão estão em um mesmo plano quando uma das partículas está inicialmente em repouso. Com isso, em uma figura como a **Figura 30.7**, temos todas as trajetórias e velocidades em um mesmo plano, que podemos considerar como sendo o plano

da página. Já na situação mais geral da **Figura 30.6**, devemos considerar que as velocidades e trajetórias estão desenhadas em perspectiva, isto é, as velocidades podem ter componentes que estão entrando ou saindo do plano da página.

Lembre-se de que estamos considerando como dadas as massas das partículas e suas velocidades iniciais. Ainda assim, temos dois vetores desconhecidos, as velocidades finais  $\mathbf{v}_{1f}$  e  $\mathbf{v}_{2f}$ , para uma única equação vetorial (30.19). Vamos decompor essa equação para trabalharmos com números em vez de vetores. Já vimos que todos os vetores envolvidos nessa equação estão em um mesmo plano. Nesse plano, vamos escolher dois eixos cartesianos, digamos, o eixo  $\mathcal{OX}$  na direção e sentido da velocidade inicial  $\mathbf{v}_{1i}$  e, conseqüentemente, o eixo  $\mathcal{OY}$  perpendicular à velocidade inicial, tal como aparece na **Figura 30.7**. Decompondo ao longo desses dois eixos os vetores da equação vetorial (30.19), essa equação dá origem às seguintes equações numéricas:

$$\begin{aligned} m_1 v_{1i} &= m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2f} \cos \theta_2 ; \\ 0 &= m_1 v_{1f} \sin \theta_1 - m_2 v_{2f} \sin \theta_2 . \end{aligned} \quad (30.20)$$

Nessa equação, o módulo  $v_{1i}$  é conhecido, pois estamos supondo que a velocidade inicial do projétil seja conhecida. Se não conhecemos as velocidades finais do alvo e do projétil, são desconhecidos os módulos  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$  e os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Em suma, há quatro incógnitas nas duas equações (30.20), provenientes da conservação do momento linear do sistema das partículas em colisão. Desse modo, a conservação do momento linear não é suficiente para resolvermos esses problemas de colisões. São necessárias mais informações, que devem ser juntadas às equações (30.20), para resolvermos os problemas. Um exemplo interessante de informação suplementar é dado pela condição de que as partículas permaneçam juntas após a colisão. Nesse caso, dizemos que a colisão é **perfeitamente inelástica** ou **totalmente inelástica**. Isso pode acontecer, por exemplo, se arremessarmos uma bolinha de chumbo contra uma bolinha de cera. A bolinha de chumbo pode grudar na bolinha de cera e as duas permanecerem juntas após a colisão. Na colisão inelástica, temos, portanto, a condição suplementar  $\mathbf{v}_{1f} = \mathbf{v}_{2f}$ . Usando-a na conservação do momento linear (30.19), chegamos à equação

$$m_1 \mathbf{v}_{1i} = m_1 \mathbf{v}_{1f} + m_2 \mathbf{v}_{1f} = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{1f} , \quad (30.21)$$

da qual obtemos as velocidades finais das partículas em termos de suas massas e da velocidade inicial do projétil:

$$\mathbf{v}_{1f} = \mathbf{v}_{2f} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_{1i} . \quad (30.22)$$

Nessa equação, vemos que as partículas, depois da colisão, têm uma velocidade na mesma direção e sentido que a velocidade inicial do projétil, pois a velocidade após a colisão é um vetor obtido multiplicando-se o número positivo  $m_1/(m_1 + m_2)$  pela velocidade inicial do projétil. Obviamente, o módulo da velocidade, após a colisão, é esse número multiplicado pelo módulo da velocidade inicial do projétil. Uma vez que esse número é menor do que 1, as partículas, após a colisão, têm sempre uma velocidade menor do que a velocidade do projétil antes da colisão.

Resolvemos esse problema usando a equação vetorial (30.19) da conservação do momento linear; será instrutivo que você o resolva usando as componentes (30.20) da equação (30.19). A propósito, o motivo da expressão completamente inelástica, para designar esse tipo de colisão, será discutido na próxima aula.

Um outro exemplo muito comum de informação suplementar é supor que a soma das energias cinéticas das duas partículas, antes da colisão, é exatamente igual à soma das suas energias cinéticas após a colisão, isto é,

$$\frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_{2f}^2 = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_{2i}^2 .$$

Quando isso ocorre, dizemos que o choque entre as duas partículas é **totalmente** ou **perfeitamente elástico**. Há, ainda, outras situações intermediárias entre um choque totalmente elástico e um choque perfeitamente inelástico que serão discutidas na próxima aula.

### Exemplo 30.5

Neste exemplo, discutiremos uma situação típica de um jogo de sinuca. Consideraremos uma colisão entre duas bolas de sinuca de mesma massa, na qual uma delas está inicialmente em repouso. Desprezaremos efeitos de rotação das mesmas, tratando-as para nossos propósitos como partículas. Além disso, para simplificar a situação, vamos supor que o choque entre elas seja totalmente elástico, isto é, que as respectivas energias cinéticas do sistema formado pelas duas bolas, antes e depois da colisão, são as iguais. No entanto, vamos considerar um choque não frontal, de modo que, depois do choque, as bolas possuam velocidades com direções diferentes, como ocorre na ilustração da **Figura 30.7**.

Suponha que a bola 1 incida sobre a bola 2 com velocidade inicial conhecida  $\mathbf{v}_{1i} = v_0\mathbf{u}_x$  e que a bola 2 esteja em repouso na origem dos eixos cartesianos

escolhidos. Após o choque, a bola 1 tem uma velocidade  $\mathbf{v}_{1f}$ , que forma com o eixo  $\mathcal{OX}$  um ângulo  $\theta_1$ , enquanto a bola 2 tem uma velocidade  $\mathbf{v}_{2f}$ , que forma com esse mesmo eixo um ângulo  $\theta_2$ . Essa situação está ilustrada na **Figura 30.7**, desde que tomemos as massas iguais e identifiquemos  $\mathbf{v}_{1i}$  com  $v_0 \mathbf{u}_x$ .

Da conservação do momento linear do sistema,  $m\mathbf{v}_{1i} = m\mathbf{v}_{1f} + m\mathbf{v}_{2f}$ , podemos escrever as equações

$$v_0 = v_{1f} \cos\theta_1 + v_{2f} \cos\theta_2 \quad (30.23)$$

$$0 = v_{1f} \sin\theta_1 - v_{2f} \sin\theta_2, \quad (30.24)$$

onde usamos o fato de que as massas são idênticas. Exceto por esse fato, essas equações são idênticas às equações (30.20).

Como o choque é totalmente elástico, temos também a relação

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}mv_{2f}^2 \implies v_0^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2. \quad (30.25)$$

Se considerarmos a velocidade de incidência e um dos ângulos, por exemplo  $\theta_1$ , como conhecidos, vemos que as quantidades  $v_{1f}$ ,  $v_{2f}$  e  $\theta_2$  poderão ser calculadas, pois teremos três incógnitas e três equações. No entanto, a tarefa de calcular  $v_{1f}$ ,  $v_{2f}$  será deixada para você no problema proposto 4. Aqui, obteremos apenas  $\theta_2$  em termos de  $\theta_1$ , a fim de mostrarmos o fato curioso que, qualquer que seja o ângulo de saída da primeira bola  $\theta_1$ , as velocidades das duas bolas após o choque serão sempre perpendiculares entre si. Mas vale enfatizar que isso só ocorre na situação descrita nesse exemplo (massas iguais, choque totalmente elásticos e uma das bolas em repouso inicialmente).

Elevando ao quadrado a equação (30.23) e somando com o quadrado da equação (30.24), obtemos

$$v_0^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2v_{1f}v_{2f}(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2),$$

onde usamos a relação  $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ . Lembrando que  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$  e identificando  $\theta_1 + \theta_2$  com o ângulo entre  $\mathbf{v}_{1f}$  e  $\mathbf{v}_{2f}$ , reescrevemos a equação anterior na forma

$$v_0^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\mathbf{v}_{1f} \cdot \mathbf{v}_{2f}. \quad (30.26)$$

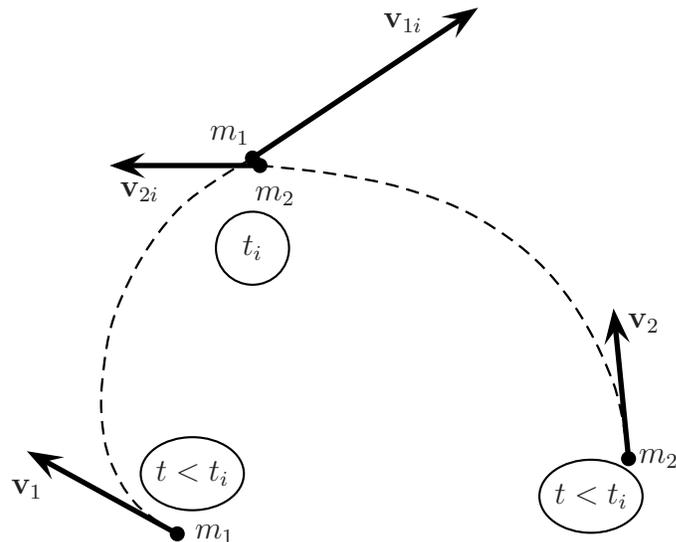
Comparando as equações (30.25) e (30.26), concluímos que

$$\mathbf{v}_{1f} \cdot \mathbf{v}_{2f} = 0,$$

ou seja, as velocidades  $\mathbf{v}_{1f}$  e  $\mathbf{v}_{2f}$  são perpendiculares entre si. Essa informação pode ser de grande valia para você quando estiver jogando sinuca com seus amigos, pois com ela você pode saber se, ao encaçapar uma determinada bola, a bola incidente cairá em alguma outra caçapa ou não.

Até o momento, supusemos que não houvesse forças sobre as duas partículas em colisão, exceto pelas forças momentâneas que uma exerce sobre a outra durante o intervalo de tempo  $[t_i, t_f]$  da colisão (note que tais forças são internas ao sistema formado pelas duas partículas). É por não haver força sobre as partículas antes da colisão que elas têm velocidades sempre iguais às velocidades  $v_{1i}$  e  $v_{2i}$ , com as quais se inicia o processo de colisão no instante  $t_i$ , conforme ilustrado na parte superior da **Figura 30.6**. Analogamente, ao final, as partículas permanecem com as velocidades  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$  que tinham depois do processo de colisão no instante  $t_f$ , conforme ilustrado na parte inferior da **Figura 30.6**. Além disso, a ausência de forças externas sobre as partículas garante a conservação do momento linear total do sistema constituído por elas.

Vejamos, agora, como podemos aproveitar o que aprendemos sobre essa situação para analisar também as situações em que há forças externas agindo nas partículas ou situações em que elas podem interagir também antes e depois da colisão. Primeiramente, consideremos o movimento das duas partículas antes da colisão. Continuaremos a representar por  $v_{1i}$  e  $v_{2i}$  as velocidades das partículas nesse instante inicial da colisão, mas já não vamos supor que antes desse instante as partículas tivessem essas mesmas velocidades, pois, agora, estamos supondo que há forças agindo sobre elas antes da colisão e, portanto, causando mudanças em suas velocidades. Essa possibilidade está ilustrada na **Figura 30.8**, que deve ser comparada com a parte superior da **Figura 30.6**.



**Figura 30.8:** As partículas antes da colisão não estão em MRU, pois há forças agindo sobre elas. Suas velocidades podem variar e não são necessariamente iguais às velocidades  $v_{1i}$  e  $v_{2i}$  com que iniciam a colisão no instante  $t_i$ .

Uma vez que há forças externas agindo sobre as partículas, o momento linear do sistema já não é constante. A **Figura 30.8** ilustra o movimento do sistema, desde um instante  $t$  anterior ao início da colisão até o instante  $t_i$  em que se inicia a colisão. De acordo com (30.14), a variação do momento linear do sistema nesse intervalo de tempo é

$$(m_1 \mathbf{v}_{1i} + m_2 \mathbf{v}_{2i}) - (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) = \int_t^{t_i} \mathbf{F}^{ex} dt, \quad (30.27)$$

onde  $\mathbf{F}^{ex}$  é a força externa total sobre o sistema constituído pelas duas partículas e as grandezas no lado esquerdo da equação são as indicadas na **Figura 30.8**.

Uma análise perfeitamente análoga à anterior pode ser feita para o movimento do sistema depois da colisão. Será instrutivo que você faça essa análise, acompanhada de uma figura que mostre as partículas em movimento depois da colisão. Desenhe as partículas com suas velocidades no instante  $t_f$  em que termina a colisão e num instante  $t'$  após a colisão, ligando as duas posições pelas trajetórias dessas partículas sob a ação de forças externas. Em geral, haverá uma variação no momento linear total no intervalo de tempo considerado após a colisão. Essa variação é dada pelo impulso transmitido pela força externa nesse intervalo, de acordo com (30.14).

Consideremos, agora, a variação do momento linear do sistema durante o intervalo  $[t_i, t_f]$  em que ocorre a colisão. De acordo com (30.14), essa variação é dada por

$$(m_1 \mathbf{v}_{1f} + m_2 \mathbf{v}_{2f}) - (m_1 \mathbf{v}_{1i} + m_2 \mathbf{v}_{2i}) = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}^{ex} dt. \quad (30.28)$$

A integral no lado direito dessa equação é o impulso transmitido ao sistema pela força externa total durante a colisão. Vamos considerar as situações em que o intervalo de tempo  $[t_i, t_f]$  da colisão é tão pequeno que esse impulso pode ser desprezado. Isso significa, simplesmente, que a força externa total não é percussiva, como discutimos na Aula 28. As forças percussivas são exatamente aquelas que, mesmo atuando durante intervalos de tempo muito pequenos, produzem impulsos significativos. Os exemplos mais notáveis são exatamente as forças internas entre as partículas que colidem. Durante o curto intervalo de tempo da colisão, essas forças mudam significativamente os momentos lineares das partículas.

No entanto, as forças de contato entre as partículas em colisão são internas e não mudam o momento linear total do sistema. Estamos interessados nas forças externas, que compõem a força externa total  $\mathbf{F}^{ex}$ . Estas não são percussivas em muitas situações de interesse. Forças como o peso ou as forças elásticas não são,

definitivamente, percussivas. Com essas considerações em mente, podemos dizer que, nos casos em que a força externa total não é percussiva, o lado direito da equação (30.28) é desprezível e, por esse motivo, será considerado nulo. Como conseqüência, o lado esquerdo é nulo, e voltamos à equação (30.18), que expressa a conservação do momento linear do sistema constituído pelas duas partículas. Só que, agora, o momento linear total se conserva, apesar de haver forças externas, porque estamos considerando um intervalo de tempo tão pequeno que as forças externas não têm tempo para alterar o momento linear total, pois não são percussivas.

Quando estabelecemos a equação (30.18), não havia forças externas sobre o sistema, e as velocidades envolvidas nessa equação eram as velocidades das partículas antes e depois da colisão. Agora, a partir de (30.28), voltamos a essa equação, mas nela as velocidades envolvidas são apenas as imediatamente antes e imediatamente após a colisão, pois, devido à presença de forças externas, somente podemos garantir que não há variação significativa de momento linear total durante o curto intervalo de tempo da colisão. Em termos práticos, o que discutimos anteriormente a partir da equação (30.18), continua válido no caso em que há forças externas, desde que elas não sejam percussivas e que consideremos as velocidades das partículas somente imediatamente antes e imediatamente depois da colisão. Deve ficar claro que essa discussão, feita para um sistema de duas partículas, pode ser repetida para um sistema de várias partículas. Desse modo, podemos chegar à equação (30.16) de conservação do momento linear, mesmo se houver forças externas sobre o sistema. Basta apenas que o intervalo de tempo considerado seja pequeno o bastante para que possamos desprezar o impulso da força externa total.

## Resumo

A soma de todas as forças internas de um sistema de partículas é sempre nula. Com isso, o produto da massa total de um sistema pela aceleração de seu centro de massa é igual à soma de todas as forças externas ao sistema, isto é,  $M\mathbf{a}_{cm} = \mathbf{F}^{ex}$ . Por definição, o momento linear de um sistema de partículas ( $\mathbf{P}$ ) é igual à soma dos momentos lineares de todas as partículas que o compõem. Como conseqüência da definição de centro de massa, temos  $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{cm}$ . Impulso da força externa total transmitido ao sistema no intervalo  $[t_1, t_2]$  é definido como a integral dessa força nesse intervalo e o Teorema do Momento Linear e Impulso de um Sistema de Partículas afirma que esse impulso é igual à variação de seu momento linear nesse intervalo. O Teorema da Conservação do Momento Linear

de um Sistema afirma que se for nula a força externa total sobre um sistema, seu momento linear será uma constante de movimento.

No caso particular de duas partículas que se chocam na ausência de forças externas, temos  $m_1\mathbf{v}_{1i} + m_2\mathbf{v}_{2i} = m_1\mathbf{v}_{1f} + m_2\mathbf{v}_{2f}$ , onde  $\mathbf{v}_{1i}$  é a velocidade da partícula de massa  $m_1$  antes da colisão etc. Dependendo das informações que tenhamos sobre o sistema, essa equação não é suficiente para encontrarmos os valores de todas as incógnitas do problema. Nesse caso, informações adicionais sobre o sistema devem ser fornecidas.

Choque totalmente inelástico entre duas partículas é aquele no qual, após o choque, as duas partículas ficam grudadas, possuindo, portanto, a mesma velocidade após a colisão. Choque totalmente elástico entre duas partículas é aquele no qual a soma das energias cinéticas das partículas logo antes da colisão é exatamente igual à soma das suas energias cinéticas logo após a colisão.

Caso  $\mathbf{F}^{ext} \neq 0$ , o momento linear do sistema  $\mathbf{P}$  não mais permanecerá constante. No entanto, a sua variação num certo intervalo é igual à impulsão de  $\mathbf{F}^{ext}$ , ou seja,  $\Delta\mathbf{P} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}^{ext} dt$ .

## Questionário

1. Por que a soma das forças internas de um sistema é sempre nula?
2. Escreva a equação diferencial que rege o movimento do centro de massa de qualquer sistema.
3. Reconsidere o exemplo 30.1, mas agora suponha que as massas das duas esferas sejam diferentes. Descreva qualitativamente a trajetória do centro de massa do sistema. Nesse caso, o centro de massa estaria no centro da mola?
4. Crie outros exemplos nos quais os movimentos das partes que compõem o sistema são complicados, mas o movimento de seu centro de massa é bem simples (você pode, e deve, se inspirar no exemplo 30.1).
5. Considere, novamente, o exemplo 30.1. O que ocorre quando uma das esferas bate pela primeira vez no chão? Desenhe a trajetória do centro de massa do sistema descrita durante o intervalo de tempo que vai desde um instante anterior ao choque até um instante logo após esse choque, mas antes que ocorra outra colisão com o solo.

6. Reconsidere o exemplo 30.2, mas suponha agora que a resistência do ar não seja desprezível. Nesse caso, as trajetórias do centro de massa do projétil quando não ocorre a explosão e quando ocorre a explosão serão rigorosamente iguais? Explique.
7. Imagine um salto em altura de um atleta olímpico. Desenhe a barra a ser ultrapassada pelo atleta e faça um esboço da trajetória de seu centro de massa durante o salto. Lembre-se de que o centro de massa de uma pessoa pode estar até mesmo fora de seu corpo, dependendo das posições de seus pés, braços, etc.
8. Defina momento linear de um sistema de partículas. Qual é a sua expressão em termos da massa total do sistema  $M$  e da velocidade do centro de massa  $\mathbf{v}_{cm}$ ?
9. Enuncie o Teorema do Momento Linear e Força para um sistema de partículas.
10. Enuncie o Teorema da Conservação do Momento Linear de um Sistema de Partículas.
11. No exemplo 30.4, o resultado obtido para o deslocamento total da plataforma depende do modo como o sapo vai de um extremo ao outro?
12. Suponha que uma pequena esfera colida com uma outra que, inicialmente, se encontra em repouso. Considere nula a força total sobre o sistema formado pelas duas esferas. Quais são as condições para que o ângulo entre as velocidades das esferas após o choque seja sempre  $90^\circ$ ?

### Problemas propostos

1. O objetivo deste problema é, essencialmente, verificar que a situação descrita no Exemplo 30.2 pode, de fato, ocorrer.
  - (a) Suponha que um projétil seja lançado do solo com velocidade  $\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{u}_x + v_{0y}\mathbf{u}_y$  e que, ao atingir o ponto mais alto de sua trajetória, ele exploda se partindo em duas partes iguais. Logo após a explosão, uma delas tem velocidade nula. Usando apropriadamente o Teorema da Conservação do Momento Linear de um Sistema de Partículas, determine a velocidade da outra parte do projétil logo após a explosão (confira o resultado com o descrito no Exemplo 30.2).

- (b) Determine a distância entre os respectivos pontos do solo onde caem as duas partes do projétil. Escreva a sua resposta em termos de  $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$  e  $g$ .
- (c) Confira todas as outras afirmações feitas no Exemplo 30.2.
2. Considere uma canoa de comprimento  $\ell$  e duas pessoas, Pedro e Renata, sentadas cada uma num dos extremos da canoa. Inicialmente, a canoa está em repouso flutuando sobre as águas paradas de um lago. Por conveniência, escolha o eixo  $\mathcal{O}\mathcal{X}$  ao longo da canoa, com a sua origem no extremo esquerdo da canoa, onde, por hipótese Pedro está sentado. Seja  $m_P$  a massa de Pedro,  $m_R$  a de Renata e  $M$  a da canoa.
- (a) Pedro e Renata resolvem trocar de lugar. Supondo que a canoa se movimenta apenas horizontalmente e desprezando a força de resistência exercida pela água sobre a canoa, determine o deslocamento total da canoa  $\Delta x_C$  após essa troca. Analisando o resultado obtido, verifique que  $\Delta x_C > 0$  se  $m_R > m_P$ ,  $\Delta x_C < 0$  se  $m_R < m_P$  e  $\Delta x_C = 0$  se  $m_R = m_P$ .
- (b) O resultado obtido no item anterior depende do modo como Pedro e Renata se movimentam durante a troca?
3. No Exemplo 30.5 considere como dados a velocidade da bola incidente e o ângulo  $\theta_1$  entre a velocidade  $\mathbf{v}_{1f}$  e a direção da bola incidente.
- (a) Determine os valores de  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$  em termos de  $v_{1i} = v_0$  e  $\theta_1$ .
- (b) Analise o caso de um choque frontal e verifique, nesse caso, que as bolas simplesmente trocam de velocidades, ou seja, após a colisão a bola incidente permanece em repouso e a outra passa a ter a velocidade da incidente.
4. Um sapo está, inicialmente, situado num dos extremos de uma plataforma de comprimento  $\ell$  que flutua, em repouso, sobre as águas paradas de um lago. Num dado instante, o sapo dá um salto com uma velocidade que faz com a horizontal um ângulo de  $45^\circ$ . Suponha que a plataforma se movimenta apenas na horizontal e despreze o atrito entre a água e a plataforma. Seja  $m$  a massa do sapo e  $M$  a da plataforma. Existe um valor  $v_0$  para o módulo da velocidade do sapo acima do qual o sapo não cai mais sobre a plataforma, mas sim dentro do lago. Determine esse valor em função de  $m$ ,  $M$ ,  $\ell$  e  $g$ .

5. Um pequeno bloco de massa  $M$ , que pode se movimentar sobre uma superfície horizontal e lisa, está preso a um dos extremos de uma mola ideal de constante elástica  $k$ . O outro extremo da mola está preso a uma parede vertical. Inicialmente, o bloco está em repouso na posição de equilíbrio. Num certo instante, tomado como  $t_0 = 0$ , um projétil de massa  $m$  atinge horizontalmente o bloco e, nele, fica grudado. A velocidade do projétil quando atinge o bloco tem a direção da mola e módulo  $v_0$ .
- (a) Determine o módulo da velocidade do sistema bloco-projétil logo após o projétil atingir o bloco.
  - (b) Determine a função-movimento do sistema bloco-projétil para  $t > 0$  (trata-se de um movimento harmônico).
  - (c) Identifique a amplitude e o período do movimento do sistema.
6. Considere um pêndulo simples formado por um fio ideal de comprimento  $\ell$ , cujo extremo superior está fixo ao teto, e uma pequena esfera de Massa  $M$ , presa em seu extremo inferior. Inicialmente, esse pêndulo está em repouso em sua posição de equilíbrio, isto é, na vertical. Num certo instante, tomado como  $t_0 = 0$ , um projétil de massa  $m$  atinge horizontalmente a esfera e fica grudado nela. Verifica-se, então, que quando o pêndulo atinge a altura máxima, o fio faz um ângulo  $\theta_0$  com a vertical. Calcule, a partir desses dados, o módulo da velocidade do projétil logo antes de ele atingir a esfera.

### Auto-avaliação

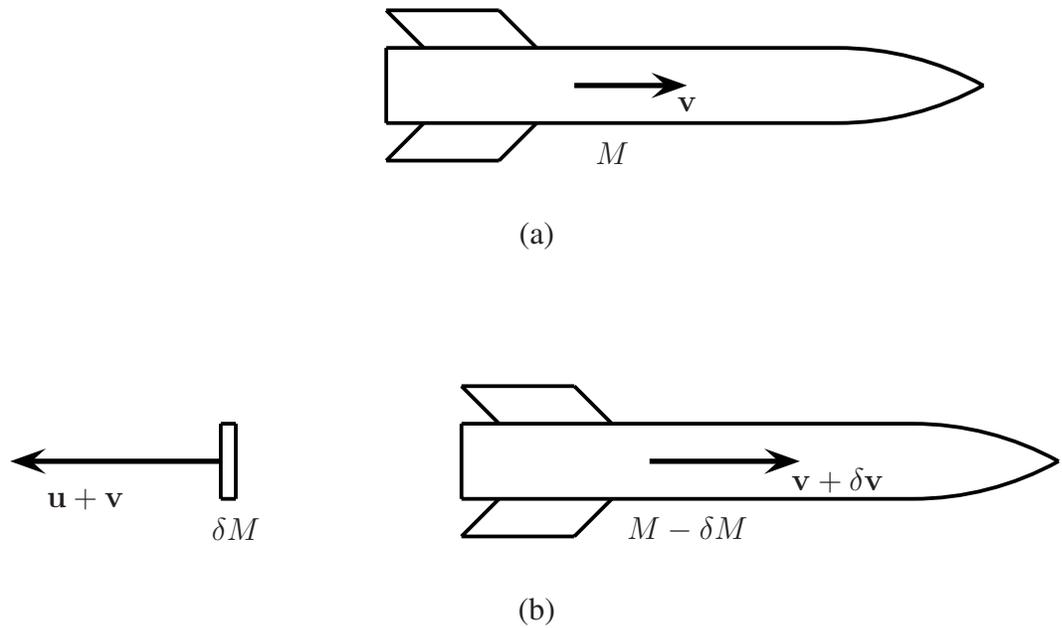
Você deve ser capaz de responder ao questionário inteiro. Como nesta aula o número de problemas propostos está bastante reduzido, em comparação com outras aulas, você deve tentar resolver todos os problemas. Nenhum deles deve apresentar muita dificuldade, pois estão estreitamente relacionados com os exemplos resolvidos no texto. Caso você não consiga resolver algum deles, retorne ao texto da aula e reveja os pontos principais.

## Leitura Suplementar: movimento de Foguetes

Considere um foguete em uma região do espaço em que as forças gravitacionais sejam desprezíveis, isto é, suponha que o foguete se encontre totalmente isolado. Essa hipótese visa a simplificar o problema a ser tratado. Sem muito esforço, é possível generalizar a discussão e analisar o movimento de um foguete sujeito à força gravitacional terrestre quando ele se encontra próximo à superfície da Terra. No entanto, não faremos essa generalização aqui, pois achamos que ela é desnecessária numa primeira abordagem de movimentos de sistemas, como foguetes.

O que chamamos foguete, num dado instante, é o sistema constituído por sua carcaça, seus motores e o combustível que se encontra em seu interior, nesse instante. Estando seus motores ligados, ele vai expelindo seu combustível como um jato de gás incandescente. Digamos que  $\mathbf{u}$  seja a velocidade, em relação ao foguete, com que o gás é expelido, chamada muitas vezes **velocidade de ejeção**. Desejamos saber como aumenta a velocidade desse foguete com motores ligados e livre de quaisquer forças externas, à medida que seu combustível vai sendo expelido. Para isso, usaremos o conceito de momento linear total do sistema físico constituído pelo foguete em um certo instante  $t$ . Digamos que, nesse instante, a massa total do foguete seja  $M$  e sua velocidade seja  $\mathbf{v}$ . Naturalmente, estamos considerando um movimento de translação, de modo que  $\mathbf{v}$  seja a velocidade de cada partícula do foguete e, conseqüentemente, também a de seu centro de massa. O momento linear total do foguete é, portanto,  $M\mathbf{v}$ . Esse é o momento linear do sistema constituído por todas as partículas do foguete no instante considerado, as partículas da carcaça, do motor e do combustível.

Seja, agora, um pequeno intervalo de tempo infinitesimal  $\delta t$ , durante o qual o foguete expele uma quantidade de combustível de massa infinitesimal  $\delta M$ . Ao final do intervalo  $[t, t + \delta t]$ , ou seja, no instante  $t + \delta t$ , o foguete terá uma nova velocidade que chamaremos  $\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$  e sua massa terá o valor  $M - \delta M$ , isto é, sua massa original subtraída da massa de combustível expelida no intervalo de tempo  $\delta t$ . Como a massa  $\delta M$  é expelida com velocidade  $\mathbf{u}$  em relação ao foguete e este possui velocidade  $\mathbf{v}$  no instante  $t$ , a velocidade de  $\delta M$  em relação ao referencial inercial em uso é obtida fazendo-se simplesmente a composição de velocidades de Galileu, ou seja, ela é dada por  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ . A **Figura 30.9** ilustra o que acabamos de afirmar. O momento linear do sistema, no instante  $t + \delta t$ , é igual à soma do momento linear do foguete nesse instante, dado por  $(M - \delta M)(\mathbf{v} + \delta\mathbf{v})$ , com o momento linear do combustível expelido nesse mesmo instante, que escreveremos como  $\delta\mathbf{P}_c$  e calcularemos logo adiante.



**Figura 30.9:** (a) Foguete em um instante  $t$ , no qual sua massa é  $M$  e sua velocidade é  $v$ . (b) Foguete após um intervalo de tempo infinitesimal  $\delta t$ , em que parte  $\delta M$  de sua massa foi expelida com velocidade  $u$  em relação a ele e, portanto, velocidade  $u + v$  em relação ao referencial inercial em uso.

Com isso, temos, no instante  $t + \delta t$ , o momento linear do sistema é  $(M - \delta M)(v + \delta v) + \delta P_c$ . Devido ao Teorema da Conservação do Momento Linear de um sistema de partículas, esse momento linear é igual ao momento linear  $M v$  no instante  $t$ , pois não há forças externas atuando sobre o sistema e, portanto, seu momento linear é conservado,

$$(M - \delta M)(v + \delta v) + \delta P_c = M v . \quad (30.29)$$

Note, com muito cuidado, que o sistema físico em consideração é constituído por partículas bem determinadas, com uma massa  $M$  constante. No instante  $t$ , toda a massa estava no foguete e, no instante  $t + \delta t$ , uma parte dela, de valor  $\delta M$ , é expelida do foguete. Conseqüentemente, no instante  $t + \delta t$ , o foguete possui uma massa igual a  $M - \delta M$ . O sistema físico não mudou, isto é, continua sendo formado pelas mesmas partículas. Em outras palavras, no instante posterior  $t + \delta t$ , ele é constituído das mesmas partículas que no instante  $t$ , embora elas tenham mudado sua localização, e possui a mesma massa  $M$ , igual à massa  $\delta M$  do combustível expelido somada à massa  $M - \delta M$  do foguete. Ao final desta seção, voltaremos a esse ponto.

Calculemos o momento linear  $\delta\mathbf{P}_c$  do combustível expelido no intervalo de  $t$  a  $t + \delta t$ . Ele é igual à massa  $\delta M$  desse combustível multiplicada pela sua velocidade em relação ao referencial inercial que estamos usando. Ora, como já mencionamos, a velocidade do combustível em relação ao referencial inercial é igual à soma vetorial da velocidade  $\mathbf{u}$  do combustível em relação ao foguete com a velocidade  $\mathbf{v}$  do foguete em relação ao referencial inercial. Portanto, o momento linear do combustível expelido é  $\delta\mathbf{P}_c = \delta M(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ . Substituindo esse resultado em (30.29), obtemos

$$(M - \delta M)(\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}) + \delta M(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = M\mathbf{v}. \quad (30.30)$$

Nessa equação, quatro termos se cancelam e a equação resultante pode ter seus membros divididos por  $\delta t$  para chegarmos ao resultado

$$M\frac{\delta\mathbf{v}}{\delta t} - \delta M\frac{\delta\mathbf{v}}{\delta t} + \frac{\delta m}{\delta t}\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (30.31)$$

No limite em que  $\delta t \rightarrow 0$ , as quantidades  $\delta\mathbf{v}$  e  $\delta M$  também vão a zero. Conseqüentemente, o segundo termo da equação anterior vai a zero. Além disso, na equação (30.31), a razão  $\delta\mathbf{v}/\delta t$  se converte na derivada temporal da velocidade, isto é, na aceleração  $d\mathbf{v}/dt$  do foguete, e a razão  $\delta M/\delta t$  converte-se no negativo da derivada  $dM/dt$ . Essa derivada é negativa, pois a massa do foguete diminui com o tempo, devido à ejeção de combustível. O módulo  $|dM/dt|$  dessa derivada é a vazão de combustível. O segundo termo de (30.31) vai a zero e obtemos a equação

$$M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dM}{dt}\mathbf{u}. \quad (30.32)$$

À primeira vista, parece surpreendente que o limite de  $\delta M/\delta t$  seja o negativo da derivada  $dM/dt$ . Contudo, basta usarmos a definição de derivada para chegarmos a esse resultado. Com efeito, seja  $\mathcal{M}$  a função que determina como a massa  $M$  depende do tempo,  $M = \mathcal{M}(t)$ . A massa do foguete no instante  $t$  é  $M$ , e no instante  $t + \delta t$  é  $M - \delta M$ , pois a massa  $\delta M$  de combustível foi ejetada. Portanto,  $M - \delta M = \mathcal{M}(t + \delta t)$  e a variação da massa é

$$\mathcal{M}(t + \delta t) - \mathcal{M}(t) = (M - \delta M) - M = -\delta M.$$

Aplicando a definição de derivada, obtemos

$$\frac{dM}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{M}(t + \delta t) - \mathcal{M}(t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{-\delta M}{\delta t}, \quad (30.33)$$

isto é, o limite de  $\delta M/\delta t$  é o negativo da derivada  $dM/dt$ , como havíamos dito. Você pode fazer um raciocínio análogo para confirmar que o limite de  $\delta\mathbf{v}/\delta t$  é a derivada  $d\mathbf{v}/dt$ .

Até o momento, não falamos nada a respeito da velocidade de ejeção  $\mathbf{u}$  do combustível que aparece no lado direito da equação (30.32), de modo que essa equação é válida mesmo que  $\mathbf{u}$  varie com o tempo. Em geral, a velocidade de ejeção dos combustíveis em foguetes costumam ser constantes. Daqui para a frente, suporemos que na equação (30.32)  $\mathbf{u}$  seja constante e, supostamente, conhecida. Resta saber como a massa  $M$  varia com o tempo, para que possamos resolver a equação diferencial (30.32) e encontrar a velocidade  $\mathbf{v}$  do foguete em função do tempo. Contudo, no caso dessa equação diferencial, é possível encontrar a velocidade do foguete em função de sua massa, sem saber como essa massa varia com o tempo. Assim, obtemos um resultado válido independente da forma como o foguete dá vazão ao seu combustível.

Multiplicando ambos os membros de (30.32) por  $dt$ , dividindo-os por  $M$  e integrando-os, obtemos

$$\int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}} d\mathbf{v}' = \mathbf{u} \int_{M_0}^M \frac{dM'}{M'} dt, \quad (30.34)$$

onde  $M_0$  e  $\mathbf{v}_0$  são, respectivamente, a massa e a velocidade do foguete em um instante  $t_0$ , que pode ser chamado instante inicial, enquanto  $M$  e  $\mathbf{v}$  são as respectivas massa e velocidade em um instante arbitrário  $t$ . Lembrando que o vetor  $\mathbf{u}$  é constante, obtemos imediatamente de (30.34)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{u} \log \left( \frac{M_0}{M} \right). \quad (30.35)$$

Consideremos na equação (30.35) que o instante em que o foguete tem massa  $M$  e velocidade  $\mathbf{v}$  seja posterior ao instante inicial. Nesse caso, temos  $M < M_0$  e, portanto, a fração  $M_0/M$  é maior do que 1, e o logaritmo em (30.35) é positivo. Isso significa que, nessa equação, a variação  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$  da velocidade do foguete tem sentido oposto ao da velocidade  $\mathbf{u}$  de ejeção. Esse é exatamente o resultado que esperamos intuitivamente, o jato é expelido para um certo lado e o foguete ganha velocidade para o lado oposto.

Para saber como a velocidade do foguete depende do tempo, precisamos saber como sua massa depende do tempo, isto é, qual é a função  $\mathcal{M}$ . Se essa função é dada, podemos substituir  $M = \mathcal{M}(t)$  em (30.35) para determinar  $\dot{\mathbf{f}}$  para o foguete. Com isso,  $\mathbf{v}$ , como função do tempo, é dada por

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{u} \log \left[ \frac{M_0}{\mathcal{M}(t)} \right]. \quad (30.36)$$

Note também que a massa  $M$  nunca vai a zero. De fato, ao expelir todo o seu combustível, resta no foguete a massa da carcaça, dos motores e do restante

que não é combustível. Desse modo, o foguete tem uma massa final  $M_f$  positiva, quando esvazia todo o seu combustível, de modo que o valor mínimo do logaritmo em (30.35) é uma certa quantidade positiva  $\log(M_0/M_f)$ .

### Exemplo 30.6

Considere a situação em que a vazão de combustível é uma constante  $\gamma$  que, obviamente, é positiva. Nesse caso, a taxa temporal de variação da massa do foguete é

$$\frac{dM}{dt} = -\gamma, \quad (30.37)$$

na qual a razão do sinal menos já deve estar clara a essa altura. Usando o fato de que  $\gamma$  é constante, obtemos

$$M = M_0 - \gamma t, \quad (30.38)$$

onde  $M_0$  é a massa do foguete no instante  $t = 0$ , e o intervalo de tempo em que essa expressão é válida deve ser restrito por razões físicas. De fato, exaurindo-se todo o combustível, cessa sua exaustão, isto é, passamos a ter  $dM/dt = 0$  e (30.37) deixa de ser verdadeira. Nesse sentido, a equação (30.38) é verdadeira até o instante em que acaba o combustível e o foguete fica com sua massa final  $M_f$ , isto é, até o instante  $t_f = (M_0 - M_f)/\gamma$ . Portanto, nesse intervalo de tempo,  $M(t) = M_0 - \gamma t$ .

Usando essa função em (30.36), obtemos a velocidade do foguete em função do tempo, no caso em que a vazão do combustível é uma constante  $\gamma$ ,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{u} \log \left[ \frac{1}{1 - (\gamma/M_0)t} \right]. \quad (30.39)$$

Para finalizar, observemos que objetos como esse foguete costumam ser chamados **sistemas de massa variável** e que devemos usar essa expressão com cuidado. Em primeiro lugar, devemos concordar que a massa daquilo que chamamos foguete é, de fato, variável, pois ela diminui à medida que o combustível vai sendo expelido. No entanto, dentro da definição de sistema físico que estamos usando, não há possibilidade de falar em sistema físico com massa variável, pois definimos sistema físico como um conjunto de partículas, cada uma com uma massa constante, por definição. A massa de um sistema foi definida como a soma das massas de suas partículas e, portanto, também é constante. Como consequência, as leis físicas enunciadas e os teoremas obtidos, como o do momento linear e força, são aplicáveis aos sistemas considerados, com uma massa bem definida. Por isso, neste exemplo do foguete, escolhemos o sistema físico como o foguete em um certo instante, quando tem uma massa  $M$  bem determinada. Esse

sistema e sua massa não variam. A massa do foguete segue diminuindo com o tempo, mas o sistema físico considerado, formado pelas partículas que compõem o foguete no instante escolhido, tem uma massa bem definida e constante, que denominamos  $M$ . Uma parte do sistema, de massa  $\delta M$ , muda de lugar, sai da carcaça do foguete na forma de um jato, mas continua a pertencer ao sistema físico originalmente definido. A parte restante do sistema são as partículas que formam o foguete, agora com massa  $M - \delta M$ . O sistema todo continua com a mesma massa igual a  $M = \delta M + (M - \delta M)$ . É a esse sistema físico, no sentido técnico preciso que damos a essa palavra, que aplicamos o teorema da conservação do momento linear.

Como você viu nesse exemplo, isso não impede a solução de problemas nos quais existe uma variação de massa em um certo local, no caso, a do combustível presente no interior da carcaça do foguete. Você encontrará na Mecânica Newtoniana problemas como esse, tratados sob o título de “sistemas de massa variável”. Nesse caso, você deve entender a expressão “massa variável” no sentido em que acabamos de discutir, qual seja, há variação de massa em um certo local, embora a massa total do sistema permaneça constante.

## Aula 31 – Energia de um sistema de partículas

### Objetivos

- Dar a definição de energia cinética de um sistema de partículas.
- Dar a definição de trabalho realizado sobre um sistema de partículas.
- Demonstrar o Teorema da Energia Cinética e Trabalho de um Sistema.
- Dar a definição de energia potencial e energia mecânica de um sistema de partículas.
- Aplicar os conceitos anteriores ao estudo de colisões e explosões.

### Introdução

Nesta aula, segunda do Módulo 4, introduziremos o conceito de energia de um sistemas de partículas. Os cálculos envolvendo a energia de um sistema de partículas podem tornar-se muito complicados e você irá aprendê-los em disciplinas de Mecânica mais avançadas. Em Física 1, não nos preocuparemos com tais cálculos, pois estamos interessados, fundamentalmente, no conceito de energia de um sistema. Para entender esse conceito, será muito útil o conhecimento que você já adquiriu sobre energia de uma única partícula na presença de forças a ela aplicadas. Nesta aula, pressupõe-se que você já tenha entendido as idéias fundamentais sobre energia cinética, trabalho, energia potencial e energia mecânica no caso de um sistema constituído de uma única partícula, tal como estudou nas Aulas 21 a 26.

### Energia cinética e trabalho em um sistema de partículas

Vamos considerar um sistema genérico constituído por  $N$  partículas de massas  $m_1, m_2, \dots, m_N$  cujas posições e velocidades são dadas, respectivamente, por  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$  e  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N$ . Aplicando a Segunda Lei de Newton às partículas do sistema, obtemos

$$\begin{aligned}
m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} &= \mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{F}_1^{in} , \\
m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} &= \mathbf{F}_2^{ex} + \mathbf{F}_2^{in} , \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
m_N \frac{d\mathbf{v}_N}{dt} &= \mathbf{F}_N^{ex} + \mathbf{F}_N^{in} ,
\end{aligned} \tag{31.1}$$

onde  $\mathbf{F}_i^{ex}$  é a soma das forças externas sobre a partícula  $i$  e  $\mathbf{F}_i^{in}$  é a soma das forças internas sobre ela. Naturalmente,  $\mathbf{F}_i^{ex} + \mathbf{F}_i^{in}$  é a força total sobre a partícula  $i$ . Agora faremos o produto escalar dos dois lados da primeira equação em (31.1) pela velocidade  $\mathbf{v}_1$  da primeira partícula, dos dois lados da segunda equação pela velocidade  $\mathbf{v}_2$  da segunda partícula e assim sucessivamente, até o produto escalar dos dois membros da  $N$ -ésima equação pela velocidade  $\mathbf{v}_N$  da  $N$ -ésima partícula. Com isso, obtemos

$$\begin{aligned}
m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{F}_1^{ex} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_1^{in} \cdot \mathbf{v}_1 , \\
m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \cdot \mathbf{v}_2 &= \mathbf{F}_2^{ex} \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{F}_2^{in} \cdot \mathbf{v}_2 , \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
m_N \frac{d\mathbf{v}_N}{dt} \cdot \mathbf{v}_N &= \mathbf{F}_N^{ex} \cdot \mathbf{v}_N + \mathbf{F}_N^{in} \cdot \mathbf{v}_N .
\end{aligned} \tag{31.2}$$

De acordo com o que vimos na Aula 23, os lados esquerdos dessas equações são as derivadas temporais das energias cinéticas das partículas do sistema, de modo que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 \right) &= \mathbf{F}_1^{ex} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_1^{in} \cdot \mathbf{v}_1 , \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 \right) &= \mathbf{F}_2^{ex} \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{F}_2^{in} \cdot \mathbf{v}_2 , \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_N \mathbf{v}_N^2 \right) &= \mathbf{F}_N^{ex} \cdot \mathbf{v}_N + \mathbf{F}_N^{in} \cdot \mathbf{v}_N .
\end{aligned} \tag{31.3}$$

Somando membro a membro essas equações e usando o fato de que a soma das derivadas é igual à derivada da soma, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 + \cdots + \frac{1}{2} m_N \mathbf{v}_N^2 \right) = \\ = (\mathbf{F}_1^{ex} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_2^{ex} \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N^{ex} \cdot \mathbf{v}_N) + (\mathbf{F}_1^{in} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_2^{in} \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N^{in} \cdot \mathbf{v}_N) . \end{aligned} \quad (31.4)$$

No lado esquerdo dessa equação, temos a derivada da soma das energias cinéticas das partículas do sistema e, no direito, as potências fornecidas às partículas do sistema pelas forças externas e internas que agem sobre elas. Digamos, simplesmente, que são as potências fornecidas ao sistema pelas forças externas e internas. Dentro do primeiro par de parênteses escrito no lado direito de (31.4) estão as potências fornecidas pelas forças externas e, dentro do segundo par, as potências fornecidas pelas forças internas.

Definimos **energia cinética de um sistema** como a soma das energias cinéticas das partículas que o compõem. Representando por  $K$  a energia cinética do sistema em consideração, temos

$$K = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 + \cdots + \frac{1}{2} m_N \mathbf{v}_N^2 . \quad (31.5)$$

Usando essa definição, podemos escrever o resultado (31.4) na forma abreviada

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} = & (\mathbf{F}_1^{ex} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_2^{ex} \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N^{ex} \cdot \mathbf{v}_N) \\ & + (\mathbf{F}_1^{in} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_2^{in} \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N^{in} \cdot \mathbf{v}_N) . \end{aligned} \quad (31.6)$$

O significado desse resultado é claro:

*a taxa instantânea de variação da energia cinética de um sistema é igual à potência fornecida pelas forças que agem sobre o sistema.*

Vamos considerar agora um determinado movimento do sistema de partículas. Digamos que as funções-movimento das partículas 1, 2, ..., N sejam dadas, respectivamente, por  $f_1, f_2, \dots, f_N$ . Nesse caso, as posições e velocidades das partículas são funções do tempo dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 = f_1(t), \quad \mathbf{r}_2 = f_2(t), \quad \dots, \quad \mathbf{r}_N = f_N(t) \quad \text{e} \\ \mathbf{v}_1 = \dot{f}_1(t), \quad \mathbf{v}_2 = \dot{f}_2(t), \quad \dots, \quad \mathbf{v}_N = \dot{f}_N(t) . \end{aligned} \quad (31.7)$$

As forças externas e as internas que agem sobre as partículas do sistema são funções do tempo e das posições e velocidades das partículas. Uma vez que tais

posições e velocidades, dadas em (31.7), são funções do tempo, as forças externas e internas também serão funções bem determinadas do tempo durante o movimento considerado do sistema. Elas aparecem no lado direito de (31.6) enquanto as velocidades, que também são funções do tempo, surgem na segunda linha de (31.7). Com isso, o lado direito de (31.6) é uma função do tempo bem determinada durante o movimento em consideração.

Durante esse movimento, a energia cinética no membro esquerdo de (31.6) é uma função do tempo, pois ela depende apenas das velocidades das partículas e essas velocidades dependem do tempo de acordo com a segunda linha em (31.7).

Em suma, os dois membros da equação (31.6) são funções do tempo para um dado movimento do sistema. Vamos integrá-los em um intervalo de tempo  $[t_a, t_b]$  do movimento para obter

$$\int_{t_a}^{t_b} \frac{dK}{dt} dt = \int_{t_a}^{t_b} (\mathbf{F}_1^{ex} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_2^{ex} \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N^{ex} \cdot \mathbf{v}_N) dt + \int_{t_a}^{t_b} (\mathbf{F}_1^{in} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_2^{in} \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N^{in} \cdot \mathbf{v}_N) dt, \quad (31.8)$$

em que, para evitar uma notação pesada, não foram agregados aos símbolos de integral os símbolos  $f_1, f_2, \dots, f_N$  das funções-movimento em consideração.

A integral no lado esquerdo de (31.8) é igual à energia cinética no instante  $t_b$ , que representaremos por  $K_b$ , menos a energia cinética no instante  $t_a$ , que representaremos por  $K_a$ . Obviamente, no membro direito de (31.8), temos os trabalhos realizados pelas forças externas e internas sobre o sistema no intervalo de tempo  $[t_a, t_b]$  do movimento considerado. Vamos representar por  $W^{ex}(t_a, t_b)$  o trabalho realizado pelas forças externas,

$$W^{ex}(t_a, t_b) = \int_{t_a}^{t_b} (\mathbf{F}_1^{ex} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_2^{ex} \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N^{ex} \cdot \mathbf{v}_N) dt, \quad (31.9)$$

e por  $W^{in}(t_a, t_b)$  o trabalho realizado pelas forças internas,

$$W^{in}(t_a, t_b) = \int_{t_a}^{t_b} (\mathbf{F}_1^{in} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_2^{in} \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N^{in} \cdot \mathbf{v}_N) dt. \quad (31.10)$$

Novamente, para não sobrecarregar a notação, em lugar de escrever  $W^{ex}(t_a, t_b; f_1, \dots, f_N)$  e  $W^{in}(t_a, t_b; f_1, \dots, f_N)$ , escrevemos simplesmente  $W^{ex}(t_a, t_b)$  e  $W^{in}(t_a, t_b)$ . Mas está subentendido que esses trabalhos são calculados ao longo do movimento do sistema em consideração.

---

Observe que abandonamos a nossa notação habitual  $[t_1, t_2]$  para um intervalo de tempo, preferindo usar aqui  $[t_a, t_b]$ . Com isso, esperamos evitar que a notação das fórmulas desta aula se tornem confusas.

---

Usando esses conceitos, o resultado (31.8) pode ser posto na forma

$$K_b - K_a = W^{ex}(t_a, t_b) + W^{in}(t_a, t_b), \quad (31.11)$$

isto é,

*a variação da energia cinética de um sistema durante um certo intervalo de tempo e ao longo de um movimento dado do sistema é igual ao trabalho realizado nesse intervalo pelas forças externas e internas que agem no sistema.*

Esse resultado é o **Teorema da Energia Cinética e Trabalho** no caso de um sistema de partículas. Obviamente, no caso extremo em que o sistema tem apenas uma partícula, não existem forças internas, e esse teorema se reduz ao Teorema da Energia Cinética e Trabalho que demonstramos na Aula 24.

A análise dos trabalhos realizados por forças externas e internas pode ser muito complicada, e por isso as situações mais gerais são tratadas em disciplinas mais avançadas. Aqui vamos nos ater a situações mais simples. Primeiramente, consideraremos o exemplo de um sistema com somente duas partículas sujeitas apenas a forças gravitacionais. Nesse exemplo, desejamos apenas obter os trabalhos externos e internos que provocam as variações da energia cinética desse sistema. Mas não nos preocuparemos em levar os cálculos até o final considerando um movimento específico. Isso poderá ser feito posteriormente, quando tivermos adquirido mais prática no assunto. Trataremos, depois, do caso em que as forças externas sobre o sistema são conservativas.

### Exemplo 31.1

Consideremos o sistema físico formado pela Terra e pela Lua. Os diâmetros da Terra e da Lua são menores que quatro centésimos das distâncias entre elas. Para os nossos propósitos, podemos considerar a Terra e a Lua como duas partículas. Nesse caso, o número de partículas do sistema é  $N = 2$ . Vamos chamar a Terra partícula 1 e a Lua partícula 2. O referencial inercial que usaremos é o copernicano, de modo que a origem do sistema de coordenadas está no Sol. O vetor-posição da Terra é  $\mathbf{r}_1$  e o da Lua,  $\mathbf{r}_2$ . O vetor-posição da Lua relativo à Terra é  $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  e o da Terra relativo à Lua,  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . As forças internas nesse sistema são a força gravitacional que a Lua exerce sobre a Terra e a força gravitacional que a Terra exerce sobre a Lua, dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_2 m_1}{r_{21}^2} \hat{\mathbf{r}}_{21}. \quad (31.12)$$

Vemos, então, que a força interna total sobre a Lua é apenas a força que a Terra exerce sobre ela, e a força interna total sobre a Terra é apenas a força que a Lua exerce sobre ela, isto é:

$$\mathbf{F}_1^{in} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_2^{in} = -G \frac{m_2 m_1}{r_{21}^2} \hat{\mathbf{r}}_{21} . \quad (31.13)$$

As forças externas que agem sobre a Terra e a Lua são as forças gravitacionais exercidas pelo Sol. Em princípio, poderíamos considerar também as forças externas exercidas pelos outros planetas, mas como não queremos complicar o problema e sabemos que as forças do Sol são as dominantes, ficaremos somente com elas, que são dadas por

$$\mathbf{F}_1^{ex} = -G \frac{m_1 M_S}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_2^{ex} = -G \frac{m_2 M_S}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 , \quad (31.14)$$

em que, naturalmente,  $M_S$  é a massa do Sol,  $\mathbf{F}_1$  é a força que ele exerce sobre a Terra, e  $\mathbf{F}_2$ , a força que ele exerce sobre a Lua.

Consideremos um intervalo de tempo  $[t_a, t_b]$  durante o movimento da Terra e da Lua. Nesse intervalo, as forças externas (31.14) realizam um trabalho dado pela fórmula (31.9), ou seja,

$$W^{ex}(t_a, t_b) = \int_{t_a}^{t_b} \left( -G \frac{m_1 M_S}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \mathbf{v}_1 - G \frac{m_2 M_S}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \right) dt . \quad (31.15)$$

Como as forças dependem apenas das posições das partículas, podemos mudar a variável de integração, o tempo  $t$ , para as variáveis de posição  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ , como você está convidado a fazer no problema proposto 1.

No intervalo de tempo  $[t_a, t_b]$  do movimento considerado, o trabalho das forças internas (31.13) é dado pela fórmula (31.10),

$$W^{in}(t_a, t_b) = \int_{t_a}^{t_b} \left( -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \cdot \mathbf{v}_1 - G \frac{m_2 m_1}{r_{21}^2} \hat{\mathbf{r}}_{21} \cdot \mathbf{v}_2 \right) dt . \quad (31.16)$$

Note que a soma das forças internas (31.13) é obviamente nula. Já o trabalho (31.16) realizado por elas não parece ser necessariamente nulo. Na verdade, ele pode perfeitamente ser diferente de zero. Veremos, na próxima seção, que ele é realmente nulo no caso de o sistema ser um corpo rígido.

A energia cinética do sistema é dada por

$$K = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 . \quad (31.17)$$

Representemos as velocidades das partículas 1 e 2 no instante  $t_a$ , respectivamente, por  $\mathbf{v}_{1a}$  e  $\mathbf{v}_{2a}$ , e por  $\mathbf{v}_{1b}$  e  $\mathbf{v}_{2b}$  as respectivas velocidades das partículas no instante  $t_b$ . O Teorema da Energia Cinética e Trabalho (31.11) afirma que a variação da energia cinética é igual ao trabalho realizado sobre a Terra e a Lua, isto é, o trabalho realizado pelas forças externas (31.15) somado ao trabalho (31.16) realizado pelas internas:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_{1b}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_{2b}^2 \right] - \left[ \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_{1a}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_{2a}^2 \right] = \\ = \int_{t_a}^{t_b} \left( -G \frac{m_1 M_S}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \mathbf{v}_1 - G \frac{m_2 M_S}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \right) dt + \\ + \int_{t_a}^{t_b} \left( -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \cdot \mathbf{v}_1 - G \frac{m_2 m_1}{r_{21}^2} \hat{\mathbf{r}}_{21} \cdot \mathbf{v}_2 \right) dt. \end{aligned} \quad (31.18)$$

Apesar de parecer complicada, essa fórmula pode ser escrita em uma forma muito mais simples. Além disso, para usá-la em um cálculo completo, faltaria especificar os movimentos da Terra e da Lua que estão sendo considerados. No entanto, como não estamos interessados nesse tipo questão, pararemos o cálculo por aqui. Nosso interesse é ilustrar a identificação das grandezas envolvidas no Teorema da Energia Cinética e Trabalho de um Sistema de Partículas, e como são iniciados os cálculos envolvidos nesse teorema.

Após esse exemplo, vamos examinar a expressão do trabalho externo (31.9) sobre um sistema de partículas. Podemos escrevê-la como a soma de integrais:

$$W^{ex}(t_a, t_b) = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_1^{ex} \cdot \mathbf{v}_1 dt + \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_2^{ex} \cdot \mathbf{v}_2 dt + \dots + \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_N^{ex} \cdot \mathbf{v}_N dt. \quad (31.19)$$

Se a força externa  $\mathbf{F}_i^{ex}$  sobre a  $i$ -ésima partícula for conservativa, o trabalho que ela realiza em um intervalo de tempo  $[t_a, t_b]$  dependerá apenas das posições da partícula no início e no final do intervalo, e poderemos escrever para esse trabalho

$$\int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_i^{ex} \cdot \mathbf{v}_i dt = \int_{\mathbf{r}_{ia}}^{\mathbf{r}_{ib}} \mathbf{F}_i^{ex} \cdot d\mathbf{r}_i, \quad (31.20)$$

expressão na qual  $\mathbf{r}_{ia}$  e  $\mathbf{r}_{ib}$  representam a posição da  $i$ -ésima partícula nos instantes  $t_a$  e  $t_b$ , respectivamente. Podemos, então, definir a seguinte energia potencial  $U_i$  da  $i$ -ésima partícula sujeita à força conservativa  $\mathbf{F}_i^{ex}$ :

$$U_i(\mathbf{r}_i) = \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_{ip}} \mathbf{F}_i^{ex} \cdot d\mathbf{r}_i, \quad (31.21)$$

onde  $\mathbf{r}_{ip}$  é uma posição-padrão escolhida para a  $i$ -ésima partícula. O trabalho (31.20) é dado pelo negativo da variação dessa energia potencial:

$$\int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_i^{ex} \cdot \mathbf{v}_i dt = \int_{\mathbf{r}_{ia}}^{\mathbf{r}_{ib}} \mathbf{F}_i^{ex} \cdot d\mathbf{r}_i = -[U_i(\mathbf{r}_{ib}) - U_i(\mathbf{r}_{ia})]. \quad (31.22)$$

Se todas as forças externas  $\mathbf{F}_1^{ex}, \mathbf{F}_2^{ex}, \dots, \mathbf{F}_N^{ex}$  forem conservativas, teremos associadas a elas as energias potenciais dadas pelas funções  $U_1, U_2, \dots, U_N$ . Nesse caso, a igualdade (31.22) é verdadeira para  $i = 1, 2, \dots, N$  e o trabalho (31.19) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} W^{ex}(t_a, t_b) = & -[U_1(\mathbf{r}_{1b}) - U_1(\mathbf{r}_{1a})] \\ & -[U_2(\mathbf{r}_{2b}) - U_2(\mathbf{r}_{2a})] \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & -[U_N(\mathbf{r}_{Nb}) - U_N(\mathbf{r}_{Na})] \end{aligned} \quad (31.23)$$

ou, juntando as energias potenciais definidas em um mesmo instante,

$$\begin{aligned} W^{ex}(t_a, t_b) = & -[U_1(\mathbf{r}_{1b}) + U_2(\mathbf{r}_{2b}) + \dots + U_N(\mathbf{r}_{Nb})] \\ & +[U_1(\mathbf{r}_{1a}) + U_2(\mathbf{r}_{2a}) + \dots + U_N(\mathbf{r}_{Na})]. \end{aligned} \quad (31.24)$$

Esse resultado sugere a definição de novos conceitos. Se as partículas do sistema têm posições  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ , essa seqüência de posições é chamada uma **configuração do sistema de partículas**. Representamos tal configuração por  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ . A soma de todas as energias potenciais das partículas do sistema,  $U_1(\mathbf{r}_1) + U_2(\mathbf{r}_2) + \dots + U_N(\mathbf{r}_N)$ , é uma quantidade que é função das posições  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$  das partículas, isto é, uma quantidade que é função da configuração do sistema de partículas. Essa quantidade é chamada **energia potencial externa do sistema de partículas** e é representada por  $U^{ex}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ . Temos, então,

$$U^{ex}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = U_1(\mathbf{r}_1) + U_2(\mathbf{r}_2) + \dots + U_N(\mathbf{r}_N). \quad (31.25)$$

Usando essa definição, podemos escrever (31.24) na forma

$$W^{ex}(t_a, t_b) = -[U^{ex}(\mathbf{r}_{1b}, \mathbf{r}_{2b}, \dots, \mathbf{r}_{Nb}) - U^{ex}(\mathbf{r}_{1a}, \mathbf{r}_{2a}, \dots, \mathbf{r}_{Na})], \quad (31.26)$$

onde  $(\mathbf{r}_{1b}, \mathbf{r}_{2b}, \dots, \mathbf{r}_{Nb})$  é a configuração do sistema de partículas no instante  $t_b$ , e  $(\mathbf{r}_{1a}, \mathbf{r}_{2a}, \dots, \mathbf{r}_{Na})$ , a configuração no instante  $t_a$ . Assim, se as forças externas que agem sobre um sistema inteiro forem conservativas, podemos dizer que o trabalho

realizado por elas em um certo intervalo de tempo é o negativo da variação da energia potencial externa nesse intervalo.

Se as forças internas forem conservativas, seu trabalho também poderá ser escrito em termos de energias potenciais. Porém, essa questão não será abordada agora. Em vez disso, passaremos a um exemplo simples no qual as forças externas são conservativas.

### Exemplo 31.2

Consideremos um sistema de partículas sobre o qual as únicas forças externas são os seus pesos. Temos, então,  $\mathbf{F}_1^{ex} = m_1 \mathbf{g}$ ,  $\mathbf{F}_2^{ex} = m_2 \mathbf{g}, \dots, \mathbf{F}_N^{ex} = m_N \mathbf{g}$ . Essas forças são constantes e conservativas. Se escolhermos o eixo  $\mathcal{OZ}$  na vertical, apontando para cima, e o ponto padrão em  $z_i = 0$ , teremos, para o peso  $m_i \mathbf{g}$ , a energia potencial  $U_i(z_i) = m_i g z_i$ . A energia potencial externa desse sistema de partículas é, de acordo com (31.25),

$$U^{ex}(z_1, z_2, \dots, z_N) = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 + \dots + m_N g z_N . \quad (31.27)$$

Fatorando  $g$  nessa expressão, obtemos

$$U^{ex}(z_1, z_2, \dots, z_N) = (m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_N z_N) g . \quad (31.28)$$

Pela definição de centro de massa, temos  $m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_N z_N = M z_{cm}$ , onde  $M$  é a massa total do sistema e  $z_{cm}$  é a coordenada- $z$  do centro de massa. Com isso, temos para a expressão (31.28)

$$U^{ex}(z_1, z_2, \dots, z_N) = M g z_{cm} . \quad (31.29)$$

Ela mostra que, nesse caso, a energia potencial externa do sistema depende de sua configuração por meio apenas da coordenada- $z$  do seu centro de massa. O trabalho externo realizado pelos pesos no intervalo  $[t_a, t_b]$  é, de acordo com (31.26), dado por

$$W^{ex}(t_a, t_b) = -[M g z_{cmb} - M g z_{cma}] , \quad (31.30)$$

onde  $z_{cma}$  é a coordenada- $z$  do centro de massa do sistema no instante  $t_a$  e  $z_{cmb}$ , sua coordenada- $z$  no instante  $t_b$ .

## Energia cinética e trabalho em um corpo rígido

Você deve se lembrar de que é nula a soma de todas as forças internas que agem sobre um sistema. Por esse motivo, mostramos, na aula anterior, que a

variação do momento linear do sistema é igual à soma das forças externas. Já nesta aula, mostramos que a variação da energia cinética do sistema é igual ao trabalho realizado por todas as forças, externas e internas, pois o trabalho realizado pelas forças internas não é necessariamente nulo, apesar de ser nula a sua soma. É fácil imaginar exemplos em que esse trabalho não é nulo. Você pode considerar um sistema constituído por apenas duas partículas que exercem forças atrativas uma sobre a outra. Imagine que não haja forças externas e que as partículas estejam inicialmente em repouso. Nesse caso, elas começam a se movimentar ao longo da reta que as une, aproximando-se entre si. A soma das duas forças internas é nula, pois formam um par de ação e reação. Você pode verificar com facilidade que o trabalho realizado por cada uma das forças internas realiza nesse movimento é positivo. Conseqüentemente, a soma deles é positiva e fica verificado que o trabalho das forças internas não é nulo nesse exemplo.

O trabalho realizado pelas forças internas não é necessariamente nulo. Apesar disso, há um caso importante em que esse trabalho é nulo. Trata-se da situação em que o sistema de partículas forma um corpo rígido. Nesse caso, a distância entre quaisquer duas partículas do sistema permanece invariável. Se  $i$  e  $j$  são duas partículas quaisquer do sistema, com posições  $\mathbf{r}_i$  e  $\mathbf{r}_j$ , o vetor que vai da partícula  $j$  até a partícula  $i$  é  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ . Portanto, a distância entre elas é o módulo  $|\mathbf{r}_{ij}|$  desse vetor. Dizer que essa distância é constante equivale a dizer que o quadrado dessa distância é constante. Conseqüentemente, podemos dizer que o sistema é um corpo rígido se, e somente se,  $|\mathbf{r}_{ij}|^2 = \text{constante}$  para qualquer par de partículas  $i$  e  $j$  do sistema. Acontece que o quadrado do módulo de um vetor é o produto escalar dele por ele mesmo. Assim, a condição de que o sistema de  $N$  partículas seja um corpo rígido é dada por

$$\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} = \text{constante} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N). \quad (31.31)$$

Para fazer cálculos, essa expressão é mais conveniente do que sua equivalente  $|\mathbf{r}_{ij}| = \text{constante}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, N$ ).

A derivada em relação ao tempo do lado esquerdo de (31.31) é nula, pois ele é uma constante. Com isso, obtemos

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}) = \frac{d\mathbf{r}_{ij}}{dt} \cdot \mathbf{r}_{ij} + \mathbf{r}_{ij} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{ij}}{dt} = 2\mathbf{r}_{ij} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{ij}}{dt} = \mathbf{0}, \quad (31.32)$$

onde  $d\mathbf{r}_{ij}/dt$  é o que denominamos velocidade relativa da partícula  $i$  em relação à partícula  $j$ . Ela é representada por  $\mathbf{v}_{ij}$  e é imediato verificar que  $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$ . Portanto, o resultado final do cálculo (31.32) é

$$\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{0} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N). \quad (31.33)$$

Essa igualdade mostra que, em um corpo rígido, a velocidade de uma partícula  $i$  em relação a uma partícula  $j$  é sempre perpendicular à reta que passa pelas duas partículas, pois é perpendicular ao vetor que vai da partícula  $j$  à partícula  $i$ .

Agora, fixemos nossa atenção no trabalho (31.10) realizado pelas forças internas, mais precisamente no integrando que aparece no lado direito de (31.10). Nesse integrando aparecem as forças internas sobre as partículas do sistema, que são dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^{in} &= \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \cdots + \mathbf{F}_{1N-1} + \mathbf{F}_{1N} , \\ \mathbf{F}_2^{in} &= \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \cdots + \mathbf{F}_{2N-1} + \mathbf{F}_{2N} , \\ \mathbf{F}_3^{in} &= \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} + \cdots + \mathbf{F}_{3N-1} + \mathbf{F}_{3N} , \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \mathbf{F}_N^{in} &= \mathbf{F}_{N1} + \mathbf{F}_{N2} + \mathbf{F}_{N3} + \cdots + \mathbf{F}_{NN-1} . \end{aligned} \quad (31.34)$$

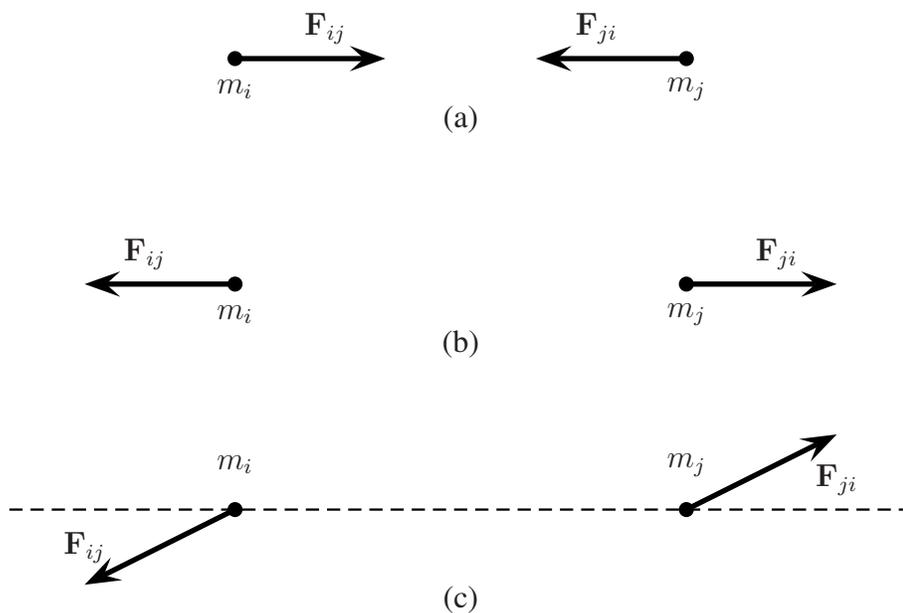
Substituindo essas expressões para  $\mathbf{F}_1^{in}$ ,  $\mathbf{F}_2^{in}$ , ...,  $\mathbf{F}_N^{in}$  no integrando de (31.10) e fazendo os produtos escalares pelas velocidades, obtemos para tal integrando:

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}_1^{in} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_2^{in} \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N^{in} \cdot \mathbf{v}_N = \\ &= \mathbf{F}_{12} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_{13} \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{F}_{1N-1} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_{1N} \cdot \mathbf{v}_1 + \\ &+ \mathbf{F}_{21} \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{F}_{23} \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{F}_{2N-1} \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{F}_{2N} \cdot \mathbf{v}_2 + \\ &+ \mathbf{F}_{31} \cdot \mathbf{v}_3 + \mathbf{F}_{32} \cdot \mathbf{v}_3 + \cdots + \mathbf{F}_{3N-1} \cdot \mathbf{v}_3 + \mathbf{F}_{3N} \cdot \mathbf{v}_3 + \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &+ \mathbf{F}_{N1} \cdot \mathbf{v}_N + \mathbf{F}_{N2} \cdot \mathbf{v}_N + \mathbf{F}_{N3} \cdot \mathbf{v}_N + \cdots + \mathbf{F}_{NN-1} \cdot \mathbf{v}_N . \end{aligned} \quad (31.35)$$

Nessa expressão, aparecem todas as forças internas que cada partícula do sistema sofre de cada uma das outras partículas. Conseqüentemente, para cada termo  $\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i$  que aparece nessa expressão, também aparece o termo  $\mathbf{F}_{ji} \cdot \mathbf{v}_j$ . Como esses termos estão somados, a soma no membro direito de (31.35) é uma soma de pares de termos do tipo  $\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot \mathbf{v}_j$ . Usando a Terceira Lei de Newton,  $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ , obtemos  $\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot \mathbf{v}_j = \mathbf{F}_{ij} \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)$ . Mas  $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$  é a velocidade relativa  $\mathbf{v}_{ij}$ , da partícula  $i$  em relação à partícula  $j$ ; logo,

$$\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot \mathbf{v}_j = \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij} . \quad (31.36)$$

Agora, vamos supor que a força exercida por uma partícula sobre qualquer outra tenha a direção da reta que passa por elas. Portanto, são forças necessariamente atrativas ou repulsivas. Elas são chamadas **forças centrais**, porque têm sempre a direção da reta que passa pela partícula que sofre a força e por um centro atrator ou repulsor, no caso, a outra partícula.



**Figura 31.1:** Em (a) as forças são centrais atrativas, em (b) são centrais repulsivas e em (c) as forças não são centrais. Nos três casos, as forças  $\mathbf{F}_{ij}$  e  $\mathbf{F}_{ji}$  têm mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos; além disso, nos dois primeiros casos, têm a direção da reta que passa pelas partículas.

Na Natureza também existem forças que não são centrais, mas elas não pertencem propriamente ao domínio da Mecânica Newtoniana. A **Figura 31.1** ilustra em (a) e (b) o caso em que as forças são centrais (atrativas no caso (a) e repulsivas no caso (b)) e em (c) um caso em que as forças não são centrais.

Para indicar que a Mecânica Newtoniana se restringe às situações em que as forças entre as partículas são centrais, é comum acrescentar essa condição ao enunciado da Terceira Lei de Newton. Diz-se, então, que “forças de ação e reação têm mesmo módulo, mesma direção, sentidos opostos e (acrescenta-se) estão ao longo da reta que passa pelas partículas”. Há uma forma muito simples de dizer que as forças  $\mathbf{F}_{ij}$  e  $\mathbf{F}_{ji}$  têm a direção da reta que passa pelas partículas  $i$  e  $j$ . Basta dizer que  $\mathbf{F}_{ij}$  tem a mesma direção do vetor que vai de uma partícula à outra, digamos, o vetor  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ , que vai da partícula  $j$  até a partícula  $i$ . Mas dizer que o vetor  $\mathbf{F}_{ij}$  tem a mesma direção que o vetor  $\mathbf{r}_{ij}$  é o mesmo que dizer que  $\mathbf{F}_{ij}$  é igual a um número multiplicado por  $\mathbf{r}_{ij}$ . Denotando esse número por  $\lambda_{ij}$ , temos

$$\mathbf{F}_{ij} = \lambda_{ij} \mathbf{r}_{ij}, \quad (31.37)$$

expressão equivalente à afirmação de que  $\mathbf{F}_{ij}$  tem a direção da reta que passa pelas partículas  $i$  e  $j$ . Pela Terceira Lei de Newton,  $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$  e, como consequência de (31.37),  $\mathbf{F}_{ji} = -\lambda_{ij} \mathbf{r}_{ij}$ , de modo que também  $\mathbf{F}_{ji}$  tem a direção da reta que passa pelas partículas  $i$  e  $j$ . Portanto, na equação (31.37) está contida a informação de que as duas forças,  $\mathbf{F}_{ij}$  e  $\mathbf{F}_{ji}$ , têm a direção da reta que passa pelas partículas  $i$  e  $j$ . Usando (31.37), obtemos para a soma (31.36),

$$\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot \mathbf{v}_j = \lambda_{ij} \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij}. \quad (31.38)$$

Agora, usaremos a hipótese de que o sistema de partículas seja um corpo rígido. Nesse caso, como vimos em (31.33), vale a condição  $\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij} = 0$ . Usando-a em (31.38), obtemos o resultado:

$$\text{As } N \text{ partículas formam um corpo rígido} \Rightarrow \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot \mathbf{v}_j = 0 \quad (i, j = 1, \dots, N). \quad (31.39)$$

Uma vez que a soma em (31.35) pode ser escrita de forma que todas as parcelas sejam do tipo  $\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot \mathbf{v}_j$ , concluímos que ela é nula. Como essa soma é o integrando da equação (31.10), que dá o trabalho das forças internas, obtemos, finalmente, o resultado

*é nulo o trabalho realizado pelas forças internas em um corpo rígido,*

$$W^{(in)}(t_a, t_b) = 0. \quad (31.40)$$

Como consequência desse resultado, podemos afirmar que

*a variação da energia cinética de um corpo rígido é igual ao trabalho realizado pelas forças externas que agem sobre ele.*

Com isso, o Teorema da Energia Cinética e Trabalho, dado pela equação (31.11), toma a seguinte forma no caso de o sistema ser um corpo rígido

$$K_b - K_a = W^{ex}(t_a, t_b) . \quad (31.41)$$

Vamos agora supor que as forças externas atuando sobre o corpo rígido sejam todas conservativas. Nesse caso, de acordo com a equação (31.24), o trabalho realizado por elas é o negativo da variação da energia potencial externa do corpo rígido, de modo que a equação (31.41) toma a forma

$$K_b - K_a = - \left[ U^{ex}(\mathbf{r}_{1b}, \mathbf{r}_{2b}, \dots, \mathbf{r}_{Nb}) - U^{ex}(\mathbf{r}_{1a}, \mathbf{r}_{2a}, \dots, \mathbf{r}_{Na}) \right] \quad (31.42)$$

ou

$$K_b + U^{ex}(\mathbf{r}_{1b}, \mathbf{r}_{2b}, \dots, \mathbf{r}_{Nb}) = K_a + U^{ex}(\mathbf{r}_{1a}, \mathbf{r}_{2a}, \dots, \mathbf{r}_{Na}) . \quad (31.43)$$

Como as configurações do sistema (no caso, um corpo rígido constituído por  $N$  partículas) caracterizadas pelas configurações  $(\mathbf{r}_{1a}, \mathbf{r}_{2a}, \dots, \mathbf{r}_{Na})$  e  $(\mathbf{r}_{1b}, \mathbf{r}_{2b}, \dots, \mathbf{r}_{Nb})$  são totalmente arbitrárias, concluímos que a soma da energia cinética do sistema com sua energia potencial permanece constante ao longo de um movimento possível do sistema. O valor de  $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$  depende da escolha de uma configuração padrão  $(\mathbf{r}_{1p}, \mathbf{r}_{2p}, \dots, \mathbf{r}_{Np})$  para a qual arbitra-se o valor  $U(\mathbf{r}_{1p}, \mathbf{r}_{2p}, \dots, \mathbf{r}_{Np}) = 0$ . A soma da energia cinética  $K$  de um corpo rígido com sua energia potencial externa será chamada **energia mecânica do corpo rígido** e será representada por  $E$ , ou seja,

$$E = K + U^{ex}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) . \quad (31.44)$$

Desse modo, o resultado (31.43) afirma que a energia mecânica de um corpo rígido tem o mesmo valor em dois instantes  $t_a$  e  $t_b$  quaisquer. Portanto,

*se as forças externas que agem sobre um corpo rígido forem conservativas, então a sua energia mecânica será conservada.*

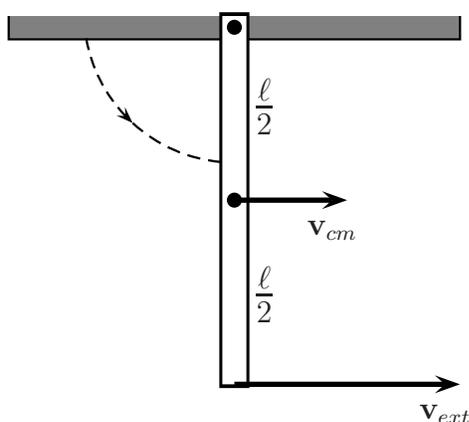
Um exemplo notável é o de um corpo rígido no qual as únicas forças externas que realizam trabalho são os pesos de suas partículas. De acordo com o Exemplo 31.2, a energia mecânica do corpo rígido é a quantidade conservada

$$E = K + Mg z_{cm} , \quad (31.45)$$

onde  $M$  é massa do corpo rígido e  $z_{cm}$  é a coordenada  $z$  do seu centro de massa, isto é, a altura do centro de massa em relação ao ponto-padrão, cuja coordenada  $z_{cmp}$  foi escolhida como zero.

### Exemplo 31.3

Considere uma barra homogênea de massa  $m$  e comprimento  $\ell$ . Suponha que ela tenha o seu extremo superior preso a um suporte fixo, porém articulado, de modo que ela possa girar em torno de seu extremo superior, analogamente ao que ocorre com um pêndulo simples, que gira em torno do extremo superior do fio. Inicialmente, a barra está em repouso e na horizontal, como ilustra a **Figura 31.2**.



**Figura 31.2:** Barra homogênea, inicialmente na horizontal e em repouso, que gira em torno de seu extremo fixo até atingir a configuração na qual sua direção é vertical e sua energia cinética é  $K_1$ .

A barra é abandonada e, devido à ação da força gravitacional e à ação da força que o suporte fixo exerce em seu extremo superior, ela passa a girar em torno desse extremo até que, num dado instante  $t_1$ , ela esteja na vertical, como indica a **Figura 31.2**. Desejamos calcular a energia cinética da barra nesse instante, designada por  $K_1$ .

Antes de tudo, note que as únicas forças que realizam trabalho são as forças gravitacionais que atuam sobre todas as partes que formam a barra. Isso ocorre pois a reação vincular atua sobre um ponto fixo, o extremo superior da barra. Como a força gravitacional é conservativa, a energia mecânica da barra é constante durante todo seu movimento, ou seja,  $E = K + U = K + mgz_{cm} = cte$ , onde  $K$  é a energia cinética total da barra num instante genérico e  $z_{cm}$  a posição de seu centro de massa nesse mesmo instante. Escolhendo os eixos com a origem no extremo superior da barra, vemos que sua energia potencial gravitacional inicial é nula. Aplicando, então, a Lei da Conservação da Energia Mecânica, po-

---

A força que o suporte exerce sobre o extremo superior da barra é um exemplo de força de vínculo. É justamente essa reação vincular a responsável pelo fato de o extremo superior da barra permanecer fixo durante todo o movimento da barra.

---

demos escrever

$$0 = K_1 + mgz_{cm1} \implies K_1 = -mgz_{cm1},$$

onde  $z_{cm1}$  é a posição do centro de massa da barra no instante  $t_1$ . Como a barra é homogênea, seu centro de massa se encontra em seu ponto médio, ou seja,  $z_{cm1} = -\ell/2$ . Com isso, obtemos,

$$K_1 = \frac{1}{2}mgl. \quad (31.46)$$

Como já mencionamos, tanto as forças externas que atuam sobre um sistema quanto as forças internas podem ser conservativas. Portanto, podemos definir energias potenciais associadas tanto às forças externas quanto às internas. No entanto, um cálculo explícito de energia potencial foi feito apenas para o caso de forças externas e, ainda assim, no caso particular de um corpo rígido formado por  $N$  partículas sob a ação de seus pesos, considerados constantes. Por isso, aconselhamos que você resolva, agora, os problemas propostos 1 e 2, por envolverem cálculos explícitos de energias potenciais externas e internas de um sistema.

## A energia cinética em colisões de partículas

Queremos considerar agora situações em que não há trabalho externo sobre o sistema de partículas. Isso pode ocorrer de diversas maneiras. Uma delas é quando não há forças externas, isto é, quando o sistema é isolado. Uma outra é quando há forças externas mas elas são inoperantes, isto é, não realizam trabalho. Isso ocorre quando elas se mantêm perpendiculares às velocidades das partículas sobre as quais agem ou quando essas partículas estão em repouso durante o movimento do sistema. Uma terceira possibilidade importante ocorre em uma colisão, que é um processo muito rápido, durante o qual as mudanças de posição das partículas são desprezíveis.

De fato, normalmente, dizemos que uma colisão de duas partículas ocorre em um ponto bem específico do espaço. Nesse ponto elas mudam de velocidade sem mudar de posição. Não havendo mudança de posição nesse rápido processo, também não há trabalho realizado pelas forças externas que, supomos não percussivas. Somente as forças internas de colisão, supostamente percussivas, realizam um trabalho que costuma ser descrito como **microscópico** (voltaremos a esse ponto mais adiante). Acontece que o ponto de colisão é entendido como ponto apenas no sentido macroscópico, sendo, de fato, uma região microscópica, na qual ocorrem deslocamentos microscópicos das partículas do sistema. Nesses deslocamentos microscópicos, o trabalho das forças internas percus-

sivas é importante, enquanto o das forças externas pode ser desprezado, por elas não serem percussivas.

Em suma, há situações interessantes nas quais não há trabalho externo realizado sobre o sistema de partículas durante o intervalo de tempo em que o movimento do sistema é considerado. Nessas situações, o Teorema da Energia Cinética e Trabalho (31.11) assume a forma

$$K_b - K_a = W^{in}(t_a, t_b) . \quad (31.47)$$

Vamos considerar a colisão de duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  como na aula anterior. O que chamamos instante  $t_a$  em (31.47) é o instante inicial  $t_i$  da colisão, no qual as partículas têm, respectivamente, as velocidades  $\mathbf{v}_{1i}$  e  $\mathbf{v}_{2i}$ . O instante  $t_b$  em (31.47) é o instante final  $t_f$  da colisão, no qual as partículas têm, respectivamente, as velocidades  $\mathbf{v}_{1f}$  e  $\mathbf{v}_{2f}$ .

A energia cinética imediatamente antes da colisão é  $K_a$  e, imediatamente depois,  $K_b$ . Vamos escrever essas energias explicitamente em termos das velocidades envolvidas e representar o trabalho interno  $W^{in}(t_a, t_b)$  por  $Q$ , de modo que a equação (31.47) pode ser reescrita na forma

$$\left[ \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_{2f}^2 \right] - \left[ \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_{2i}^2 \right] = Q . \quad (31.48)$$

Essa variação  $Q$  da energia cinética durante a colisão é chamada, simplesmente, **fator  $Q$  associado à colisão**. Se  $Q$  for nulo, a energia cinética do sistema será a mesma antes e depois da colisão. Se  $Q$  for negativo, a energia cinética do sistema depois da colisão será menor do que antes e se  $Q$  for positivo, a energia cinética do sistema depois da colisão será maior do que antes.

Se  $Q = 0$ , o trabalho total realizado pelas forças internas durante a colisão será nulo. Na verdade, o que ocorre normalmente nesse caso é que as forças internas realizam trabalhos (positivo e negativo) que se cancelam.

Uma colisão na qual  $Q = 0$  é chamada **elástica**. Esse nome provém de uma situação em que a colisão ocorre entre dois corpos elásticos, pequenos o bastante para serem considerados como partículas. Nesse caso, elasticidade significa que a deformação sofrida durante a colisão desaparece quando ela termina. A energia cinética inicial dos corpos é transformada em uma energia potencial elástica de deformação, que é totalmente transformada de volta em energia cinética dos corpos quando a deformação desaparece, ao final da colisão. Desse modo, a energia cinética final fica com o mesmo valor que a inicial.

---

Esse parece ser um péssimo nome, pois  $Q$  aparece em (31.48) como uma diferença (entre energias cinéticas) e não como um fator. Na verdade, devemos entender “fator” com o significado de “o que contribui para um resultado” e não de “elementos submetidos à operação de produto”.

---

Na primeira parte da colisão, quando os corpos vão se deformando, as forças internas elásticas se opõem a essa deformação e realizam trabalho interno negativo; as energias cinéticas dos corpos diminuem.

Na segunda parte da colisão, quando os corpos vão retornando às suas formas iniciais, as forças internas elásticas operam no sentido dos deslocamentos e realizam trabalho positivo. Temos  $Q = 0$  precisamente porque o positivo e negativo se cancelam. Esse é um processo idealizado, pois, na realidade, sempre há alguma diminuição de energia cinética durante uma colisão, mesmo quando os corpos envolvidos voltam à sua forma original no final da colisão. Nesse caso, a diminuição da energia cinética se deve ao aquecimento dos corpos provocado pela colisão. Em colisões de bolas de bilhar, por exemplo, não há mudança perceptível de suas formas e, ainda assim, suas energias cinéticas diminuem aproximadamente de 3% a 4%. Usualmente, esses valores podem ser considerados pequenos, de modo que as colisões de bolas de bilhar são tomadas como exemplos de colisões elásticas.

Se  $Q < 0$ , o trabalho total realizado pelas forças internas durante a colisão é negativo. Nesse caso, há diminuição da energia cinética das partículas no processo de colisão. Verifica-se que essa energia se transforma em outras formas de energia que ainda não estudamos. Um exemplo são as energias associadas à rotação dos corpos que estamos considerando como partículas. Isso significa que, de fato, elas não podem ser chamadas partículas em uma descrição mais cuidadosa da colisão. Um outro exemplo é a energia térmica desses corpos, cujo aumento se manifesta pelo aquecimento que sofrem durante a colisão. Uma colisão na qual  $Q < 0$  é um processo chamado **endoérgico**. Esse termo significa que há energia passando para o interior dos corpos do sistema, proveniente da diminuição de sua energia cinética.

Se  $Q > 0$ , o trabalho realizado pelas forças internas durante a colisão é positivo. O sistema aumenta sua energia cinética devido ao choque. Esse aumento de energia cinética provém de alguma forma de energia interna dos corpos que são considerados como partículas em colisão. Nesse caso, é mais comum designar o processo como **explosão**. Um evento desse tipo ocorre quando uma granada, inicialmente em repouso, explode em dois pedaços. A energia cinética inicial é nula antes da explosão e depois torna-se positiva, com os dois pedaços arremessados em sentidos opostos. Note que, nesse caso, o momento linear total da granada é nulo antes e após a colisão. É a energia cinética que aumenta no processo. A energia química armazenada no explosivo da granada é liberada e se transforma em energia cinética dos dois fragmentos. É claro que esse fenômeno é essencialmente o mesmo, com qualquer número de fragmentos. Estamos discutindo

o caso de dois fragmentos apenas porque estamos considerando processos com duas partículas. Uma colisão na qual  $Q > 0$ , ou seja, uma explosão, é um processo chamado **exoérgico**. Esse termo significa que há energia saindo do interior dos corpos do sistema e aumentando sua energia cinética.

Os processos nos quais  $Q > 0$  ou  $Q < 0$ , isto é, quando as energias cinéticas antes e depois da colisão não são iguais, são chamados **inelásticos**. A explicação cuidadosa das colisões inelásticas, normalmente, requer conceitos de Termodinâmica e foge do escopo de nosso estudo.

Na aula anterior, definimos uma colisão completamente inelástica como aquela na qual as duas partículas permanecem juntas após a colisão. Se o nome foi bem escolhido, devemos obter  $Q < 0$  em uma colisão perfeitamente inelástica. Usando a conservação do momento linear nesse tipo de processo, e alguma álgebra vetorial, você mostrará no problema proposto 6 que em uma colisão completamente inelástica.

$$Q = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i})^2. \quad (31.49)$$

Como nessa expressão  $Q$  é evidentemente negativo, podemos concluir que a colisão completamente inelástica é inelástica no sentido que acabamos de definir. O motivo do advérbio “completamente” para denominar esse tipo de colisão é importante e será discutido posteriormente.

Supondo conhecido o fator  $Q$ , temos mais uma equação relacionando as velocidades antes e depois da colisão, dada em (31.48). Podemos juntá-la às equações provenientes da conservação do momento linear para resolver muitos problemas interessantes. Agora, usaremos essas equações para resolver um problema simples e interessante: o da chamada **colisão elástica unidimensional**. Por ser elástica, as energias cinéticas do sistema antes e depois da colisão são iguais, e a palavra unidimensional, nesse caso, significa que o movimento das partículas antes, durante e depois da colisão se processa ao longo de uma reta. Portanto, no processo de colisão das duas partículas, temos a conservação do momento linear

$$m_1 \mathbf{v}_{1i} + m_2 \mathbf{v}_{2i} = m_1 \mathbf{v}_{1f} + m_2 \mathbf{v}_{2f} \quad (31.50)$$

e, como a colisão é elástica, temos também a relação

$$\frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_{2f}^2. \quad (31.51)$$

Uma vez que a colisão é unidimensional, todas as velocidades têm a mesma direção. Escolhendo um eixo nessa direção, digamos  $\mathcal{O}\mathcal{X}$ , verificamos que todas as velocidades têm apenas a componente- $x$ . Isso significa que a equação vetorial

(31.50) é equivalente a uma única equação numérica, envolvendo as componentes- $x$  das velocidades. Em nossa notação habitual, a componente- $x$  de  $\mathbf{v}_{1i}$  deve ser escrita como  $v_{1ix}$ , a componente- $x$  de  $\mathbf{v}_{2i}$  como  $v_{2ix}$  e assim por diante. Para evitar essa notação desagradável, com três índices “pendurados” em  $v$ , vamos denotar as componentes- $x$  de  $\mathbf{v}_{1i}$ ,  $\mathbf{v}_{2i}$ ,  $\mathbf{v}_{1f}$  e  $\mathbf{v}_{2f}$ , simplesmente, por  $v_{1i}$ ,  $v_{2i}$ ,  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$ , respectivamente. Portanto, essas quantidades representam, agora, as componentes das velocidades e não os módulos, podendo ser positivas, negativas ou nulas (para designar os módulos das velocidades, podemos usar as duas barras nos lados do vetor). Com essa notação simplificada, as duas equações (31.50) e (31.51) são equivalentes a

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (31.52)$$

e

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2. \quad (31.53)$$

Supondo conhecidas as velocidades iniciais  $v_{1i}$  e  $v_{2i}$ , usaremos essas duas equações para encontrar as velocidades finais  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$ . Para isso, começamos por reescrever (31.53) e (31.52) como

$$\frac{1}{2} m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = \frac{1}{2} m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2). \quad (31.54)$$

e

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}). \quad (31.55)$$

Dividindo a primeira dessas equações pela segunda, e lembrando que a diferença dos quadrados é o produto da soma pela diferença, obtemos

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}. \quad (31.56)$$

ou seja,

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}). \quad (31.57)$$

Essa é uma equação de primeiro grau que, para resolver o problema, pode ser usada no lugar da equação de segundo grau (31.53). Se a equação de segundo grau (31.53) expressa a igualdade entre as energias cinéticas inicial e final, o que expressa a equação (31.57)? Bem, ela também expressa a conservação de uma certa quantidade. Vemos que  $v_{1i} - v_{2i}$  é a velocidade da primeira partícula relativa à segunda, antes da colisão. Já  $v_{1f} - v_{2f}$  é a velocidade da primeira partícula relativa à segunda, mas depois da colisão. Ao estabelecer que uma dessas velocidades relativas é igual ao negativo da outra, a equação (31.57) expressa o fato de que após a colisão as partículas se afastam uma da outra com a mesma rapidez com que se aproximavam antes da colisão. Portanto, a equação (31.57) expressa o fato

de que a velocidade relativa entre as partículas antes e depois da colisão tem o mesmo valor em módulo.

Usando a conservação do momento linear (31.52) e a igualdade das velocidades relativas antes e após a colisão, dada pela equação (31.57), obtemos facilmente as seguintes expressões das velocidades finais em termos das iniciais:

$$\begin{aligned}v_{1f} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} , \\v_{2f} &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} .\end{aligned}\quad (31.58)$$

Note a perfeita simetria entre essas equações: uma pode ser obtida da outra pela permutação dos índices 1 e 2. Essa propriedade mostra que a numeração das partículas é puramente convencional e não pode afetar a resposta do problema.

É interessante examinar as informações gerais sobre a colisão contidas nas equações (31.58). Tomemos apenas um exemplo: fazendo  $m_1 = m_2$  em (31.58), obtemos  $v_{1f} = v_{2i}$  e  $v_{2f} = v_{1i}$ , isto é, a velocidade final da primeira partícula é a inicial da segunda e vice-versa. Portanto, duas partículas de mesma massa trocam suas velocidades em uma colisão elástica unidimensional. Esse fenômeno de troca de velocidades pode ser observado com facilidade em jogos de bilhar. Outras informações interessantes estão no problema proposto 7, que você deve resolver agora.

Levando em conta a conservação do momento linear, podemos verificar que a igualdade das velocidades relativas em (31.57) é verdadeira se, e somente se, o choque for elástico. Por isso, podemos usar a diferença entre as velocidades relativas  $v_{1i} - v_{2i}$  e  $v_{1f} - v_{2f}$  para medir o quanto a colisão é inelástica. Desse modo, definimos a quantidade  $e$  como a razão entre a velocidade relativa de afastamento e a velocidade relativa de aproximação, ou seja,

$$e (v_{1i} - v_{2i}) = -(v_{1f} - v_{2f}) .\quad (31.59)$$

No caso de uma colisão elástica, temos a igualdade (31.57) e, portanto,  $e = 1$ . No caso de uma colisão perfeitamente inelástica,  $v_{1f} = v_{2f}$  e, portanto,  $e = 0$ . O número  $e$  é chamado **coeficiente de restituição** da colisão. Esse nome significa que  $e$  dá a fração da velocidade relativa anterior à colisão, que é restituída às partículas após a colisão.

Quando você solta uma bolinha, ela cai e colide com o chão. Podemos considerar esse evento como o choque da bolinha com uma partícula de massa infinita. Isso porque a partícula do chão com a qual a bolinha se choca está presa à Terra, é completamente imóvel e, portanto, é como se tivesse massa infinita. Se

a bolinha for de pingue-pongue, ela atinge o chão e quica de volta praticamente até a sua mão. Isso significa que a velocidade com que ela quica de volta, digamos  $v_{1f}$ , é praticamente igual, em módulo, à velocidade com que ela chega ao chão, digamos  $v_{1i}$ . Mais precisamente,  $v_{1f} = -v_{1i}$ . Uma vez que o chão está imóvel, temos  $v_{2f} = v_{2i} = 0$ . Substituindo esses dados em (31.59), vemos que  $e$  é praticamente igual a 1, ou seja, a colisão da bolinha de pingue-pongue com o chão é praticamente uma colisão totalmente elástica. Já se a bolinha for de cera, ela atinge o chão e gruda nele, de modo que  $v_{1f} = 0$ . Nesse caso, temos  $e = 0$  e trata-se de um choque perfeitamente inelástico. Usando diversas bolinhas, podemos obter diversos valores entre 0 e 1 para o coeficiente de restituição  $e = -v_{1f}/v_{1i}$  desse tipo de colisão.

Note que dispomos de duas quantidades para estudar colisões inelásticas, o fator  $Q$  e o coeficiente de restituição  $e$ . Cada um mede, a seu modo, o quanto o choque se afasta da condição de elasticidade.

## Resumo

Energia cinética de um sistema de partículas é a soma das energias cinéticas de todas as partículas que o compõem. A taxa instantânea de variação temporal da energia cinética de um sistema é igual à potência fornecida pelas forças (internas e externas) que agem sobre o sistema. Uma consequência imediata desse resultado é o chamado Teorema da Energia Cinética e Trabalho, de acordo com a qual a variação da energia cinética de um sistema durante um intervalo de tempo e ao longo de um movimento do sistema é igual ao trabalho realizado, nesse intervalo, pelas forças externas e internas que atuam sobre o sistema.

Uma configuração de um sistema de partículas é caracterizada pelas posições de todas as partículas do sistema. Representamos, então, uma configuração de um sistema composto por  $N$  partículas por  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ . Se a força externa total sobre a  $i$ -ésima partícula do sistema for conservativa, podemos definir a energia potencial da  $i$ -ésima partícula associada a essa força externa total conservativa de maneira usual. A energia potencial externa de um sistema é a soma das energias potenciais externas de cada partícula do sistema. O trabalho de todas as forças externas (no caso em que todas forem conservativas) num certo intervalo de tempo  $[t_a, t_b]$  só depende das configurações inicial e final do sistema nesse intervalo e, por definição, vale a relação  $W^{ex}(t_a, t_b) = U(\mathbf{r}_{1a}, \mathbf{r}_{2a}, \dots, \mathbf{r}_{Na}) - U(\mathbf{r}_{1b}, \mathbf{r}_{2b}, \dots, \mathbf{r}_{Nb})$ . Uma vez escolhida a configuração padrão, a cada configuração do sistema corres-

ponde um único valor da energia potencial do sistema.

O trabalho realizado por todas as forças internas em um corpo rígido é sempre nulo. Conseqüentemente, no caso de um corpo rígido, o Teorema da Energia Cinética e Trabalho afirma que a variação da energia cinética de um corpo rígido num certo intervalo de tempo é igual ao trabalho realizado pelas forças externas que agem sobre ele. Se as únicas forças que realizarem trabalho sobre um corpo rígido forem conservativas, a sua energia mecânica, definida como a soma de sua energia cinética com sua energia potencial, será uma constante de movimento. No movimento de um corpo rígido próximo à superfície terrestre, a sua energia potencial gravitacional é dada simplesmente por  $Mgz_{cm}$ , onde  $M$  é a sua massa,  $g$  é o módulo da aceleração da gravidade na superfície da Terra e  $z_{cm}$  é a altura relativa a um ponto padrão do centro de massa do corpo rígido.

O fator  $Q$  associado à colisão entre duas partículas é definido como a sua energia cinética logo após a colisão subtraída da sua energia cinética imediatamente antes da colisão. Quando  $Q = 0$ , o choque é chamado totalmente elástico, caso contrário, o choque é chamado inelástico. Se  $Q > 0$  (uma explosão, por exemplo), o processo é exoenergético; caso  $Q < 0$ , temos um processo endoenergético.

Numa colisão unidimensional, o coeficiente de restituição, designado pela letra  $e$ , é definido por  $(v_{2f} - v_{1f}) = e(v_{1i} - v_{2i})$ . Se  $e = 0$  a colisão é dita totalmente inelástica e se  $e = 1$ , trata-se de uma colisão perfeitamente elástica. O conhecimento desse coeficiente de restituição, juntamente com a conservação do momento linear do sistema, nos permite encontrar as velocidades finais das partículas, após a colisão, em termos de suas velocidades antes da colisão e de suas respectivas massas.

## Questionário

1. Defina energia cinética de um sistema de partículas.
2. No Teorema da Energia Cinética e Trabalho para um sistema de partículas só importam as forças externas ao sistema?
3. Enuncie o Teorema da Energia Cinética e Trabalho para um sistema de partículas.
4. O que é configuração de um sistema?

5. Explique com palavras por que o trabalho total das forças internas de um corpo rígido é nulo.
6. Qual é a energia potencial gravitacional de um corpo rígido de massa  $M$  associada à força gravitacional que a Terra exerce sobre suas partes?
7. As forças internas de um sistema são, necessariamente, conservativas? E as externas?
8. Só é possível definir energia potencial de um sistema para forças externas ao sistema?
9. Responda se é falsa ou verdadeira a afirmação: num corpo rígido, a velocidade de uma partícula  $i$  relativa a uma partícula  $j$  é sempre perpendicular à reta que passa por essas duas partículas. Explique.
10. O que é um choque totalmente elástico entre dois corpos? E totalmente inelástico?
11. Defina o fator  $Q$  associado a uma colisão entre dois corpos. Explique, sucintamente, em que circunstâncias podemos ter  $Q > 0$ ,  $Q = 0$  e  $Q < 0$ . O que você pode afirmar em cada um desses casos a respeito do trabalho das forças internas ao sistema durante todo o processo de colisão?
12. Defina coeficiente de restituição de uma colisão. Que valores esse coeficiente pode assumir nos casos de um choque: (i) totalmente elástico; (ii) totalmente inelástico e (iii) parcialmente inelástico?

### Problemas propostos

1. Reconsidere a situação descrita no Exemplo 31.1.
  - (a) Mostre que a expressão do trabalho externo  $W^{ext}(t_a, t_b)$  realizado pelas forças gravitacionais que Sol exerce sobre a Terra e a Lua, dada pela equação (31.15), pode ser escrita na forma

$$W^{ext}(t_a, t_b) = - \int_{r_{1a}}^{r_{1b}} G \frac{m_1 M_S}{r_1^2} dr_1 - \int_{r_{2a}}^{r_{2b}} G \frac{m_2 M_S}{r_2^2} dr_2 .$$

- (b) Efetue as integrações anteriores e mostre que

$$W^{ext}(t_a, t_b) = -G \frac{m_1 M_S}{r_{1a}} - G \frac{m_2 M_S}{r_{2a}} + G \frac{m_1 M_S}{r_{1b}} + G \frac{m_2 M_S}{r_{2b}} .$$

- (c) Usando a definição dada na equação (31.26) e tomando como configuração padrão aquela em que a Terra e a Lua estão infinitamente afastadas do Sol, mostre que, numa configuração genérica, a energia potencial externa do sistema Terra-Lua é dada por

$$U^{ext}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -G \frac{m_1 M_S}{r_1} - G \frac{m_2 M_S}{r_2} .$$

2. O objetivo deste problema é calcular, em um exemplo simples, a energia potencial de um sistema associada às suas forças internas. Considere um sistema isolado formado por dois corpos, de massas  $m_1$  e  $m_2$ , que interagem apenas gravitacionalmente.

- (a) Inicialmente, calcule o trabalho total das forças internas durante o intervalo de tempo  $[t_i, t_f]$ , no qual o sistema vai da configuração inicial  $(\mathbf{r}_{1i}, \mathbf{r}_{2i})$  até a configuração final  $(\mathbf{r}_{1f}, \mathbf{r}_{2f})$ . Faça esse cálculo resolvendo as integrais

$$W_{i \rightarrow f}^{in} = \int_{\mathbf{r}_{1i}}^{\mathbf{r}_{1f}} \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{\mathbf{r}_{2i}}^{\mathbf{r}_{2f}} \mathbf{F}_{21} \cdot d\mathbf{r}_2$$

e mostre que

$$W_{i \rightarrow f}^{in} = -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_{1i} - \mathbf{r}_{2i}|} - \frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_{1f} - \mathbf{r}_{2f}|} .$$

**Sugestão:** usando a Terceira Lei de Newton e definindo  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , mostre que

$$W_{i \rightarrow f}^{in} = \int_{\mathbf{r}_{12i}}^{\mathbf{r}_{12f}} \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12} = - \int_{r_{12i}}^{r_{12f}} \frac{Gm_1 m_2}{r_{12}^2} dr_{12} .$$

- (b) As integrais anteriores não dependem de como o sistema vai de uma configuração à outra, mas apenas das configurações inicial e final. Portanto, podemos definir uma energia potencial interna tal que  $\Delta U^{in} = U^{in}(\mathbf{r}_{1f}, \mathbf{r}_{2f}) - U^{in}(\mathbf{r}_{1i}, \mathbf{r}_{2i}) = -W_{i \rightarrow f}^{in}$ . Escolha a configuração inicial como uma configuração genérica  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  e a configuração final como a padrão  $(\mathbf{r}_{1p}, \mathbf{r}_{2p})$ . Por conveniência, tome como configuração padrão aquela em que as partículas estão infinitamente afastadas. Lembrando ainda que  $U^{in}(\mathbf{r}_{1p}, \mathbf{r}_{2p}) = 0$ , mostre, finalmente, que

$$U^{in}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{Gm_1 m_2}{r_{12}} = -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} .$$

---

Note que esse trabalho só depende das configurações inicial e final do sistema Terra-Lua, mas não do modo como o sistema Terra-Lua evoluiu entre essas configurações. Isso ocorre pois na expressão anterior, aparecem apenas as respectivas distâncias entre a Terra e o Sol e entre a Lua e o Sol, nas configurações inicial e final. Conseqüentemente, podemos definir uma energia potencial  $U^{ext}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  associada a essas forças externas conservativas.

---

3. Repita o problema anterior, mas suponha agora que, em vez de duas, o sistema seja formado por três partículas isoladas do resto do universo mas interagindo gravitacionalmente. Mostre que a energia potencial interna do sistema é dada por

$$\begin{aligned}
 U^{in}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) &= -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} - \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} - \frac{Gm_2m_3}{r_{23}} \\
 &= -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \frac{Gm_1m_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} - \frac{Gm_2m_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|}. \quad (31.60)
 \end{aligned}$$

**Sugestão:** como o trabalho das forças internas não depende de como o sistema vai de uma configuração a outra, calcule esse trabalho imaginando que a primeira partícula é levada ao infinito com as outras duas fixas. Depois leve a segunda com a terceira fixa. Note que não é necessário levar a terceira ao infinito, pois com as duas primeiras no infinito, todas elas já estão infinitamente afastadas umas das outras, configuração adotada como padrão e que tem a energia potencial nula. Você saberia generalizar esse resultado para o caso em que o sistema é formado por um número genérico  $N$  de partículas?

4. Considere uma barra homogênea de massa  $m$  e comprimento  $\ell$ , como a que aparece no Exemplo 31.3, mas suponha, neste problema, que ela esteja pendurada não por seu extremo superior, mas por um ponto  $P$  localizado a uma distância  $s$  desse extremo, com  $0 < s < \ell/2$ . No instante em que a barra é abandonada a sua direção é horizontal e ela está em repouso. Conseqüentemente, a barra irá girar em torno do ponto  $P$ , e não em torno de seu extremo superior. Neste problema, escolha como configuração padrão para a energia potencial gravitacional aquela na qual a barra tem direção vertical.
- Por que a energia mecânica da barra é conservada, nesse caso?
  - Calcule a energia cinética da barra quando ela está na vertical. Tomando o valor apropriado de  $s$ , verifique que o seu resultado contém, como um caso particular, o encontrado no Exemplo 31.3.
  - Determine a energia cinética da barra quando a sua direção forma um ângulo  $\theta$  com a vertical.
5. Reconsidere a situação descrita no Exemplo 31.3, mas suponha agora que, no instante inicial, a barra esteja na horizontal e seja lançada para baixo com a energia cinética  $K_0 = (1/4)mgl$  (lembre-se de que ela tem um de seus extremos fixo, mas pode girar em torno dele).

- (a) Calcule a energia cinética da barra quando a sua direção forma um ângulo  $\theta$  com a vertical. Tomando o valor apropriado de  $\theta$ , verifique que o seu resultado contém, como um caso particular, o encontrado no Exemplo 31.3.
- (b) Calcule a maior altura atingida pelo centro de massa da barra em seu movimento. Nessa situação, qual é o ângulo entre a barra e a horizontal? Descreva qualitativamente o movimento da barra
- (c) Para que a barra pudesse dar uma volta completa em torno de seu extremo fixo, a sua energia cinética inicial deveria ser superior a um certo valor  $K_{min}$ . Determine  $K_{min}$ .
6. Considere uma colisão totalmente inelástica entre duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$ , isto é, uma colisão na qual as velocidades das duas partículas, logo após o choque, são iguais ( $\mathbf{v}_{1f} = \mathbf{v}_{2f}$ ). Utilizando essa informação e o Teorema da Conservação do Momento Linear para um sistema de partículas, demonstre a equação (31.48), ou seja, mostre que o fator  $Q$  dessa colisão pode ser escrito na forma

$$Q = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i})^2.$$

7. Considere uma colisão frontal totalmente elástica entre duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$ , isto é, uma colisão na qual as partículas, antes e depois da colisão, se movimentam ao longo da mesma direção e de tal modo que  $v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f}$ .

- (a) Obtenha as velocidades das partículas após o choque em termos de suas velocidades iniciais e de suas massas. Mostre que elas são dadas por (confira com a equação (31.57))

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}; \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

- (b) Analise o caso particular em que  $m_1 = m_2$  e verifique, nesse caso, que as partículas trocam de velocidades após o choque.
- (c) Obtenha  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$  no limite em que  $m_2 \rightarrow \infty$  e interprete o resultado.
8. Suponha que um projétil de massa  $m$  seja lançado do solo com a velocidade inicial  $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{u}_x + v_0 \mathbf{u}_y$ . No instante em que atinge o ponto mais alto de sua trajetória, ele explode, fragmentando-se em alguns pedaços. Calcule o fator  $Q$  da explosão nos seguintes casos:

- (a) o projétil se parte em dois fragmentos de mesma massa, sendo que um deles tem velocidade nula logo após a explosão;
- (b) o projétil se parte em três pedaços de mesma massa sendo que, logo após a explosão, um deles tem velocidade nula e um dos outros dois tem a velocidade  $-v_0 \mathbf{u}_x$ .

### **Auto-avaliação**

É muito importante que você consiga responder a todo o questionário, mesmo quando for longo. Lembre-se de que, ao responder às questões, você estará recordando os principais tópicos apresentados na aula. Quanto aos problemas, já que não são muitos, tente fazer todos. No entanto, vale comentar aqui que os problemas 2 e 3 são os mais difíceis e exigem muita maturidade. Não se preocupe se não conseguir resolvê-los em sua primeira tentativa. Você pode, e deve, seguir adiante mesmo que não tenha conseguido resolvê-los.

## Aula 32 – Medição de momento linear e energia cinética em colisões

### Objetivos

- Analisar processos de colisão totalmente inelásticos e elásticos.
- Verificar a conservação do momento linear total no processo.
- Medir a variação da energia cinética total nos dois processos.

### Introdução

Nesta aula, vamos analisar dois tipos de colisão entre os carrinhos sobre o trilho de ar. Uma, totalmente inelástica, que tem como característica um estado final de colisão no qual os carrinhos saem grudados, e outra, totalmente elástica na qual a energia cinética depois da colisão é igual à energia cinética inicial. Como faremos os experimentos com os carrinhos sobre o trilho de ar, temos, nesse caso, uma peculiaridade no sistema de partículas constituído pelos dois carrinhos: o somatório das forças externas aplicadas ao sistema é nulo. Como você já viu nas aulas teóricas, isso acarreta a conservação de algumas grandezas físicas do sistema considerado. Quais são elas? Caso você tenha dúvida sobre isso, releia as Aulas 30 e 31, teóricas.

---

Para simplificar o texto, usaremos somente os termos colisão elástica e inelástica omitindo o termo “totalmente”, embora conservando as propriedades descritas ao lado.

---

### Procedimento Experimental

Nosso procedimento será, basicamente, o mesmo das aulas anteriores que envolviam o uso do trilho de ar. Entretanto, alguns cuidados devem ser tomados neste experimento.

- Certifique-se de que o trilho de ar está alinhado, usando o mesmo procedimento das aulas passadas. Tome cuidado ao fazer as conexões elétricas, pois elas serão diferentes das ligações feitas nos experimentos anteriores. Agora, você deve fazê-las de forma que os dois carrinhos, ao centelharem, façam-no em alturas diferentes da folha termossensível. Isto permitir á que você identifique, nesta última, quais são as marcas de centelhamento de um e de outro carrinho.
- Antes de cada experimento, ou cada vez que colocar ou tirar pesos adicionais de um carrinho, meça a sua massa.

- Faça algumas simulações do experimento, de forma a escolher uma frequência razoável e compatível com as velocidades que os carrinhos adquirem antes e depois da colisão. Só então faça a tomada de dados com a conseqüente queima dos pontos na fita termossensível.

#### 1. Primeira atividade – colisão elástica.

- Prepare dois carrinhos com as massas tão próximas quanto você puder. Dê preferência a um par de carrinhos com as menores massas possíveis, pois isso minimiza eventuais forças de atrito.
- Coloque nos carrinhos as peças em forma de arco, com um elástico, de forma a produzir colisões elásticas (ou quase).
- Realize a tomada de dados, deixando inicialmente um dos carrinhos em repouso e fazendo o outro colidir com ele. A partir dos dados obtidos, construa tabelas como as que foram feitas nos experimentos anteriores, isto é, tabelas que contenham as posições dos dois carrinhos nos diversos instantes de tempo. Não se esqueça das incertezas das medidas.
- Coloque pesos de forma simétrica em cima de um dos carrinhos, de maneira que possa fazer experimentos com carrinhos de massas diferentes. Sem precisar tirar dados, observe o que acontece em duas situações:
  - promova uma colisão entre esses dois carrinhos, em que o mais pesado esteja inicialmente em repouso;
  - faça o mesmo trocando os carrinhos.

#### 2. Segunda atividade - colisão inelástica.

- Prepare dois carrinhos de massas diferentes, pondo, por exemplo, pesos adicionais em um deles. Novamente, procure colocar os pesos de forma simétrica no carro, para prevenir desbalanceamento.
- Coloque nos carrinhos as peças que produzirão uma colisão totalmente inelástica. Simule algumas colisões lançando um deles de encontro ao outro, inicialmente em repouso.
- Antes de fazer a tomada de dados, marque a posição inicial do carrinho que ficará inicialmente em repouso. Realize a tomada de dados e construa uma tabela com as medidas, considerando, como origem das coordenadas, a marcação feita.

## Análise dos dados

### 1. Primeira atividade - colisão elástica.

- Resolva, teoricamente, o problema de uma colisão elástica unidimensional, em que inicialmente uma das partículas está em repouso.
- Faça um gráfico  $x$  versus  $t$  para o movimento dos dois carrinhos e obtenha suas respectivas velocidades, antes e depois da colisão.
- Calcule o momento linear e a energia cinética do sistema composto pelos dois carrinhos e verifique se essas grandezas se conservam. Nessa verificação, não se esqueça de levar em conta as incertezas experimentais obtidas.
- Com os resultados teóricos obtidos no primeiro item, analise qualitativamente o que foi observado, quando você lançou o carrinho mais pesado sobre o mais leve e vice-versa.

### 2. Segunda atividade - colisão inelástica.

- Faça um gráfico  $x$  versus  $t$  para o movimento dos dois carrinhos e obtenha suas respectivas velocidades, antes e depois da colisão.
- Calcule o momento linear e a energia cinética do sistema composto pelos dois carrinhos e verifique se essas grandezas se conservam. Novamente, não se esqueça de levar em conta as incertezas experimentais obtidas.
- Com os valores das massas e as posições dos dois carrinhos, calcule a posição do centro de massa do sistema, para cada instante de tempo observado. Faça, então, um gráfico dessa posição como função do tempo. A partir desse gráfico, determine a velocidade do centro de massa do sistema e verifique se ela é conservada.

## Atividades extras

- Mostre que para uma colisão elástica unidimensional, como a realizada na primeira atividade, é válida a seguinte relação (independe das massas!):

$$v_0 + v_1 = v_2 ,$$

onde  $v_0$  é a velocidade inicial do primeiro carrinho e  $v_1$  e  $v_2$  são as velocidades finais do primeiro e do segundo carrinho, respectivamente. Verifique se, com seus dados, essa relação se confirma.

- Calcule a variação da energia cinética do sistema, no referencial do centro de massa, para a segunda atividade. Como esse valor se compara à variação da energia cinética do sistema, no referencial do laboratório, obtida anteriormente?
- Demonstre que, num sistema de duas partículas que colidem sem sofrer ação de forças externas, a relação a seguir é válida:

$$E_{lab} = E_{CM} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_{CM}^2 .$$

Nesta equação,  $E_{lab}$  e  $E_{CM}$  são, respectivamente, as energias cinéticas do sistema, medidas nos referenciais do laboratório e do centro de massa,  $m_1$  e  $m_2$  são as massas das partículas e  $V_{CM}$  é a velocidade do centro de massa, medida no referencial do laboratório. Verifique se seus dados confirmam esse resultado.

## Resumo

Você viu que, nesse experimento, foram produzidas colisões de dois tipos com os carrinhos sobre o trilho de ar: uma elástica, na qual a energia cinética é a mesma antes e depois da colisão, e uma (totalmente) inelástica, na qual após a colisão os dois carrinhos ficam grudados. Os resultados foram analisados no referencial do laboratório e no referencial do centro de massa. Em ambos os casos, procurou-se verificar, experimentalmente, quais grandezas foram conservadas.

## Auto-avaliação

Como você já observou, a confecção do relatório é a melhor maneira de se auto-avaliar. É nessa fase que os conhecimentos são testados e que as eventuais dúvidas aparecem. Tais dúvidas, após serem sanadas, o ajudarão a consolidar seus conhecimentos. Em particular, nesse relatório, procure salientar, em cada atividade, as características do movimento do centro de massa e as grandezas conservadas. Procure mencionar, também, como ficariam os seus resultados, quando analisados no referencial do centro de massa do sistema.

## Aula 33 – Momento angular de um sistema de partículas

### Objetivos

- Aprender a definição de momento angular de um sistema de partículas.
- Aprender a definição de torque sobre um sistema de partículas.
- Saber demonstrar o Teorema do Momento Angular para o caso de um Sistema de Partículas.
- Compreender o conceito de momento angular de um sistema de partículas relativo ao seu centro de massa.

### Introdução

Nesta aula, definiremos duas novas quantidades muito importantes na discussão do movimento de um sistema de partículas, a saber: momento angular de um sistema de partículas e torque sobre um sistema de partículas. Como veremos, o momento angular de um sistema é definido, simplesmente, como a soma dos momentos angulares de todas as partículas do sistema e, de forma análoga, o torque sobre o sistema é a soma de todos os torques sobre as partículas do sistema. Estabeleceremos, então, a relação entre essas quantidades. Grande parte dos conceitos e resultados apresentados nesta aula já foram vistos na Aula 29 para o caso trivial em que o sistema tem apenas uma partícula; portanto, é necessário que os conceitos aprendidos na Aula 29 estejam, nesse momento, bem claros para que você possa compreender e aproveitar este novo conteúdo.

### Momento angular de um sistema de partículas

Consideremos, novamente, um sistema de  $N$  partículas, de massas  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , posições  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$  e velocidades  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N$ . A Segunda Lei de

Newton, aplicada às partículas do sistema, nos leva às equações

$$\begin{aligned}
 m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} &= \mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{F}_1^{in} , \\
 m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} &= \mathbf{F}_2^{ex} + \mathbf{F}_2^{in} , \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 m_N \frac{d\mathbf{v}_N}{dt} &= \mathbf{F}_N^{ex} + \mathbf{F}_N^{in} ,
 \end{aligned} \tag{33.1}$$

onde  $\mathbf{F}_i^{ex}$  é a soma das forças externas sobre a partícula  $i$  e  $\mathbf{F}_i^{in}$  é a soma das forças internas sobre essa partícula. Naturalmente,  $\mathbf{F}_i^{ex} + \mathbf{F}_i^{in}$  é a força total sobre a partícula  $i$ .

Façamos o produto vetorial de  $\mathbf{r}_1$  pelos dois lados da primeira equação em (33.1), de  $\mathbf{r}_2$  pelos dois lados da segunda, e assim sucessivamente, até o produto vetorial de  $\mathbf{r}_N$  pelos dois membros da  $N$ -ésima equação. As equações resultantes são

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_1 \times m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1^{in} , \\
 \mathbf{r}_2 \times m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} &= \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2^{ex} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2^{in} , \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 \mathbf{r}_N \times m_N \frac{d\mathbf{v}_N}{dt} &= \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N^{ex} + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N^{in} .
 \end{aligned} \tag{33.2}$$

Nos lados direitos dessas equações podemos identificar os torques de forças internas e externas relativos à origem  $\mathcal{O}$ . De acordo com o que vimos na Aula 29, os lados esquerdos dessas equações são as derivadas temporais dos momentos angulares das partículas do sistema relativos à origem  $\mathcal{O}$ . Conseqüentemente, temos para a  $i$ -ésima partícula:

$$\mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N) . \tag{33.3}$$

Usando essas igualdades em (33.2), obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{v}_1) &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1^{in}, \\
 \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_2 \times m_2 \mathbf{v}_2) &= \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2^{ex} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2^{in}, \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_N \times m_N \mathbf{v}_N) &= \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N^{ex} + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N^{in}.
 \end{aligned} \tag{33.4}$$

Somando membro a membro as equações anteriores, e usando o fato de que a soma das derivadas é igual à derivada da soma, obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{r}_N \times m_N \mathbf{v}_N) &= \\
 &= (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2^{ex} + \cdots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N^{ex}) \\
 &+ (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1^{in} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2^{in} + \cdots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N^{in}).
 \end{aligned} \tag{33.5}$$

Em (33.5), a primeira linha é a derivada temporal da soma dos momentos angulares, relativos à origem  $\mathcal{O}$ , de todas as partículas do sistema. Precisamente, essa soma é chamada **momento angular do sistema** relativo à origem  $\mathcal{O}$ . Representando por  $\mathbf{L}$  o momento angular do sistema, temos

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{r}_N \times m_N \mathbf{v}_N. \tag{33.6}$$

A segunda linha em (33.5) é a soma dos torques, relativos à origem  $\mathcal{O}$ , de todas as forças externas que agem sobre o sistema. Vamos chamar essa soma **torque externo total** sobre o sistema, relativo à origem  $\mathcal{O}$ . Representaremos esse torque externo total por  $\boldsymbol{\tau}^{ex}$ , de modo que

$$\boldsymbol{\tau}^{ex} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2^{ex} + \cdots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N^{ex}. \tag{33.7}$$

Finalmente, a terceira linha em (33.5) é a soma dos torques, relativos à origem  $\mathcal{O}$ , de todas as forças internas que agem sobre o sistema. Chamando essa soma **torque interno total** sobre o sistema, relativo à origem  $\mathcal{O}$ , e representando-a por  $\boldsymbol{\tau}^{in}$ , temos

$$\boldsymbol{\tau}^{in} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1^{in} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2^{in} + \cdots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N^{in}. \tag{33.8}$$

Usando essas definições, podemos reescrever a equação (33.5) como

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}^{ex} + \boldsymbol{\tau}^{in}. \tag{33.9}$$

Agora veremos que o torque interno total sobre um sistema de partículas qualquer é sempre nulo. As resultantes das forças internas sobre cada uma das partículas do sistema são dadas pelas respectivas somas vetoriais das forças exercidas pelas demais partículas do sistema, de modo que a equação (33.8) pode ser escrita, com mais detalhe, na forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^{in} = & \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{13} + \cdots + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{1N-1} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{1N} + \\ & + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{23} + \cdots + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{2N-1} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{2N} + \\ & + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{31} + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{32} + \cdots + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{3N-1} + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{3N} + \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_{N1} + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_{N2} + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_{N3} + \cdots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_{NN-1} . \end{aligned} \quad (33.10)$$

No lado direito dessa equação temos para cada torque  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}$  um outro torque, dado por  $\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}$ . Uma vez que todos os torques estão somados, essa soma é, na verdade, uma soma de termos do tipo  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}$ . Temos, então,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} &= (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji} \\ &= \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ji} \\ &= \mathbf{r}_{ij} \times \lambda_{ji} \mathbf{r}_{ij} \\ &= \mathbf{0} , \end{aligned} \quad (33.11)$$

onde, na primeira igualdade, usamos a Terceira Lei de Newton ( $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ ) para fatorar a força de interação entre as partículas  $i$  e  $j$ ; na segunda igualdade, usamos a definição de posição relativa  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ ; na terceira igualdade, utilizamos a hipótese de que as forças internas são centrais, isto é,  $\mathbf{F}_{ji}$  é paralela a  $\mathbf{r}_{ij}$  e, portanto, pode ser escrita como um número  $\lambda_{ji}$  multiplicado pelo vetor  $\mathbf{r}_{ij}$ . A expressão final é nula porque é o produto vetorial de dois vetores paralelos,  $\mathbf{r}_{ij}$  e  $\lambda_{ji}\mathbf{r}_{ij}$ . Com o resultado (33.11), fica demonstrado que o lado direito de (33.10) é uma soma vetorial nula e, portanto, que o torque interno total é nulo:

$$\boldsymbol{\tau}^{in} = \mathbf{0} . \quad (33.12)$$

Usando esse resultado em (33.9), obtemos

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}^{ex} , \quad (33.13)$$

isto é, podemos afirmar que

*a taxa instantânea de variação temporal do momento angular do sistema relativo à origem é igual ao torque externo total sobre o sistema relativo à origem.*

Esse resultado mostra que apenas os torques externos são responsáveis pela mudança do momento angular total de um sistema. É importante notar a enorme simplificação obtida com a informação de que o torque interno total é nulo. Dentro de um corpo rígido, por exemplo, podem ocorrer torques de extrema complexidade. Contudo, todos eles se cancelam, deixando apenas os torques externos para provocar as mudanças do momento angular do sistema. O resultado dado por (33.13) é conhecido como **Teorema do Momento Angular e Torque para um Sistema de Partículas**.

Sendo (33.13) uma equação vetorial, ela é equivalente a três equações numéricas, obtidas pelas projeções ao longo dos eixos cartesianos:

$$\frac{dL_x}{dt} = \tau_x^{ex}, \quad \frac{dL_y}{dt} = \tau_y^{ex} \quad \text{e} \quad \frac{dL_z}{dt} = \tau_z^{ex}. \quad (33.14)$$

Como consequência imediata de (33.13), temos

$$\boldsymbol{\tau}^{ex} = \mathbf{0} \implies \mathbf{L} = \text{constante}, \quad (33.15)$$

ou seja,

*se for nulo o torque externo total sobre um sistema relativo à origem, o momento angular do sistema relativo à origem será constante.*

Naturalmente, sendo conservado o vetor  $\mathbf{L}$ , temos três quantidades numéricas que permanecem constantes durante o movimento,  $L_x$ ,  $L_y$  e  $L_z$ . O resultado escrito na equação (33.15) é chamado **Teorema da Conservação do Momento Angular de um Sistema de Partículas**.

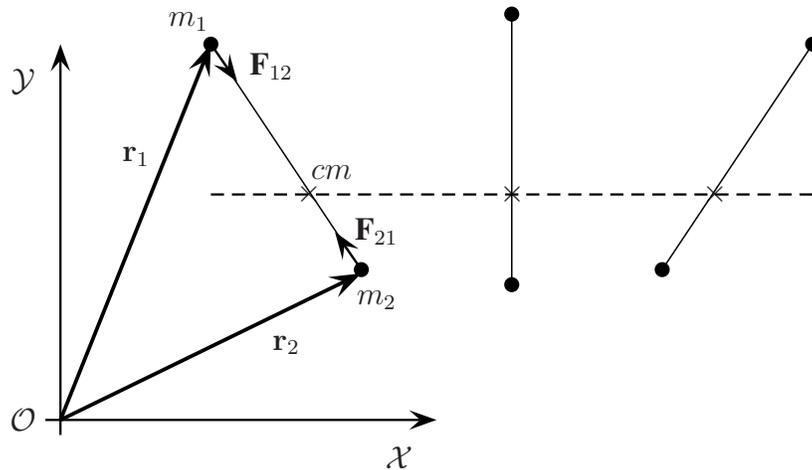
### Exemplo 33.1

Duas partículas, de massas  $m_1$  e  $m_2$ , estão ligadas por um fio ideal e se movimentam sobre uma superfície lisa horizontal de tal modo que o fio que as une se mantém sempre esticado durante o movimento do sistema. Nesse caso, as forças externas ao sistema são os pesos das partículas e as reações normais que a superfície exerce sobre elas. As forças internas são as que o fio exerce sobre cada partícula e suas respectivas reações.

---

A equação (33.13), para o caso particular em que o sistema é formado apenas por uma partícula, foi demonstrada na Aula 29.

---



**Figura 33.1:** O momento angular total do sistema permanece constante, uma vez que a soma dos torques externos é nula.

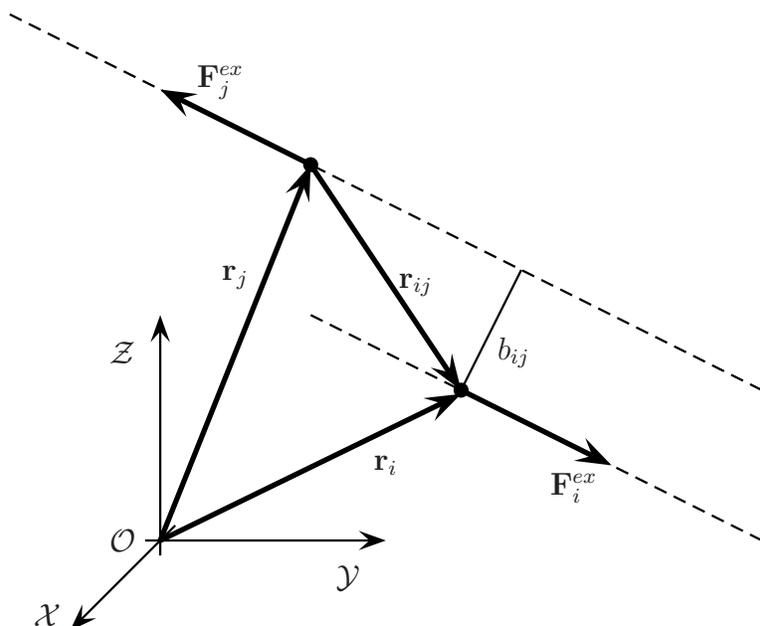
Como a força externa total é nula, o centro de massa do sistema não possui aceleração e, portanto, está em repouso ou em MRU. A **Figura 33.1** mostra uma situação em que  $m_2 > m_1$  e o centro de massa do sistema se move em MRU. Note que o movimento de cada partícula não é um MRU, pois a força resultante sobre cada uma delas não é nula. É fácil perceber que a força total sobre a primeira é a força que o fio exerce sobre ela, designada por  $\mathbf{F}_{12}$ , e a força total sobre a segunda é a que o fio exerce sobre ela, dada por  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ . A linha de ação dessas forças está, obviamente, ao longo da direção do fio, como ilustra a **Figura 33.1**.

Como o torque externo é nulo, pois o torque dos pesos das partículas são anulados pelos correspondentes torques das normais, o momento angular total do sistema é uma constante de movimento (há situações em que a força externa total é nula, mas ainda assim o torque externo é diferente de zero, veja o próximo exemplo). Em outras palavras, embora o momento angular de cada partícula varie durante o movimento do sistema, pois  $d\mathbf{L}_1/dt = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} \neq \mathbf{0}$  e  $d\mathbf{L}_2/dt = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21}$ , o momento angular total do sistema permanece constante.

### Exemplo 33.2

Vamos considerar um torque muito especial chamado **torque de binário**. Binário é um par de forças de mesmo módulo e mesma direção, mas de sentidos opostos, que age sobre um sistema. As forças não precisam ser pares de

ação e reação. A situação mais interessante é aquela em que elas aparecem como forças externas agindo em um corpo rígido. Sejam, pois, duas forças externas,  $\mathbf{F}_i^{ex}$  agindo sobre a  $i$ -ésima partícula do corpo, e  $\mathbf{F}_j^{ex}$  agindo sobre a  $j$ -ésima. A condição para que esse par de forças seja um binário é simplesmente exigir que  $\mathbf{F}_j^{ex} = -\mathbf{F}_i^{ex}$ . Na **Figura 33.2** aparecem tais forças e os vetores-posição  $\mathbf{r}_i$  e  $\mathbf{r}_j$  das partículas do sistema.



**Figura 33.2:** Torque de binário produzido pelas forças  $\mathbf{F}_i^{ex}$  e  $\mathbf{F}_j^{ex}$ , de mesmo módulo, mesma direção, mas sentidos opostos. A distância entre as retas suportes dessas forças é diferente de zero, fazendo com que a soma dos torques dessas duas forças também seja diferente de zero.

O torque externo total sobre essas duas partículas é

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\tau}^{ex} &= \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ex} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j^{ex} \\
 &= \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ex} + \mathbf{r}_j \times (-\mathbf{F}_i^{ex}) \\
 &= (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_i^{ex} \\
 &= \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_i^{ex} .
 \end{aligned} \tag{33.16}$$

Usando a definição de produto vetorial, determinamos a direção, o sentido e o módulo desse torque. A direção é perpendicular ao plano definido pelos vetores  $\mathbf{r}_{ij}$  e  $\mathbf{F}_i^{ex}$ , que é o plano onde estão as duas forças que formam o binário; podemos chamá-lo plano do binário. O sentido desse torque pode ser descrito do seguinte modo: olhando perpendicularmente para o plano do binário, se as forças tendem a rodar o sistema no sentido anti-horário à reta que une as partículas, o torque estará apontando do plano para nossos olhos e, se tendem a rodar no sentido horário, dos nossos olhos para o plano. Usando os seus conhecimentos de produto vetorial, você pode verificar que o módulo do torque total é

$$|\boldsymbol{\tau}^{ex}| = |\mathbf{F}_i| b_{ij} , \quad (33.17)$$

onde  $b_{ij}$  é a distância entre as retas suportes das forças do binário (veja novamente a **Figura 33.2**). Note que esse módulo não depende da origem relativa à qual o torque total foi calculado; depende apenas de duas quantidades intrínsecas ao binário, o módulo de suas forças e a separação entre suas retas suportes. Também a direção e sentido do torque não dependem da origem. Desse modo, esse torque, chamado simplesmente **torque do binário**, é um vetor que depende apenas das características intrínsecas do binário (e da convenção que estabelece o sentido do produto vetorial). Esse é um fato notável, pois, de modo geral, usando-se diferentes sistemas de eixos, com diferentes origens, o torque obtido depende da origem relativa à qual foi calculado. Um exemplo importante de torque de binário ocorre quando uma molécula neutra, porém com um momento de dipolo elétrico permanente (como a molécula da água) é colocada numa região onde há um campo elétrico uniforme. Você aprenderá, em seu curso de Física III, que, nesse caso, as forças elétricas produzem um torque de binário que tende a orientar a molécula ao longo da direção do campo elétrico.

Agora vamos definir alguns novos conceitos que nos permitirão obter resultados que generalizam o teorema (33.13) do momento angular e torque.

Seja  $Q$  um ponto com o vetor-posição  $\mathbf{r}_Q$  e seja  $\mathbf{r}$  o vetor-posição de uma partícula qualquer. Na Aula 29, definimos vetor-posição da partícula relativo a  $Q$  como o vetor

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_Q . \quad (33.18)$$

Naturalmente,  $\mathbf{r}'$  é um vetor que vai de  $Q$  até a partícula. Suponha, ainda, que o ponto  $Q$  possa ser um ponto móvel, isto é, um ponto cuja posição varie com o tempo. Derivando em relação ao tempo os dois lados da equação (33.18), obtemos

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_Q , \quad (33.19)$$

onde  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  é a velocidade da partícula,  $\mathbf{v}_Q = d\mathbf{r}_Q/dt$  é a velocidade do ponto  $Q$ . A derivada  $d\mathbf{r}'/dt$ , que foi representada na fórmula anterior por  $\mathbf{v}'$ , é chamada **velocidade da partícula relativa a  $Q$** .

Definimos o **momento angular da partícula relativo ao ponto base  $Q$**  como o vetor

$$\mathbf{L}_Q = \mathbf{r}' \times m\mathbf{v}' , \quad (33.20)$$

onde  $m$  é a massa da partícula. Se o ponto  $Q$  for a própria origem  $\mathcal{O}$ , temos  $\mathbf{r}_Q = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$ . Conseqüentemente,  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$  e  $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$ . Nesse caso, a definição (33.20) recai na definição antiga de momento angular relativo à origem. Se  $Q$  não mais coincidir com a origem, mas ainda assim for um ponto fixo, teremos  $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$  e, conseqüentemente,  $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$ . A definição (33.20) assume a forma  $\mathbf{L}_Q = \mathbf{r}' \times m\mathbf{v}$ . Esses casos já foram considerados na Aula 29. Agora, estamos considerando a definição geral (33.20), que engloba não apenas esses casos, mas também deixa em aberto a possibilidade de  $Q$  ser algum ponto móvel.

Vamos, também, definir **torque relativo ao ponto  $Q$**  de uma força  $\mathbf{F}$ , como o vetor

$$\boldsymbol{\tau}_Q = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} . \quad (33.21)$$

Essa definição, nos casos em que o ponto  $Q$  é a origem ou algum outro ponto fixo, também já foi considerada na Aula 29.

Vamos aplicar esses novos conceitos às partículas do sistema em consideração. O vetor-posição relativo ao ponto  $Q$  da  $i$ -ésima partícula do sistema e sua velocidade relativa a  $Q$  são, respectivamente,

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_Q . \quad (33.22)$$

A **Figura 33.3** ilustra a relação entre os três vetores  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{r}_Q$  e  $\mathbf{r}'_i$ .

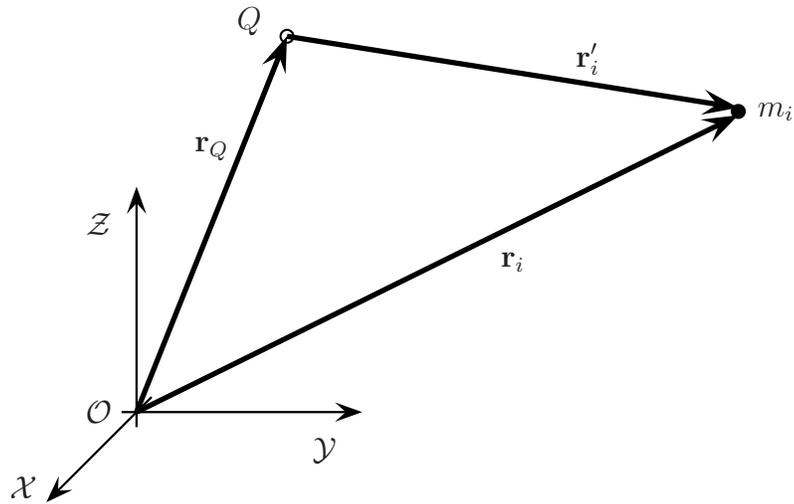
O momento angular relativo a  $Q$  da  $i$ -ésima partícula é

$$\mathbf{L}_{Qi} = \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i . \quad (33.23)$$

Definimos **momento angular total do sistema relativo a  $Q$**  como sendo a soma dos momentos angulares relativos a  $Q$  de todas as partículas do sistema. Representando esse momento angular total por  $\mathbf{L}_Q$ , temos

$$\mathbf{L}_Q = \mathbf{r}'_1 \times m_1 \mathbf{v}'_1 + \mathbf{r}'_2 \times m_2 \mathbf{v}'_2 + \cdots + \mathbf{r}'_N \times m_N \mathbf{v}'_N . \quad (33.24)$$

Naturalmente, se o sistema tiver apenas uma partícula, recairemos na definição anterior, dada pela equação (33.20).



**Figura 33.3:** A figura mostra apenas a  $i$ -ésima partícula do sistema, com seu vetor-posição  $\mathbf{r}_i$  e seu vetor-posição relativo ao ponto  $Q$ , dado por  $\mathbf{r}'_i$ ; também mostra o vetor posição  $\mathbf{r}_Q$  do ponto  $Q$ .

Definimos **torque externo sobre o sistema relativo a  $Q$**  como a soma dos torques relativos a  $Q$  de todas as forças externas que agem sobre o sistema. Denotando por  $\boldsymbol{\tau}_Q^{ex}$  esse torque externo, obtemos

$$\boldsymbol{\tau}_Q^{ex} = \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{F}_2^{ex} + \cdots + \mathbf{r}'_N \times \mathbf{F}_N^{ex}. \quad (33.25)$$

Também podemos definir torque interno sobre o sistema relativo a  $Q$  como a soma dos torques relativos a  $Q$  de todas as forças internas sobre o sistema, mas esse torque interno é nulo, não importa qual seja o ponto  $Q$ , como você demonstrará com facilidade no problema proposto 3.

Vamos considerar, agora, a seguinte generalização do teorema (33.13):

$$\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} = \boldsymbol{\tau}_Q^{ex}, \quad (33.26)$$

onde  $Q$  é um ponto fixo qualquer. A seguir demonstraremos esse teorema.

Inicialmente, usando o fato de que  $Q$  é um ponto fixo e, portanto,  $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i$ , e as relações  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), estabeleceremos uma relação entre  $\mathbf{L}_Q$  e  $\mathbf{L}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_Q &= \mathbf{r}'_1 \times m_1 \mathbf{v}'_1 + \cdots + \mathbf{r}'_N \times m_N \mathbf{v}'_N \\ &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_Q) \times m_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + (\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_Q) \times m_N \mathbf{v}_N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{r}'_N \times m_N \mathbf{v}_N \right) - \mathbf{r}_Q \times \left( m_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + m_N \mathbf{v}_N \right) \\
&= \mathbf{L} - \mathbf{r}_Q \times M \mathbf{v}_{cm}, \quad (33.27)
\end{aligned}$$

onde usamos a definição de centro de massa e  $M$  é a massa total do sistema.

Derivando, em relação ao tempo, ambos os membros da equação anterior e usando as equações  $d\mathbf{L}/dt = \boldsymbol{\tau}^{ex}$  e  $M\mathbf{a}_{cm} = \mathbf{F}^{ex}$ , obtemos

$$\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} - \mathbf{r}_{cm} \times M\mathbf{a}_{cm} = \boldsymbol{\tau}^{ex} - \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{F}^{ex}, \quad (33.28)$$

onde o torque total e a força externa total sobre o sistema valem, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}^{ex} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1^{ex} + \cdots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N^{ex} \\
\mathbf{F}^{ex} &= \mathbf{F}_1 + \cdots + \mathbf{F}_N. \quad (33.29)
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo as últimas equações em (33.28), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1^{ex} + \cdots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N^{ex} - \left( \mathbf{r}_Q \times \mathbf{F}_1^{ex} + \cdots + \mathbf{r}_Q \times \mathbf{F}_N^{ex} \right) \\
&= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F}_1^{ex} + \cdots + (\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F}_N^{ex} \\
&= \boldsymbol{\tau}_Q^{ex}, \quad (33.30)
\end{aligned}$$

resultado que queríamos demonstrar. Segue, como consequência imediata desse resultado, o Teorema da Conservação do Momento Angular relativo a qualquer ponto fixo  $Q$ , a saber:

$$\boldsymbol{\tau}_Q^{ex} = \mathbf{0} \implies \mathbf{L}_Q = \text{constante}. \quad (33.31)$$

Terminaremos esta seção com um comentário bastante apropriado a respeito do Teorema do Momento Angular e Torque para um Sistema de Partículas, dado pela equação (33.26). A dedução anterior foi feita supondo que o ponto  $Q$  fosse fixo. No entanto, nada mudaria em nossa demonstração caso o ponto  $Q$  se movesse com velocidade constante no tempo em relação ao referencial inercial em uso, ou seja em MRU, pois continuaria sendo válida a igualdade  $dv'_i/dt = dv_i/dt$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) e, conseqüentemente, toda a argumentação utilizada a partir daí. Em suma, a equação  $d\mathbf{L}_Q/dt = \boldsymbol{\tau}_Q^{ex}$  vale também quando o ponto  $Q$  se move em MRU. Isso é equivalente a dizer que essa equação vale para qualquer ponto que esteja fixo em algum referencial inercial (lembre-se de que um ponto fixo em relação a um referencial inercial estará em MRU relativamente a um outro referencial inercial que se mova em relação ao primeiro). De fato, seria muito

estranho que a equação (33.26) fosse válida apenas num certo referencial inercial, pois essa equação foi obtida a partir de algumas definições e das leis de Newton, que são válidas em qualquer referencial inercial.

No entanto, como veremos na próxima seção, há um ponto privilegiado que, mesmo em um movimento acelerado qualquer, faz com que a equação (33.26) continue verdadeira se for escolhido como o ponto  $Q$ . Trata-se do centro de massa do sistema. Em outras palavras, veremos que  $d\mathbf{L}_{cm}/dt = \boldsymbol{\tau}_{cm}^{ex}$  é válida, qualquer que seja o movimento do centro de massa.

### Momento angular de um sistema relativo ao centro de massa

Nesta seção, vamos considerar o momento angular de um sistema de partículas relativo a um ponto  $Q$  muito especial: o centro de massa do sistema. Para  $Q = cm$ , a definição (33.24) toma a forma

$$\mathbf{L}_{cm} = \mathbf{r}'_1 \times m_1 \mathbf{v}'_1 + \mathbf{r}'_2 \times m_2 \mathbf{v}'_2 + \cdots + \mathbf{r}'_N \times m_N \mathbf{v}'_N, \quad (33.32)$$

onde, agora,

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{cm} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (33.33)$$

Note que, de modo geral, não temos  $\mathbf{v}'_i$  igual a  $\mathbf{v}_i$ , pois o centro de massa pode estar em movimento.

Inicialmente, demonstraremos uma relação notável entre o momento angular do sistema relativo ao centro de massa e o seu momento angular relativo à origem. Usando a equação (33.33) no termo genérico da soma em (33.32), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i &= (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}) \times m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{cm}) \\ &= \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i - \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_{cm} - \mathbf{r}_{cm} \times m_i \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_{cm} \times m_i \mathbf{v}_{cm}, \end{aligned} \quad (33.34)$$

equação válida para  $i = 1, 2, \dots, N$ . Ou seja, podemos escrever as equações

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 \times m_1 \mathbf{v}'_1 &= \mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{v}_1 - m_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_{cm} - m_1 \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_1 + m_1 \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm}, \\ \mathbf{r}'_2 \times m_2 \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{r}_2 \times m_2 \mathbf{v}_2 - m_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_{cm} - m_2 \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_2 + m_2 \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm}, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \mathbf{r}'_N \times m_N \mathbf{v}'_N &= \mathbf{r}_N \times m_N \mathbf{v}_N - m_N \mathbf{r}_N \times \mathbf{v}_{cm} - m_N \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_N + m_N \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm}. \end{aligned} \quad (33.35)$$

A soma dos lados esquerdos dessas equações é, de acordo com (33.32), o momento angular do sistema relativo ao centro de massa,  $\mathbf{L}_{cm}$ . A soma da primeira coluna no lado direito é, de acordo com (33.6), o momento angular do sistema relativo à origem,  $\mathbf{L}$ . No lado direito de (33.35) ainda temos a soma da segunda coluna:

$$\begin{aligned} -m_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_{cm} - m_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_{cm} \cdot \cdot \cdot - m_N \mathbf{r}_N \times \mathbf{v}_{cm} &= \\ &= -(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \cdot \cdot \cdot + m_N \mathbf{r}_N) \times \mathbf{v}_{cm} = \\ &= -M \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm} , \end{aligned} \quad (33.36)$$

a soma da terceira

$$\begin{aligned} -m_1 \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_1 - m_2 \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_2 \cdot \cdot \cdot - m_N \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_N &= \\ &= -\mathbf{r}_{cm} \times (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \cdot \cdot \cdot + m_N \mathbf{v}_N) = \\ &= -\mathbf{r}_{cm} \times M \mathbf{v}_{cm} \end{aligned} \quad (33.37)$$

e, finalmente, a soma da última coluna

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm} + m_2 \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm} \cdot \cdot \cdot + m_N \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm} &= \\ &= (m_1 + m_2 + \cdot \cdot \cdot + m_N) \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm} = \\ &= M \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm} . \end{aligned} \quad (33.38)$$

Levando em conta todos esses resultados, e observando que a soma da segunda coluna é igual à soma da terceira, obtemos, somando membro a membro todas as equações em (33.35), o resultado

$$\mathbf{L}_{cm} = \mathbf{L} - 2 M \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm} + M \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm} , \quad (33.39)$$

ou seja,

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{cm} + \mathbf{r}_{cm} \times M \mathbf{v}_{cm} . \quad (33.40)$$

O último termo dessa equação é o momento angular relativo à origem que uma partícula teria se a sua massa fosse a massa total do sistema e a sua posição fosse a posição do centro de massa. Embora não exista tal partícula no problema e o centro de massa não seja uma partícula, esse momento angular é chamado **momento angular do centro de massa**. Não é a primeira vez que esse ponto, o centro de massa, aparece nas equações como se fosse uma partícula. Dizemos, então, que  $\mathbf{r}_{cm} \times M \mathbf{v}_{cm}$  é o **momento angular do centro de massa relativo à origem**. Agora, é fácil generalizar (33.40) para momentos angulares do sistema relativos a um ponto fixo qualquer  $Q$ :

$$\mathbf{L}_Q = \mathbf{L}_{cm} + (\mathbf{r}_{cm} - \mathbf{r}_Q) \times M \mathbf{v}_{cm} , \quad (33.41)$$

onde  $(\mathbf{r}_{cm} - \mathbf{r}_Q) \times M \mathbf{v}_{cm}$  é o **momento angular do centro de massa relativo ao ponto fixo  $Q$** .

Em suma, podemos afirmar que

*o momento angular de um sistema relativo a qualquer ponto fixo é a soma do momento angular do sistema relativo ao centro de massa com o momento angular do centro de massa relativo ao ponto fixo.*

Note que é comum chamar **momento angular intrínseco do sistema** ao seu momento angular relativo ao centro de massa e **momento angular orbital do sistema** ao momento angular do seu centro de massa relativo ao ponto fixo em consideração. Usando esses nomes, o resultado (33.41) pode ser enunciado como

*o momento angular de um sistema é igual a seu momento angular intrínseco mais seu momento angular orbital.*

Uma situação que ilustra esse resultado é dada pelo movimento da Terra em torno do Sol. A Terra tem um momento angular intrínseco  $\mathbf{L}_{cm}$ , devido à sua rotação diária em torno de seu centro de massa, e um momento angular orbital  $\mathbf{r}_{cm} \times M\mathbf{v}_{cm}$  relativo ao Sol, devido ao movimento orbital de rotação anual da Terra em torno do Sol. Nesse último caso,  $\mathbf{r}_{cm}$  e  $\mathbf{v}_{cm}$  são a posição e a velocidade do centro de massa da Terra em relação ao referencial com centro no Sol e, naturalmente,  $M$  é a massa da Terra.

Voltando à equação (33.40), podemos derivá-la em relação ao tempo para obter a relação

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_{cm}}{dt} + \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{F}^{ex}, \quad (33.42)$$

onde usamos os resultados

$$\frac{d\mathbf{r}_{cm}}{dt} \times M\mathbf{v}_{cm} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_{cm} \times M\frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt} = \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{F}^{ex}.$$

Utilizando a definição de momento angular de um sistema e torque sobre um sistema, e lembrando que a força externa total sobre um sistema é a soma de todas as forças externas sobre cada uma de suas partículas, reescrevemos a equação (33.42) na forma

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2^{ex} + \cdots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N^{ex} \\ &= \frac{d\mathbf{L}_{cm}}{dt} + \mathbf{r}_{cm} \times (\mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{F}_2^{ex} + \cdots + \mathbf{F}_N^{ex}). \end{aligned} \quad (33.43)$$

Rearranjando convenientemente os termos da equação anterior, obtemos

$$\frac{d\mathbf{L}_{cm}}{dt} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{cm}) \times \mathbf{F}_1^{ex} + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{cm}) \times \mathbf{F}_2^{ex} + \cdots + (\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_{cm}) \times \mathbf{F}_N^{ex}, \quad (33.44)$$

ou seja,

$$\frac{d\mathbf{L}_{cm}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{cm}^{ex}, \quad (33.45)$$

onde, naturalmente,  $\boldsymbol{\tau}_{cm}^{ex}$  é o torque externo total relativo ao centro de massa. Segue-se o respectivo teorema de conservação do momento angular:

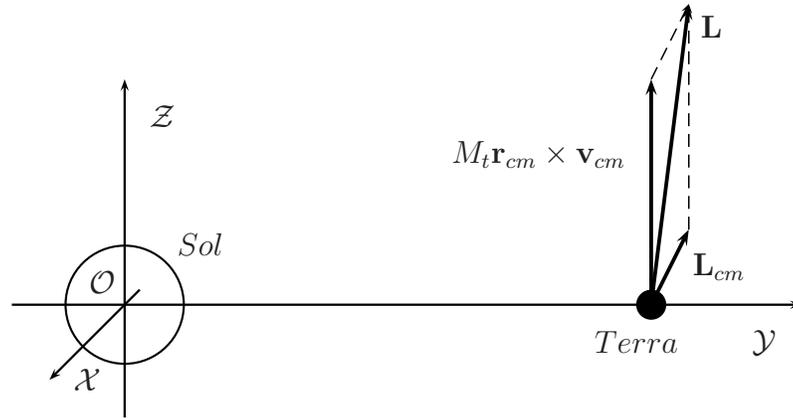
$$\boldsymbol{\tau}_{cm}^{ex} = \mathbf{0} \implies \mathbf{L}_{cm} = \text{constante}. \quad (33.46)$$

Em suma:

*Se  $Q$  é um ponto fixo ou o centro de massa de um sistema, a taxa instantânea de variação temporal do momento angular do sistema relativo ao ponto  $Q$  é igual ao torque externo total sobre o sistema relativo ao ponto  $Q$ . Conseqüentemente, se o torque externo total sobre o sistema relativo a um ponto fixo ou ao centro de massa for nulo, será constante o momento angular do sistema relativo ao ponto fixo ou ao centro de massa, respectivamente.*

### Exemplo 33.3

A fim de ilustrar a decomposição  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{cm} + M\mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm}$  numa situação simples, considere o movimento de translação da Terra em torno do Sol, mas considere também que a Terra gire em torno de seu eixo. Como sabemos, a direção do eixo de rotação da Terra, ou seja, a direção da reta que passa pelos pólos geográficos norte e sul não é perpendicular ao plano do movimento da Terra em torno do Sol. A reta faz, aproximadamente, um ângulo de  $23^\circ$  com a normal a esse plano. Os eixos de nosso referencial inercial estão solidários ao Sol, com a origem em seu centro e de tal forma que o movimento da Terra ocorra no plano  $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}$ , como ilustra a **Figura 33.4**. No instante considerado nessa figura, o centro da Terra se encontra sobre o eixo  $\mathcal{O}\mathcal{X}$ , a uma distância  $R_{TS}$  do centro do Sol, isto é, da origem dos eixos.



**Figura 33.4:** O momento angular total da Terra, incluindo a contribuição de sua rotação, relativo ao centro do Sol.

Você aprenderá nas próximas aulas que o momento angular de uma esfera homogênea girando em torno de um eixo que passe pelo seu centro aponta na direção desse eixo e tem o sentido dado pela seguinte regra: o seu polegar da mão direita dará o sentido do momento angular da esfera se você apontar seus outros dedos dessa mão no sentido da rotação. Além disso, se  $m$  for a massa da esfera,  $r$  o seu raio e  $T$  o período associado ao movimento de rotação o módulo de seu momento angular relativo ao centro de massa será dado por  $(2/5)mr^2(2\pi/T)$ .

Desse modo, o momento angular da Terra relativo a seu centro de massa,  $\mathbf{L}_{cm}$ , tem módulo  $(2/5)M_t R_{ts}^2 \omega$ , onde  $M_t$  é a massa da Terra e  $\omega = 2\pi \text{ rad/dia}$  e aponta na direção mostrada na **Figura 33.4**.

Se quisermos calcular o momento angular da Terra relativo à origem, isto é, ao centro do Sol, basta utilizar a decomposição anterior. Para isso, é necessário calcular o termo  $M_t \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm}$ , onde  $\mathbf{r}_{cm}$  e  $\mathbf{v}_{cm}$  são, respectivamente, o vetor posição e a velocidade do centro de massa da Terra relativos ao referencial com origem no centro do Sol. Designando por  $v_t$  o módulo da velocidade do centro de massa da Terra em seu movimento, supostamente circular, em torno do Sol, temos, no instante considerado na **Figura 33.4**

$$M_t \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm} = M_t R_{ts} v_t \mathbf{u}_x \times (-\mathbf{u}_y) = M_t R_{ts} v_t \mathbf{u}_z .$$

Portanto, o momento angular da Terra relativo à origem é dado pela soma vetorial

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{cm} + M_t R_{ts} v_t \mathbf{u}_z ,$$

---

O período da rotação da esfera é definido como o intervalo de tempo gasto por ela para dar uma volta completa.

---

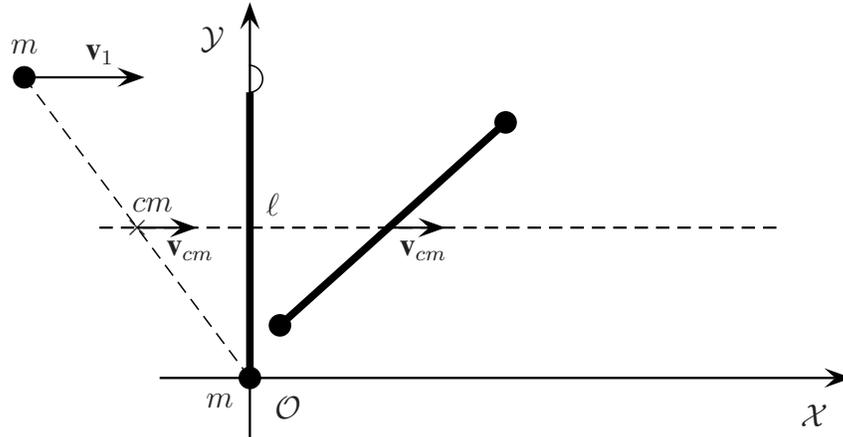
que está ilustrada na **Figura 33.4**. Por motivos didáticos, essa figura foi feita fora de escala. No problema proposto 4 você terá a oportunidade de comparar numericamente os módulos dos dois termos do lado direito da expressão anterior.

### Exemplo 33.4

Neste exemplo, verificaremos explicitamente a validade da decomposição do momento angular total de um sistema na forma  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{cm} + M\mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm}$ , demonstrada anteriormente para um sistema qualquer. Além disso, trata-se de uma situação simples na qual o torque externo total é nulo e, por conseguinte, o momento angular do sistema se conserva durante todo o seu movimento. Como veremos, essa lei de conservação nos permitirá obter informações interessantes sobre o movimento.

Considere uma pequena esfera de massa  $m$  presa a um dos extremos de uma haste rígida de comprimento  $\ell$  e de massa desprezível. Uma esfera idêntica à primeira incide com velocidade  $\mathbf{v}_1$  perpendicular à direção da haste sobre o seu outro extremo e fica grudada nela após o choque. Suponha que as esferas e a haste estejam sobre uma superfície plana, horizontal e lisa. Esta situação está ilustrada na **Figura 33.5**. Por conveniência, escolhemos os eixos cartesianos  $\mathcal{OXY}$  de modo que a haste esteja, inicialmente, ao longo do eixo  $\mathcal{OY}$  com um de seus extremos na origem (o que contém a esfera).

Como a força externa total é nula, o centro de massa do sistema se move em MRU. Conseqüentemente, após o choque, o centro de massa do sistema continua se movendo para a direita com a mesma velocidade que tinha antes da colisão. No entanto, depois do choque, as esferas giram em torno do centro de massa mantendo sempre a distância  $\ell$  entre elas, pois cada uma está presa em um extremo da haste rígida. É imediato perceber que a velocidade do centro de massa do sistema é  $\mathbf{v}_1/2$  (verifique!).



**Figura 33.5:** Pequena esfera incidindo sobre um dos extremos de uma haste rígida de massa desprezível e que contém uma esfera idêntica presa a seu outro extremo. Após o choque, a esfera incidente permanece grudada na haste e o sistema formado pela haste e as duas esferas se movimenta para a direita, girando em torno de seu centro de massa.

Analogamente, como o torque externo total sobre o sistema é nulo, o seu momento angular se conserva durante todo o movimento do sistema. Em particular, esse momento angular é o mesmo antes e depois de a esfera colidir e grudar na haste. Portanto, para calcular o momento angular do sistema, podemos escolher um instante qualquer antes da colisão. Como a esfera que está na origem se encontra inicialmente em repouso, o momento angular do sistema coincide com o da esfera incidente. Designando por esfera 1 a incidente e por esfera 2 a que já estava presa na haste, temos

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1 = -mlv_1 \mathbf{u}_z,$$

onde usamos a regra da mão direita para determinar a direção e sentido do produto vetorial e  $v_1 = |\mathbf{v}_1|$ .

Como as massas das esferas são iguais e a haste tem massa desprezível, o centro de massa do sistema está, em qualquer instante, no ponto médio entre as esferas. Com isso, temos, também

$$M\mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm} = (2m)\frac{\mathbf{r}_1}{2} \times \frac{\mathbf{v}_1}{2} = -\frac{1}{2}mlv_1 \mathbf{u}_z.$$

A partir das equações anteriores e da decomposição  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{cm} + M\mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm}$ , podemos determinar o momento angular do sistema relativo ao seu centro de massa:

$$\mathbf{L}_{cm} = \mathbf{L} - M\mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm} = -mlv_1 \mathbf{u}_z + \frac{1}{2}mlv_1 \mathbf{u}_z = -\frac{1}{2}mlv_1 \mathbf{u}_z. \quad (33.47)$$

A fim de verificarmos a validade da decomposição utilizada na obtenção do resultado anterior para o momento angular, calculemos  $\mathbf{L}_{cm}$  diretamente a partir de sua definição, isto é,

$$\mathbf{L}_{cm} = \mathbf{r}'_1 \times m\mathbf{v}'_1 + \mathbf{r}'_2 \times m\mathbf{v}'_2, \quad (33.48)$$

onde a “linha” nos vetores significa, como de costume, relativo ao centro de massa. Devemos, portanto, calcular as quantidades  $\mathbf{r}'_1$ ,  $\mathbf{r}'_2$ ,  $\mathbf{v}'_1$  e  $\mathbf{v}'_2$ . Da definição de vetor-posição e da composição de Galileo para as velocidades, temos

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{cm} = \frac{\mathbf{r}_1}{2}; \quad \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{cm} = -\frac{\mathbf{r}_1}{2}$$

e

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{cm} = \frac{\mathbf{v}_1}{2}; \quad \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{cm} = -\frac{\mathbf{v}_1}{2}.$$

Substituindo as expressões anteriores na equação (33.49), obtemos

$$\mathbf{L}_{cm} = \frac{\mathbf{r}_1}{2} \times m\frac{\mathbf{v}_1}{2} + \left(-\frac{\mathbf{r}_1}{2}\right) \times m\left(-\frac{\mathbf{v}_1}{2}\right) = -\frac{1}{2}m\ell v_1 \mathbf{u}_z, \quad (33.49)$$

de acordo com o resultado obtido em (33.47).

Agora, tentemos responder à seguinte pergunta: qual a distância percorrida pelo centro de massa do sistema no intervalo de tempo gasto pela haste, já com as duas esferas grudadas em seus extremos, para dar a primeira volta completa? Para responder a essa pergunta, é conveniente utilizar o referencial do centro de massa, isto é, um referencial cujos eixos são sempre paralelos aos do referencial original, mas tem a sua origem no centro de massa. Como vale a equação  $d\mathbf{L}_{cm}/dt = \boldsymbol{\tau}_{cm}^{ex}$  e  $\boldsymbol{\tau}_{cm}^{ex} = \mathbf{0}$ , o momento angular do sistema relativo ao centro de massa também é uma constante de movimento. Com isso, podemos escrever, numa notação óbvia, que o  $\mathbf{L}_{cm}$  num instante  $t_a$  anterior ao choque e num instante  $t_d$  depois do choque são iguais:

$$\mathbf{L}_{cm}^a = \mathbf{L}_{cm}^d. \quad (33.50)$$

Note que  $\mathbf{L}_{cm}^a$  já foi calculado anteriormente e vale  $-(1/2)m\ell v_1 \mathbf{u}_z$ . Resta-nos obter uma expressão para  $\mathbf{L}_{cm}^d$  em termos do módulo das velocidades das esferas depois do choque e igualarmos o resultado com  $\mathbf{L}_{cm}^a$ .

Num instante genérico  $t_d$ , depois do choque, os vetores-posição e as velocidades das esferas são dados, respectivamente, por  $\mathbf{r}'_{1d}$ ,  $\mathbf{r}'_{2d}$ ,  $\mathbf{u}'_1$  e  $\mathbf{u}'_2$ . Desse modo, escrevemos

$$\mathbf{L}_{cm}^{(d)} = \mathbf{r}'_{1d} \times m\mathbf{u}'_1 + \mathbf{r}'_{2d} \times m\mathbf{u}'_2.$$

Pela definição de centro de massa, temos

$$m\mathbf{r}'_{1d} + m\mathbf{r}'_{2d} = \mathbf{0} \implies \mathbf{r}'_{2d} = -\mathbf{r}'_{1d}.$$

Num sistema formado por duas partículas de mesma massa, o centro de massa está sempre no ponto médio entre as duas e suas velocidades têm sempre o mesmo módulo, a mesma direção mas sentidos opostos.

Analogamente, temos também

$$m\mathbf{u}'_1 + m\mathbf{u}'_2 = \mathbf{0} \implies \mathbf{u}'_2 = -\mathbf{u}'_1 .$$

Como as duas esferas estão sempre à mesma distância  $\ell$  uma da outra e o centro de massa está no ponto médio da barra, ambas descrevem um movimento circular uniforme de raio  $\ell/2$  (relativamente ao referencial do centro de massa). Assim sendo, temos

$$\mathbf{L}_{cm}^{(d)} = 2\mathbf{r}'_{1d} \times m\mathbf{u}'_1 = 2|\mathbf{r}'_{1d}| \times m|\mathbf{u}'_1|(-\mathbf{u}_z) = -m\ell u_1 \mathbf{u}_z , \quad (33.51)$$

onde  $u_1 = |\mathbf{u}_1|$ . Substituindo (33.51) em (33.50), obtemos

$$-\frac{1}{2}m\ell v_1 \mathbf{u}_z = -m\ell u_1 \mathbf{u}_z \implies u_1 = \frac{v_1}{2} . \quad (33.52)$$

Portanto, o tempo gasto para a haste com as duas esferas presas dar uma volta completa é igual ao intervalo de tempo necessário para cada partícula percorrer um perímetro exato de suas trajetórias circulares de raio  $\ell/2$ , ou seja,

$$\Delta t = \frac{2\pi(\ell/2)}{u_1} = \frac{2\pi\ell}{v_1} .$$

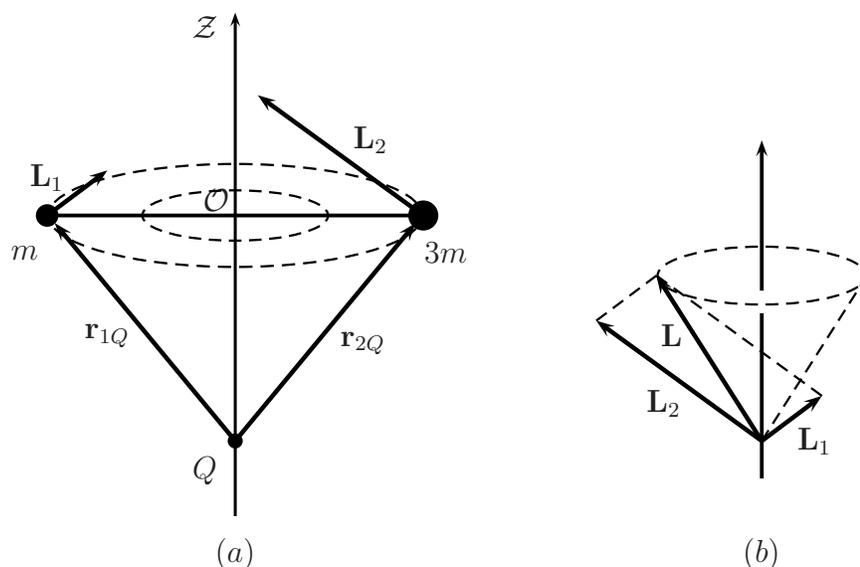
Nesse intervalo, o centro de massa do sistema percorre, relativamente ao referencial original, uma distância de

$$\Delta s_{cm} = v_{cm}\Delta t = \frac{v_1}{2} \frac{2\pi\ell}{v_1} = \pi\ell .$$

É recomendável que você tente resolver agora o problema proposto 6.

### Exemplo 33.5

Neste último exemplo, verificaremos a validade da equação  $\tau_Q^{ex} = d\mathbf{L}_Q/dt$ , onde  $Q$  é um ponto fixo no referencial inercial em uso, não necessariamente a origem, numa situação relativamente simples. Considere duas partículas de massas  $m_1 = m$  e  $m_2 = 3m$ , respectivamente, que estão ligadas por uma haste rígida de massa desprezível e comprimento  $\ell$ . A haste gira, mantendo sempre a sua direção horizontal, em torno de um eixo vertical que passa por seu ponto médio. Por hipótese, os módulos das velocidades das partículas permanecem constantes e iguais a  $v_0$  durante todo o movimento. Os eixos são escolhidos de modo que o movimento do sistema ocorra no plano  $\mathcal{OXY}$  e o eixo  $\mathcal{OZ}$  seja vertical e aponte para cima, com a origem no ponto médio da haste, como ilustra a **Figura 33.6.a**. Suponha que o sistema gire no sentido anti-horário de quem o observa do semi-eixo positivo  $\mathcal{OZ}$ .



**Figura 33.6:** Um haltere formado por duas partículas de massas  $m$  e  $3m$  e uma haste de comprimento  $\ell$  e massa desprezível girando horizontalmente em torno de um eixo vertical que passa pelo seu ponto médio.

Seja  $Q$  um ponto do eixo  $OZ$  situado a uma distância  $d$  abaixo da origem. Na **Figura 33.6.a** estão desenhadas setas indicativas dos momentos angulares de cada partícula relativamente ao ponto fixo  $Q$ ,  $L_1$  e  $L_2$ . Por conveniência, no instante considerado na figura as partículas estão sobre o eixo  $O\uparrow$ . Note que tanto  $L_1$  quanto  $L_2$  estão, nesse instante, no plano  $OYZ$ , sendo que  $L_1$  é perpendicular ao vetor-posição  $r_{1Q}$  e  $L_2$  é perpendicular ao vetor-posição  $r_{2Q}$ . Como  $L_1$  e  $L_2$  não têm módulos iguais, o momento angular total do sistema  $L = L_1 + L_2$  não tem direção vertical, mas aponta um pouco mais para a esquerda, como ilustra a **Figura 33.6.b**.

Como o sistema está girando (não importa que forças externas são necessárias para que isso aconteça) e o momento angular total está sempre no plano vertical que contém as partículas, concluímos que  $L$  gira em torno do eixo  $OZ$  com a mesma velocidade de giro que as partículas, varrendo uma superfície cônica como indica a **Figura 33.6.b**. Resumindo, embora  $L$  tenha módulo constante, ele não é um vetor constante, pois gira em torno do eixo  $OZ$ .

Para verificar a validade da equação  $\tau_Q^{ex} = dL_Q/dt$ , calcularemos ambos os lados dessa equação de forma independente e verificaremos que são iguais. Começemos por  $\tau_Q^{ex}$ . Designando por  $F_1^{ex}$  e  $F_2^{ex}$  as respectivas forças externas totais sobre as partículas 1 e 2, respectivamente, temos

$$\tau_Q^{ex} = \mathbf{r}_{1Q} \times \mathbf{F}_1^{ex} + \mathbf{r}_{2Q} \times \mathbf{F}_2^{ex} .$$

Tais forças são sempre horizontais, apontam para o eixo  $OZ$  e têm módulos dados, respectivamente, por (pense por que)

$$|\mathbf{F}_1^{ex}| = m \frac{v_0^2}{\ell/2} = 2m \frac{v_0^2}{\ell} \quad \text{e} \quad |\mathbf{F}_2^{ex}| = 3m \frac{v_0^2}{\ell/2} = 6m \frac{v_0^2}{\ell} .$$

Com isso em mente,  $\tau_Q^{ex}$  é dado, no instante considerado na **Figura 33.6** por

$$\tau_Q^{ex} = |\mathbf{r}_{1Q}| \text{sen} \alpha \, 2m \frac{v_0^2}{\ell} (-\mathbf{u}_x) + |\mathbf{r}_{2Q}| \text{sen} \alpha \, 6m \frac{v_0^2}{\ell} \mathbf{u}_x = \frac{4mdv_0^2}{\ell} \mathbf{u}_x , \quad (33.53)$$

onde usamos o fato de que  $|\mathbf{r}_{1Q}| \text{sen} \alpha = |\mathbf{r}_{2Q}| \text{sen} \alpha = d$ , sendo  $\alpha$  o ângulo entre os vetores  $\mathbf{r}_{1Q}$  e  $\mathbf{F}_1^{ex}$  e, conseqüentemente, entre  $\mathbf{r}_{2Q}$  e  $\mathbf{F}_2^{ex}$ .

Bem, calculemos agora  $d\mathbf{L}_Q/dt$ . Para isso, usaremos a decomposição  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{cm} + M\mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm}$ . Nessa expressão,  $\mathbf{r}_{cm}$  deve ser entendido como o vetor-posição do centro de massa do sistema relativo ao ponto  $Q$ . Usando o fato de que  $\mathbf{L}_{cm}$  é constante (veja o problema proposto 7), podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} &= \frac{d}{dt} (M\mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm}) \\ &= M\mathbf{v}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm} + M\mathbf{r}_{cm} \times \frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt} \\ &= \mathbf{r}_{cm} \times M\mathbf{a}_{cm} . \end{aligned} \quad (33.54)$$

Uma vez que o centro de massa do sistema se move com movimento circular uniforme de raio  $\ell/4$  e com uma velocidade de módulo constante igual a  $v_0/2$  (verifique agora mesmo essas afirmativas!), vemos que  $\mathbf{a}_{cm}$  é um vetor que aponta sempre para o eixo  $OZ$  e tem módulo constante  $|\mathbf{a}_{cm}| = (v_0^2)/(\ell/4)$ . Substituindo esses resultados na equação anterior, obtemos

$$\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} = |\mathbf{r}_{cm}| \text{sen} \beta \frac{v_0^2}{\ell/4} \mathbf{u}_x = \frac{4mdv_0^2}{\ell} \mathbf{u}_x ,$$

onde usamos o fato de que  $|\mathbf{r}_{cm}| \text{sen} \beta = d$ , sendo  $\beta$  o ângulo entre o vetor  $\mathbf{r}_{cm}$  e  $\mathbf{F}^{ex}$ . O resultado anterior é idêntico ao obtido na equação (33.53), como esperado.

## Resumo

O momento angular de um sistema de partículas é igual à soma dos momentos angulares de todas as partículas que pertencem ao sistema. Torque externo total sobre um sistema de partículas é a soma dos torques de todas as forças externas que agem sobre o sistema. Analogamente, torque interno total sobre um sistema de partículas é a soma dos torques de todas as forças internas que agem sobre o sistema. Supondo que as forças entre duas partículas quaisquer tenham sempre direções que estão ao longo das retas que ligam as partículas em interação e que satisfazem à Terceira Lei de Newton (Lei da Ação e Reação), pode-se mostrar que o torque interno total sobre um sistema é sempre nulo. Com isso, a taxa instantânea de variação temporal do momento angular do sistema relativo à origem é igual ao torque externo total relativo à origem, resultado conhecido como Teorema do Momento Angular e Torque para um Sistema de Partículas. Como consequência imediata desse resultado podemos afirmar que se for nulo o torque externo total sobre um sistema, seu momento angular será uma constante de movimento. Um exemplo importante é o torque de binário sobre um sistema, definido como aquele produzido por duas forças de mesmo módulo, mesma direção mas sentidos opostos e aplicadas de tal modo que suas retas suportes, embora paralelas, não coincidem.

O momento angular de um sistema relativo a um ponto  $Q$ , fixo no referencial inercial em uso (não necessariamente a origem), é igual ao momento angular do sistema relativo ao centro de massa mais o momento angular do centro de massa relativo ao ponto  $Q$ , ou seja,  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{cm} + (\mathbf{r}_{cm} - \mathbf{r}_Q) \times M\mathbf{v}_{cm}$ . É comum chamar  $\mathbf{L}_{cm}$  momento intrínseco do sistema e o termo  $(\mathbf{r}_{cm} - \mathbf{r}_Q) \times M\mathbf{v}_{cm}$  momento angular orbital relativo ao ponto  $Q$ . A equação  $d\mathbf{L}_Q/dt = \boldsymbol{\tau}_Q^{ex}$  é válida se  $Q$  for um ponto fixo qualquer ou então o centro de massa do sistema.

## Questionário

1. Defina momento angular de um sistema de partículas.
2. Defina torque externo total e torque interno total sobre um sistema de partículas. Escreva as expressões desses torques em termos das forças que atuam sobre as partículas, de suas respectivas massas e de seus respectivos vetores-posição.
3. No contexto da mecânica newtoniana, quanto vale a soma dos torques produzidos por todas as forças internas a um sistema?

4. Enuncie o Teorema do Momento Angular e Torque para um Sistema de Partículas.
5. O que afirma o Teorema da Conservação do Momento Angular para um Sistema de Partículas?
6. O que é um torque de binário? Dê um exemplo.
7. Escreva uma fórmula que relacione o momento angular de um sistema de partículas relativo à origem,  $\mathbf{L}$ , com o momento angular desse mesmo sistema relativo a um ponto fixo  $Q$  qualquer. Explique cada quantidade que aparecer nessa fórmula.
8. A equação  $d\mathbf{L}_{cm}/dt = \boldsymbol{\tau}_{cm}^{ex}$  é válida mesmo quando o centro de massa do sistema não for um ponto fixo e estiver, inclusive, acelerado?
9. Seja  $\mathbf{L}$  o momento angular de um sistema de partícula relativo à origem do referencial inercial em uso e  $\mathbf{L}_{cm}$  o momento angular desse sistema relativo ao seu centro de massa. Qual é a relação entre  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{L}_{cm}$ ?

### Problemas propostos

1. Considere um sistema formado apenas por duas partículas de massas, respectivamente,  $m_1$  e  $m_2$ . Defina  $\mathbf{r}$  como a posição da segunda partícula relativamente à primeira, isto é,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{v}$  como a velocidade relativa correspondente, ou seja,  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ .

(a) Demonstre, inicialmente, as relações

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad ; \quad \mathbf{r}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$$

$$\mathbf{v}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v} .$$

onde  $\mathbf{r}'_1$  e  $\mathbf{r}'_2$  são as posições das partículas relativas ao centro de massa do sistema e  $\mathbf{v}'_1$  e  $\mathbf{v}'_2$  as suas respectivas velocidades, também relativas ao centro de massa.

(b) Calcule  $\mathbf{L}_{cm}$  e verifique que

$$\mathbf{L}_{cm} = \mathbf{r} \times \mu \mathbf{v} ,$$

onde definimos  $\mu = (m_1 m_2)/(m_1 + m_2)$ , quantidade conhecida como massa reduzida do sistema.

2. Considere o movimento do sistema formado pela Terra e a Lua em torno do Sol. Por simplicidade, suponha que os três astros estejam sempre no mesmo plano e que a Terra e a Lua sejam partículas de massas, respectivamente, iguais a  $m_T = 5.98 \times 10^{24} \text{kg}$  e  $m_L = 7,35 \times 10^{22} \text{kg}$ . Escolha os eixos do referencial inercial com origem no centro do Sol, com  $\mathcal{OZ}$  perpendicular ao plano do movimento do sistema Terra-Lua. Lembre-se de que o sistema Terra-Lua gira em torno de seu centro de massa no mesmo sentido que esse centro de massa gira em torno do Sol.

(a) Supondo que tanto a Terra quanto a Lua descrevam, relativamente ao centro de massa do sistema Terra-Lua, movimentos circulares uniformes, determine o momento angular desse sistema em relação ao seu centro de massa. Considere que a distância entre a Terra e a Lua seja  $d_{tl} = 3,84 \times 10^8 \text{m}$  e que o período de uma volta completa do sistema em torno de seu centro de massa seja 28 dias.

**sugestão:** use a fórmula demonstrada no problema anterior.

(b) Usando a decomposição  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{cm} + M_t \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm}$ , calcule o momento angular do sistema Terra-Lua em relação ao centro do Sol. Use como distância do centro da Terra ao centro do Sol  $R_{ts} = 1,5 \times 10^{11} \text{m}$ .

3. Demonstre que torque interno total sobre um sistema formado por  $N$  partículas relativo a um ponto fixo qualquer  $Q$  é sempre nulo.

**sugestão:** agrupe convenientemente as parcelas que aparecem na expressão do torque interno total duas a duas. Em seguida, some o torque da força  $\mathbf{F}_{ij}$  relativo ao ponto  $Q$  com o torque de sua reação,  $\mathbf{F}_{ji}$ , e mostre que essa soma é nula quaisquer que sejam os valores de  $i$  e  $j$ .

4. Reconsidere o Exemplo 33.3. Neste problema você irá fazer uma estimativa numérica para a razão entre os módulos do momento angular da Terra relativo ao seu centro de massa e o momento angular relativo ao Sol da Terra, pensada como uma partícula localizada em seu centro de massa, isto é, uma estimativa para a razão

$$\frac{|\mathbf{L}_{cm}|}{|M_t \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm}|},$$

onde  $\mathbf{r}_{cm}$  e  $\mathbf{v}_{cm}$  são, respectivamente, o vetor-posição e a velocidade do centro de massa da Terra relativos ao centro do Sol.

- (a) Utilizando as informações contidas no Exemplo 33.3, mostre, inicialmente, que

$$\frac{|\mathbf{L}_{cm}|}{|M_t \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm}|} \approx \frac{2}{5} \left( \frac{r_t}{R_{ts}} \right)^2 \left( \frac{1 \text{ ano}}{1 \text{ dia}} \right) = 146 \left( \frac{r_t}{R_{ts}} \right)^2,$$

onde  $r_t$  é o raio terrestre.

- (b) Usando o valor  $r_t = 6,33 \times 10^6 \text{ m}$ , assim como o valor dado para  $R_{ts}$  no problema 2, obtenha numericamente a razão escrita no item anterior. Se você fizer a conta corretamente, perceberá que as setas representativas de  $\mathbf{L}_{cm}$  e  $M_t \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm}$  desenhadas na **Figura 33.4** estão totalmente fora de escala.
5. Reconsidere o Exemplo 33.4 mas, agora, suponha que a massa incidente sobre a haste rígida vertical seja igual a  $3m$ , em vez de  $m$ . Todos os outros valores utilizados naquele exemplo continuam os mesmos neste problema. Verifique, nesse caso, a validade da decomposição  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{cm} + M_t \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm}$  seguindo o mesmo procedimento que o utilizado no exemplo mencionado.
6. Considere a situação descrita no Exemplo 33.4 mas com o valor da massa incidente mudado para  $3m$ .
- (a) Quais são as trajetórias das duas pequenas esferas, antes e depois do choque da incidente com a haste, em relação a um referencial com origem sempre no centro de massa do sistema e eixos paralelos aos do referencial original?
- (b) Seguindo um procedimento análogo ao feito no Exemplo 33.4, calcule de quanto andou o centro de massa do sistema desde o instante do choque até o instante no qual a haste completou um giro de uma volta.
7. Verifique todas as afirmativas feitas no Exemplo 33.5 que não foram demonstradas explicitamente no texto.

## Auto-avaliação

Se você estudou bem a aula e compreendeu seu conteúdo, deve ser capaz de responder a todo o questionário. Quanto aos problemas propostos, novamente a lista é pequena, de modo que você deve tentar resolver todos eles. Dois deles, os problemas 1 e 3, envolvem demonstrações. Elas não devem causar dificuldade, pois são análogas às que existem no texto. Além disso, nessa altura do curso, você já possui maturidade suficiente para encarar sem medo demonstrações. Dos problemas restantes, os mais difíceis são o 5 e o 6. No entanto, ambos se referem a um exemplo discutido no texto. Desse modo, caso surjam algumas dificuldades na solução desses problemas, não se acanhe e consulte novamente o texto da aula.



## Aula 34 – Rotação de corpo rígido em torno de eixo fixo

### Objetivos

- Aprender a definição de velocidade angular vetorial de rotação de um corpo rígido e entender o seu significado.
- Aprender a definição de momento de inércia de um sistema de partículas em torno de um eixo.
- Estabelecer as equações de movimento para um corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo.
- Saber expressar a energia cinética de um corpo rígido em movimento de rotação em torno de um eixo fixo em termos do momento de inércia desse corpo em relação a esse eixo e da velocidade angular de rotação.

### Introdução

Nesta aula, estudaremos, essencialmente, um tipo especial e importante de movimento de um corpo rígido: a sua rotação em torno de um eixo fixo. Temos uma idéia intuitiva desse movimento, tantos são os exemplos dele que observamos no dia-a-dia. Basta olhar para um liquidificador ligado para vermos sua hélice metálica, que é um exemplo de corpo rígido, girando em torno de um eixo vertical fixo. Também no motor ligado de um automóvel é possível ver corpos rígidos girando em torno de eixos fixos. As próprias rodas do automóvel (pelo menos as traseiras) são exemplos de corpos (razoavelmente) rígidos girando em torno de eixos fixos em relação ao automóvel, embora não sejam fixos em relação à estrada. Se você já viu um pneu de carro ser balanceado, certamente notou que ele é posto a girar em torno de um eixo fixo. Na verdade, quando o pneu está desbalanceado, o eixo de rotação tende a mudar de direção. Balanceia-se o pneu precisamente para que não haja necessidade de forças que impeçam a mudança de direção do eixo de rotação. Aliás, com esta aula você estará apto a entender o processo de balanceamento de pneus.

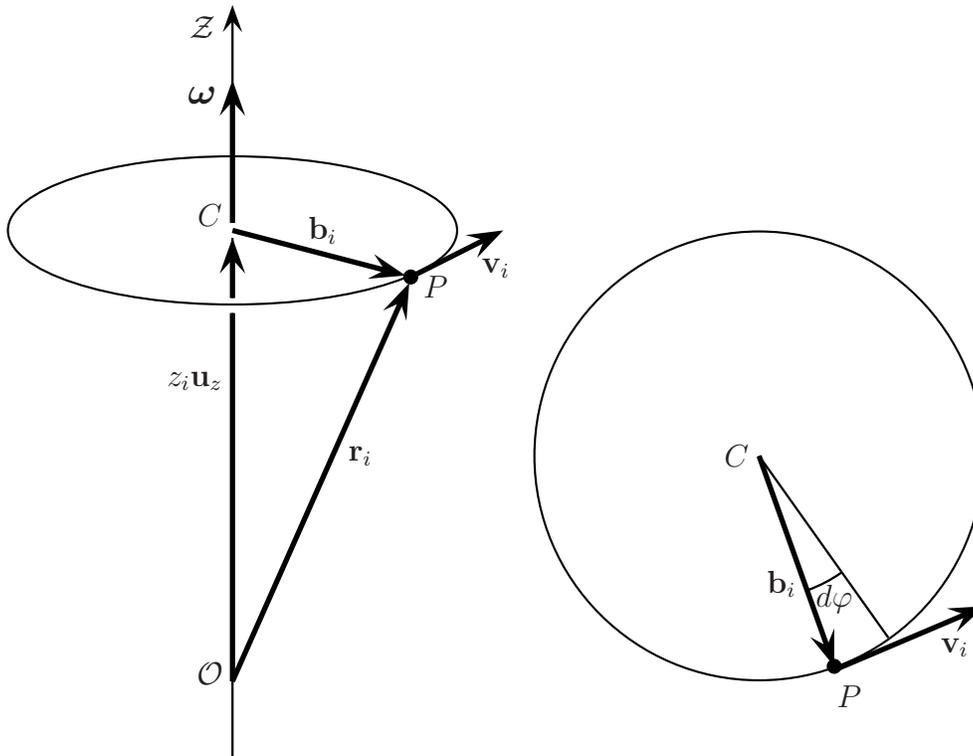
Primeiramente, estudaremos a cinemática do movimento de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo. Veremos, nesse caso, que há uma única fórmula fundamental. No entanto, essa fórmula também será útil no estudo do movimento de rotação de um corpo rígido em torno de eixos que não são fixos.

Aprendidos os conceitos e definições fundamentais envolvidos na cinemática do corpo rígido, passaremos ao estudo de sua dinâmica, mas nos restringiremos, inicialmente, a movimentos de rotação em torno de um eixo fixo. Nesses casos, estabeleceremos uma fórmula fundamental que nos permitirá determinar o movimento de rotação do corpo. Para estudar a dinâmica de um corpo rígido, usaremos, essencialmente, a teoria do momento angular de um sistema, desenvolvida na aula anterior. Nesta aula, você verá quão útil é o conceito de momento angular.

### **Cinemática de um corpo rígido em movimento de rotação em torno de eixo fixo**

Suponha que escolhamos dois pontos de um corpo rígido para permanecerem fixos. Conseqüentemente, devido à rigidez do corpo, ficam fixados todos os seus pontos que estão na reta determinada pelos dois pontos escolhidos. Essa reta fixa no espaço é chamada **eixo fixo de rotação do corpo rígido** e os movimentos do corpo rígido nessas condições são chamados **rotações do corpo em torno do eixo fixo**. A **Figura 34.1** mostra um eixo  $OZ$  que foi escolhido para coincidir com o eixo de rotação do corpo rígido. A figura também mostra uma das partículas do corpo rígido, digamos a  $i$ -ésima, com vetor-posição  $r_i$ . No instante retratado na figura, a partícula se encontra no ponto  $P$  e tem coordenada  $z_i$  ao longo do eixo  $OZ$ . Sobre o próprio eixo  $OZ$  há um ponto  $C$  bem determinado que tem a mesma coordenada  $z_i$  que a partícula. Durante a rotação do corpo rígido, a partícula em  $P$  não pode ter nenhum movimento na direção do eixo  $OZ$ , pois isso faria com que variassem as distâncias entre ela e as partículas do corpo rígido que estão imóveis no eixo de rotação  $OZ$ . Naturalmente, essas variações de distâncias seriam contrárias à rigidez do corpo. Se a partícula não tem movimento na direção do eixo  $OZ$ , seu movimento se processa em um plano perpendicular a esse eixo, isto é, no plano perpendicular ao eixo de rotação e que passa pela posição instantânea  $P$  da partícula. Naturalmente, esse plano passa também pelo ponto  $C$  fixo no eixo e com a mesma coordenada  $z_i$  da partícula. A rigidez do corpo também impede que varie a distância entre o ponto  $C$  e a partícula. Portanto, em qualquer movimento que a partícula execute a distância entre ela e o ponto  $C$  deve permanecer constante. Isso faz com que ela descreva, necessariamente, uma trajetória circular, centrada em  $C$ , e no plano perpendicular ao eixo de rotação. Portanto, podemos afirmar que

*em um corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo, qualquer partícula se move em uma trajetória circular perpendicular ao eixo e nele centrada.*



**Figura 34.1:** A  $i$ -ésima partícula do corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo  $\mathcal{OZ}$ . Para não sobrecarregar a figura, o corpo rígido não foi desenhado, apenas a sua  $i$ -ésima partícula. A trajetória dessa partícula é circular, perpendicular ao eixo de rotação (eixo  $\mathcal{OZ}$ , no caso) e com centro no seu ponto  $C$ .

O vetor-posição  $\mathbf{r}_i$  da partícula pode ser escrito como a soma do vetor  $z_i\mathbf{u}_z$ , que vai de  $\mathcal{O}$  a  $C$ , com o vetor  $\mathbf{b}_i$ , que vai de  $C$  a  $P$ :

$$\mathbf{r}_i = z_i\mathbf{u}_z + \mathbf{b}_i . \quad (34.1)$$

Obviamente,  $z_i\mathbf{u}_z$  é paralelo ao eixo de rotação e  $\mathbf{b}_i$ , perpendicular.

A velocidade  $\mathbf{v}_i$ , sendo tangente à trajetória, está no plano do movimento e, portanto, é perpendicular ao eixo de rotação, além disso, ela é perpendicular ao raio  $CP$  da trajetória circular. Podemos, pois, dizer que  $\mathbf{v}_i$  é perpendicular ao unitário  $\mathbf{u}_z$  do eixo e ao vetor  $\mathbf{b}_i$ , que fica ao longo do raio  $CP$ :

$$\mathbf{v}_i \perp \mathbf{u}_z \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_i \perp \mathbf{b}_i . \quad (34.2)$$

Dissemos que o eixo  $\mathcal{OZ}$  foi escolhido ao longo do eixo fixo de rotação. Com isso, a direção de  $\mathcal{OZ}$  está fixada. O sentido positivo desse eixo será usado para definir o que chamamos sentido positivo ou negativo de rotação em torno do eixo. Se olharmos para o plano de rotação, com o eixo  $\mathcal{OZ}$  apontando do plano para nossos olhos, podemos ver uma partícula em um movimento de rotação em

sentido anti-horário ou horário. Se ela estiver com sentido anti-horário, diremos que o sentido de sua rotação em torno do eixo  $\mathcal{OZ}$  é positivo; se ela estiver com sentido horário, diremos que o sentido de rotação em torno do eixo  $\mathcal{OZ}$  é negativo. Usamos essa convenção também para definir o sinal do ângulo e do arco varridos durante a rotação. Por definição, se o sentido de rotação for positivo, o ângulo e o arco varridos pela partícula serão positivos e, se o sentido da rotação for negativo, o ângulo e o arco varridos pela partícula serão negativos. Na **Figura 34.1**, por exemplo, o sentido de rotação da partícula em torno do eixo  $\mathcal{OZ}$  é positivo no instante considerado. Com isso, em um intervalo de tempo infinitesimal em torno desse instante, a partícula varre um arco positivo  $ds$  e um ângulo positivo  $d\varphi$ ; naturalmente, o arco é igual ao ângulo vezes o raio do círculo. Imagine, agora, que o sentido da velocidade  $\mathbf{v}_i$  tenha sido invertido na **Figura 34.1**. Você terá a partícula com uma rotação de sentido negativo em torno de  $\mathcal{OZ}$ . Portanto, os ângulos e os arcos varridos serão negativos.

Naturalmente, uma partícula com uma rotação em um sentido pode diminuir a sua velocidade até parar e recomeçar a sua rotação em sentido oposto. Obviamente, todas as outras partículas do corpo rígido acompanharão, igualmente, essa mudança de sentido de rotação. Imagine, por exemplo, o movimento das pás de um ventilador de teto que inicialmente estava ligado como ventilador e, após ser desligado até parar, é religado mas como exaustor, girando no sentido oposto. Nesse caso, antes de parar, o sentido da rotação das pás do ventilador tinha um sinal e, depois que o ventilador passou a funcionar como exaustor, o sentido de rotação de suas pás trocou de sinal.

O módulo  $|\mathbf{v}_i|$  da velocidade de rotação é a razão entre o módulo  $|ds|$  do arco varrido em um intervalo de tempo infinitesimal e a duração  $dt$  desse intervalo:  $|\mathbf{v}_i| = |ds|/dt$ . Mas o módulo do arco infinitesimal é o módulo do ângulo infinitesimal  $|d\varphi|$ , percorrido no intervalo de tempo infinitesimal, vezes o raio  $|\mathbf{b}_i|$  do círculo, isto é,  $|ds| = |d\varphi| |\mathbf{b}_i|$ ; logo, o módulo da velocidade é dado por  $|\mathbf{v}_i| = (|d\varphi| |\mathbf{b}_i|)/dt$ , isto é,

$$|\mathbf{v}_i| = \frac{|d\varphi| |\mathbf{b}_i|}{dt} = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| |\mathbf{b}_i|. \quad (34.3)$$

Escrevemos, então,

$$|\mathbf{v}_i| = |\omega_z| |\mathbf{b}_i|, \quad (34.4)$$

onde

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} \quad (34.5)$$

é a velocidade angular de rotação da  $i$ -ésima partícula do corpo em torno do eixo  $\mathcal{OZ}$ . Devido à rigidez do corpo, todas as suas partículas têm essa mesma veloci-

dade angular. Por esse motivo, também dizemos que  $\omega_z$  é a **velocidade angular de rotação do corpo rígido** em torno do eixo de rotação  $\mathcal{OZ}$ . Note que, no caso em que o sentido da rotação for positivo, tanto o ângulo varrido  $d\varphi$  quanto a velocidade de rotação  $\omega_z$  serão positivos; analogamente, se o sentido de rotação for negativo, tanto o ângulo varrido  $d\varphi$  quanto a velocidade de rotação  $\omega_z$  serão negativos.

Consideremos, agora, o vetor  $\boldsymbol{\omega}$  dado pela velocidade angular de rotação em torno de  $\mathcal{OZ}$  multiplicada pelo vetor unitário desse eixo, ou seja,

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{u}_z . \quad (34.6)$$

Portanto,  $\boldsymbol{\omega}$  é um vetor com a direção do eixo de rotação. Note que no caso em que o sentido da rotação é positivo (como na **Figura 34.1**), a componente  $\omega_z$  é positiva e  $\boldsymbol{\omega}$  tem o mesmo sentido que  $\mathbf{u}_z$ ; se o sentido da rotação é negativo,  $\boldsymbol{\omega}$  tem sentido oposto ao de  $\mathbf{u}_z$ . Chamamos  $\boldsymbol{\omega}$  **velocidade angular vetorial de rotação** do corpo rígido. É comum designar por velocidade angular o vetor  $\boldsymbol{\omega}$ , seu módulo  $\omega$ , e até mesmo a taxa de variação do ângulo varrido  $\omega_z$ , que pode ser positiva ou negativa. Essa nomenclatura “desleixada” não causa confusão, porque se sabe, pelo contexto, qual grandeza está sendo chamada velocidade angular.

De acordo com a definição de velocidade angular vetorial (34.6), temos  $|\boldsymbol{\omega}| = |\omega_z \mathbf{u}_z| = |\omega_z| |\mathbf{u}_z| = |\omega_z|$ , isto é,  $|\boldsymbol{\omega}| = |\omega_z|$ . Essa igualdade pode ser usada em

$$|\mathbf{v}_i| = |\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{b}_i| . \quad (34.7)$$

Dado que o ângulo entre  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{b}_i$  é  $\pi/2$ , temos  $|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_i| = |\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{b}_i|$ , de modo que a equação (34.7) pode ser escrita como

$$|\mathbf{v}_i| = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_i| , \quad (34.8)$$

isto é, o módulo do vetor  $\mathbf{v}_i$  é igual ao módulo do vetor  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_i$ . Além disso, de acordo com (34.2),  $\mathbf{v}_i$  é perpendicular a  $\mathbf{u}_z$  e a  $\mathbf{b}_i$ , mas a partir da definição (34.6), vemos que  $\boldsymbol{\omega}$  tem a mesma direção de  $\mathbf{u}_z$ . Podemos, pois, dizer que  $\mathbf{v}_i$  é perpendicular a  $\boldsymbol{\omega}$  e a  $\mathbf{b}_i$ , ou seja,  $\mathbf{v}_i$  tem a direção do vetor  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_i$ . Finalmente, você pode verificar que  $\mathbf{v}_i$  tem o sentido do vetor  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_i$ , quer o sentido de rotação seja positivo (como na **Figura 34.1**), quer seja negativo. Em suma,  $\mathbf{v}_i$  tem o mesmo módulo, direção e sentido que o vetor  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_i$  e, portanto, podemos escrever

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_i . \quad (34.9)$$

O vetor  $\mathbf{b}_i$ , usado na decomposição (34.1) e ilustrado na **Figura 34.1**, é a chamada projeção vetorial de  $\mathbf{r}_i$  no plano perpendicular a  $\boldsymbol{\omega}$ , conforme estudamos

na Aula 29. Você deve se lembrar de que nessa aula demonstramos que essa projeção vetorial goza da propriedade  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_i$  (se você não se lembra, será fácil verificá-la na **Figura 34.1**). Usando essa propriedade em (34.8), obtemos

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i, \quad (34.10)$$

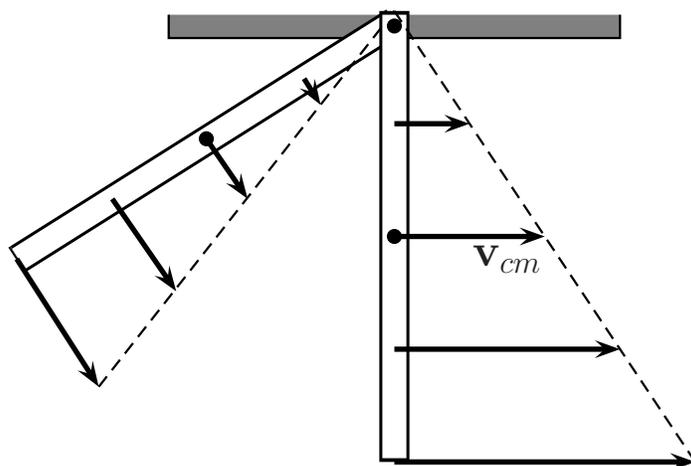
isto é,

*se um corpo rígido está em rotação em torno de um eixo fixo, a velocidade de cada uma de suas partículas é igual ao produto vetorial da velocidade angular do corpo rígido pelo vetor-posição da partícula relativo a uma origem no eixo de rotação.*

Pode-se chamar essa relação **equação fundamental da cinemática do corpo rígido** em rotação em torno de um eixo fixo. Você pode fazer agora um exercício muito simples e instrutivo com a equação (34.10). Sem se preocupar com a sua demonstração, simplesmente determine a direção e o sentido do produto vetorial  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ , que está no membro direito de (34.10), e verifique que são a direção e o sentido de  $\mathbf{v}_i$ , tanto no caso ilustrado na **Figura 34.1**, quanto no caso em que o sentido da rotação é negativo.

### Exemplo 34.1

A fim de fixar o conteúdo da equação anterior, reconsideraremos uma situação descrita na Aula 31 na qual uma barra homogênea de comprimento  $\ell$  gira em torno de seu extremo superior, que está fixo, porém, articulado e de tal modo que seu movimento ocorre sempre no mesmo plano vertical. A barra parte do repouso de uma configuração horizontal e, à medida que seu centro de massa vai descendo, sua energia potencial gravitacional decresce, mas sua energia cinética vai aumentando de tal modo que a sua energia mecânica se mantém constante durante seu movimento (estamos desprezando a resistência do ar e possíveis atritos no extremo superior da barra, em sua articulação). A **Figura 34.2** mostra a barra num instante genérico  $t_1$ , no qual ela faz um ângulo com a vertical menor do que  $\pi/2$  radianos e no instante  $t_2$ , no qual ela está na vertical.



**Figura 34.2:** Barra em movimento de rotação em torno de um eixo fixo que passa por um de seus extremos e é perpendicular ao plano do papel. Os módulos das velocidades de seus pontos são proporcionais às respectivas distâncias desses pontos ao eixo de rotação.

Devido à rigidez da barra, todos os seus pontos mantêm constantes suas respectivas distâncias a seu extremo superior. Além disso, como esse ponto está fixo e a barra se movimenta sempre no mesmo plano vertical, podemos afirmar que ela gira em torno de um eixo fixo de rotação que passa por seu extremo superior e é perpendicular ao plano do movimento, no caso da figura, ao plano do papel.

Nos instantes considerados, as velocidades angulares vetoriais de rotação,  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , apontam para fora do papel, pois, tanto em  $t_1$  quanto em  $t_2$ , o polegar apontará para fora do papel se colocarmos os outros dedos de nossa mão direita no sentido do movimento. Como as energias cinéticas da barra nesses instantes são diferentes, os módulos de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  também são distintos, sendo  $|\omega_2| > |\omega_1|$ . Vejamos como são as velocidades dos pontos da barra nesses instantes.

Note, inicialmente, que em qualquer instante do movimento da barra, a velocidade angular vetorial de rotação é perpendicular ao vetor-posição de qualquer um de seus pontos. Além disso, como a velocidade de um ponto qualquer da barra é dada por  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , onde  $\mathbf{r}$  é o vetor-posição desse ponto relativo a uma origem no eixo de rotação, concluímos que  $\mathbf{v}$  está no plano do papel e perpendicular à barra. O sentido de  $\mathbf{v}$  é dado pela regra da mão direita. Na **Figura 34.2** estão marcadas várias setas representando as velocidades de vários pontos da barra. Como seus módulos são dados por  $|\mathbf{v}| = |\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{r}|$ , os tamanhos das setas desenhadas são proporcionais às distâncias das mesmas ao eixo fixo de rotação. Assim, num dado instante, a velocidade do centro de massa da barra é sempre igual à metade da ve-

locidade de seu extremo livre (verifique agora mesmo essa afirmativa analisando uma vez mais a **Figura 34.2**).

## Dinâmica da rotação de um corpo rígido em torno de eixo fixo

Um de nossos objetivos, nesta seção, é estabelecer a equação diferencial que rege o movimento de rotação de um corpo em torno de um eixo fixo. A equação que utilizaremos já foi estabelecida na aula anterior: trata-se da equação  $d\mathbf{L}_Q/dt = \boldsymbol{\tau}_Q^{ex}$ , onde  $Q$  é um ponto fixo. Basta, apenas, escolher o ponto  $Q$  no eixo fixo de rotação e adaptá-la ao caso em que o sistema de partículas é um corpo rígido. No entanto, como veremos, este não será o nosso único objetivo aqui. Aproveitaremos esta seção para demonstrar alguns resultados convenientes a respeito do momento angular de um corpo rígido e do torque externo total sobre um corpo rígido. Além disso, vamos apresentar o importantíssimo conceito de momento de inércia de um sistema em relação a um eixo.

Suponhamos, então, que o ponto  $Q$  seja escolhido no eixo de rotação. Decompomos, agora, tanto o momento angular do corpo rígido quanto o torque externo total sobre ele em suas componentes vetoriais, uma paralela e outra perpendicular ao eixo fixo de rotação, ou seja,

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\parallel} + \mathbf{L}_{\perp} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\tau}^{ex} = \boldsymbol{\tau}_{\parallel}^{ex} + \boldsymbol{\tau}_{\perp}^{ex}. \quad (34.11)$$

Substituindo esses resultados na equação  $d\mathbf{L}_Q/dt = \boldsymbol{\tau}_Q^{ex}$ , obtemos a expressão

$$\frac{d\mathbf{L}_{\parallel}}{dt} + \frac{d\mathbf{L}_{\perp}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{\parallel}^{ex} + \boldsymbol{\tau}_{\perp}^{ex}, \quad (34.12)$$

na qual omitimos o símbolo do ponto base  $Q$  para não sobrecarregar a notação. Está subentendido que tanto o momento angular do corpo rígido quanto o torque externo total sobre ele são tomados em relação a um ponto fixo do eixo de rotação. O vetor  $\mathbf{L}_{\parallel}$  tem a direção do eixo de rotação em qualquer instante. Isso significa que suas variações e, portanto, sua derivada  $d\mathbf{L}_{\parallel}/dt$ , têm a direção desse eixo. Analogamente,  $\mathbf{L}_{\perp}$  está sempre no plano perpendicular ao eixo de rotação, suas variações e sua derivada também estarão nesse plano, de modo que a derivada  $d\mathbf{L}_{\perp}/dt$  é perpendicular ao eixo de rotação. Com isso, concluímos que a equação (34.12) é verdadeira se, e somente se,

$$\frac{d\mathbf{L}_{\parallel}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{\parallel}^{ex} \quad (34.13)$$

e

$$\frac{d\mathbf{L}_{\perp}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{\perp}^{ex}, \quad (34.14)$$

ou seja, se um corpo rígido está em rotação em torno de um eixo fixo,

*a taxa instantânea de variação temporal da componente vetorial de seu momento angular paralela ao eixo é igual à componente vetorial paralela ao eixo do torque externo total sobre o corpo, sendo momento angular e torque relativos à mesma origem fixa no eixo*

e

*a taxa instantânea de variação temporal da componente vetorial de seu momento angular perpendicular ao eixo é igual à componente vetorial perpendicular ao eixo do torque externo total sobre o corpo, sendo momento angular e torque relativos à mesma origem fixa no eixo*

As equações (34.13) e (34.14) são as fundamentais na dinâmica do corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo.

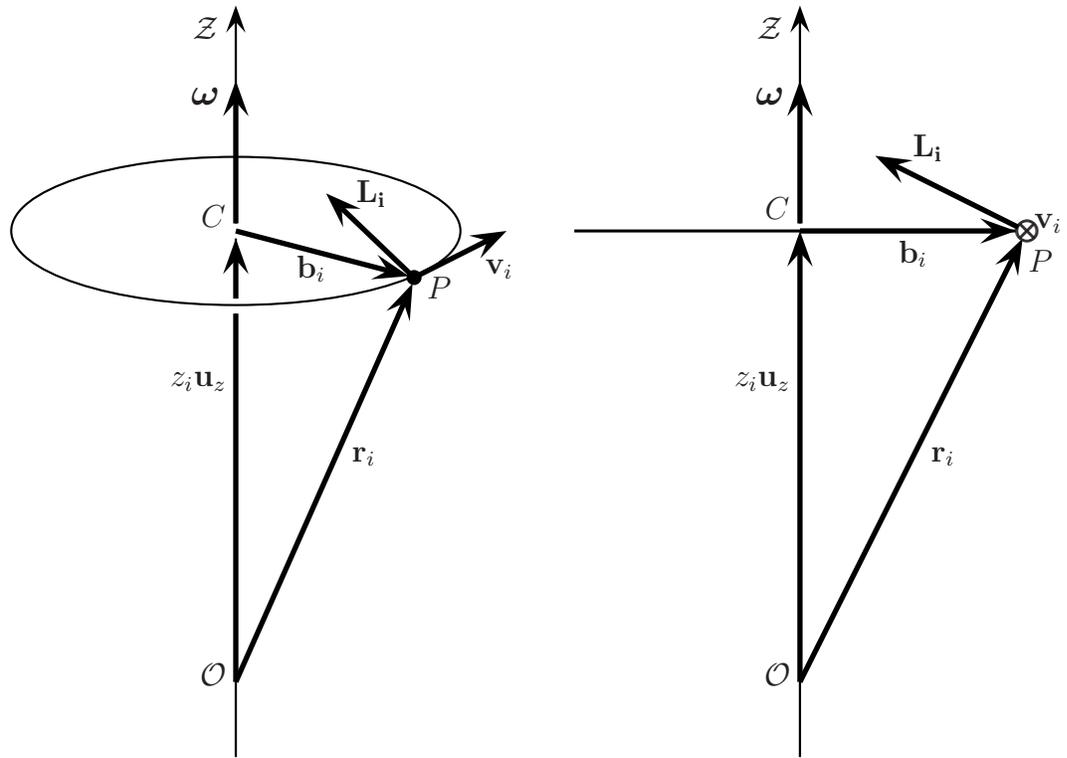
A equação (34.14), que envolve as grandezas perpendiculares ao eixo de rotação, é complicada e aplicada apenas em algumas situações muito simples. Ela serve, em geral, para determinar os torques externos que se fazem necessários para manter o eixo de rotação fixo. Normalmente o eixo é adaptado em mancais que exercem esses torques.

A equação (34.13), que envolve as grandezas paralelas ao eixo de rotação, permite determinar o movimento do corpo rígido, quando se conhecem os torques externos paralelos ao eixo de rotação e as condições iniciais do corpo. Essa é a equação na qual estaremos normalmente interessados.

Por motivos que ficarão claros mais adiante, a maior parte das aplicações dessas equações serão feitas apenas a partir da próxima aula. A seguir, obteremos expressões convenientes para as componentes  $L_{||}$  e  $L_{\perp}$  e, a partir da expressão de  $L_{||}$ , definiremos momento de inércia de um sistema de partículas em relação a um eixo.

### **As componentes vetoriais $L_{||}$ e $L_{\perp}$ e momento de inércia de um sistema de partículas em relação a um eixo**

Consideremos o momento angular  $L_i$  da  $i$ -ésima partícula do corpo rígido relativo à origem que, por hipótese, está fixa no eixo de rotação. Para calcular esse momento angular, vamos nos referir à situação descrita na **Figura 34.1**, com a partícula em rotação de sentido positivo em torno do eixo  $\mathcal{OZ}$ . A situação está retratada, novamente, na **Figura 34.3**, na qual também aparece o momento angular  $L_i = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$ .



**Figura 34.3:** O vetor momento angular  $\mathbf{L}_i$  é perpendicular a  $\mathbf{r}_i$  e a  $\mathbf{v}_i$ . Na figura à esquerda, os vetores aparecem em perspectiva e, na figura à direita, como apareceriam para um observador mirando perpendicularmente ao plano determinado pelos pontos  $O$ ,  $C$  e  $P$ . Na figura à direita, o vetor  $\mathbf{v}_i$  é perpendicular à página e aponta para dentro dela.

Para calcular o momento angular da  $i$ -ésima partícula, usaremos a decomposição do vetor posição feita em (34.1),  $\mathbf{r}_i = z_i \mathbf{u}_z + \mathbf{b}_i$  na expressão  $\mathbf{L}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$ , para obter

$$\mathbf{L}_i = m_i z_i \mathbf{u}_z \times \mathbf{v}_i + m_i \mathbf{b}_i \times \mathbf{v}_i. \quad (34.15)$$

O produto vetorial  $\mathbf{u}_z \times \mathbf{v}_i$  tem a direção de  $\mathbf{b}_i$ , mas com sentido oposto, isto é, tem a direção e o sentido do vetor unitário  $-\mathbf{b}_i/|\mathbf{b}_i|$ . Além disso, temos para o seu módulo:  $|\mathbf{u}_z \times \mathbf{v}_i| = |\mathbf{u}_z||\mathbf{v}_i| \sin(\pi/2) = |\mathbf{v}_i|$ . Portanto, podemos escrever  $\mathbf{u}_z \times \mathbf{v}_i = |\mathbf{v}_i|(-\mathbf{b}_i/|\mathbf{b}_i|)$ . Mas, de acordo com (34.7),  $|\mathbf{v}_i| = |\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{b}_i|$ ; logo  $\mathbf{u}_z \times \mathbf{v}_i = -|\boldsymbol{\omega}| \mathbf{b}_i$ . Com esse resultado, temos para o primeiro termo no lado direito da equação (34.15)

$$m_i z_i \mathbf{u}_z \times \mathbf{v}_i = -m_i z_i |\boldsymbol{\omega}| \mathbf{b}_i. \quad (34.16)$$

Usando, novamente, o fato de que  $|\mathbf{v}_i| = |\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{b}_i|$ , é fácil mostrar que  $\mathbf{b}_i \times \mathbf{v}_i = |\mathbf{b}_i|^2 \boldsymbol{\omega}$ , de modo que o segundo termo no lado direito da equação

(34.15) pode ser escrito como

$$m_i \mathbf{b}_i \times \mathbf{v}_i = m_i z_i |\mathbf{b}_i|^2 \boldsymbol{\omega} . \quad (34.17)$$

Usando as equações (34.16) e (34.17), o momento angular da  $i$ -ésima partícula dado por (34.15), toma a forma

$$\mathbf{L}_i = m_i |\mathbf{b}_i|^2 \boldsymbol{\omega} - m_i |\boldsymbol{\omega}| z_i \mathbf{b}_i . \quad (34.18)$$

O vetor velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$  tem somente a componente  $\omega_z$ , pois é paralelo ao unitário  $\mathbf{u}_z$ . Portanto, essa componente é mais ou menos o módulo de  $\boldsymbol{\omega}$ , conforme esse vetor tenha o mesmo sentido que  $\mathbf{u}_z$  ou o sentido oposto. No caso em consideração,  $\boldsymbol{\omega}$  tem o mesmo sentido que esse unitário, de modo que  $\omega_z = |\boldsymbol{\omega}|$ . Desse modo, podemos escrever (34.18) como

$$\mathbf{L}_i = m_i b_i^2 \boldsymbol{\omega} - m_i \omega_z z_i \mathbf{b}_i , \quad (34.19)$$

onde também estamos adotando a notação mais simples, com a qual  $b_i$  representa o módulo  $|\mathbf{b}_i|$  do vetor  $\mathbf{b}_i$ . Você pode verificar que essa fórmula é verdadeira também no caso em que a velocidade angular tem direção oposta ao unitário  $\mathbf{u}_z$  (foi para ter essa validade geral que em (34.18) substituímos  $|\boldsymbol{\omega}|$  por  $\omega_z$ ).

Vemos, em (34.19), que o momento angular da  $i$ -ésima partícula do corpo rígido relativo à origem é a soma de duas componentes vetoriais perpendiculares entre si. Uma é a componente vetorial paralela à velocidade angular,  $m_i b_i^2 \boldsymbol{\omega}$ . A outra é a componente vetorial  $-m_i \omega_z z_i \mathbf{b}_i$ , paralela ao vetor  $\mathbf{b}_i$  e, portanto, na direção do raio  $CP$  da trajetória, em cada instante; essa componente vetorial é perpendicular à velocidade angular.

Uma vez que  $i$  é arbitrário na fórmula (34.19), essa equação é verdadeira para todas as  $N$  partículas do corpo rígido, isto é, para  $i = 1, 2, \dots, N$ . Então, podemos usá-la para fazer a soma dos momentos angulares de todas as partículas e obter o momento angular total do corpo rígido relativo à origem,  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \dots + \mathbf{L}_N$ . Temos, portanto,

$$\mathbf{L} = (m_1 b_1^2 \boldsymbol{\omega} - m_1 \omega_z z_1 \mathbf{b}_1) + (m_2 b_2^2 \boldsymbol{\omega} - m_2 \omega_z z_2 \mathbf{b}_2) + \dots + (m_N b_N^2 \boldsymbol{\omega} - m_N \omega_z z_N \mathbf{b}_N), \quad (34.20)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= (m_1 b_1^2 \boldsymbol{\omega} + m_2 b_2^2 \boldsymbol{\omega} + \dots + m_N b_N^2 \boldsymbol{\omega}) \\ &\quad - (m_1 \omega_z z_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \omega_z z_2 \mathbf{b}_2 + \dots + m_N \omega_z z_N \mathbf{b}_N) = \\ &= (m_1 b_1^2 + m_2 b_2^2 + \dots + m_N b_N^2) \boldsymbol{\omega} \\ &\quad - (m_1 z_1 \mathbf{b}_1 + m_2 z_2 \mathbf{b}_2 + \dots + m_N z_N \mathbf{b}_N) \omega_z . \end{aligned} \quad (34.21)$$

Nessa expressão, está claro que o momento angular do corpo rígido pode ser escrito como

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\parallel} + \mathbf{L}_{\perp} , \quad (34.22)$$

onde

$$\mathbf{L}_{\parallel} = (m_1 b_1^2 + m_2 b_2^2 + \dots + m_N b_N^2) \boldsymbol{\omega} \quad (34.23)$$

e

$$\mathbf{L}_{\perp} = -(m_1 z_1 \mathbf{b}_1 + m_2 z_2 \mathbf{b}_2 + \dots + m_N z_N \mathbf{b}_N) \omega_z . \quad (34.24)$$

Naturalmente,  $\mathbf{L}_{\parallel}$  é a componente vetorial do momento angular do corpo rígido paralela à velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{L}_{\perp}$  é a componente vetorial perpendicular a  $\boldsymbol{\omega}$ .

Dado um sistema de partículas e um eixo qualquer, definimos:

**o momento de inércia de um sistema de partículas relativo a um eixo** é a soma dos produtos das massas das partículas pelos quadrados de suas respectivas distâncias ao eixo.

Sejam  $m_1, m_2, \dots, m_N$  as massas das partículas e  $b_1, b_2, \dots, b_N$  suas respectivas distâncias ao eixo. Então, representando por  $I$  seu momento de inércia em relação ao eixo, temos

$$I = m_1 b_1^2 + m_2 b_2^2 + \dots + m_N b_N^2 . \quad (34.25)$$

Com isso, fica evidente que, em (34.23), o número que está multiplicado pela velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$  é o momento de inércia do corpo rígido em relação ao eixo de rotação desse corpo. Desse modo, podemos expressar a relação (34.23) como

$$\mathbf{L}_{\parallel} = I \boldsymbol{\omega} , \quad (34.26)$$

ou seja, deixando implícito que o momento angular é relativo a um ponto fixo no eixo,

*se um corpo rígido está em rotação em torno de um eixo fixo, a componente vetorial de seu momento angular paralela ao eixo é o produto de seu momento de inércia relativo ao eixo pela velocidade angular de rotação.*

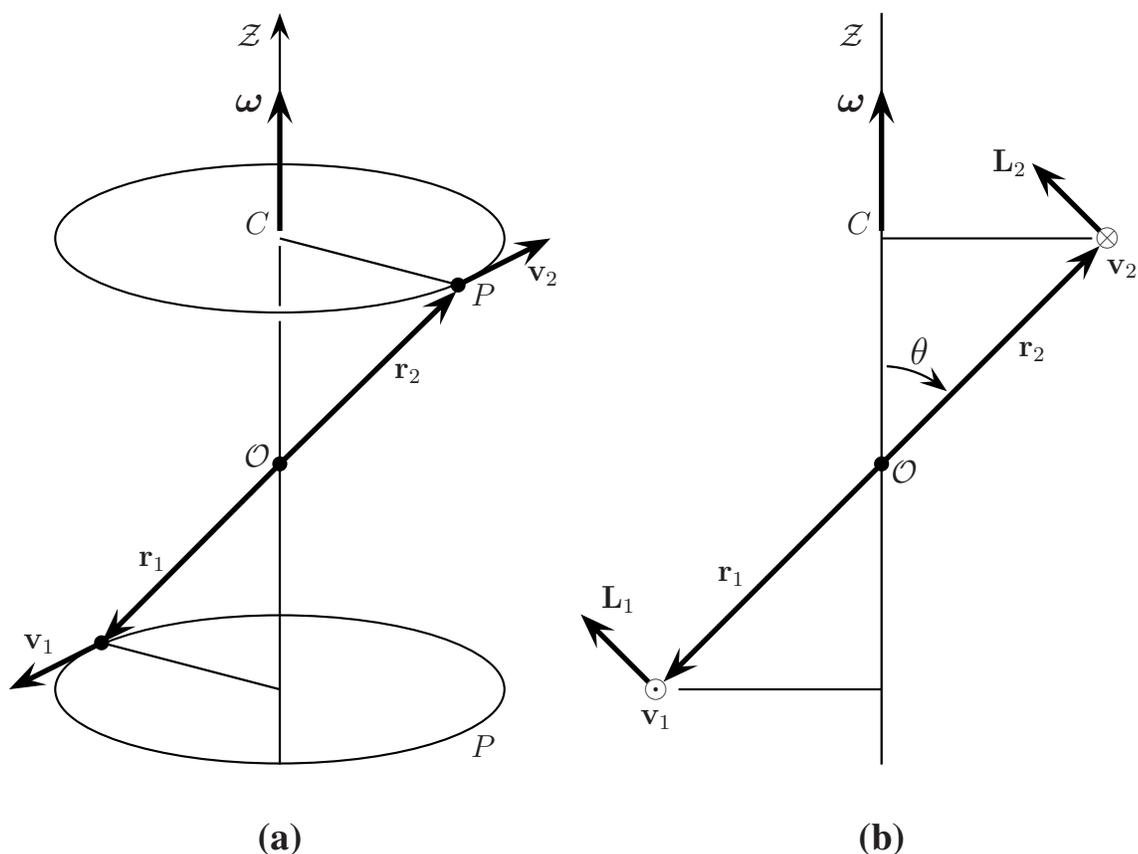
Note que o momento de inércia relativo ao eixo de rotação depende apenas das massas das partículas do corpo rígido e das distâncias entre elas e o eixo de rotação. Se considerarmos um outro eixo de rotação para o corpo rígido, o valor de  $I$  poderá ser diferente. Já a origem  $\mathcal{O}$ , que se escolhe no eixo, relativa à qual se

consideram as posições das partículas, não influem no valor de  $I$ . A rigidez do corpo garante também que as distâncias entre suas partículas e o eixo são constantes e, portanto, que o seu momento de inércia também é uma constante. Conseqüentemente, para calculá-lo, não é necessário considerar o corpo em rotação. Podemos considerar o corpo em repouso e um eixo fixo e calcular o momento de inércia do corpo relativo a esse eixo. É claro que o momento de inércia obtido será usado na relação (34.23), se esse eixo que consideramos no cálculo for, no caso, o eixo de rotação. Se quisermos explicitar a que eixo de rotação o momento de inércia é relativo, agregamos ao seu símbolo um subíndice para o eixo; por exemplo, denotamos por  $I_z$  o momento de inércia relativo ao eixo  $\mathcal{OZ}$ .

Se para a componente do momento angular na direção do eixo de rotação temos a expressão simples (34.26), para a componente perpendicular ao eixo só dispomos da expressão (34.24), que ainda não temos meio de simplificar. Na maioria das vezes, nosso interesse principal estará na componente paralela ao eixo de rotação. Após os próximos dois exemplos, veremos como expressar de forma conveniente as componentes vetoriais do torque externo total  $\boldsymbol{\tau}_{\parallel}^{ex}$  e  $\boldsymbol{\tau}_{\perp}^{ex}$ , ou melhor, que componentes das forças externas sobre as partículas do sistema são relevantes no cálculo de  $\boldsymbol{\tau}_{\parallel}^{ex}$  e que componentes são relevantes na determinação de  $\boldsymbol{\tau}_{\perp}^{ex}$ .

### Exemplo 34.2

Com este exemplo, pretendemos ilustrar a validade da equação (34.26). Para enfatizar a generalidade dessa equação, apresentaremos uma situação em que um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo com uma velocidade angular vetorial de rotação constante, mas de tal modo que o seu momento angular e o eixo fixo de rotação não têm a mesma direção. Consideremos um haltere formado por duas massas iguais,  $m_1 = m_2 = m$ , que estão ligadas por uma haste rígida de comprimento  $\ell$  e massa desprezível. O haltere gira em torno de um eixo fixo vertical que passa pelo seu ponto médio, escolhido como o eixo  $\mathcal{OZ}$ , com velocidade angular constante  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{u}_z$ ,  $\omega > 0$ , mas de tal forma que ele faz com esse eixo um ângulo  $\alpha$ , como ilustra a **Figura 34.4**.



**Figura 34.4:** Haltere girando em torno de um eixo fixo vertical com o qual faz um ângulo  $\theta$ .

Calculemos, inicialmente, o lado direito de (34.26). Utilizando a definição de momento de inércia em relação a um eixo, temos

$$I_{Oz}\omega = \left( \sum_{i=1,2} m_i b_i^2 \right) \omega = 2m \left( \frac{\ell}{2} \text{sen}\alpha \right)^2 \omega = \frac{1}{2} m \ell^2 \text{sen}^2 \alpha \omega. \quad (34.27)$$

A fim de calcular  $L_z \mathbf{u}_z$ , é necessário, antes, calcular o momento angular total das duas massas que formam o haltere, isto é,  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ . Observando a **Figura 34.4**, não é difícil perceber que  $\mathbf{L}_1 = m\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 = m\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{L}_2$ , de modo que  $\mathbf{L} = 2m\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1$ . Para facilitar a visualização, desenhamos na **Figura 34.4** o sistema num instante em que o haltere está no plano do papel. Nesse caso, a velocidade da massa no extremo superior do haltere,  $\mathbf{v}_2$ , aponta perpendicularmente ao plano do papel e para dentro. Essa velocidade está indicada na figura por uma cruz, simbolizando a parte traseira de uma flecha. Já a velocidade da massa no extremo inferior do haltere,  $\mathbf{v}_1$ , aponta para fora do papel e está indicada por um ponto, simbolizando a parte dianteira de uma flecha. Com isso,  $\mathbf{L}_1$  está no plano do papel, é perpendicular à direção do haltere e tem módulo

$$|\mathbf{L}_1| = m|\mathbf{r}_1| |\mathbf{v}_1| \text{sen}(\pi/2) = m \frac{\ell}{2} |\mathbf{v}_1|.$$

Lembrando que  $\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1$ , temos

$$|\mathbf{v}_1| = \omega |\mathbf{r}_1| \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \omega \frac{\ell}{2} \operatorname{sen} \alpha .$$

Os últimos resultados nos permitem escrever para o módulo do vetor momento angular total

$$|\mathbf{L}| = |2\mathbf{L}_1| = 2 m \left( \frac{\ell}{2} \right)^2 \operatorname{sen} \alpha \omega . \quad (34.28)$$

Portanto, a componente do momento angular total ao longo do eixo de rotação, isto é,  $L_z$ , é dada por

$$L_z = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{L} = |\mathbf{L}| \cos(\pi/2 - \alpha) = 2m \left( \frac{\ell}{2} \operatorname{sen} \alpha \right)^2 \omega .$$

Comparando a última equação com o resultado obtido em (34.27), obtemos

$$L_z \mathbf{u}_z = I_z \boldsymbol{\omega} .$$

resultado que queríamos verificar.

É pertinente fazer aqui um pequeno comentário a respeito de  $\mathbf{L}$  ser ou não paralelo a  $\boldsymbol{\omega}$ . Por um ponto  $P$  qualquer de um corpo rígido, existem eixos com direções fixas tais que se o corpo for colocado em rotação em torno de um deles com  $\boldsymbol{\omega}$  constante, o seu momento angular também será constante e dado por  $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ , onde  $I$  é o seu momento de inércia relativo ao eixo em consideração. Nesse caso, não há a necessidade de torque externo para que esse movimento de rotação seja mantido. Tais eixos são chamados **eixos principais de inércia** do corpo rígido relativos ao ponto  $P$ . Há, também, eixos fixos tais que se o corpo girar em torno deles com  $\boldsymbol{\omega}$  constante o seu momento angular  $\mathbf{L}$  não será paralelo a  $\boldsymbol{\omega}$  e, tampouco, constante, como ocorreu no exemplo do haltere que acabamos de discutir. Nesse caso, haverá necessariamente um torque externo para que a rotação em torno do eixo fixo com  $\boldsymbol{\omega}$  constante seja mantida. Pode-se mostrar que há pelo menos três eixos principais de inércia para cada ponto de um corpo rígido qualquer. Quando o corpo rígido possuir alguma simetria, poderá haver muito mais do que três eixos principais de inércia (por exemplo, qualquer eixo que passe pelo centro de uma esfera homogênea é um eixo principal de inércia). A determinação de eixos principais de inércia é muito importante no balanceamento de sistemas que giram com altas velocidades de rotação, como rodas de um automóvel, peças de centrifugadoras, etc.

Uma roda de automóvel gira em torno de seu eixo central. Desejamos que esse eixo central seja um eixo principal de inércia, para que não haja necessidade de torques que mantenham o eixo de rotação com direção horizontal fixa. Quando

o eixo de rotação central não é um eixo principal, a estrutura do automóvel e o chão não conseguem exercer os torques exatos que se fazem necessários para manter o eixo de rotação com direção fixa. O resultado é que essa direção de rotação fica oscilando e provoca a trepidação do carro, tanto maior quanto maior for a velocidade de rotação da roda. O eixo da roda é um eixo principal se a roda for satisfatoriamente simétrica, isto é, se sua massa estiver distribuída de maneira praticamente simétrica em torno de seu eixo central de rotação. Na roda desbalanceada a distribuição não é simétrica; há mais massa a uma certa distância de um lado do eixo do que à mesma distância do outro. O balanceamento da roda consiste, essencialmente, em acrescentar pequenas massas à roda, em locais convenientemente escolhidos, para recuperar a simetria na distribuição de massas. Falando de modo preciso: para que seu eixo central de rotação volte a ser um eixo principal de inércia.

### Exemplo 34.3

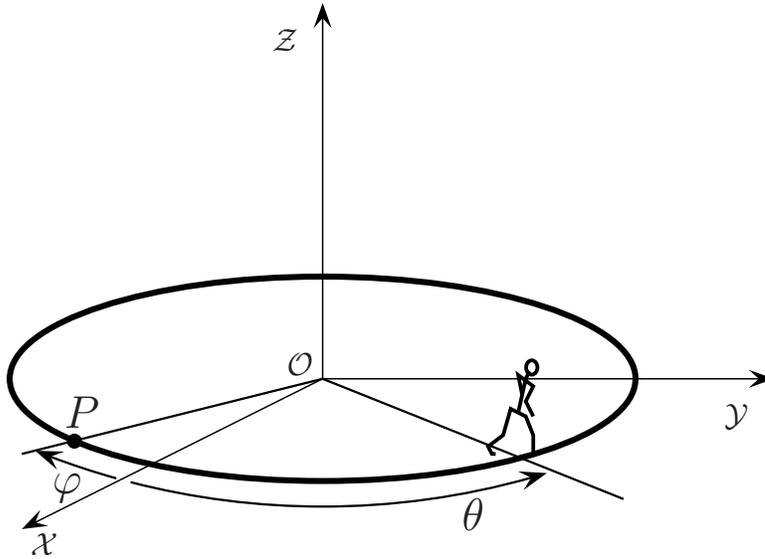
Este exemplo ilustra a lei de conservação do momento angular de um sistema. Consideremos um disco homogêneo de massa  $M$  e raio  $R$  que pode girar sem atrito em torno de um eixo fixo de rotação perpendicular a ele e que passa pelo seu centro de massa. Designemos esse eixo por  $\mathcal{OZ}$ . Uma pessoa de massa  $m$  e estatura pequena comparada com o raio do disco está, inicialmente, em repouso sobre o disco e na sua periferia, ou seja, a uma distância  $R$  do eixo de rotação,  $\mathcal{OZ}$ . Por conveniência, mas sem perda de generalidade, escolheremos os eixos  $\mathcal{OXY}$  de modo que, inicialmente, a pessoa esteja sobre o eixo  $\mathcal{OX}$  e o disco no plano  $\mathcal{OXY}$ . Em outras palavras, no instante inicial  $t_i$  as coordenadas cartesianas da pessoa são  $(R, 0, 0)$ . Desejamos determinar de quanto gira o disco depois que a pessoa, caminhando sempre pela periferia do disco e no mesmo sentido, retornar ao ponto do disco onde iniciou a caminhada.

Para facilitar o nosso raciocínio, suponha que exista uma marca no disco que vai do seu centro até o ponto  $P$  situado na periferia que, no instante inicial, estava exatamente sob os pés da pessoa. Desse modo, queremos saber de quanto o disco girou após a pessoa retornar ao ponto  $P$  do disco. A **Figura 34.5** mostra o sistema num instante genérico durante a caminhada da pessoa. Na figura,  $\theta$  é o ângulo entre o vetor-posição da pessoa e o eixo  $\mathcal{OX}$  e  $\varphi$  é o ângulo entre a marca feita no disco (semireta  $OP$ ) e esse mesmo eixo.

---

Num certo sentido, essa situação é análoga à de um sapo que caminha sobre uma plataforma que pode deslizar sem atrito sobre as águas paradas de um lago, exemplo esse discutido na Aula 30.

---



**Figura 34.5:** Pessoa caminhando pela periferia de um disco que pode girar sem atrito em torno de seu eixo.

Observe que o torque externo relativo à origem é nulo: por um lado, os torques do peso da pessoa e da reação normal sobre ela se cancelam; por outro lado, o torque do peso do disco e o da força exercida pelo eixo sobre ele são nulos, pois, tais forças atuam no centro de massa do disco, localizado na origem. Conseqüentemente,  $\mathbf{L}$  é constante e nulo, ou seja, tratando a pessoa como uma partícula, temos

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_D + \mathbf{L}_p = I_D \boldsymbol{\omega}_D + I_P \boldsymbol{\omega}_P = \mathbf{0}. \quad (34.29)$$

Veremos, na Aula 36, que o momento de inércia do disco relativo ao eixo  $OZ$  vale  $I_D = (1/2)MR^2$ . Já para a pessoa, temos  $I_P = mR^2$ . As respectivas velocidades angulares são dadas por

$$\boldsymbol{\omega}_D = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{u}_z \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\omega}_P = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_z \quad ;$$

Note que  $d\theta/dt > 0$ , enquanto  $d\varphi/dt < 0$ . Substituindo as expressões anteriores na equação (34.29), obtemos

$$\left( \frac{1}{2}MR^2 \frac{d\varphi}{dt} + mR^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{u}_z = \mathbf{0} \quad \implies \quad \frac{1}{2}MR^2 \frac{d\varphi}{dt} + mR^2 \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Integrando a equação anterior entre os instantes  $t_i$  e  $t_f$ , obtemos

$$\frac{1}{2}MR^2 \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\varphi}{dt} dt + mR^2 \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\theta}{dt} dt = 0 \quad \implies \quad \frac{1}{2}MR^2 \Delta\varphi + mR^2 \Delta\theta = 0, \quad (34.30)$$

onde  $\Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_i$  e  $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$ , sendo  $\theta_i$  o ângulo entre o vetor-posição da pessoa e o eixo  $Ox$  no instante  $t_i$ , etc.

Escolhendo  $t_f$  como o instante em que a pessoa retorna ao ponto  $P$ , temos a relação (lembre-se de que  $\Delta\varphi < 0$ )

$$\Delta\theta - \Delta\varphi = 2\pi .$$

Substituindo a equação anterior em (34.30), obtemos

$$\frac{1}{2}MR^2\Delta\varphi + mR^2(2\pi + \Delta\varphi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{2m + M}{2}\right)R^2\Delta\varphi = -mR^22\pi ,$$

ou seja, o disco girou de

$$\Delta\varphi = -\left(\frac{2m}{2m + M}\right)2\pi . \quad (34.31)$$

Para verificar se você compreendeu bem este exemplo, faça agora o problema proposto 7.

### Cálculo das componentes vetoriais $\boldsymbol{\tau}_{i\parallel}^{ex}$ e $\boldsymbol{\tau}_{i\perp}^{ex}$

Agora, vamos voltar a nossa atenção para os torques externos relativos ao ponto fixo  $\mathcal{O}$  no eixo de rotação. Queremos separar o torque em uma componente vetorial na direção do eixo de rotação e outra perpendicular a esse eixo. A força externa  $\mathbf{F}_i^{ex}$  sobre a  $i$ -ésima partícula pode ser escrita como a soma de uma componente paralela ao eixo de rotação e uma componente perpendicular a esse eixo, que representaremos por  $\mathbf{F}_{i\parallel}^{ex}$  e  $\mathbf{F}_{i\perp}^{ex}$ , respectivamente. Escrevemos, então,

$$\mathbf{F}_i^{ex} = \mathbf{F}_{i\parallel}^{ex} + \mathbf{F}_{i\perp}^{ex} . \quad (34.32)$$

De acordo com (34.1), também o vetor-posição da partícula pode ser decomposto desse modo:  $\mathbf{r}_i = z_i\mathbf{u}_z + \mathbf{b}_i$ . Com isso, podemos escrever para o torque externo sobre a  $i$ -ésima partícula

$$\boldsymbol{\tau}_i^{ex} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ex} = (z_i\mathbf{u}_z + \mathbf{b}_i) \times \mathbf{F}_i^{ex} = z_i\mathbf{u}_z \times \mathbf{F}_i^{ex} + \mathbf{b}_i \times \mathbf{F}_i^{ex} . \quad (34.33)$$

A componente  $z_i\mathbf{u}_z \times \mathbf{F}_i^{ex}$  é perpendicular ao eixo de rotação, pois é perpendicular ao vetor unitário  $\mathbf{u}_z$ . Quanto à outra componente, em virtude da decomposição (34.32), temos

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i \times \mathbf{F}_i^{ex} &= \mathbf{b}_i \times (\mathbf{F}_{i\parallel}^{ex} + \mathbf{F}_{i\perp}^{ex}) \\ &= \mathbf{b}_i \times \mathbf{F}_{i\parallel}^{ex} + \mathbf{b}_i \times \mathbf{F}_{i\perp}^{ex} . \end{aligned} \quad (34.34)$$

Nessa expressão vemos, por um lado, que  $\mathbf{b}_i \times \mathbf{F}_{i\parallel}^{ex}$  é perpendicular ao eixo de rotação, pois ele é um produto vetorial do vetor  $\mathbf{b}_i$  pelo vetor  $\mathbf{F}_{i\parallel}^{ex}$ , que é paralelo

a esse eixo. Por outro lado, o vetor  $\mathbf{b}_i \times \mathbf{F}_{i\perp}^{ex}$  tem a direção do eixo de rotação, pois é o produto vetorial de dois vetores no plano perpendicular a esse eixo. Desse modo, substituindo a equação anterior em (34.33), temos

$$\boldsymbol{\tau}_i^{ex} = z_i \mathbf{u}_z \times \mathbf{F}_i^{ex} + \mathbf{b}_i \times \mathbf{F}_{i\parallel}^{ex} + \mathbf{b}_i \times \mathbf{F}_{i\perp}^{ex}, \quad (34.35)$$

isto é,

$$\boldsymbol{\tau}_i^{ex} = \boldsymbol{\tau}_{i\parallel}^{ex} + \boldsymbol{\tau}_{i\perp}^{ex}, \quad (34.36)$$

onde definimos

$$\boldsymbol{\tau}_{i\parallel}^{ex} = \mathbf{b}_i \times \mathbf{F}_{i\parallel}^{ex} \quad (34.37)$$

e

$$\boldsymbol{\tau}_{i\perp}^{ex} = z_i \mathbf{u}_z \times \mathbf{F}_i^{ex} + \mathbf{b}_i \times \mathbf{F}_{i\parallel}^{ex}. \quad (34.38)$$

Pela discussão anterior, fica claro que  $\boldsymbol{\tau}_{i\parallel}^{ex}$  é a componente vetorial do torque externo sobre a  $i$ -ésima partícula, que é paralela ao eixo de rotação, e  $\boldsymbol{\tau}_{i\perp}^{ex}$  é a componente vetorial desse torque que é perpendicular ao eixo de rotação.

Somando membro a membro as igualdades obtidas de (34.36) fazendo-se  $i = 1, 2, \dots, N$  vemos que o torque externo total sobre o sistema de partículas,  $\boldsymbol{\tau}^{ex} = \boldsymbol{\tau}_1^{ex} + \boldsymbol{\tau}_2^{ex} + \dots + \boldsymbol{\tau}_N^{ex}$ , pode ser escrito como

$$\boldsymbol{\tau}^{ex} = \boldsymbol{\tau}_{\parallel}^{ex} + \boldsymbol{\tau}_{\perp}^{ex}, \quad (34.39)$$

onde

$$\boldsymbol{\tau}_{\parallel}^{ex} = \boldsymbol{\tau}_{1\parallel}^{ex} + \boldsymbol{\tau}_{2\parallel}^{ex} + \dots + \boldsymbol{\tau}_{N\parallel}^{ex} \quad (34.40)$$

e

$$\boldsymbol{\tau}_{\perp}^{ex} = \boldsymbol{\tau}_{1\perp}^{ex} + \boldsymbol{\tau}_{2\perp}^{ex} + \dots + \boldsymbol{\tau}_{N\perp}^{ex}. \quad (34.41)$$

Naturalmente,  $\boldsymbol{\tau}_{\parallel}^{ex}$  é a componente vetorial paralela ao eixo de rotação do torque externo total sobre o corpo; analogamente,  $\boldsymbol{\tau}_{\perp}^{ex}$  é a componente vetorial desse torque perpendicular ao eixo de rotação. Para a componente paralela (34.40) temos, em virtude de (34.37),

$$\boldsymbol{\tau}_{\parallel}^{ex} = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{F}_{1\parallel}^{ex} + \mathbf{b}_2 \times \mathbf{F}_{2\parallel}^{ex} + \dots + \mathbf{b}_N \times \mathbf{F}_{N\parallel}^{ex} \quad (34.42)$$

Para a componente perpendicular (34.41) também podemos usar a equação (34.38), a fim de obtermos uma expressão explícita para  $\boldsymbol{\tau}_{\perp}^{ex}$ .

Voltemos a nossa atenção para a equação  $d\mathbf{L}_{\parallel}/dt = \boldsymbol{\tau}_{\parallel}^{ex}$ , pois é essencialmente essa equação que aplicaremos na maioria dos problemas que iremos resolver. Pela definição de momento de inércia relativo a um eixo, podemos escrever, no caso de um corpo rígido em movimento de rotação em torno de um eixo

fixo,  $\mathbf{L}_{\parallel} = I_{\parallel}\boldsymbol{\omega}$ , onde  $I_{\parallel}$  é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação e  $\boldsymbol{\omega}$  é a velocidade angular vetorial de rotação do corpo rígido. A partir dessas duas equações, obtemos

$$\frac{d}{dt}(I_{\parallel}\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\tau}_{\parallel}^{ex} \implies I_{\parallel}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{\parallel}^{ex}, \quad (34.43)$$

onde usamos o fato de que o momento de inércia em relação ao eixo fixo de rotação não muda, pois o sistema é um corpo rígido.

É bastante natural definir a taxa instantânea de variação temporal da velocidade angular vetorial  $\boldsymbol{\omega}$  como a **aceleração angular vetorial** do corpo rígido em torno do eixo fixo. Denotando essa aceleração por  $\boldsymbol{\alpha}$ , temos

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \quad (34.44)$$

Substituindo a última equação em (34.43), obtemos

$$\boldsymbol{\tau}_{\parallel}^{ex} = I_{\parallel}\boldsymbol{\alpha} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\tau}_{\parallel}^{ex}}{I_{\parallel}}. \quad (34.45)$$

Vale a pena comparar a última equação com aquela que descreve o movimento do centro de massa do corpo rígido, dada por

$$\mathbf{F}^{ex} = M\mathbf{a}_{cm} \quad \text{ou} \quad \mathbf{a}_{cm} = \frac{\mathbf{F}^{ex}}{M}. \quad (34.46)$$

Note a semelhança entre as duas últimas equações. No movimento de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo, o papel do momento de inércia em relação ao eixo é análogo ao papel que a massa do corpo desempenha no seu movimento de translação. Vale enfatizar que esse momento de inércia depende não apenas da massa do corpo mas de como essa massa está distribuída em torno do eixo de rotação.

A seguir, mostraremos como a energia cinética de um corpo rígido, em movimento de rotação em torno de um eixo fixo, pode ser escrita em termos de seu momento de inércia relativo a esse eixo e de sua velocidade angular de rotação. Suponhamos que o corpo rígido seja formado por  $N$  partículas. Desse modo, a sua energia cinética é dada por

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2.$$

Como o corpo rígido está girando em torno de um eixo fixo, e tomando a origem dos eixos cartesianos em algum ponto desse eixo, a velocidade da  $i$ -ésima

partícula do sistema pode ser escrita na forma  $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$ . Substituindo essa relação na expressão anterior, obtemos

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{r}'_i|^2 \text{sen}^2 \theta'_i |\boldsymbol{\omega}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N m_i b_i'^2 \right) \omega^2, \end{aligned} \quad (34.47)$$

onde  $b'_i = |\mathbf{r}'_i| \text{sen} \theta'_i$  é a distância da  $i$ -ésima partícula ao eixo fixo de rotação. Identificando, então, a expressão para o momento de inércia do sistema relativo ao eixo de rotação, obtemos

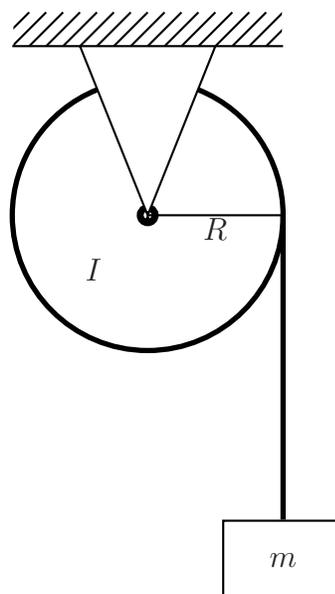
$$K = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2. \quad (34.48)$$

É comum chamar essa expressão **energia cinética de rotação** do corpo rígido. Na Aula 37 você verá uma generalização dessa fórmula para o caso em que o eixo de rotação não é fixo, mas mantém sua direção inalterada, como no caso do eixo central de rotação de uma roda de automóvel em movimento retilíneo.

Para fixar algumas idéias sobre movimento de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo, finalizaremos esta aula apresentando um exemplo simples sobre o assunto.

#### Exemplo 34.4

Um bloco de massa  $m$  está pendurado por um fio ideal que está enrolado numa polia fixa, mas que pode girar em torno de um eixo que passa pelo seu centro e é perpendicular ao plano da polia. À medida que o bloco desce, o fio vai se desenrolando e a roldana vai adquirindo uma velocidade de rotação cada vez maior, como sugere a **Figura 34.6**. Suponha que o fio não deslize sobre a periferia da polia, de modo que os módulos da velocidade do bloco e de um ponto da periferia da polia,  $\omega R$ , são iguais (lembre-se que o fio, por ser ideal, é inextensível). Supondo conhecido o momento de inércia da polia em relação ao eixo fixo de rotação,  $I$ , desejamos calcular o módulo da aceleração do bloco.



**Figura 34.6:** Bloco pendurado por um fio ideal que está enrolado em uma polia fixa. Esta, por sua vez, pode girar sem atrito em torno de um eixo que passa pelo seu centro e é perpendicular ao plano do papel.

O fato de o fio não deslizar sobre a polia também leva à seguinte relação entre o módulo da aceleração do bloco,  $a$ , e o módulo da aceleração angular da polia,  $\alpha$ :

$$a = \alpha R . \quad (34.49)$$

Utilizando a equação (34.45) para analisar o movimento de rotação da polia e a equação (34.45) para o movimento de translação do bloco, mas trabalhando com componentes em vez de vetores, temos

$$mg - T = ma \quad (34.50)$$

e

$$TR = I\alpha . \quad (34.51)$$

As equações (34.49), (34.50) e (34.51) formam um sistema de três equações com três incógnitas,  $T$ ,  $a$  e  $\alpha$ . Resolvendo o sistema, encontramos para o módulo da aceleração do bloco o valor

$$a = \left( \frac{m}{m + I/R^2} \right) g . \quad (34.52)$$

Note que  $a < g$ , pois à medida que o bloco desce, a sua energia potencial gravitacional se transforma não apenas em sua energia cinética mas, também, na energia

cinética de rotação da polia. É recomendável que você resolva, agora, os problemas propostos 8 e 9.

## Resumo

Um corpo rígido está em movimento de rotação em torno de um eixo fixo se pelo menos dois de seus pontos estiverem fixos no espaço. A reta que passa por esses dois pontos é chamada eixo fixo de rotação do corpo rígido. Todos os pontos do corpo rígido que estiverem ao longo de seu eixo fixo de rotação estarão, necessariamente, em repouso, devido à rigidez do corpo. Todos os pontos que não estiverem no eixo fixo de rotação do corpo rígido, descreverão, necessariamente, movimentos circulares. A velocidade angular vetorial  $\boldsymbol{\omega}$  de um corpo rígido em movimento de rotação em torno de um eixo fixo é um vetor cuja direção é a do eixo fixo, o sentido indica o sentido de rotação do corpo em torno do eixo fixo e o seu módulo, dá a taxa instantânea de variação temporal dos ângulos descritos pelas partículas que compõem o corpo em seus movimentos circulares. Escolhendo a origem dos eixos cartesianos no eixo fixo de rotação, a velocidade da  $i$ -ésima partícula do corpo é dada pelo produto vetorial  $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ .

O momento angular de um corpo rígido pode ser escrito como a soma de duas componentes vetoriais, uma ao longo do eixo fixo de rotação e a outra perpendicular a esse eixo:  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\parallel} + \mathbf{L}_{\perp}$ . Por definição, momento de inércia  $I$  de um sistema de partículas relativo a um dado eixo (não necessariamente um corpo rígido) é igual à soma dos produtos das massas das partículas pelos quadrados das respectivas distâncias a esse eixo, isto é,  $I = m_1 b_1^2 + \dots + m_N b_N^2$ , onde  $b_i$  é a distância da  $i$ -ésima partícula do sistema ao eixo em consideração. A componente do momento angular de um corpo rígido paralela ao eixo de rotação pode ser escrita como  $\mathbf{L}_{\parallel} = I_{\parallel} \boldsymbol{\omega}$ , onde  $I_{\parallel}$  é o momento de inércia do corpo relativo ao eixo fixo. Se o torque externo total possuir componente não nula ao longo do eixo fixo de rotação, teremos  $\boldsymbol{\tau}_{\parallel}^{ex} = I_{\parallel} \boldsymbol{\alpha}$ , onde  $\boldsymbol{\alpha}$  é a aceleração angular vetorial, definida por  $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ . No movimento de rotação em torno de um eixo fixo, o momento de inércia do sistema em relação a esse eixo desempenha um papel análogo àquele desempenhado pela massa total do sistema no movimento de translação do centro de massa do sistema (note a analogia da última equação com  $\mathbf{F}^{ex} = M \mathbf{a}_{cm}$ ).

## Questionário

1. Se fixarmos apenas um ponto de um corpo rígido, o que podemos afirmar sobre os movimentos de seus outros pontos? E se fixarmos dois pontos?

2. Se fixarmos três pontos não-colineares de um corpo rígido, o que podemos afirmar sobre os movimentos de todos os outros pontos desse corpo? E se esses três pontos fossem colineares?
3. Qual é a definição de movimento de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo?
4. Quando um corpo rígido estiver em movimento de rotação em torno de um eixo fixo todos os seus pontos estarão, necessariamente, descrevendo movimentos circulares?
5. É possível que um corpo rígido esteja em movimento de rotação em torno de um eixo fixo de tal modo que todos os seus pontos estejam em movimento? Em caso afirmativo, dê um exemplo.
6. Defina velocidade angular vetorial de um corpo rígido em movimento de rotação em torno de um eixo fixo.
7. Escolhendo a origem dos eixos cartesianos no eixo fixo de rotação do corpo rígido, escreva a relação existente entre a velocidade  $v_i$  de um ponto genérico desse corpo (ponto  $P_i$ ), a velocidade angular vetorial do corpo rígido e o vetor-posição do ponto  $P_i$ .
8. Dê a definição de momento de inércia de um sistema de partículas relativo a um dado eixo.
9. Em um movimento de um corpo rígido em torno de um eixo fixo, escreva a relação entre a componente vetorial do momento angular desse corpo ao longo do eixo fixo, o momento de inércia do corpo relativo a esse eixo e a sua velocidade angular vetorial.
10. Comente a afirmativa: no caso de um movimento de um corpo rígido em torno de um eixo fixo, o seu momento de inércia relativo a esse eixo desempenha um papel análogo ao desempenhado pela massa total de um sistema em seu movimento de translação.
11. Escreva a energia cinética de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo em termos de seu momento de inércia relativo a esse eixo e de sua velocidade angular vetorial.

## Problemas propostos

- Qual é o menor número de coordenadas (sejam elas coordenadas cartesianas ou ângulos) capaz de caracterizar univocamente uma configuração qualquer de um corpo rígido?
- Reconsidere o Exemplo 33.5 da aula anterior no qual um haltere formado por duas partículas de massas  $m_1 = m$  e  $m_2 = 3m$ , ligadas por uma haste rígida de comprimento  $\ell$  e massa desprezível, gira com velocidade angular constante  $\omega$  em torno de um eixo fixo vertical que passa pelo ponto médio. A haste está sempre num plano horizontal, escolhido como  $\mathcal{OXY}$ . Tome a origem dos eixos no ponto médio da haste.
  - Calcule o momento angular do sistema em relação à origem e mostre que  $L_z = I_z\omega$ , onde  $I_z$  é o momento de inércia do sistema relativo ao eixo  $\mathcal{OZ}$ .
  - Calcule, agora, o momento angular do sistema em relação a um ponto  $Q$ , localizado no eixo  $\mathcal{OZ}$  e a uma distância  $d$  abaixo da origem, e mostre que, embora  $\mathbf{L}$  não seja mais constante, continua valendo a relação  $L_{Qz} = I_z\omega$ , onde  $L_{Qz}$  é a componente de  $\mathbf{L}$  ao longo do eixo  $\mathcal{OZ}$ .
- No Exemplo 34.3, por que o torque externo relativo a origem é nulo? No entanto, o torque externo relativo a um ponto  $Q$  localizado no eixo de rotação, mas abaixo da origem não é nulo, por que? Porém, mesmo nesse caso, a componente do momento angular total do sistema disco-pessoa ao longo do eixo de rotação continua sendo uma quantidade conservada. Por que isso ocorre?
- Reconsidere o Exemplo 34.3, mas suponha, nesse problema, que a massa da pessoa é igual à massa do disco, isto é,  $m = M$ .
  - Verifique que os ângulos girados pela pessoa e pelo disco, em módulo, não são iguais. Dê uma explicação para esse resultado.
  - Suponha que em vez de caminhar pela periferia, a pessoa caminhe mantendo sempre a distância  $k$  do eixo de rotação  $\mathcal{OZ}$ . Calcule o valor de  $k$  para que após retornar ao mesmo ponto de partida sobre o disco, tanto a pessoa quanto o disco tenham girado de  $\pi$  radianos (em sentidos opostos, obviamente).

5. Considere, novamente, o Exemplo 34.3, mas suponha agora que em vez de uma pessoa, há duas pessoas caminhando pela periferia do disco: uma delas, de massa  $m$ , se movimenta no sentido indicado na **Figura 34.5**, enquanto a outra, de massa  $m'$ , se movimenta no sentido oposto. Ambas partem da marcação feita no disco, inicialmente na direção do eixo  $\mathcal{O}\mathcal{X}$ , como no exemplo, e caminham sempre pela periferia, mas tomando o cuidado de não caírem do disco quando se cruzarem. Cada uma delas, ao retornar à marcação sobre o disco, deixa de se movimentar relativamente ao disco, permanecendo sobre a marcação feita no mesmo.

(a) Mostre que o ângulo girado pelo disco é dado por

$$\Delta\varphi = -\frac{2(m - m')}{M + 2(m + m')} 2\pi ;$$

(b) Analise os casos particulares em que  $m = m'$ ,  $m > m'$  e  $m < m'$  e comente os resultados.

6. Reconsidere o Exemplo 34.4.

(a) Demonstre o resultado (34.52);

(b) Determine a tensão no fio e o módulo da aceleração angular da polia.

7. Considere uma máquina de Atwood formada pelos blocos de massas  $m_1$  e  $m_2$ , com  $m_1 > m_2$ , ligados por um fio ideal, e uma polia considerada, para nossos propósitos, como um disco homogêneo de massa  $M$  e raio  $R$ , como ilustra a **Figura 34.7**. Suponha, ainda, que o fio não deslize sobre a polia. Sabendo que o momento de inércia da polia em relação ao eixo fixo de rotação vale  $I = (1/2)MR^2$ , determine: (i) as acelerações dos blocos; (ii) o módulo da aceleração angular da polia e (iii) a tensão no fio.

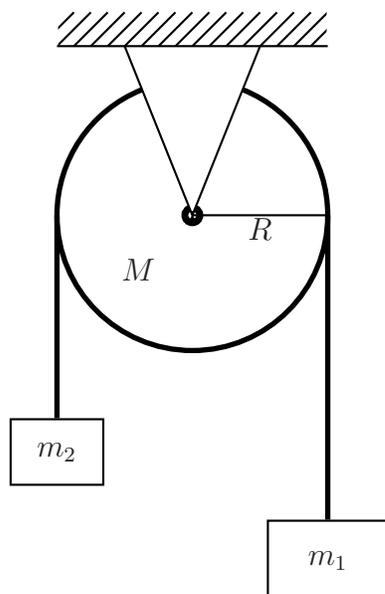


Figura 34.7: Máquina de Atwood, com polia girando em torno de eixo fixo.

8. O objetivo deste problema é verificar a validade da Lei da Conservação da Energia Mecânica no Exemplo 34.4. Suponha que em  $t_0 = 0$  o bloco seja abandonado a partir do repouso.
- Utilizando os resultados obtidos no exemplo anterior, calcule os módulos da velocidade angular da polia e da velocidade do bloco num instante genérico  $t > 0$  e a distância  $h$  percorrida pelo bloco no intervalo  $[0, t]$ .
  - Mostre que a energia mecânica do sistema se conserva, ou seja, mostre que, no instante  $t$ , vale a relação

$$mgh = K_b + K_P ,$$

onde  $K_b$  e  $K_P$  são, respectivamente as energias cinéticas do bloco e da polia no instante  $t$ .

9. Reconsidere o Exemplo 34.1. Sabendo que o momento de inércia de uma barra de massa  $M$  e comprimento  $\ell$ , em relação a um eixo perpendicular a ela e passando por um de seus extremos, vale  $I = (1/3)m\ell^2$ , determine o módulo da velocidade do centro de massa da barra no instante em que ela está na vertical.

## **Auto-avaliação**

Esta é uma aula de leitura difícil, que requer muita concentração e, principalmente, muita reflexão. Por esse motivo, é importantíssimo que você tente responder a todo o questionário e só passe para os problemas propostos após estar certo de que compreendeu bem a teoria exposta. Alguns dos problemas propostos são difíceis. Por isso, recomendamos que você resolva esses problemas na seguinte ordem: 1, 2, 6, 7, 8, 9, 3, 4 e 5. Não se assuste se não conseguir resolver os três últimos, pois são os mais difíceis da lista. Você pode, inclusive, passar para a próxima aula sem tê-los resolvido. No entanto, lembre-se de que cada problema deve ser encarado como um desafio. Nesse sentido, cada vez que você solucionar um dos mais difíceis, terá feito uma grande conquista no caminho tão árduo da aquisição do conhecimento.

## Aula 35 – Cálculo de momentos de inércia

### Objetivos

- Assimilar algumas técnicas de cálculo do momento de inércia de um corpo rígido para o caso de distribuições discretas de matéria.
- Aprender teoremas importantes para o cálculo de momentos de inércia.

### Introdução

Para determinar o movimento de translação de um corpo rígido, basta determinar o movimento de seu centro de massa por meio da equação fundamental. De acordo com ela, a aceleração do centro de massa igual à força externa total sobre o corpo dividida pela sua massa total,

$$\mathbf{a}_{cm} = \frac{\mathbf{F}^{ex}}{M}. \quad (35.1)$$

Todas as partículas do corpo em translação acompanham o centro de massa em seu movimento. Daí a importância de conhecermos a posição do centro de massa de um dado corpo rígido; a partir dela determinamos a translação do corpo.

No movimento de rotação de um corpo rígido, a posição de seu centro de massa também desempenha um papel importante. A equação fundamental na dinâmica do corpo rígido afirma que a taxa instantânea de variação do momento angular do corpo é igual ao torque externo total aplicado sobre ele, isto é,  $d\mathbf{L}/dt = \boldsymbol{\tau}$ . Essa equação é válida quando o momento angular e o torque são relativos ao centro de massa do corpo ou a um ponto fixo. Nesta aula, aprenderemos as técnicas de cálculo que permitem, em princípio, determinar o centro de massa de qualquer corpo rígido.

A equação da dinâmica de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo nos permite afirmar que a aceleração angular vetorial do corpo é igual à componente vetorial do torque externo total sobre ele, ao longo do eixo fixo de rotação dividida pelo seu momento de inércia relativo a esse eixo, isto é,

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\tau}_{||}^{ex}}{I_{||}}. \quad (35.2)$$

Uma breve inspeção nas equações (35.1) e (35.2) mostra que o momento de inércia do corpo é tão importante no estudo do seu movimento de rotação quanto a sua massa o é no estudo do seu movimento de translação. No caso do movimento mais

geral de um corpo rígido, em que sua rotação nem sempre se processa ao longo de um eixo fixo, o conceito de momento de inércia continua sendo indispensável, como você poderá verificar em tratamentos mais avançados desse assunto. Nesta aula também aprenderemos as técnicas de cálculo que permitem, em princípio, determinar o momento de inércia de corpo rígido relativo a um eixo qualquer.

Na próxima seção, calcularemos momentos de inércia relativos a diversos eixos no caso de um corpo rígido muito simples, que chamaremos haltere triangular. Na seção seguinte, demonstraremos algumas propriedades do momento de inércia que são extremamente úteis. Na penúltima seção, consideraremos o cálculo do centro de massa e do momento de inércia de corpos rígidos dados por distribuições contínuas de matéria. Finalmente, na última seção, discutiremos alguns problemas simples envolvendo corpos rígidos em movimento de rotação em torno de um eixo fixo.

Nesta aula, começaremos a usar o símbolo de somatório, com o qual você agora já deve estar familiarizado. Sabemos que uma soma de  $N$  termos,  $a_1, a_2, \dots, a_N$ , que até agora temos denotado por  $a_1 + a_2 + \dots + a_N$ , também pode ser representada por,

$$\sum_{i=1}^N a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_N . \quad (35.3)$$

O índice que está somado, no caso o índice  $i$ , somado de 1 até  $N$ , pode ser mudado sem alterar a soma; obteríamos a mesma soma  $a_1 + a_2 + \dots + a_N$  se usássemos qualquer outro índice no somatório, como  $\sum_{j=1}^N a_j$  ou  $\sum_{k=1}^N a_k$ . Todas as propriedades do símbolo de somatório podem ser facilmente deduzidas de sua definição (35.3). Temos, por exemplo, as seguintes propriedades fundamentais:

$$\sum_{i=1}^N (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^N a_i + \sum_{i=1}^N b_i \quad (35.4)$$

e

$$\sum_{i=1}^N \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^N a_i . \quad (35.5)$$

A propriedade (35.4) afirma que o somatório da soma é a soma dos somatórios. Na propriedade (35.6) vemos que um fator independente do índice do somatório pode ser escrito dentro ou fora do somatório; a quantidade  $\lambda$  não depende do índice  $i$  e, por isso, pode ser permutada com o símbolo  $\sum_{i=1}^N$ . Apenas para ilustrar, demonstraremos essa propriedade usando a definição escrita em (35.3) de somatório,

$$\sum_{i=1}^N \lambda a_i = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_N = \lambda (a_1 + a_2 + \dots + a_N) = \lambda \sum_{i=1}^N a_i . \quad (35.6)$$

Caso ainda não esteja completamente familiarizado com o símbolo de somatório, você poderá adquirir prática no seu uso demonstrando (35.4) e outras de suas propriedades que se fizerem necessárias.

## Momentos de inércia do haltere triangular

Vamos recordar a definição de momento de inércia, dada na aula anterior. Momento de inércia de um sistema de partículas relativo a um eixo é a soma dos produtos das massas das partículas pelos quadrados de suas respectivas distâncias ao eixo. Denotando por  $m_1, m_2, \dots, m_N$  as massas das partículas, por  $b_1, b_2, \dots, b_N$  suas respectivas distâncias ao eixo, e por  $I$  o momento de inércia desse sistema de partículas relativo ao eixo considerado, temos

$$I = \sum_{i=1}^N m_i b_i^2 . \quad (35.7)$$

Estamos interessados na situação em que o sistema é um corpo rígido e as distâncias de suas partículas ao eixo não mudam com o tempo. Nesse caso, o momento de inércia é uma quantidade constante.

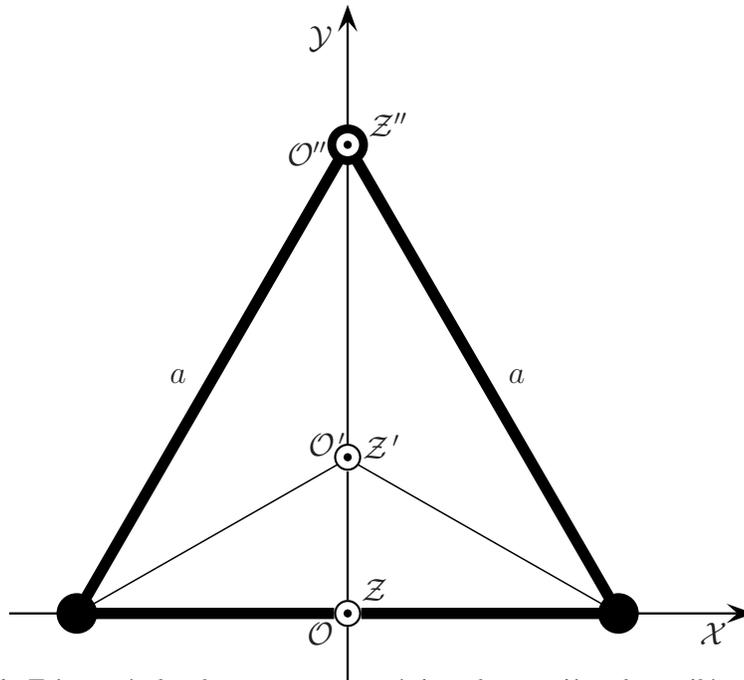
É claro que o sistema de partículas mais simples é aquele constituído por uma única partícula, digamos de massa  $m$ , e a uma distância  $b$  de um dado eixo. O momento de inércia desse sistema relativo ao eixo considerado é, de acordo com a definição,

$$I = m b^2 . \quad (35.8)$$

Por motivos óbvios, esse momento de inércia é também chamado **momento de inércia de uma partícula** de massa  $m$  relativo a um eixo do qual ela dista de  $b$ . Com essa definição, podemos afirmar que o momento de inércia de uma sistema, dado por (35.7), é a soma dos momentos de inércia das partículas que o compõem.

Agora, passemos a um corpo rígido na forma de um triângulo equilátero de lado  $a$ . Nos vértices do triângulo há bolinhas de massas iguais a  $m$  e os lados do triângulo são hastes rígidas cujas massas são desprezíveis diante de  $m$ . Para abreviar, chamaremos haltere triangular esse tipo de corpo rígido. A **Figura 35.1** mostra esse haltere e cinco eixos,  $\mathcal{O}\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{O}\mathcal{Y}$  e  $\mathcal{O}\mathcal{Z}$ , com a mesma origem  $\mathcal{O}$ , e mais dois eixos,  $\mathcal{O}'\mathcal{Z}'$  e  $\mathcal{O}''\mathcal{Z}''$ , paralelos a  $\mathcal{O}\mathcal{Z}$ . O eixo  $\mathcal{O}\mathcal{X}$  está ao longo de um dos lados do triângulo equilátero e o  $\mathcal{O}\mathcal{Y}$  é perpendicular a ele e passa pelo vértice oposto. O eixo  $\mathcal{O}\mathcal{Z}$  é perpendicular à página e aponta para os nossos olhos e, por isso, é representado no desenho pelo símbolo “ $\odot$ ”. Esse mesmo símbolo representa os eixos  $\mathcal{O}'\mathcal{Z}'$  e  $\mathcal{O}''\mathcal{Z}''$ , pois eles também são perpendiculares

à página e apontam para os nossos olhos;  $\mathcal{O}'Z'$  passa pelo centro de massa do haltere triangular e  $\mathcal{O}''Z''$  passa por uma de suas partículas. Calcularemos os momentos de inércia do haltere triangular relativos a esses cinco eixos.



**Figura 35.1:** Três partículas de massa  $m$  nos vértices de um triângulo equilátero de lado  $a$ . O sistema de partículas está no plano dos eixos  $\mathcal{O}\mathcal{X}$  e  $\mathcal{O}\mathcal{Y}$ , que é o plano da página. Os eixos  $\mathcal{O}\mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{O}'\mathcal{Z}'$  e  $\mathcal{O}''\mathcal{Z}''$  são perpendiculares à página e apontam para os nossos olhos.

As duas partículas da base do triângulo não contribuem para  $I_{\mathcal{O}\mathcal{X}}$ , o momento de inércia relativo ao eixo  $\mathcal{O}\mathcal{X}$ , pois elas estão sobre ele. Portanto,  $I_{\mathcal{O}\mathcal{X}}$  é a massa  $m$  da partícula no vértice superior vezes o quadrado de sua distância ao eixo  $\mathcal{O}\mathcal{X}$ . Essa distância corresponde à altura do triângulo e vale  $a\sqrt{3}/2$ , de modo que  $I_{\mathcal{O}\mathcal{X}} = m(a\sqrt{3}/2)^2$ , isto é,

$$I_{\mathcal{O}\mathcal{X}} = \frac{3}{4}ma^2. \quad (35.9)$$

A partícula no vértice superior não contribui para  $I_{\mathcal{O}\mathcal{Y}}$ , o momento de inércia relativo ao eixo  $\mathcal{O}\mathcal{Y}$ . Cada uma das duas partículas nos vértices da base está a uma distância de  $\mathcal{O}\mathcal{Y}$  igual à metade do lado  $a$  do triângulo. Portanto, temos  $I_{\mathcal{O}\mathcal{Y}} = m(a/2)^2 + m(a/2)^2$ , isto é,

$$I_{\mathcal{O}\mathcal{Y}} = \frac{1}{2}ma^2. \quad (35.10)$$

A distância entre cada partícula da base do triângulo até o eixo  $\mathcal{O}\mathcal{Z}$  é  $a/2$  e a distância da partícula no vértice superior até o eixo  $\mathcal{O}\mathcal{Z}$  é  $a\sqrt{3}/2$ . O momento de

inércia relativo ao eixo  $\mathcal{OZ}$  é, então,  $I_{\mathcal{OZ}} = m(a/2)^2 + m(a/2)^2 + m(a\sqrt{3}/2)^2$ , ou seja,

$$I_{\mathcal{OZ}} = \frac{5}{4}ma^2. \quad (35.11)$$

O eixo  $\mathcal{O}'Z'$  passa pelo centro de massa do haltere triangular, cuja distância a cada partícula é dois terços da altura do triângulo, como você pode comprovar com facilidade. Desse modo, cada partícula de massa  $m$  está distante  $(2/3)(a\sqrt{3}/2)$  do eixo  $\mathcal{O}'Z'$ , isto é, igual a  $a\sqrt{3}/3$ . Portanto, o momento de inércia relativo ao eixo  $\mathcal{O}'Z'$ , é dado por  $I_{\mathcal{O}'Z'} = 3m(a\sqrt{3}/3)^2$ , ou seja,

$$I_{\mathcal{O}'Z'} = ma^2 \quad (\mathcal{O}' = cm). \quad (35.12)$$

Finalmente, temos o eixo  $\mathcal{O}''Z''$ . A partícula do vértice superior está sobre esse eixo, e a distância entre ele e cada uma das partículas nos vértices da base é o próprio lado  $a$  do triângulo. Portanto, o momento de inércia relativo ao eixo  $\mathcal{O}''Z''$  é dado por  $I_{\mathcal{O}''Z''} = ma^2 + ma^2$ , isto é,

$$I_{\mathcal{O}''Z''} = 2ma^2. \quad (35.13)$$

Vemos que o mesmo corpo, o haltere triangular, tem cinco diferentes momentos de inércia, relativos aos cinco eixos considerados. Isso significa que a dificuldade para girar o haltere depende do eixo de rotação escolhido. De fato, na equação (35.2), vemos que, quanto maior o momento de inércia  $I$ , menor a aceleração angular  $\alpha$  provocada por um dado torque externo  $\tau^{ex}$ . Desse modo, se dispusermos de um dado torque para provocar uma aceleração angular no haltere triangular e escolhermos o eixo de rotação dentre os cinco eixos considerados, conseguiremos a maior aceleração angular se a rotação for em torno do eixo  $\mathcal{O}'Z'$ , que é perpendicular ao triângulo e passa pelo seu centro de massa, pois  $I_{\mathcal{O}'Z'}$  é, de fato, o menor dentre os cinco momentos de inércia calculados. Também é claro que o eixo em torno do qual o triângulo oferece maior resistência para ser posto em rotação é o eixo  $\mathcal{O}''Z''$ , pois o momento de inércia em relação a ele é o maior dentre os cinco calculados. Do mesmo modo, é simples responder à questão: para pôr o haltere triangular em rotação em torno de um eixo perpendicular ao seu plano, seria mais fácil se o eixo passasse por um de seus vértices ou pelo meio de um de um de seus lados? Você pode praticar no cálculo de momentos de inércia resolvendo agora os problemas propostos 1, 2, 3 e 4.

### Alguns teoremas úteis no cálculo de momentos de inércia

Consideremos novamente um sistema de  $N$  partículas. Podemos considerá-lo como a união de dois subsistemas. O primeiro com  $N'$  partículas, que podemos

numerar de 1 a  $N'$ . Digamos que as massas das partículas desse primeiro subsistema sejam  $m_1, m_2, \dots, m_{N'}$  e que as respectivas distâncias entre elas e um dado eixo sejam  $b_1, b_2, \dots, b_{N'}$ . O segundo subsistema é constituído pelas  $N - N'$  demais partículas, que podemos numerar de  $N' + 1$  até  $N$ . Denotaremos suas massas por  $m_{N'+1}, m_{N'+2}, \dots, m_N$ , e suas respectivas distâncias ao eixo considerado por  $b_{N'+1}, b_{N'+2}, \dots, b_N$ . O momento de inércia do sistema inteiro, relativo ao eixo em consideração, é dado pela expressão (35.7), para a qual temos

$$I = \sum_{i=1}^N m_i b_i^2 = \sum_{i=1}^{N'} m_i b_i^2 + \sum_{i=N'+1}^N m_i b_i^2. \quad (35.14)$$

Naturalmente, a soma

$$I_1 = \sum_{i=1}^{N'} m_i b_i^2 \quad (35.15)$$

é o momento de inércia do primeiro subsistema, relativo ao eixo considerado, e a soma

$$I_2 = \sum_{i=N'+1}^N m_i b_i^2 \quad (35.16)$$

é o momento de inércia do segundo subsistema, relativo ao mesmo eixo. Usando (35.15) e (35.16) em (35.14), obtemos

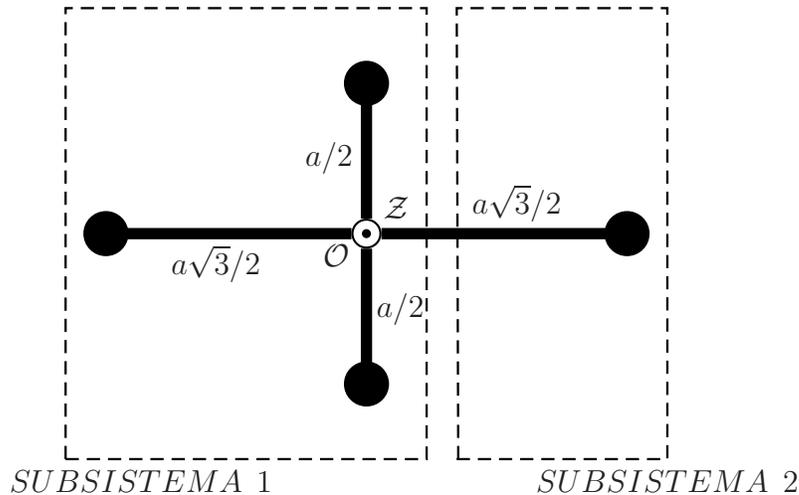
$$I = I_1 + I_2. \quad (35.17)$$

Portanto, podemos subdividir o sistema em vários subsistemas e chegar ao resultado geral:

*considerando um sistema composto de subsistemas, o momento de inércia do sistema relativo ao um dado eixo é a soma dos momentos de inércia dos diversos subsistemas relativos ao mesmo eixo.*

### Exemplo 35.1

A **Figura 35.2** mostra um corpo rígido constituído por quatro partículas de massas iguais a  $m$ , dispostas nas extremidades de duas barras unidas em forma de cruz. Uma das barras tem comprimento  $a$ , a outra comprimento  $a\sqrt{3}$ , e ambas têm massa desprezível diante de  $m$ . Elas se cruzam ortogonalmente em seus pontos médios, como indicado na **Figura 35.2**.



**Figura 35.2:** Quatro partículas de massa  $m$  nos vértices de uma cruzeta de lados  $a$  e  $a\sqrt{3}$ . O eixo  $OZ$  é perpendicular ao plano da cruzeta e passa pelo centro de massa do sistema de partículas.

Esse tipo de sistema pode ser chamado haltere em cruzeta. Calculemos o seu momento de inércia relativo a um eixo perpendicular ao plano do haltere e que passa pelo seu centro de massa. O centro de massa está no cruzamento das barras, na posição média entre as partículas, pois suas massas são iguais. O eixo, que chamaremos  $OZ$ , aparece na figura perpendicularmente à página e apontando para os nossos olhos, como está indicado pelo símbolo “ $\odot$ ”. Embora esse momento de inércia seja simples o bastante para ser calculado diretamente da definição (35.7), vamos usá-lo para ilustrar o teorema (35.17). O número de partículas do sistema é  $N = 4$ , e vamos subdividi-lo em dois subsistemas. O primeiro subsistema, ou subsistema 1, é constituído pelas duas partículas nas extremidades da barra de comprimento  $a$  e por uma partícula na extremidade da outra barra, digamos a extremidade que aparece à esquerda na **Figura 35.2**. Portanto, o número de partículas no subsistema 1 é  $N' = 3$ . O segundo subsistema, ou subsistema 2, é constituído pela partícula restante, na extremidade direita da barra mais longa. Devido aos comprimentos das barras,  $a$  e  $a\sqrt{3}$ , as partículas no subsistema 1 estão no vértice de um triângulo equilátero com lados de comprimentos iguais a  $a$ . Esse subsistema é o haltere triangular da seção anterior, ilustrado na **Figura 35.1**, exceto pelas barras que mantêm rígidos os sistemas. Entretanto, como as barras têm massas desprezíveis, elas não afetam o cálculo dos momentos de inércia. Conseqüentemente, podemos afirmar que o momento de inércia do subsistema 1, relativo ao eixo  $OZ$ , como indicado na **Figura 35.2**, é igual ao momento de inércia

do haltere triangular, relativo ao eixo  $\mathcal{OZ}$ , como indicados na **Figura 35.1**. Esse momento de inércia já foi calculado e é dado por (35.11), de modo que o momento de inércia do subsistema 1, que chamaremos  $I_1$ , é dado por

$$I_1 = \frac{5}{4}ma^2. \quad (35.18)$$

Já o momento de inércia do subsistema 2, relativo ao mesmo eixo  $\mathcal{OZ}$ , é dado por  $I_2 = m(a\sqrt{3}/2)^2$ , ou seja,

$$I_2 = \frac{3}{4}ma^2. \quad (35.19)$$

De acordo com o teorema (35.17), o momento de inércia do haltere em cruzeta relativo ao eixo  $\mathcal{OZ}$  é a soma dos momentos de inércia de seus subsistemas 1 e 2 relativos ao mesmo eixo e dados por (35.18) e (35.19). Denotando por  $I$  o momento de inércia do sistema todo em relação a  $\mathcal{OZ}$ , temos  $I = (5ma^2/4) + (3ma^2/4) = 2ma^2$ , isto é,

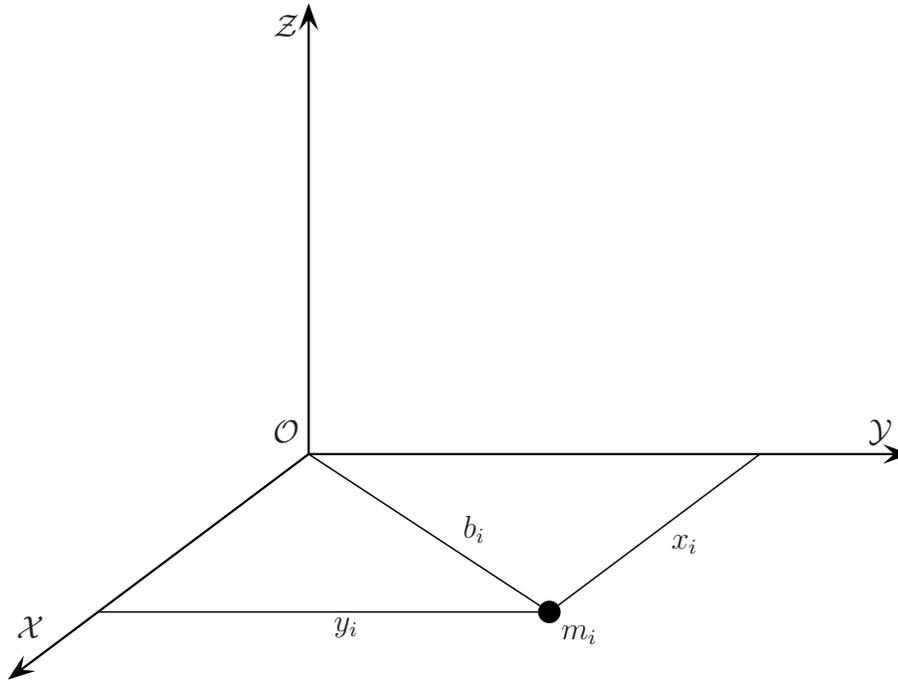
$$I = I_1 + I_2 = 2ma^2. \quad (35.20)$$

Você pode calcular o momento de inércia do haltere em cruzeta diretamente a partir da definição e verificar que a resposta é dada por (35.20). Esse cálculo direto é tão simples que, nesse caso, não faz muita diferença usar o teorema (35.17) para obter o momento de inércia do sistema todo. No entanto, em outros casos, pode valer a pena usar o teorema (35.17) e aproveitar um cálculo já feito para subsistemas do sistema considerado.

### Teorema dos eixos perpendiculares

Um outro teorema simples sobre momentos de inércia pode ser estabelecido para o caso em que o sistema de partículas está todo em um dado plano. Vamos supor que esse seja o caso e escolher os eixos  $\mathcal{OX}$  e  $\mathcal{OY}$  nesse plano, onde estão todas as partículas do sistema. Naturalmente, o eixo  $\mathcal{OZ}$  é perpendicular a esse plano. A **Figura 35.3** mostra os três eixos e uma partícula arbitrária do sistema de massa  $m_i$ . É claro que sua coordenada  $z_i$  é nula e suas coordenadas  $x_i$  e  $y_i$  determinam a distância  $b_i$  da partícula ao eixo  $\mathcal{OZ}$ . Temos  $b_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ , de modo que o momento de inércia da partícula relativo ao eixo  $\mathcal{OZ}$  é  $m_i b_i^2$ , isto é,  $m_i(x_i^2 + y_i^2)$ . Somando os momentos de inércia de todas as  $N$  partículas do sistema, obtemos  $I_{\mathcal{OZ}}$ , o momento de inércia do sistema relativo ao eixo  $\mathcal{OZ}$ , que será dado por

$$I_{OZ} = \sum_{i=1}^N m_i b_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_{i=1}^N m_i x_i^2 + \sum_{i=1}^N m_i y_i^2. \quad (35.21)$$



**Figura 35.3:** Todas as partículas do sistema estão no plano  $O\mathcal{X}\mathcal{Y}$ . A  $i$ -ésima partícula tem coordenadas  $x_i$  e  $y_i$  que dependem de sua posição no plano e  $z_i = 0$ .

Denotando por  $I_{O\mathcal{X}}$  e  $I_{O\mathcal{Y}}$  os momentos de inércia do sistema relativos aos eixos  $O\mathcal{X}$  e  $O\mathcal{Y}$ , respectivamente, é fácil identificar

$$I_{O\mathcal{X}} = \sum_{i=1}^N m_i y_i^2 \quad \text{e} \quad I_{O\mathcal{Y}} = \sum_{i=1}^N m_i x_i^2. \quad (35.22)$$

Usando esses resultados em (35.21), obtemos

$$I_{OZ} = I_{O\mathcal{X}} + I_{O\mathcal{Y}}, \quad (35.23)$$

isto é,

*se toda a massa de um sistema está distribuída num plano, a soma de seus momentos de inércia relativos a dois eixos ortogonais nesse plano é igual ao momento de inércia relativo a um eixo perpendicular ao plano e que passa pela interseção dos dois primeiros eixos.*

Esse resultado é conhecido como **Teorema dos Eixos Perpendiculares** ou como **Teorema dos Três Eixos**. Ele é útil para obtermos o momento de inércia relativo a um dos eixos quando já conhecemos os momentos de inércia relativos aos dois outros eixos.

### Exemplo 35.2

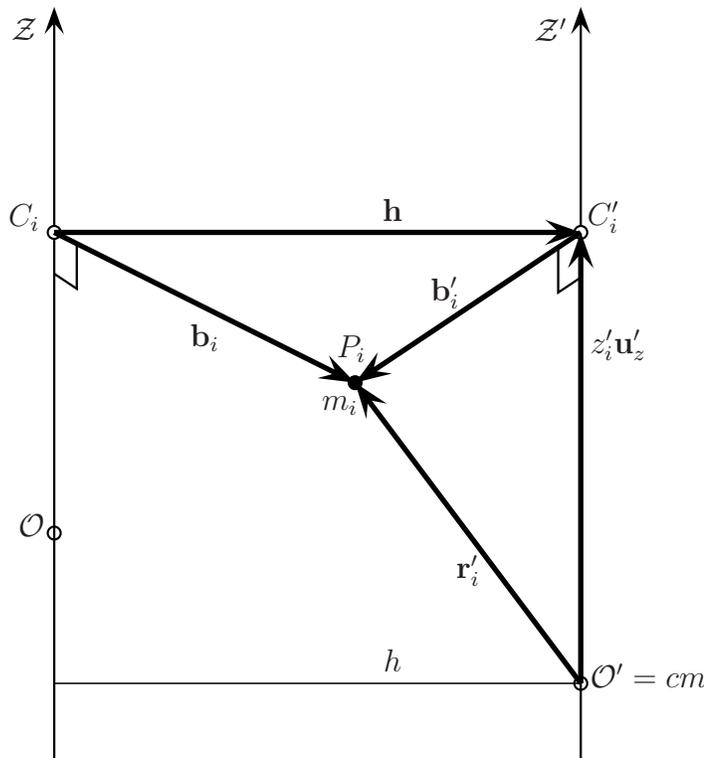
Na seção anterior obtivemos os momentos de inércia do haltere triangular relativos aos eixos  $\mathcal{OX}$ ,  $\mathcal{OY}$  e  $\mathcal{OZ}$  indicados na **Figura 35.1**. Esses momentos de inércia são dados pelas equações (35.9), (35.10) e (35.11), respectivamente. Uma vez que o haltere triangular é uma distribuição plana de massa, poderíamos obter o momento de inércia relativo ao eixo  $\mathcal{OZ}$  usando no teorema dos eixos perpendiculares os valores já conhecidos dos momentos de inércia relativos aos eixos  $\mathcal{OX}$  e  $\mathcal{OY}$ . Substituindo (35.9) e (35.10) em (35.23), obtemos

$$I_{\mathcal{OZ}} = I_{\mathcal{OX}} + I_{\mathcal{OY}} = \frac{3}{4}ma^2 + \frac{1}{2}ma^2 = \frac{5}{4}ma^2, \quad (35.24)$$

que, de fato, está de acordo com o valor obtido em (35.11) diretamente a partir da definição de momento de inércia.

### Teorema dos eixos paralelos

Vamos agora aprender um teorema muito importante, válido para qualquer sistema de partículas e chamado **Teorema de Steiner** ou **Teorema dos Eixos Paralelos**. Consideremos dois eixos paralelos  $\mathcal{OZ}$  e  $\mathcal{O}'Z'$ , sendo que o segundo passa pelo centro de massa do sistema de partículas. Consideremos a origem de  $\mathcal{O}'Z'$  no centro de massa,  $\mathcal{O}' = cm$ , conforme indicado na **Figura 35.4**. Consideremos uma partícula genérica do sistema, de massa  $m_i$  e localizada no ponto  $P_i$ . Traçaremos uma perpendicular ao eixo  $\mathcal{OZ}$  a partir do ponto  $P_i$ . Esta reta encontrará o eixo no ponto  $C_i$ . Analogamente, traçaremos uma perpendicular ao eixo  $\mathcal{O}'Z'$  a partir do ponto  $P_i$ . Esta reta encontrará o eixo no ponto  $\mathcal{O}'Z'$ . Os pontos  $P_i$ ,  $C_i$  e  $C'_i$  estão no plano que passa pela  $i$ -ésima partícula do sistema e é perpendicular aos dois eixos  $\mathcal{OZ}$  e  $\mathcal{O}'Z'$ .



**Figura 35.4:** A figura mostra apenas a  $i$ -ésima partícula do corpo rígido e os eixos  $OZ$  e  $O'Z'$ , paralelos entre si.

Seja  $\mathbf{b}_i$  o vetor de  $C_i$  até  $P_i$  e  $\mathbf{b}'_i$  o vetor de  $C'_i$  a  $P_i$ . Obviamente,  $\mathbf{b}_i$  e  $\mathbf{b}'_i$  são perpendiculares aos dois eixos,  $b_i$  é a distância entre a  $i$ -ésima partícula e o eixo  $OZ$  e  $b'_i$  é a distância entre a partícula e o eixo  $O'Z'$ . Conseqüentemente, os momentos de inércia do sistema de  $N$  partículas relativos aos eixos  $OZ$  e  $O'Z'$  são dados, respectivamente, por

$$I_{OZ} = \sum_{i=1}^N m_i b_i^2 \quad \text{e} \quad I_{O'Z'} = \sum_{i=1}^N m_i b_i'^2. \quad (35.25)$$

Seja  $\mathbf{h}$  o vetor que vai do eixo  $OZ$  ao eixo  $O'Z'$  e é perpendicular a ambos. Na **Figura 35.4** esse vetor vai de  $C_i$  a  $C'_i$ . Essa figura também mostra o vetor  $\mathbf{r}'_i$  que vai do centro de massa do sistema até o ponto  $P_i$  onde se encontra a  $i$ -ésima partícula; é o vetor-posição da  $i$ -ésima partícula relativo ao centro de massa. O vetor-posição da  $i$ -ésima partícula relativo à origem  $O$  do eixo  $OZ$  não está na **Figura 35.4**. Aliás, para não sobrecarregar a figura, desenharemos apenas a  $i$ -ésima partícula. Note, agora, que  $\mathbf{b}_i = \mathbf{h} + \mathbf{b}'_i$  e, portanto,  $b_i^2 = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i = (\mathbf{h} + \mathbf{b}'_i) \cdot (\mathbf{h} + \mathbf{b}'_i)$ , donde

$$b_i^2 = b_i'^2 + 2\mathbf{h} \cdot \mathbf{b}'_i + h^2. \quad (35.26)$$

O vetor-posição da  $i$ -ésima partícula relativo ao centro de massa é dado por  $\mathbf{r}'_i = z'_i \mathbf{u}'_z + \mathbf{b}'_i$ , onde  $z'_i$  é a coordenada de  $i$ -ésima partícula ao longo do eixo  $\mathcal{O}'Z'$  e  $\mathbf{u}'_z$  é o unitário desse eixo. Uma vez que  $\mathbf{h}$  é perpendicular a esse eixo, temos  $\mathbf{h} \cdot z'_i \mathbf{u}'_z = 0$  e, com isso,

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{r}'_i = \mathbf{h} \cdot (z'_i \mathbf{u}'_z + \mathbf{b}'_i) = \mathbf{h} \cdot z'_i \mathbf{u}'_z + \mathbf{h} \cdot \mathbf{b}'_i = \mathbf{h} \cdot \mathbf{b}'_i . \quad (35.27)$$

Usando o resultado anterior na equação (35.26), obtemos

$$b_i^2 = b_i'^2 + 2\mathbf{h} \cdot \mathbf{r}'_i + h^2 . \quad (35.28)$$

Usaremos, agora, essa identidade para relacionar os momentos de inércia relativos aos dois eixos dados em (35.25), ou seja,

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{O}Z} &= \sum_{i=1}^N m_i b_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (b_i'^2 + 2\mathbf{h} \cdot \mathbf{r}'_i + h^2) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i b_i'^2 + \sum_{i=1}^N m_i 2\mathbf{h} \cdot \mathbf{r}'_i + \sum_{i=1}^N m_i h^2 . \end{aligned} \quad (35.29)$$

Identificando na última expressão o momento de inércia do sistema em relação ao eixo  $\mathcal{O}'Z'$ , reescrevemos a equação (35.29) na forma

$$I_{\mathcal{O}Z} = I_{\mathcal{O}'Z'} + 2\mathbf{h} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i + M h^2 , \quad (35.30)$$

onde  $M$  é a massa total do sistema, isto é,

$$M = \sum_{i=1}^N m_i . \quad (35.31)$$

Nesse ponto, é importante lembrar que o vetor-posição do centro de massa do sistema relativo ao ponto  $\mathcal{O}$  é dado por

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i . \quad (35.32)$$

Analogamente, se considerarmos os vetores-posição das partículas do sistema relativos ao ponto  $\mathcal{O}'$ , poderemos também escrever para o vetor-posição do centro de massa do sistema relativo a  $\mathcal{O}'$  a expressão

$$\mathbf{r}'_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i . \quad (35.33)$$

Mas, no caso em consideração,  $\mathcal{O}'$  é o centro de massa do sistema, de modo que  $\mathbf{r}'_{cm}$  é o vetor-posição do centro de massa relativo ao próprio centro de massa, isto é,  $\mathbf{r}'_{cm} = \mathbf{0}$ . Com isso, de (35.33) obtemos o seguinte resultado:

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0} . \quad (35.34)$$

Substituindo esse resultado em (35.30), obtemos  $I_{\mathcal{OZ}} = I_{\mathcal{O}'Z'} + M h^2$ . Uma vez que nesse resultado  $\mathcal{O}'$  é o centro de massa,  $\mathcal{O}' = cm$ , podemos escrever  $I_{cmZ'}$  no lugar de  $I_{\mathcal{O}'Z'}$ . Isso é conveniente para deixar bem claro que, nesse resultado, o eixo paralelo a  $\mathcal{OZ}$  tem de passar, necessariamente, pelo centro de massa do sistema. Portanto, o resultado final é escrito na forma

$$I_{\mathcal{OZ}} = I_{cmZ'} + M h^2 . \quad (35.35)$$

Levando em conta que  $h$  é a distância entre o centro de massa e o eixo  $\mathcal{OZ}$ , percebemos que  $M h^2$  seria o momento de inércia relativo ao eixo  $\mathcal{OZ}$  de uma partícula que estivesse localizada no centro de massa do sistema e cuja massa fosse a massa total do sistema. A quantidade  $M h^2$  é chamada **momento de inércia do centro de massa** relativo ao eixo  $\mathcal{OZ}$ . Podemos, então, enunciar o resultado (35.35) do seguinte modo:

*o momento de inércia de um sistema, relativo a um eixo qualquer, é a soma do momento de inércia do sistema relativo a um eixo que passa pelo centro de massa e é paralelo ao primeiro eixo com o momento de inércia do centro de massa relativo a esse eixo.*

Esse é o Teorema de Steiner, ou Teorema dos Eixos Paralelos. Graças a ele podemos nos limitar a calcular momentos de inércia de um sistema relativos apenas a eixos que passem pelo seu centro de massa. Para obter o momento de inércia em relação a qualquer outro eixo  $\mathcal{OZ}$ , basta adicionar o momento de inércia do centro de massa relativo a esse eixo ao momento de inércia relativo ao eixo que passa pelo centro de massa e é paralelo a  $\mathcal{OZ}$ .

### Exemplo 35.3

Na seção anterior, obtivemos os momentos de inércia do haltere triangular relativos aos eixos paralelos  $\mathcal{OZ}$ ,  $\mathcal{O}'Z'$  e  $\mathcal{O}''Z''$ . Uma vez que  $\mathcal{O}'Z'$  passa pelo centro de massa do haltere triangular, podemos usar o teorema de Steiner para calcular os momentos de inércia relativos aos outros dois eixos  $\mathcal{OZ}$  e  $\mathcal{O}''Z''$ . Vemos na **Figura 35.1** que a distância  $h$  entre o eixo  $\mathcal{OZ}$  e o centro de massa

é  $a\sqrt{3}/6$ , de modo que o momento de inércia de centro de massa relativo a  $\mathcal{O}Z$  é  $Mh^2 = 3m(a\sqrt{3}/6)^2 = ma^2/4$ . Usando no Teorema de Steiner, dado por (35.35), e o valor de  $I_{\mathcal{O}'Z'} = ma^2$ , dado em (35.12), obtemos

$$I_{\mathcal{O}Z} = I_{\mathcal{O}'Z'} + Mh^2 = ma^2 + (ma^2/4) = 5ma^2/4,$$

resultado que concorda com o valor obtido em (35.11). Já para o momento de inércia do sistema em relação ao eixo  $\mathcal{O}''Z''$ , cuja distância ao centro de massa é  $a\sqrt{3}/3$ , obtemos, pelo Teorema de Steiner,

$$I_{\mathcal{O}''Z''} = ma^2 + 3m(a\sqrt{3}/3)^2 = 2ma^2,$$

resultado que está de acordo com a equação (35.13).

A seqüência natural do que fizemos até aqui é generalizar a discussão anterior para distribuições contínuas de matéria. Aprender, por exemplo, como se calcula o momento de inércia de um disco homogêneo em torno de seu eixo de simetria, ou de uma esfera em torno de um eixo que passe pelo seu centro de massa, entre outros. No caso de um disco de massa  $M$  e raio  $R$ , antecipamos, na aula anterior, o resultado  $I = (1/2)MR^2$ , para que pudéssemos aplicar a equação da dinâmica de um corpo rígido em movimento de rotação em torno de um eixo fixo a um exemplo concreto. No entanto, encerraremos esta aula neste ponto para que você possa praticar um pouco e assegurar-se de que compreendeu bem os teoremas expostos anteriormente. Na próxima aula, além de aprender a calcular momentos de inércia de distribuições contínuas de matéria, você também aprenderá a determinar o centro de massa de tais distribuições e terá a oportunidade de verificar se assimilou bem todas as técnicas de cálculo que lhe foram apresentadas resolvendo uma grande lista de problemas propostos.

## Resumo

Foi justamente nesta aula que o símbolo de somatório apareceu pela primeira vez. Ele é definido de modo que a soma  $a_1 + a_2 + \dots + a_N$  seja escrita na forma

$$a_1 + a_2 + \dots + a_N = \sum_{i=1}^N a_i.$$

Já usando esse novo símbolo, a posição do centro de massa de um sistema de  $N$  partículas e seu momento de inércia em relação a um certo eixo são dados, respectivamente, por

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \quad \text{e} \quad I = \sum_{i=1}^N m_i b_i^2,$$

onde  $M$  é a massa total do sistema e  $b_i$  é a distância da  $i$ -ésima partícula ao eixo em consideração.

O momento de inércia de um sistema qualquer é igual à soma dos momentos de inércia de todos os subsistemas que o compõem. O Teorema dos Eixos Perpendiculares afirma que se toda a massa de um sistema estiver em um plano, a soma de seus momentos de inércia relativos a dois eixos que pertencem a esse plano e são ortogonais entre si é igual ao momento de inércia do sistema relativo a um eixo perpendicular ao plano e que passa pela interseção dos dois primeiros eixos. O Teorema dos Eixos Paralelos afirma que o momento de inércia de um sistema relativo a um eixo qualquer é igual à soma do momento de inércia do sistema relativo a um eixo que passa pelo seu centro de massa e é paralelo ao primeiro eixo com o momento de inércia do centro de massa relativo a esse eixo (dado pela massa total do sistema vezes o quadrado da distância do centro de massa ao primeiro eixo).

## Questionário

1. Usando o símbolo de somatório, escreva as expressões para a posição do centro de massa de sistema composto por  $N$  partículas e para o seu momento de inércia relativo a um eixo qualquer. Defina as quantidades que aparecerem em suas expressões.
2. O que afirma o Teorema dos Eixos Perpendiculares?
3. O que afirma o Teorema dos Eixos Paralelos?
4. Considere a afirmação: o momento de inércia de um sistema de partículas em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa é sempre menor do que o momento de inércia do sistema relativo a qualquer outro eixo paralelo ao primeiro, mas que não passe pelo centro de massa. Responda se é falsa ou verdadeira e justifique a sua resposta.
5. A posição do centro de massa de um sistema deve coincidir, necessariamente, com a posição de alguma das partículas que o compõem?

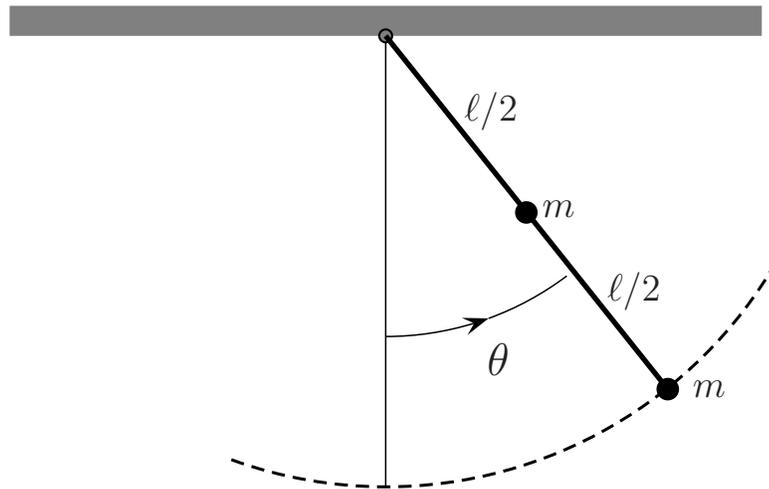
## Problemas propostos

1. Considere um quadrado de massa desprezível e lados de comprimento  $\ell$  situado no plano  $\mathcal{OXY}$  e cujos vértices estão localizados nos pontos  $P_1(0, 0, 0)$ ,  $P_2(\ell, 0, 0)$ ,  $P_3(\ell, \ell, 0)$  e  $P_4(0, \ell, 0)$ . Uma partícula de massa  $m$  é fixada no primeiro vértice (localizado em  $P_1$ ); uma outra, de massa  $2m$ , é fixada no segundo vértice; uma outra, de massa  $3m$ , no terceiro e, finalmente, uma partícula de massa  $4m$  é colocada no quarto vértice do quadrado.
  - (a) Calcule o momento de inércia desse sistema em relação ao eixo  $\mathcal{OZ}$ .
  - (b) Calcule os momentos de inércia desse sistema em relação aos eixos que passam por cada um de seus outros vértices e são paralelos ao eixo  $\mathcal{OZ}$ .
  - (c) Determine a posição do centro de massa do sistema e calcule as respectivas distâncias desse ponto a cada um dos vértices.
  - (d) Calcule o momento de inércia do sistema relativamente a um eixo que passa pelo seu centro de massa e é perpendicular ao eixo  $\mathcal{OZ}$ .
  - (e) Utilizando o resultado do item anterior e o Teorema dos Eixos Paralelos, reobtenha os momentos de inércia encontrados nos dois primeiros itens.
  
2. Reconsidere o corpo rígido do problema anterior.
  - (a) Calcule os momentos de inércia desse corpo em relação aos eixos  $\mathcal{OX}$  e  $\mathcal{OY}$ .
  - (b) Verifique a validade do Teorema dos Eixos Perpendiculares, ou seja, mostre que com os resultados obtidos no item anterior e no item (a) do problema anterior, a relação  $I_z = I_x + I_y$  é verdadeira.
  - (c) Calcule os momentos de inércia desse corpo em relação às diagonais do quadrado.
  - (d) Determine o momento de inércia do sistema em relação a um eixo paralelo ao eixo  $\mathcal{OZ}$ , mas que passa pelo centro do quadrado (centro geométrico que, nesse caso, não coincide com seu centro de massa!). Designando esse momento de inércia por  $I_c$  e por  $I_{d1}$  e  $I_{d2}$  os encontrados no item anterior, verifique a validade do Teorema dos Eixos Perpendiculares, isto é, a relação  $I_c = I_{d1} + I_{d2}$ .
  
3. Considere seis partículas idênticas, de massa  $m$  cada uma, localizadas nos vértices de um hexágono de arestas rígidas de comprimento  $\ell$ , mas de

massas desprezíveis. Suponha que haja uma partícula em cada vértice. Os eixos  $\mathcal{OXYZ}$  são escolhidos de modo que o sistema esteja no plano  $\mathcal{OXY}$ , com o seu centro de massa na origem e o eixo  $\mathcal{OX}$  passe por dois vértices do hexágono.

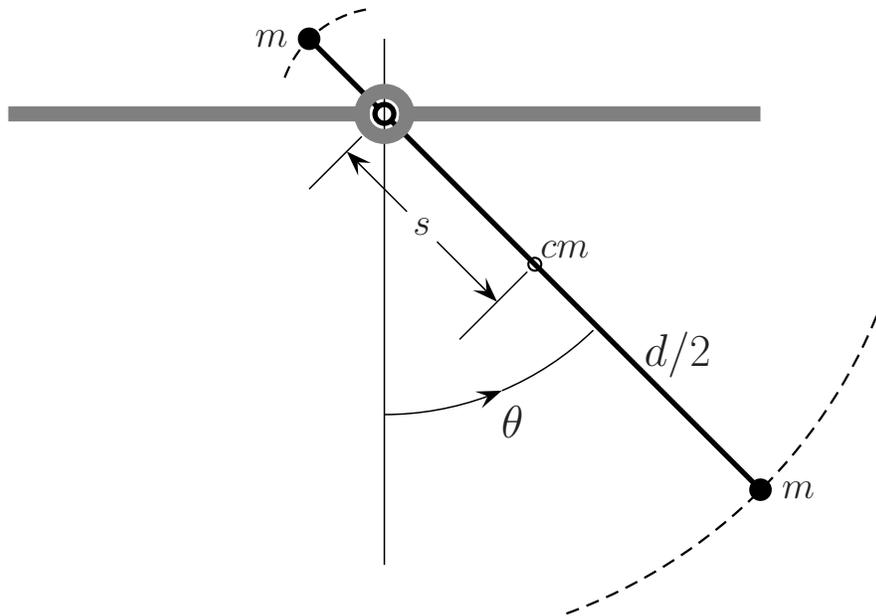
- (a) Calcule os momentos de inércia do sistema relativos aos eixos  $\mathcal{OX}$  e  $\mathcal{OY}$ , designados, respectivamente, por  $I_x$  e  $I_y$ .
  - (b) Calcule, diretamente a partir da definição, o momento de inércia do sistema em relação ao eixo  $\mathcal{OZ}$ ,  $I_z$ .
  - (c) Verifique a relação  $I_z = I_x + I_y$ .
4. Considere oito partículas idênticas, de massa  $m$  cada uma, localizadas nos vértices de um cubo de massa desprezível e arestas de comprimento  $\ell$ .
- (a) Calcule o momento de inércia do sistema relativo a um eixo que passa pelo seu centro de massa e é perpendicular a duas de suas faces.
  - (b) Calcule, diretamente a partir da definição, o momento de inércia do sistema relativo a um eixo que passa por uma de suas arestas.
  - (c) Reobtenha o resultado do item anterior, utilizando o Teorema dos Eixos Paralelos.
5. Considere um haltere formado por duas partículas idênticas, de massa  $m$  cada uma, ligadas por uma haste rígida de comprimento  $\ell$  e massa desprezível. Considere, agora, um eixo que passa por um ponto do haltere, é perpendicular a ele e está a uma distância  $s$  de uma das partículas, com  $0 \leq s \leq \ell$ . Seja  $I(s)$  o momento de inércia do haltere em relação a esse eixo.
- (a) Calcule  $I(s)$ .
  - (b) Para que valor de  $s$   $I(s)$  é mínimo? Faça um gráfico de  $I(s)$  versus  $s$ .
  - (c) Utilizando o Teorema dos Eixos Paralelos, reobtenha o valor de  $s$  para o qual  $I(s)$  é mínimo.
6. Suponha que duas partículas idênticas, de massa  $m$  cada uma, estejam grudadas em uma haste rígida de comprimento  $\ell$  e massa desprezível. Uma delas está grudada no ponto médio da barra e a outra, em um de seus extremos. A haste é pendurada em um eixo fixo pelo extremo que não contém partícula e posta para oscilar em torno desse eixo. Considere, neste problema, somente pequenas amplitudes de oscilação. A **Figura 35.5** mostra

a haste num instante genérico de seu movimento, no qual faz um ângulo  $\theta$  com a vertical.



**Figura 35.5:** Pêndulo com massas iguais concentradas no meio da haste e na extremidade oscilante.

- (a) Determine a posição do centro de massa do sistema.
  - (b) Usando a equação  $\tau = I\alpha$ , obtenha a equação diferencial que rege o movimento do sistema. Identifique o período das oscilações da haste.
  - (c) Imagine, agora, que toda a massa do sistema ( $2m$ ) estivesse grudada num ponto  $P$  da haste a uma distância  $k$  de seu ponto de suspensão. Determine o valor de  $k$  para que, nesse caso, o período seja o mesmo que o encontrado no item anterior. Verifique que o ponto  $P$  não coincide com o centro de massa do sistema cuja posição foi calculada no item (a).
7. Considere um haltere formado por duas partículas idênticas, de massa  $m$  cada uma, ligadas por uma haste rígida de comprimento  $d$  e massa desprezível. Suponha que esse haltere seja pendurado por um de seus pontos localizado a uma distância  $s$  de seu centro de massa, com  $0 \leq s \leq d/2$ , de modo que o haltere oscile em torno de um eixo fixo de rotação horizontal, como indica a **Figura 35.6**. Considere, somente, pequenas amplitudes de oscilação.



**Figura 35.6:** Haltere formado por duas partículas de massas iguais concentradas em suas extremidades oscilantes em torno de um ponto da haste, situado a uma distância  $s$  do seu centro de massa.

- (a) Utilizando a equação  $\tau = I\alpha$ , obtenha a equação diferencial que rege o movimento do haltere. Identifique o período de suas oscilações.
- (b) Nesse item você reobterá o resultado para o período encontrado no item (b) do problema anterior fazendo uma extrapolação no valor de  $s$ . Tomando  $s = 3d/2$  (é como se a haste do haltere que liga as duas massas continuasse além de uma delas) e depois substituindo  $d = \ell/2$ , obtenha o período encontrado no problema anterior.
8. Suponha que o hexágono descrito no problema 3 seja pendurado por um de seus vértices e posto para oscilar com pequenas amplitudes de oscilação em torno de um eixo fixo horizontal. Suponha ainda que, durante todo o seu movimento, o hexágono permaneça no mesmo plano vertical. Determine o período de suas oscilações.
9. Suponha que o quadrado descrito no problema 1 seja pendurado por um de seus vértices e posto para oscilar com pequenas amplitudes de oscilação em torno de um eixo horizontal. Suponha, ainda, que o quadrado permaneça durante todo o seu movimento no mesmo plano vertical. Por qual de seus

vértices devemos pendurar o quadrado para que ele tenha o menor período de oscilação?

10. Considere o sistema descrito no problema 6. Suponha agora que a haste com as duas massas grudadas seja abandonada da horizontal a partir do repouso. Determine o módulo da velocidade do centro de massa do sistema num instante em que a haste passar pela vertical.

### **Auto-avaliação**

Como você deve ter observado, esta aula não trouxe nenhum conceito novo. Nela, apresentamos somente algumas técnicas de cálculo de momento de inércia. No entanto, você deve assegurar-se de que a compreendeu totalmente pois, sem tais métodos de cálculo, será impossível descrever os movimentos dos corpos rígidos mais simples, resolver os problemas propostos nas próximas aulas e até mesmo compreender as próximas aulas. Para isso, você deve resolver agora os problemas propostos 1, 2, 3, 4 e 5. Todos esses problemas exigem apenas que você saiba calcular momentos de inércia diretamente a partir de sua definição ou utilizando os teoremas discutidos na aula. Tais problemas devem ser feitos na íntegra, pois são variações dos exemplos tratados na aula. Já os problemas 6, 7, 8, 9 e 10 envolvem, além de cálculos de momentos de inércia, conhecimentos sobre dinâmica do movimento de um corpo rígido em torno de um eixo fixo de rotação. Embora esses problemas sejam mais difíceis, depois que você conseguir resolver um deles, não terá dificuldade em resolver os outros. Você pode passar para a próxima aula sem ter resolvido os cinco últimos problemas, mas não sem ter resolvido os cinco primeiros. Obviamente, o questionário deve ser respondido integralmente.

## Aula 36 – Centro de massa e momento de inércia de distribuições contínuas de matéria

### Objetivos

- Generalizar as técnicas de cálculo de momentos de inércia, aprendidas na aula anterior, para o caso de distribuições contínuas de matéria e aplicá-las, em particular, ao caso de um corpo rígido.
- Aprender a calcular a posição do centro de massa de uma distribuição contínua de matéria.
- Aprender a utilizar corretamente as equações de movimento de um corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo na resolução de problemas simples.

### Introdução

Como mencionamos, esta aula é uma continuação natural da aula passada. O único ingrediente novo em nossa discussão é o fato de que trabalharemos com distribuições contínuas de matéria. Essa generalização é necessária, uma vez que a maioria dos corpos cujos movimentos analisaremos poderão ser idealizados como distribuições contínuas de matéria. Veremos, então, que modificações e adaptações deverão ser feitas nas fórmulas envolvendo cálculos de momentos de inércia e, também, na determinação da posição do centro de massa de um sistema de partículas (distribuição discreta de matéria) de modo a fornecerem resultados corretos para o caso de distribuições contínuas de matéria. Basicamente, somatórios darão lugar a integrais e, conseqüentemente, algumas contas irão se tornar mais extensas e complicadas. No entanto, do ponto de vista conceitual, podemos dizer que não haverá nada de novo na presente aula. Os teoremas discutidos na aula anterior - dos eixos paralelos e dos eixos perpendiculares - continuarão válidos, etc. Passemos, então, às distribuições contínuas de matéria.

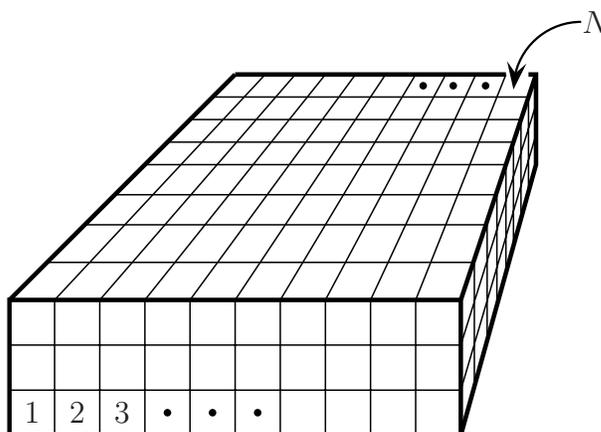
### Distribuições contínuas de matéria

Em muitos casos, do ponto de vista macroscópico, a matéria que constitui os sistemas físicos está distribuída continuamente no espaço. Tomemos, por exemplo, um pedaço de madeira, digamos o tampo de uma mesa. Vemos a madeira distribuída continuamente no espaço. O interior do tampo da mesa está

continuamente preenchido com matéria. Se pudéssemos olhar na escala microscópica do Angstrom, veríamos a estrutura granular, descontínua, da madeira; uma molécula cercada por um espaço vazio, depois outra molécula e mais espaço vazio e assim por diante. No entanto, macroscopicamente, tal estrutura granular não é perceptível e a matéria de que é constituído o pedaço de madeira aparece continuamente distribuída no espaço. O mais importante é perceber que considerar essa distribuição de matéria como contínua é conveniente para tratar os problemas da Mecânica Clássica, como faremos a seguir.

Qualquer sistema físico pode ser considerado como um conjunto de partículas. No caso em que o sistema é um corpo constituído de matéria distribuída continuamente no espaço, como o pedaço de madeira que tomamos por exemplo, as partículas são partes pequenas o bastante para que possamos considerar suas dimensões desprezíveis. A hipótese de uma distribuição contínua de matéria implica a inexistência de espaço vazio entre as partículas.

Para que todas as partes do corpo possam ser consideradas como partículas, elas devem ser em grande número. Assim, consideramos a distribuição contínua de matéria como um sistema de  $N$  pedaços, com  $N$  suficientemente grande para podermos considerar cada pedaço como uma partícula. A **Figura 36.1** ilustra um corpo considerado como um sistema de  $N$  partículas.



**Figura 36.1:** Distribuição contínua de matéria considerada como um conjunto de  $N$  paralelepípedos pequenos o suficiente para serem tratados como partículas.

O corpo foi considerado como um conjunto de  $N$  paralelepípedos pequenos o bastante para serem tratados como partículas. Caso eles não sejam suficientemente pequenos, é sempre possível aumentar o número  $N$  de modo que, na nova subdivisão, as dimensões de cada um sejam ainda menores. Essas considerações estão pressupostas sempre que consideramos um corpo como um sistema de  $N$  partículas para aplicar a eles as leis e teoremas apropriados. Desse modo, pode-

mos aplicar a um corpo com distribuição contínua de matéria, como o ilustrado na **Figura 36.1**, o Teorema do Momento Angular e Torque para um Sistema de Partículas, ou o Teorema de Steiner da seção anterior, ou qualquer um dos outros que já demonstramos para sistemas de partículas.

Para análises teóricas, é normalmente suficiente considerar qualquer corpo como um conjunto com um número suficientemente grande de partículas. Para fazer cálculos, no entanto, é muito mais apropriado lançar mão das noções do cálculo diferencial e integral para caracterizar corpos com distribuição contínua de matéria, como faremos a seguir.

Note que as distribuições de matéria não são de fato contínuas. A região do espaço ocupada por um corpo não fica toda preenchida de matéria; na verdade, essa região contém átomos separados por espaços vazios. Em escala microscópica um corpo se apresenta como uma distribuição granular de matéria. É na escala macroscópica que podemos considerar um corpo como distribuição contínua de matéria, como veremos na próxima seção.

Seja um corpo de massa  $M$  com uma distribuição contínua de matéria, ocupando uma certa região do espaço de volume  $V$ . A razão entre a massa e o volume do corpo é chamada **densidade média** desse corpo e será representada por  $\bar{\rho}$ :

$$\bar{\rho} = \frac{M}{V}. \quad (36.1)$$

Consideremos esse corpo como subdividido, inicialmente, em  $N$  corpúsculos e concentremos nossa atenção num deles. Digamos que esse corpúsculo tenha massa  $\Delta m$  e ocupe uma pequena região do espaço com volume  $\Delta V$ . A razão entre a massa e o volume desse corpúsculo é a sua **densidade média**  $\Delta m/\Delta V$ . Agora, façamos  $N$  aumentar indefinidamente, isto é, tomemos o limite  $N \rightarrow \infty$ , de tal modo que todas as dimensões de cada corpúsculo tendam a zero. Nesse caso cada corpúsculo tende a um ponto, seu volume tende a zero e sua massa também, porém, a razão entre a massa e o volume desse corpúsculo tende a um limite que denotamos por  $\rho$ , e para o qual escrevemos

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (36.2)$$

Esse limite é chamado **densidade do corpo** no ponto para o qual tendeu o corpúsculo no limite considerado. Note que esse é um limite matemático idealizado. Na prática, se desejarmos calcular a densidade de um corpo em um certo ponto, devemos tomar um pequeno volume em torno desse ponto com as seguintes propriedades: ele deve ser pequeno o bastante para ser desprezado no problema em consideração (ou seja, desprezível do ponto de vista macroscópico), mas grande

o bastante para que a estrutura atômica da matéria ainda não seja perceptível (ou seja, grande o suficiente para conter milhares e milhares de moléculas). Portanto, na prática, não tomamos o limite  $\Delta V \rightarrow 0$  que aparece em (36.2) mas, apenas, um  $\Delta V$  apropriadamente pequeno.

Com o limite (36.2), fica associado a cada ponto do corpo um número real  $\rho$ , sua densidade no ponto. Dizemos que a densidade é dada por uma função real cujo domínio é constituído pelos pontos do corpo. É comum, na linguagem do cálculo, escrever a densidade em (36.2) como uma razão de diferenciais  $dm$  e  $dV$ , que consideramos infinitesimais,

$$\rho = \frac{dm}{dV} . \quad (36.3)$$

Para obtermos a massa contida numa região  $\mathcal{R}$  no interior do corpo, fazemos uma integral de volume da densidade nessa região. Denotando por  $M(\mathcal{R})$  a massa dentro da região  $\mathcal{R}$ , temos

$$M(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} dm = \int_{\mathcal{R}} \rho dV . \quad (36.4)$$

Se integrarmos na região inteira ocupada pelo corpo obteremos sua massa total  $M$ ,

$$M = \int_{(\text{corpo})} dm = \int_{(\text{corpo})} \rho dV . \quad (36.5)$$

Se a densidade do corpo for a mesma em todos os seus pontos, dizemos que a densidade é uniforme e que o corpo é uma distribuição homogênea, ou uniforme, de matéria. Nesse caso, a densidade pode ser retirada da integral em (36.4) e (36.5). Nessa última equação, por exemplo, obtemos:

$$M = \int_{(\text{corpo})} \rho dV = \rho \int_{(\text{corpo})} dV = \rho V \quad (36.6)$$

e, portanto,

$$\rho \text{ uniforme} \implies \rho = \frac{M}{V} = \bar{\rho} , \quad (36.7)$$

onde foi usada a definição (36.1) de densidade média do corpo. Desse modo, concluímos que

*se a densidade do corpo é uniforme, ela é igual à densidade média, isto é, a razão entre a massa total e volume total do corpo.*

Em nosso estudo, analisaremos apenas corpos com densidade uniforme. Vale ressaltar que estamos considerando somente corpos rígidos, de modo que

a densidade em cada ponto do corpo não muda com o tempo, ou seja, é constante. Em suma, consideraremos corpos com densidades uniformes e constantes.

Para chegar ao conceito de densidade, tomamos na equação (36.2) o limite em que o número  $N$  de corpúsculos em que subdividimos o corpo tende a infinito e cada corpúsculo tende a um ponto. Tal limite pode ser tomado de maneira a obter, para corpos contínuos, expressões convenientes de quantidades definidas para sistemas de  $N$  partículas.

### Cálculo do centro de massa de distribuições contínuas de matéria

Nesta subseção, vamos considerar o conceito de centro de massa de um sistema de partículas. Suponhamos que nosso corpo tenha sido, inicialmente, subdividido em  $N$  corpúsculos, suficientemente pequenos para que possamos considerá-los como uma partículas. Representemos suas massas por  $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_N$  e seus respectivos vetores-posição por  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ . Aplicando a esses  $N$  corpúsculos a definição de centro de massa do sistema, temos

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \Delta m_i \mathbf{r}_i . \quad (36.8)$$

Essa é a posição do centro de massa com uma boa precisão, pois os corpúsculos foram considerados suficientemente pequenos para os propósitos em tela. Contudo, podemos obter a posição do centro de massa com precisão absoluta tomando o limite anterior, em que  $N \rightarrow \infty$  e cada corpúsculo tende a um ponto. Nesse limite, a equação (36.8) se transforma na expressão

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta m_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N \Delta m_i \mathbf{r}_i = \frac{1}{M} \int_{(corpo)} \mathbf{r} dm , \quad (36.9)$$

onde, por questão de costume, a massa  $dm$  foi escrita à direita do vetor-posição, e a expressão  $(corpo)$  junto à integral é para lembrar que os limites de integração devem levar em conta todo o corpo. Em (36.9)  $\mathbf{r}$  é o vetor-posição de um ponto arbitrário do corpo, em torno do qual um volume infinitesimal tem massa  $dm$ , isto é,  $dm = \rho dV$ . Portanto, a equação (36.9) pode ser reescrita como

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int_{(corpo)} \mathbf{r} \rho dV . \quad (36.10)$$

Um corpo pode ter uma de suas dimensões pequena o bastante para que ele seja considerado como uma distribuição de matéria restrita a uma dada superfície. O exemplo mais usual é o de uma folha de papel. O comprimento e a largura

da folha são dimensões que levamos em conta, enquanto sua espessura é normalmente desprezível se vamos estudar o seu movimento. Desse modo, podemos fazer uma idealização, considerando a folha de papel, geometricamente, como uma superfície que tem uma certa área, mas volume desprezível. Um corpo que possa ser tratado dessa forma é chamado uma distribuição superficial de matéria. Para um corpo como esse, definimos **densidade superficial média** como a razão entre sua massa total  $M$  e sua área total  $A$ . Denotando tal densidade por  $\bar{\sigma}$ , temos  $\bar{\sigma} = M/A$ . Podemos subdividir a superfície ocupada pelo corpo em  $N$  pequenos pedaços e tomar o limite em que  $N \rightarrow \infty$  e cada pedaço tende a um ponto, em analogia com o que fizemos anteriormente para um corpo tridimensional. No presente caso chegamos ao conceito de **densidade superficial**  $\sigma$  para cada ponto do corpo:  $\sigma = dm/dA$ . Para obter a massa total  $M$  do corpo, integramos a densidade superficial em toda a superfície ocupada por ele,

$$M = \int_{(\text{corpo})} dm = \int_{(\text{corpo})} \sigma dA . \quad (36.11)$$

Se a densidade superficial é uniforme, isto é, a mesma em todos os pontos da superfície, então ela é igual à densidade superficial média,  $\sigma = \bar{\sigma} = M/A$ . Para um corpo que tenha uma distribuição superficial de matéria, a posição de seu centro de massa é dada por

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int_{(\text{corpo})} \mathbf{r} dm = \frac{1}{M} \int_{(\text{corpo})} \mathbf{r} \sigma dA , \quad (36.12)$$

Um corpo também pode ter duas de suas dimensões pequenas o bastante para ser considerado geometricamente como uma linha, como uma distribuição de matéria restrita a uma dada dimensão no espaço. Dois exemplos de um tal tipo de corpo são dados por uma linha comum de costura e por um pedaço de fio da rede elétrica doméstica. O comprimento de uma linha de costura é uma dimensão que costumamos considerar, mas o raio da seção reta dessa linha é normalmente desprezível na análise de seu movimento. Um corpo que pode ser considerado geometricamente como uma linha é chamado uma distribuição linear de matéria. Para uma distribuição linear de matéria, definimos **densidade linear média** como a razão entre sua massa total  $M$  e seu comprimento total  $\ell$ . Denotando tal densidade por  $\bar{\lambda}$ , temos  $\bar{\lambda} = M/\ell$ . Podemos subdividir a linha ocupada por tal corpo em  $N$  pequenos pedaços e tomar o limite em que  $N \rightarrow \infty$  e cada pedaço tende a um ponto, em analogia com o que fizemos anteriormente para os corpos tridimensionais e bidimensionais. No caso dos corpos lineares, chegamos ao conceito de **densidade linear**  $\lambda$  para cada ponto do corpo:  $\lambda = dm/d\ell$ . Para obter a massa total  $M$  do corpo linear, integramos a densidade linear em toda a linha ocupada pelo corpo,

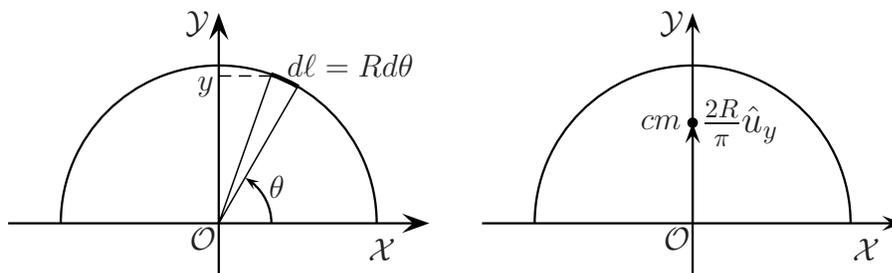
$$M = \int_{(corpo)} dm = \int_{(corpo)} \lambda dl . \quad (36.13)$$

Caso a densidade linear seja uniforme, seu valor será igual ao da densidade linear média,  $\lambda = \bar{\lambda} = M/\ell$ . Para uma distribuição linear de matéria, a posição do centro de massa é dada por

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int_{(corpo)} \mathbf{r} dm = \frac{1}{M} \int_{(corpo)} \mathbf{r} \lambda dl . \quad (36.14)$$

### Exemplo 36.1

A fim de ilustrar o cálculo da posição do centro de massa de uma distribuição contínua de matéria, consideremos o exemplo simples de metade de um anel homogêneo de raio  $R$  e massa  $M$  (o centro de massa de um anel homogêneo está, obviamente, no centro do anel). Por conveniência, escolhemos os eixos cartesianos de modo que essa distribuição esteja no plano  $\mathcal{OXY}$ , tendo como eixo de simetria o eixo  $\mathcal{OY}$  e com a origem numa posição eqüidistante de todos os pontos da distribuição, como indica a **Figura 36.2**.



**Figura 36.2:** O centro de massa de meio anel homogêneo de raio  $R$  está localizado no eixo de simetria da distribuição e a uma distância  $2R/\pi$  de seu centro.

Usando a última equação e escrevendo o vetor-posição do centro de massa do sistema como  $\mathbf{r}_{cm} = x_{cm}\mathbf{u}_x + y_{cm}\mathbf{u}_y$ , temos

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \lambda \int_{corpo} x dl \quad \text{e} \quad y_{cm} = \frac{1}{M} \lambda \int_{corpo} y dl .$$

Como a distribuição é homogênea e para cada elemento de massa  $dM$  com coordenada  $x$  existe um outro de mesma massa com coordenada  $-x$ , concluímos facilmente que  $x_{cm} = 0$ .

Para calcularmos  $y_{cm}$ , faremos a seguinte transformação de variáveis:  $y = R \operatorname{sen} \theta$  (veja novamente a **Figura 36.2**). A fim de integrarmos em  $\theta$ , escreveremos  $d\ell = R d\theta$ , de modo que

$$y_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M} \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta \, d\theta = \frac{\lambda R^2}{M} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = \frac{2\lambda R^2}{M}. \quad (36.15)$$

Substituindo na equação anterior  $\lambda = M/(\pi R)$ , temos  $y_{cm} = 2R/\pi$ , e com isso, o vetor-posição do centro de massa desejado é dado por  $\mathbf{r}_{cm} = (2/\pi)R\mathbf{u}_y$ , como indicado na **Figura 36.2**.

### Momento de inércia de distribuições contínuas de matéria

Nesta subseção, vamos considerar o momento de inércia de um corpo relativo a um dado eixo. Repetindo o mesmíssimo processo de limite que acabamos de aplicar ao conceito de centro de massa, podemos partir da definição de momento de inércia de um sistema de  $N$  partículas e, após tomar o limite apropriado, escrever que o momento de inércia de um corpo contínuo é dado pela integral

$$I = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta m_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N \Delta m_i b_i^2 = \int_{(\text{corpo})} b^2 \, dm, \quad (36.16)$$

onde  $b$  é a distância de  $dm$  ao eixo em consideração. Usando o conceito de densidade, temos

$$I = \int_{(\text{corpo})} b^2 \rho \, dV. \quad (36.17)$$

Analogamente, no caso de distribuições superficiais e lineares de matéria, temos, respectivamente,

$$I = \int_{(\text{corpo})} b^2 \, dm = \int_{(\text{corpo})} b^2 \sigma \, dA, \quad (36.18)$$

e

$$I = \int_{(\text{corpo})} b^2 \, dm = \int_{(\text{corpo})} b^2 \lambda \, d\ell, \quad (36.19)$$

onde  $b$  é a distância entre o elemento de massa  $dm$  e o eixo em consideração.

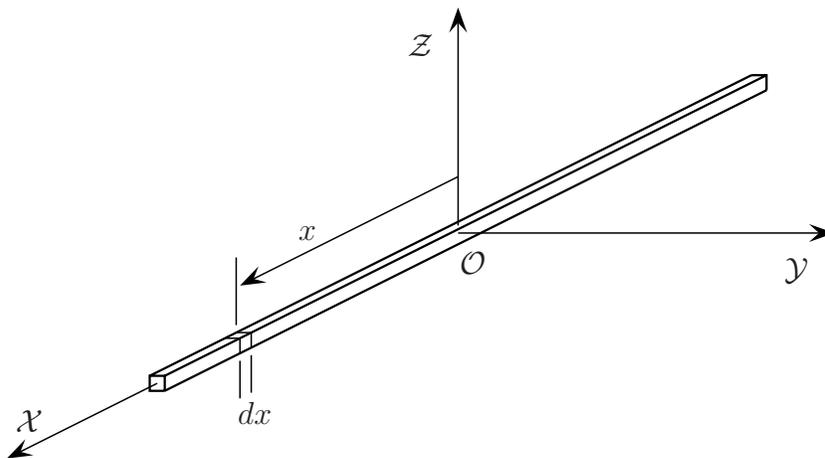
É importante observar que todos os teoremas sobre momentos de inércia demonstrados na seção anterior são válidos para corpos que são distribuições contínuas de massa. De fato, as demonstrações dos teoremas, feitas para sistemas de  $N$  partículas, dependiam das propriedades de que o somatório da soma é a soma dos somatórios e de que as quantidades que não dependem do índice do somatório podem ser escritas dentro ou fora deles. Ora, também a integral da

soma é a soma das integrais e as quantidades que não dependem da variável de integração podem ser escritas dentro ou fora das integrais correspondentes. Com isso, é fácil verificar que os teoremas anteriores podem igualmente ser demonstrados para sistemas com distribuições contínuas de massa. A seguir, mostraremos em alguns exemplos como se calcula o momento de inércia de um corpo rígido. Aproveitaremos esses exemplos para calcular o momento de inércia de alguns corpos rígidos com os quais faremos exercícios futuramente, como barras, anéis, discos e esferas.

### Exemplo 36.2

Seja uma barra homogênea de massa  $M$ , comprimento  $a$  e seção reta desprezível, conforme ilustrado na **Figura 36.3**. Calculemos o momento de inércia dessa barra em relação a um eixo perpendicular a ela e que passa pelo seu centro de massa. A barra é uma distribuição linear de matéria, pois sua seção reta é desprezível. Sendo homogênea, sua densidade é uniforme e, portanto, dada por  $\lambda = M/a$ . Não é necessário nenhum cálculo para determinar o centro de massa da barra. Como ela é homogênea, ele está no seu centro geométrico.

Seja  $\mathcal{OZ}$  um eixo perpendicular à barra com a origem  $\mathcal{O}$  no seu centro de massa, conforme indicado na **Figura 36.3**. Para uso futuro, também indicamos nesta figura os eixos  $\mathcal{OX}$  e  $\mathcal{OY}$ ; o eixo  $\mathcal{OX}$  foi escolhido ao longo da barra. Para obter o momento de inércia relativo ao eixo  $\mathcal{OZ}$ , usamos a fórmula (36.19). Na **Figura 36.3** está claro que a distância do elemento de massa  $dm$  até o eixo  $\mathcal{OZ}$  é  $|x|$ , que o comprimento desse elemento de massa é  $dx$  e que os limites de integração que abrangem toda a barra são  $x = -a/2$  e  $x = a/2$ .



**Figura 36.3:** Barra homogênea de massa  $M$  e comprimento  $a$ . Os eixos cartesianos foram escolhidos de modo que a barra esteja ao longo do eixo  $\mathcal{OX}$  e com o seu centro de massa na origem.

Portanto, temos

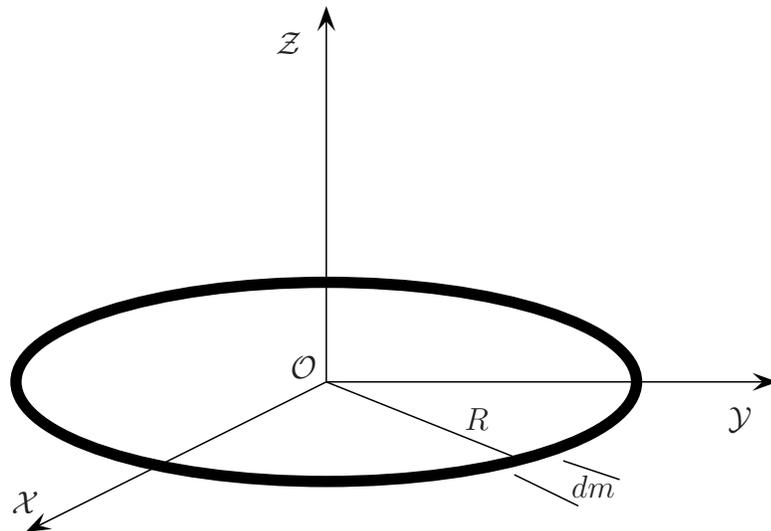
$$I_{OZ} = \int_{(barras)} b^2 dm = \int_{-a/2}^{a/2} |x|^2 \lambda dx = \lambda \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx, \quad (36.20)$$

onde usamos o fato de que o módulo de um número ao quadrado é igual ao quadrado do número e que a densidade linear  $\lambda$  é uniforme e, portanto, pode ser retirada da integral. A integral em (36.20) é trivial, e obtemos imediatamente  $I_{OZ} = \lambda a^3/12$ . Substituindo nessa expressão o valor da densidade uniforme,  $\lambda = M/a$ , obtemos

$$I_{OZ} = \frac{1}{12} M a^2. \quad (36.21)$$

### Exemplo 36.3

Seja um anel homogêneo de raio  $R$ , massa  $M$  e seção reta desprezível. Calculemos o seu momento de inércia relativo a um eixo  $OZ$  que passa pelo seu centro de massa e é perpendicular ao plano do anel. Sendo o anel homogêneo, seu centro de massa é o centro da circunferência formada pelo anel e escolhemos nesse ponto a origem  $O$  do eixo, tal como indicado na **Figura 36.4**.



**Figura 36.4:** Anel homogêneo de massa  $M$  e raio  $R$  localizado no plano  $OXY$  e com o seu centro de massa na origem.

A densidade linear do anel é  $\lambda = M/(2\pi R)$ . Usando a fórmula (36.19) para o anel, obtemos

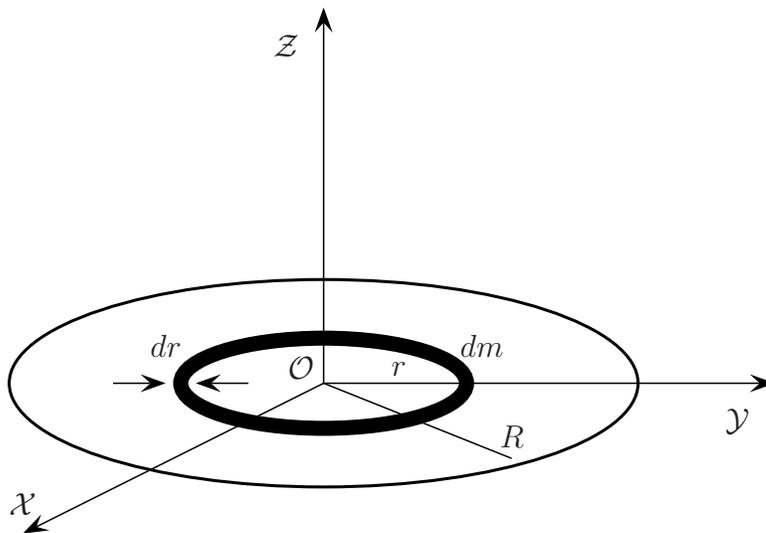
$$I_{OZ} = \int_{(anel)} b^2 dm = \int_{(anel)} R^2 dm = R^2 \int_{(anel)} dm = R^2 M, \quad (36.22)$$

onde usamos o fato de que qualquer elemento de massa do anel está à distância  $R$  do eixo  $OZ$ . Esse cálculo é tão simples que não foi necessário usar o conceito de densidade linear. Temos, pois, para o momento de inércia do anel:

$$I_{OZ} = M R^2 . \quad (36.23)$$

### Exemplo 36.4

Seja um disco homogêneo muito fino de raio  $R$  e massa  $M$ , de modo que sua espessura seja desprezível. Ou seja, trata-se de uma distribuição superficial de massa com densidade uniforme  $\sigma = M/(\pi R^2)$ . Calcularemos o seu momento de inércia relativo a um eixo  $OZ$  perpendicular ao plano do disco e que passa pelo seu centro de massa. O modo mais simples de fazer esse cálculo é aproveitar o resultado anterior obtido para o caso de um anel homogêneo e usar um artifício muito útil em cálculos desse tipo, que explicaremos a seguir. Consideraremos a distribuição contínua de matéria (o disco, no caso) como a união de distribuições infinitesimais cujos momentos de inércia já são conhecidos. No caso do disco, iremos considerá-lo como formado pela união de anéis concêntricos de larguras infinitesimais, como indicado na **Figura 36.5**. Nela, está desenhado um anel infinitesimal de raio interno  $r$  e externo  $r + dr$ , ou seja, um anel de raio  $r$  e largura infinitesimal  $dr$ .



**Figura 36.5:** Disco formado pela união de anéis concêntricos de larguras infinitesimais  $dr$ .

Usando o fato de que o momento de inércia de um corpo qualquer em relação a um eixo é igual à soma dos momentos de inércia, em relação a esse eixo, de todos os subsistemas que formam esse corpo, podemos obter o momento

de inércia do disco somando os momentos de inércia de todos os anéis infinitesimais que o formam. Como veremos, por se tratar de uma distribuição contínua, esse processo corresponderá a uma integração.

O momento de inércia do anel de raio  $r$  e largura infinitesimal  $dr$  em torno de  $\mathcal{OZ}$  é  $dI_{\mathcal{OZ}} = dMr^2$ , onde  $dM$  é a sua massa. Como a área infinitesimal desse anel é  $dA = 2\pi r dr$ , temos  $dM = \sigma 2\pi r dr$ , de modo que o momento de inércia do disco é dado por

$$I_{\mathcal{OZ}} = \int_{\text{disco}} dI_{\mathcal{OZ}} = \int_{\text{disco}} dM r^2 = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr, \quad (36.24)$$

integrando e eliminando  $\sigma$ , isto é, fazendo a substituição  $\sigma = M/(\pi R^2)$ , obtemos

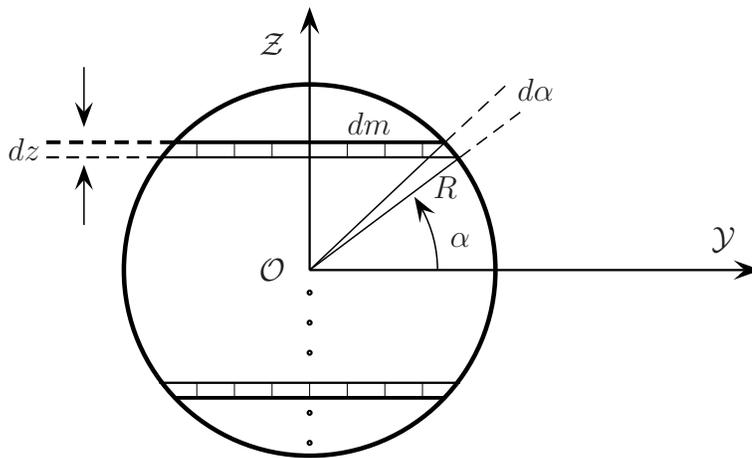
$$I_{\mathcal{OZ}} = 2\pi \left( \frac{M}{\pi R^2} \right) \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \implies I_{\mathcal{OZ}} = \frac{1}{2} MR^2. \quad (36.25)$$

### Exemplo 36.5

Com o mesmo tipo de raciocínio utilizado no cálculo anterior, calcularemos, neste exemplo, o momento de inércia de uma esfera homogênea de raio  $R$  e massa  $M$  em relação a um eixo qualquer que passe pelo seu centro de massa (que obviamente está no centro da esfera). Designemos esse eixo por  $\mathcal{OZ}$ . Consideraremos a esfera como uma pilha de discos de espessuras infinitesimais  $dz$ , todos com seus centros no eixo  $\mathcal{OZ}$  e com raios apropriadamente escolhidos como indica a **Figura 36.6**. Na figura está desenhado um disco genérico de raio  $r = R \cos\alpha$ , cujo centro tem coordenada ao longo do eixo  $z = R \sin\alpha$ . Esse disco tem uma espessura infinitesimal  $dz = R \cos\alpha d\alpha$ , de modo que seu volume infinitesimal é dado por  $dV = \pi r^2 dz = \pi R^3 \cos^3\alpha d\alpha$ . A massa  $dm$  desse disco é dada, então, por  $dm = \rho dV = \pi R^3 \cos^3\alpha d\alpha$ , onde  $M = \rho(4/3)\pi R^3$ .

O momento de inércia da esfera  $I_{\mathcal{OZ}}$  é simplesmente igual à soma dos momentos de inércia de todos esses discos infinitesimais, ou seja,  $I_{\mathcal{OZ}} = \int dI_{\mathcal{OZ}}$ , onde  $dI_{\mathcal{OZ}} = (1/2)dmr^2$ . Substituindo as expressões de  $dm$  e  $r$  escritas anteriormente em termos do ângulo  $\alpha$ , obtemos

$$I_{\mathcal{OZ}} = \frac{1}{2} \rho \pi R^5 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^5\alpha d\alpha. \quad (36.26)$$



**Figura 36.6:** Esfera formada pela união de discos de espessuras infinitesimais, paralelos entre si e todos com seus centros no eixo  $OZ$ . Por conveniência, desenhamos apenas um corte passando pelo centro da esfera e contendo o eixo  $OZ$ .

Essa integração pode ser feita facilmente se fizermos a seguinte transformação de variáveis:

$$\xi = \text{sen} \alpha \implies \cos \alpha \, d\alpha = d\xi \quad \text{e} \quad \cos^4 \alpha = (1 - \text{sen}^2 \alpha)^2 = 1 - 2\xi^2 + \xi^4,$$

de modo que  $\cos^5 \alpha \, d\alpha = (1 - 2\xi^2 + \xi^4) d\xi$ . Substituindo a última expressão na integração que aparece na equação (36.26), obtemos

$$\begin{aligned} I_{OZ} &= \frac{1}{2} \rho \pi R^5 \int_{-1}^{+1} (1 - 2\xi^2 + \xi^4) d\xi \\ &= \frac{1}{2} \rho \pi R^5 \left\{ \xi - \frac{2}{3} \xi^3 + \frac{1}{5} \xi^5 \right\} \Big|_{-1}^{+1} \\ &= \frac{8}{15} \rho \pi R^5. \end{aligned} \quad (36.27)$$

Para escrevermos o resultado em termos de  $M$  e  $R$ , basta substituir  $\rho = \frac{M}{(4/3)\pi R^3}$ , o que nos leva ao resultado

$$I_{OZ} = \frac{8}{15} \left( \frac{3M}{4\pi R^3} \right) \pi R^5 \implies I_{OZ} = \frac{2}{5} MR^2. \quad (36.28)$$

### Exemplos simples de movimentos de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo.

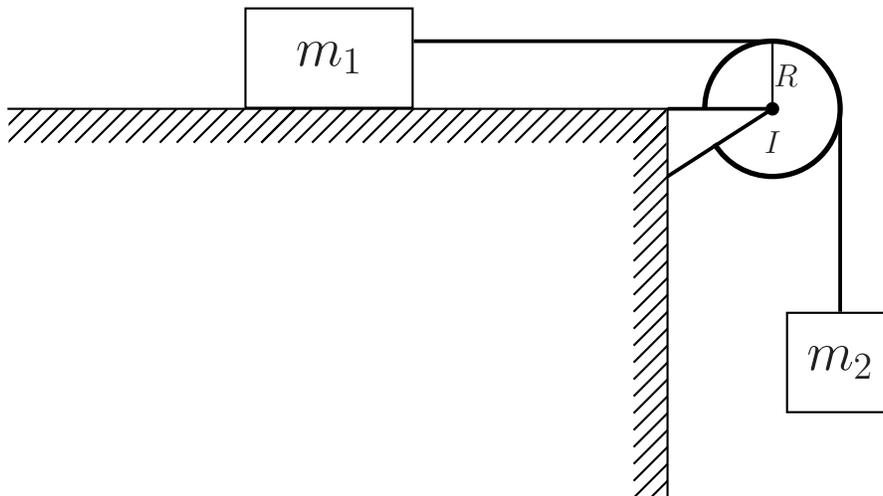
Uma vez que aprendemos a calcular momentos de inércia de distribuições contínuas de matéria em relação a um eixo, estamos aptos a resolver muitos problemas simples envolvendo corpos rígidos em movimentos de rotação em torno de um eixo fixo. Para não alongar mais ainda esta aula, apresentaremos apenas

dois exemplos, mas vários problemas sobre esse assunto poderão ser encontrados na lista de problemas propostos. Não deixe de tentar fazê-los antes de prosseguir, pois, com certeza, isso o ajudará muito na compreensão da próxima aula (última aula teórica de nosso curso). Os exemplos que apresentaremos a seguir foram escolhidos cuidadosamente: o primeiro deles retrata a situação experimental que você encontrará na Aula 37, última aula experimental de nosso curso, e que tem por objetivo principal medir o momento de inércia de um corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo; já o segundo exemplo ilustra as oscilações de um **pêndulo físico**, nome que se dá a um corpo rígido que oscila, sob a ação da gravidade, com um de seus pontos fixos. Passemos, então, a esses dois exemplos.

### Exemplo 36.6

Um fio ideal tem uma de suas extremidades presa a um bloco de massa  $m_1$  que pode se mover sobre uma superfície horizontal lisa. Esse fio passa por uma roldana de raio  $R$  e, a partir daí, tem a direção vertical. Em seu extremo inferior, está preso um outro bloco, de massa  $m_2$ , que se move para baixo devido à ação da gravidade, como ilustra a **Figura 36.7**. A roldana tem momento de inércia  $I$  relativo ao seu eixo e pode girar em torno dele. Por hipótese, o atrito com o eixo é desprezível. Suponha, ainda, que o fio não deslize sobre a roldana. Essa última condição faz com que as velocidades dos pontos do fio em contato com a roldana sejam iguais, em módulo, às velocidades dos pontos da periferia da roldana. O mesmo vale para as acelerações, ou seja, as acelerações dos pontos do fio em contato com a roldana são iguais, em módulo, às acelerações dos pontos da periferia da roldana. Conseqüentemente, como o fio é inextensível, os blocos terão, necessariamente, acelerações de mesmo módulo.

Nosso objetivo é determinar o módulo das acelerações dos blocos e entender como o momento de inércia da roldana influencia nesse resultado. Note que se a roldana for fixada (isto é, não girar) e não existir atrito entre o fio e a roldana, o problema fica bem simples; certamente você já resolveu anteriormente e encontrou para o módulo das acelerações dos blocos o valor  $a = m_2g/(m_1 + m_2)$  (caso nunca tenha obtido esse resultado, aproveite a oportunidade de fazê-lo agora). Será que esse mesmo resultado é obtido se a roldana puder girar mas seu momento de inércia for desprezível? Ao final desse exemplo seremos capazes de responder a essa pergunta.



**Figura 36.7:** Bloco pendurado por um fio ideal que, por meio de uma roldana que gira em torno de um eixo fixo horizontal, puxa um outro, que desliza sem atrito sobre uma superfície horizontal.

Por conveniência, escolheremos o eixo  $\mathcal{OZ}$  perpendicular à roldana, apontando para dentro do papel e com origem no centro da roldana. Para descobrir o módulo da aceleração de cada bloco, que denotaremos por  $a$ , devemos escrever as equações de movimento apropriadas para cada um dos três corpos envolvidos no problema. Aplicando a Segunda Lei de Newton aos blocos, temos,

$$T_1 = m_1 a \quad (36.29)$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a, \quad (36.30)$$

onde  $T_1$  e  $T_2$  são as tensões nas partes do fio em contato com o bloco de massa  $m_1$  e em contato com o bloco de massa  $m_2$ , respectivamente (por que essas tensões não são iguais, já que trata-se do mesmo fio?).

Para o movimento de rotação da roldana em torno do eixo (fixo)  $\mathcal{OZ}$ , vamos utilizar o Teorema do Momento Angular e Torque. Observando que tanto o peso da roldana quanto a força exercida pelo eixo sobre ela não produzem torque relativo à origem, pois estão aplicadas justamente nesse ponto, temos

$$(T_2 - T_1)R = I\alpha, \quad (36.31)$$

onde  $\alpha$  é a componente da aceleração angular vetorial da roldana ao longo do eixo  $\mathcal{OZ}$ . Note, agora, que com as três equações (36.29), (36.30) e (36.31) não somos capazes, ainda, de resolver o problema, pois nelas temos quatro incógnitas, a saber,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $a$  e  $\alpha$ . Devemos buscar mais uma equação relacionando algumas dessas quantidades. Lembrando que as acelerações dos pontos da periferia da

roldana têm, todos, acelerações de módulo  $\alpha R$  e usando o fato de que o fio não desliza sobre a roldana, podemos afirmar que

$$a = \alpha R \quad \implies \quad \alpha = \frac{a}{R}. \quad (36.32)$$

Agora sim, as equações (36.29), (36.30), (36.31) e (36.32) nos fornecem um sistema de quatro equações e quatro incógnitas. A solução desse sistema será deixada como problema proposto. Aqui, nos limitaremos apenas a colocar os resultados e fazer os comentários pertinentes. Pode-se mostrar, então, que

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2 + I/R^2}; \quad (36.33)$$

$$T_1 = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + I/R^2}; \quad (36.34)$$

$$T_2 = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + I/R^2} \left( 1 + \frac{I}{m_1 R^2} \right). \quad (36.35)$$

Uma inspeção direta nas equações anteriores nos mostram que no limite em que  $I \rightarrow 0$ , temos:

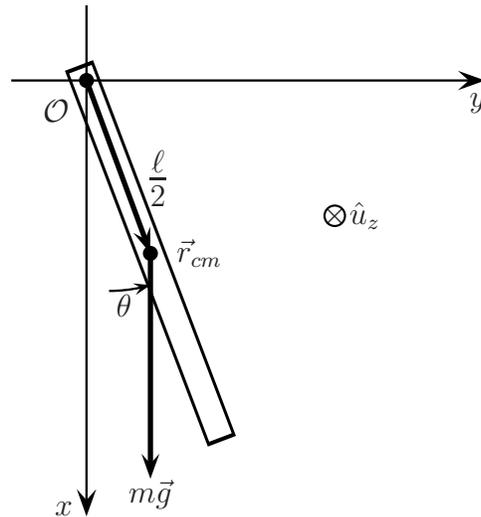
$$a \longrightarrow \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} \quad \text{e} \quad T_2 \longrightarrow T_1,$$

de modo que a pergunta que fizemos no início desse exemplo fica respondida. Esse é um resultado bastante natural, pois, nesse limite, a inércia da roldana para o movimento de rotação é nula, ou seja, ela pode adquirir aceleração angular “a custo zero”, sem que nenhum torque resultante sobre ela seja necessário. Por esse mesmo motivo, as tensões nas duas partes do fio passam a ser iguais. Se isso não ocorresse, haveria um torque resultante sobre a roldana e, como  $I = 0$ , ela iria adquirir uma aceleração angular infinita, o que não faria sentido.

### Exemplo 36.7

Neste exemplo, vamos considerar um corpo rígido que está suspenso por um de seus pontos e estudar as suas oscilações sob a ação da gravidade. Vamos supor que o movimento do corpo é tal que cada um de seus pontos descreve um movimento num plano vertical. Esse tipo de pêndulo, formado por um corpo rígido oscilando em torno de um eixo que passa por um de seus pontos é chamado, como já mencionamos, pêndulo físico.

Por simplicidade, vamos supor que o nosso pêndulo físico seja formado por uma barra homogênea, de massa  $m$  e comprimento  $\ell$ , que tem seu extremo superior fixo como indica a **Figura 36.8**. Escolheremos os eixos cartesianos de modo que a barra oscile no plano  $\mathcal{OXY}$ , com seu extremo superior na origem dos eixos, com o eixo  $\mathcal{OX}$  na vertical e apontando para baixo, e com o eixo  $\mathcal{OY}$  na



**Figura 36.8:** Barra homogênea de massa  $M$  e comprimento  $\ell$  que tem seu extremo superior fixo e oscila sob a ação da gravidade.

horizontal e apontando para a direita. Seja  $\theta$  o ângulo formado entre a barra e o eixo  $\mathcal{O}\mathcal{X}$ .

Para estabelecermos a equação diferencial de movimento para a barra, vamos utilizar o Teorema do Momento Angular e Torque, que no caso em questão pode ser escrito na forma

$$\boldsymbol{\tau}^{ex} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I\boldsymbol{\alpha}, \quad (36.36)$$

onde  $\mathbf{L}$  é o momento angular da barra relativo à origem,  $\boldsymbol{\tau}^{ex}$  é o torque externo total sobre a barra relativo à origem, e  $I$  o momento de inércia da barra relativo a um eixo perpendicular a ela que passa por um de seus extremos. Sendo o peso da barra a única força externa que produz torque relativo à origem, temos

$$\boldsymbol{\tau}^{ex} = \mathbf{r}_{cm} \times m\mathbf{g} = -\frac{\ell}{2}mg \operatorname{sen}\theta \mathbf{u}_z. \quad (36.37)$$

O sinal negativo surge, pois quando  $\theta > 0$ , temos  $\operatorname{sen}\theta > 0$  e, portanto,  $\boldsymbol{\tau}$  aponta para dentro da folha de papel, no sentido contrário ao do unitário  $\mathbf{u}_z$ . Quando  $\theta < 0$ , temos  $\operatorname{sen}\theta < 0$  fazendo com que  $\boldsymbol{\tau}$  aponte para fora da folha de papel, no mesmo sentido do unitário  $\mathbf{u}_z$  (faça mentalmente esses produtos vetoriais e verifique agora mesmo as afirmativas anteriores).

Em contrapartida, usando o fato de que  $\boldsymbol{\omega} = (d\theta/dt)\mathbf{u}_z$ , temos

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{u}_z. \quad (36.38)$$

A partir das equações (36.36), (36.37) e (36.38), obtemos

$$-\frac{\ell}{2}mg \operatorname{sen}\theta \mathbf{u}_z = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{u}_z \quad \implies \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mg\ell}{2I} \operatorname{sen}\theta = 0. \quad (36.39)$$

Substituindo na equação anterior o momento de inércia da barra relativo ao eixo  $\mathcal{OZ}$ , dado por  $I = (1/3)m\ell^2$  (veja o problema proposto 3), e supondo, ainda, que  $|\theta| \ll 1$  (pequenas oscilações), obtemos

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{2\ell}\theta = 0. \quad (36.40)$$

Portanto, no caso de pequenas amplitudes de oscilação, a barra executa oscilações harmônicas de período igual a  $2\pi\sqrt{2\ell/3g}$ . No problema 9 você analisará as oscilações dessa barra considerando pontos de suspensão intermediários entre o extremo da barra e seu centro de massa.

## Resumo

É justamente nesta aula que o símbolo de somatório aparece pela primeira vez. Ele é definido de modo que a soma  $a_1 + a_2 + \dots + a_N$  seja escrita na forma

$$a_1 + a_2 + \dots + a_N = \sum_{i=1}^N a_i.$$

Já usando esse novo símbolo, a posição do centro de massa de um sistema de  $N$  partículas e seu momento de inércia em relação a um certo eixo são dados, respectivamente, por

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \quad \text{e} \quad I = \sum_{i=1}^N m_i b_i^2,$$

onde  $M$  é a massa total do sistema e  $b_i$  é a distância da  $i$ -ésima partícula ao eixo em consideração.

O momento de inércia de um sistema qualquer é igual à soma dos momentos de inércia de todos os subsistemas que o compõem. O Teorema dos Eixos Perpendiculares afirma que se toda a massa de um sistema estiver num plano, a soma de seus momentos de inércia relativos a dois eixos que pertencem a esse plano e são ortogonais entre si é igual ao momento de inércia do sistema relativo a um eixo perpendicular ao plano e que passa pela interseção dos dois primeiros eixos. O Teorema dos Eixos Paralelos afirma que o momento de inércia de um sistema relativo a um eixo qualquer é igual à soma de dois outros momentos de inércia: o momento de inércia do centro de massa relativo a esse eixo e o momento de inércia do sistema relativo a um eixo que passa pelo seu centro de massa e é paralelo ao primeiro eixo.

No caso de distribuições contínuas de matéria, a posição do centro de massa da distribuição é dada por  $\mathbf{r}_{cm} = (1/M) \int_{\text{corpo}} \mathbf{r} dm$ , onde  $\mathbf{r}$  é o vetor-posição do

elemento de massa  $dm$  do corpo em consideração. No caso de uma distribuição volumar de matéria, fazemos, na integral anterior, a substituição  $dm = \rho dV$ , onde  $\rho$  é a densidade volumar de massa do corpo (uma esfera, por exemplo). Analogamente, no caso de uma distribuição superficial de matéria, escrevemos  $dm = \sigma dA$ , onde  $\sigma$  é a densidade superficial de massa do corpo (um disco, por exemplo), e no caso de uma distribuição linear de matéria, escrevemos  $dm = \lambda dl$ , onde  $\lambda$  é a densidade linear de massa do corpo (uma barra muito delgada, por exemplo).

O momento de inércia de uma distribuição contínua de matéria em relação a um certo eixo é dada por  $I = \int_{\text{corpo}} b^2 dm$ , onde  $b$  é a distância entre o eixo e o elemento de massa  $dm$ . Analogamente ao que se faz no caso do cálculo da posição do centro de massa, substitui-se  $dm$  por  $\rho dV$ ,  $\sigma dA$  ou  $\lambda dl$  no caso de a distribuição de matéria ser volumar, superficial ou linear, respectivamente. O momento de inércia de uma barra homogênea de massa  $M$  e comprimento  $\ell$  em relação a um eixo perpendicular a ela e que passa por seu centro de massa é  $(1/12)M\ell^2$ . O momento de inércia de um anel homogêneo de massa  $M$  e raio  $R$  em relação a um eixo perpendicular a ele e que passa por seu centro de massa é  $MR^2$ . O momento de inércia de um disco homogêneo de massa  $M$  e raio  $R$  em relação a um eixo perpendicular a ele e que passa por seu centro de massa é  $(1/2)MR^2$ . O momento de inércia de uma esfera homogênea de massa  $M$  e raio  $R$  em relação a um eixo que passa por seu centro de massa é  $(2/5)MR^2$ .

## Questionário

1. Explique em poucas palavras o que significa tratar um corpo como uma distribuição contínua de matéria.
2. Explique por que o momento de inércia de uma barra homogênea relativo a um eixo perpendicular à barra e que passa pelo seu centro de massa é menor do que o seu momento de inércia relativo a um eixo perpendicular à barra e que passa por um de seus extremos.
3. A posição do centro de massa de um sistema deve coincidir, necessariamente, com a posição de alguma das partículas que o compõem?
4. O que é um pêndulo físico?
5. Por que ponto de uma barra homogênea devemos pendurá-la para que as

pequenas oscilações em torno de sua configuração vertical de equilíbrio tenham o menor período possível (considere oscilações sempre no mesmo plano vertical)?

6. Um corpo rígido é pendurado por um de seus pontos e abandonado, sob a ação da gravidade. Em princípio, ele forma um pêndulo físico, como ocorreu no caso de uma barra discutido no texto. Qualquer que seja esse ponto, o corpo rígido irá necessariamente oscilar?
7. Responda se a afirmativa é falsa ou verdadeira e justifique a sua resposta: a configuração de equilíbrio de um pêndulo físico (formado por um corpo rígido) é aquela em que a reta que passa pelo ponto de suspensão do corpo e o seu centro de massa têm a direção vertical.

### Problemas propostos

1. Considere inicialmente um disco homogêneo, de densidade superficial  $\sigma$ , centro  $C$  e raio  $R$ . Imagine, agora, que retiramos desse disco um disco menor, de raio  $r$ , e cujo centro está localizado a uma distância  $d$  de seu centro  $C$ , onde  $r < R - d$ . Determine o momento de inércia do disco furado, isto é, do disco de raio  $R$  após ter sido retirado dele o disco de raio  $r$ , em relação a um eixo perpendicular ao disco que passa pelo seu centro  $C$ .
2. Calcule o momento de inércia de um anel homogêneo de massa  $M$  e raio  $R$  relativo a um eixo pertencente ao plano do anel e que passe pelo seu centro de massa utilizando os seguintes procedimentos:
  - (a) a partir da definição de momento de inércia relativo a um eixo;
  - (b) utilizando o Teorema dos Eixos Perpendiculares. Confira o resultado com o obtido no item anterior;
  - (c) repita os procedimentos feitos nos itens anteriores, mas considerando um disco homogêneo de massa  $M$  e raio  $R$  no lugar do anel.
3. Calcule o momento de inércia de uma barra homogênea de massa  $M$  e comprimento  $\ell$  em relação a um eixo perpendicular a ela e que passa por um de seus extremos utilizando os seguintes métodos:
  - (a) a partir da definição de momento de inércia relativo a um eixo;
  - (b) utilizando o Teorema dos Eixos Paralelos. Confira o resultado com o obtido no item anterior.

4. Calcule o momento de inércia de uma casca esférica homogênea, de massa  $M$  e raio  $R$ , em relação a um eixo que passe pelo seu centro de massa.

**Sugestão:** considere a casca como a união de vários anéis inifitesimais e some (integre) os momentos de inércia de todos esses anéis.

5. Determine o momento de inércia de uma esfera homogênea de massa  $M$  e raio  $R$  usando o seguinte procedimento: considere a esfera como a união de várias cascas esféricas de espessura infinitesimal (como uma cebola) e, utilizando o resultado do problema anterior, some os momentos de inércia de todas essas cascas. Confira o resultado com o obtido no Exemplo 36.5.
6. Neste problema, você reobterá o momento de inércia de uma esfera homogênea de massa  $M$  e raio  $R$  explorando a sua simetria esférica. Note, inicialmente, que

$$I_{Ox} = I_{Oy} = I_{Oz} = \frac{1}{3} (I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz}) .$$

Usando, então, os resultados

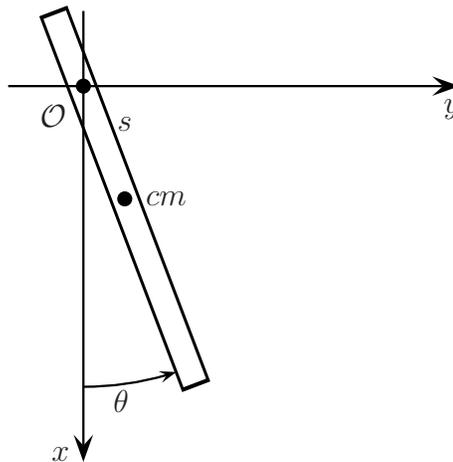
$$I_{Ox} = \int_{esfera} dm (y^2 + z^2) ; I_{Oy} = \int_{esfera} dm (x^2 + z^2) ; \text{ e } I_{Oz} = \int_{esfera} dm (x^2 + y^2) ,$$

mostre que

$$I_{Oz} = \frac{8\pi\rho}{3} \int_0^R r^4 dr ,$$

onde  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ . Resolva a integral e compare o resultado com o obtido na aula e no problema anterior.

7. Considere as seguintes distribuições contínuas de matéria e determine os respectivos vetores-posição do centro de massa:
- metade de um disco homogêneo de densidade superficial de massa  $\sigma$  e raio  $R$ .
  - a distribuição superficial de matéria considerada no problema 1.
8. Reconsidere, aqui, o problema discutido no Exemplo 36.6.
- Resolva o sistema formado pelas equações (36.29), (36.30), (36.31) e (36.32), e obtenha os resultados expressos nas equações (36.33), (36.34) e (36.35).
  - Supondo que em  $t_0 = 0$  o sistema seja abandonado do repouso, calcule as energias cinéticas dos dois blocos,  $K_1$  e  $K_2$ , após o segundo bloco ter descido uma altura  $h$ . Verifique que  $m_2gh \neq K_1 + K_2$ , ou seja, que a energia mecânica dos blocos não é uma constante de movimento. Explique por que isso ocorre.
9. Considere um pêndulo físico formado por uma barra homogênea de massa  $M$  e comprimento  $\ell$  que está suspensa não por seu extremo superior, mas por um ponto localizado a uma distância  $s$  de seu centro de massa, onde  $0 < s \leq \ell/2$ , como indica a **Figura 36.9**.



**Figura 36.9:** Barra homogênea oscilando por um ponto intermediário entre o seu centro de massa e um de seus extremos.

- Utilizando o Teorema do Momento Angular e Torque adequadamente, escreva a equação diferencial do movimento da barra.

- (b) Determine o período das oscilações da barra no caso de pequenas amplitudes de oscilação ( $|\theta| \ll 1$ ).
- (c) Mostre que, no limite em que  $s \rightarrow \ell/2$ , o período encontrado no último exemplo desta aula é recuperado.
- (d) Analise o limite em que  $s \rightarrow 0$  e interprete o resultado.
10. Neste problema, você aprenderá a obter a equação diferencial do movimento de um pêndulo físico utilizando a Lei da Conservação da Energia e não o Teorema do Momento Angular e Torque. Com esse objetivo, reconsidere o pêndulo físico discutido no último exemplo desta aula, a saber, uma barra homogênea de massa  $M$  e comprimento  $\ell$  que está suspensa por seu extremo superior e executa oscilações sempre num mesmo plano vertical.
- Seja  $\theta$  o ângulo entre a barra e a vertical numa configuração genérica. Escreva a energia cinética da barra  $K$  em termos de  $\dot{\theta}$  e a sua energia potencial gravitacional  $U$  em termos de  $\theta$ . Sabendo que a energia mecânica da barra  $E = K + U$  é uma constante de movimento, imponha que  $dE/dt = 0$  e obtenha a equação de movimento da barra. Verifique o seu resultado com o obtido na equação (36.39).
11. Considere um pêndulo físico formado por uma barra homogênea de massa  $M$  e comprimento  $\ell$  que está suspensa por um eixo que passa por um de seus extremos. A barra é abandonada do repouso quando está na horizontal.
- (a) Calcule a velocidade do centro de massa da barra quando ela está na vertical.
- (b) Calcule, ao longo da direção da barra, a componente da força que o eixo exerce sobre o extremo articulado da barra quando ela faz um ângulo  $\theta$  com a vertical.
12. Uma haste rígida de massa desprezível tem presa em seu extremo inferior uma esfera de massa  $M$  e raio  $R$  e tem seu extremo superior fixo a um suporte articulado de modo que ela pode oscilar sempre num mesmo plano vertical. A distância do ponto de suspensão (extremo superior da haste) e o centro da esfera é  $\ell$ . Determine o período das oscilações de pequena amplitude dessa barra. Faça uma estimativa do erro que estaremos cometendo no cálculo desse período se aproximarmos essa esfera por uma partícula de massa  $M$  localizada no seu centro.

## **Auto-avaliação**

Você deve ser capaz de responder ao questionário inteiro e deve tentar resolver todos os problemas propostos. Em princípio, você só deve encontrar dificuldades nos últimos problemas, a partir do problema 8 e, em especial, no problema 12, o mais difícil da lista. Note que os seis primeiros testam apenas a sua capacidade de calcular momentos de inércia de distribuições contínuas de matéria, utilizando os teoremas apropriados quando necessário. O problema 7 testa a sua habilidade para calcular a posição do centro de massa de uma distribuição contínua de matéria. Portanto, os sete primeiros problemas da lista, basicamente, são generalizações de cálculos que você aprendeu a fazer em aulas anteriores. Já os problemas restantes envolvem dinâmica de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo. Embora sejam um pouco mais complicados, você também deve ser capaz de resolvê-los, ainda que essa tarefa lhe exija um pouco mais de trabalho. Note que alguns deles, como por exemplo os problemas 9 e 11, são generalizações de problemas propostos na aula anterior. Não passe para a próxima aula sem ter resolvido pelo menos dez problemas da lista.

## Aula 37 – Movimento geral de um corpo rígido

### Objetivos

- Mostrar que o movimento mais geral de um corpo rígido é uma superposição de uma translação com uma rotação.
- Entender o movimento de rolamento sem deslizamento de um corpo rígido sobre uma superfície e aprender a condição para que esse movimento possa ocorrer.
- Aprender a definição de movimento plano de um corpo rígido e estabelecer as equações diferenciais que regem esse tipo de movimento.
- Saber resolver problemas simples envolvendo corpos rígidos como esferas, discos, etc., em movimentos planos.
- Entender qualitativamente o movimento de um pião.

### Introdução

Jogue para cima um apagador de quadro-negro e observe o seu movimento. Dependendo do modo como ele for arremessado, o seu movimento será tão complicado que parecerá impossível acreditar que existe um modo simples e sistemático de descrevê-lo. Você verá que, a cada momento, o apagador realiza uma composição de dois movimentos. Um simples movimento de translação e um movimento que, instantaneamente, é de rotação em torno de um eixo, como o estudado na Aula 35. Dizemos instantaneamente porque o eixo de rotação não permanece necessariamente fixo à medida que o tempo passa, como nas situações estudadas nas aulas anteriores. Para chegar a essa conclusão, será necessário demonstrar uma fórmula que chamaremos fórmula fundamental da cinemática do corpo rígido. Sua dedução não é simples e tomará toda a seção seguinte. Mas sabemos que valerá a pena, pois ela nos ajudará muito a compreender o movimento geral de um corpo rígido. De posse da fórmula fundamental, passaremos à sua interpretação na seção seguinte. A partir dessa fórmula também estabeleceremos uma importantíssima relação entre a velocidade do centro de massa de um corpo rígido e a sua velocidade angular vetorial, para os movimentos onde há deslizamento com a superfície que está em contato com o corpo. Finalizaremos esta aula apresentando diversos exemplos de movimentos de um corpo rígido. Eles podem ser discutidos com a teoria desenvolvida nas primeiras seções desta aula e das aulas anteriores.

## Fórmula fundamental da cinemática do corpo rígido

Nesta seção, obteremos a fórmula fundamental da cinemática de um corpo rígido. Ela afirma que a cada instante o movimento de um corpo é uma combinação de um movimento de translação com um movimento de rotação. Para demonstrá-la, teremos de usar dois sistemas de eixos cartesianos e suas duas bases correspondentes formadas por vetores ortonormais. A demonstração é trabalhosa, mas como o resultado vale para qualquer movimento de um corpo rígido, o esforço não será em vão.

Consideremos o movimento de um corpo rígido em relação a um referencial com eixos  $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ , cujos unitários continuaremos a representar por  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_y$  e  $\mathbf{u}_z$ . Para estudar esse movimento, é conveniente considerar um outro sistema de eixos, que denotaremos por  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$  e que é fixo em relação ao corpo rígido. Dizer que  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$  está fixo em relação ao corpo rígido é o mesmo que dizer o corpo rígido não tem nenhum movimento em relação a  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ ; o corpo rígido e  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$  são imóveis um em relação ao outro. Conseqüentemente, se o corpo rígido se mover em relação aos eixos  $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ , o sistema de eixos  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$  também se moverá em relação aos eixos  $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ , pois o sistema  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$  está solidário ao corpo rígido. Vamos chamar  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$  **sistema de eixos do corpo rígido**. Os vetores unitários do sistema desse sistema de eixos serão denotados por  $\mathbf{u}'_x$ ,  $\mathbf{u}'_y$  e  $\mathbf{u}'_z$ . A **Figura 37.1** mostra os unitários  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_y$  e  $\mathbf{u}_z$  do sistema de eixos  $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$  e a sua origem  $\mathcal{O}$ . Evitamos desenhar os eixos para não complicar a figura. Nessa figura, também aparecem os unitários  $\mathbf{u}'_x$ ,  $\mathbf{u}'_y$ ,  $\mathbf{u}'_z$  e a origem  $\mathcal{O}'$  do sistema de eixos  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ .

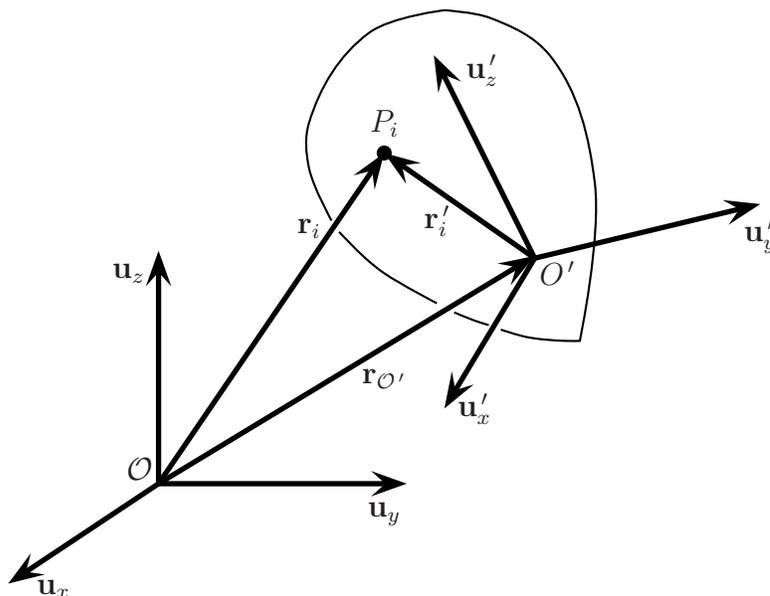
Finalmente, está ilustrado na **Figura 37.1** o corpo rígido, um ponto  $P_i$ , fixo em relação ao corpo rígido, e três vetores  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{r}'_i$  e  $\mathbf{r}_{\mathcal{O}'}$ . O vetor  $\mathbf{r}_i$  é o vetor-posição do ponto  $P_i$  em relação ao sistema de eixos  $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ ;  $\mathbf{r}'_i$  é o vetor-posição do mesmo ponto relativo ao sistema de eixos  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ , e  $\mathbf{r}_{\mathcal{O}'}$  é o vetor-posição da origem do sistema  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$  em relação ao sistema de eixos  $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ . Na **Figura 37.1** vemos, claramente, que

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{\mathcal{O}'} + \mathbf{r}'_i, \quad (37.1)$$

isto é, o vetor-posição do ponto  $P_i$  relativo ao sistema de eixos  $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ ,  $\mathbf{r}_i$ , é igual ao vetor-posição desse mesmo ponto relativo ao sistema de eixos  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ ,  $\mathbf{r}'_i$ , somado ao vetor-posição da origem desse segundo sistema de eixos relativo ao primeiro sistema de eixos,  $\mathbf{r}_{\mathcal{O}'}$ .

Preste atenção ao fato de que  $P_i$  é um ponto qualquer fixo, por hipótese, em relação ao corpo rígido. O ponto  $P_i$  pode ser a posição de uma das partículas

do corpo rígido, como aparece ilustrado na **Figura 37.1** ou pode ser um ponto fora do corpo, mas também fixo em relação a ele. Desse modo, se quisermos, poderemos considerar  $P_i$  tanto como o ponto onde se encontra a partícula  $i$  do corpo rígido quanto um ponto fora do corpo rígido, desde que esse ponto seja imóvel em relação a ele.



**Figura 37.1:** Os unitários  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_y$  e  $\mathbf{u}_z$  são os do sistema  $O\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ , fixo no referencial inercial que estamos usando para estudar o movimento do corpo rígido. Os unitários  $\mathbf{u}'_x$ ,  $\mathbf{u}'_y$  e  $\mathbf{u}'_z$  são os do sistema  $O'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ , que está fixo em relação ao corpo rígido e, conseqüentemente, move-se junto com ele.

Como o corpo rígido não se move relativamente aos eixos  $O'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ , e o ponto  $P_i$  está fixo em relação ao corpo rígido, concluímos que as coordenadas desse ponto, nesse sistema de eixos, são constantes. Portanto, representando por  $x_i$ ,  $y_i$  e  $z_i$  as coordenadas de  $P_i$  no sistema de eixos  $O'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ , temos

$$x'_i = \text{constante}, \quad y'_i = \text{constante} \quad \text{e} \quad z'_i = \text{constante}. \quad (37.2)$$

O vetor posição do ponto  $P_i$ , em relação a esse sistema de eixos, é

$$\mathbf{r}'_i = x'_i \mathbf{u}'_x + y'_i \mathbf{u}'_y + z'_i \mathbf{u}'_z. \quad (37.3)$$

Esse vetor está fixo em relação ao corpo, do mesmo modo que os unitários  $\mathbf{u}'_x$ ,  $\mathbf{u}'_y$  e  $\mathbf{u}'_z$ . Exatamente por esse motivo, os vetores  $\mathbf{r}'_i$ ,  $\mathbf{u}'_x$ ,  $\mathbf{u}'_y$  e  $\mathbf{u}'_z$  seguem o corpo em seu movimento relativo ao sistema de eixos  $O\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ . Esses vetores mudam com

o tempo relativamente ao sistema de eixos  $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$  e podemos calcular as suas derivadas temporais do ponto de vista de um observador nesse sistema de eixos. Temos, então,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ x'_i \mathbf{u}'_x + y'_i \mathbf{u}'_y + z'_i \mathbf{u}'_z \right\} \\ &= x'_i \frac{d\mathbf{u}'_x}{dt} + y'_i \frac{d\mathbf{u}'_y}{dt} + z'_i \frac{d\mathbf{u}'_z}{dt},\end{aligned}\quad (37.4)$$

onde usamos o fato de que  $dx'_i/dt = 0$ , etc., uma vez que são constantes as coordenadas de  $P_i$  relativas ao sistema de eixos  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ , como já vimos em (37.2). Vamos agora obter as derivadas em relação ao tempo dos vetores da base ortonormal  $\mathbf{u}'_x$ ,  $\mathbf{u}'_y$  e  $\mathbf{u}'_z$ . Essas derivadas,  $d\mathbf{u}'_x/dt$ ,  $d\mathbf{u}'_y/dt$  e  $d\mathbf{u}'_z/dt$ , são vetores e, por isso, podem ser expandidas na própria base ortonormal  $\mathbf{u}'_x$ ,  $\mathbf{u}'_y$  e  $\mathbf{u}'_z$ ,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{u}'_x}{dt} &= a'_x \mathbf{u}'_x + a'_y \mathbf{u}'_y + a'_z \mathbf{u}'_z, \\ \frac{d\mathbf{u}'_y}{dt} &= b'_x \mathbf{u}'_x + b'_y \mathbf{u}'_y + b'_z \mathbf{u}'_z \quad \text{e} \\ \frac{d\mathbf{u}'_z}{dt} &= c'_x \mathbf{u}'_x + c'_y \mathbf{u}'_y + c'_z \mathbf{u}'_z.\end{aligned}\quad (37.5)$$

onde aparecem as componentes  $a'_x, a'_y, \dots, c'_z$  que desejamos calcular. Como a base é ortonormal, temos

$$\mathbf{u}'_x \cdot \mathbf{u}'_x = 1, \quad \mathbf{u}'_y \cdot \mathbf{u}'_y = 1, \quad \mathbf{u}'_z \cdot \mathbf{u}'_z = 1, \quad (37.6)$$

e

$$\mathbf{u}'_x \cdot \mathbf{u}'_y = 0, \quad \mathbf{u}'_x \cdot \mathbf{u}'_z = 0, \quad \mathbf{u}'_y \cdot \mathbf{u}'_z = 0. \quad (37.7)$$

Fazendo o produto escalar de  $\mathbf{u}'_x, \mathbf{u}'_y$  e  $\mathbf{u}'_z$  por ambos os membros de (37.5), e usando as equações (37.6) e (37.7), obtemos as componentes

$$\begin{aligned}a'_x &= \mathbf{u}'_x \cdot \frac{d\mathbf{u}'_x}{dt}, \quad a'_y = \mathbf{u}'_y \cdot \frac{d\mathbf{u}'_x}{dt} \quad \text{e} \quad a'_z = \mathbf{u}'_z \cdot \frac{d\mathbf{u}'_x}{dt}, \\ b'_x &= \mathbf{u}'_x \cdot \frac{d\mathbf{u}'_y}{dt}, \quad b'_y = \mathbf{u}'_y \cdot \frac{d\mathbf{u}'_y}{dt} \quad \text{e} \quad b'_z = \mathbf{u}'_z \cdot \frac{d\mathbf{u}'_y}{dt}, \\ c'_x &= \mathbf{u}'_x \cdot \frac{d\mathbf{u}'_z}{dt}, \quad c'_y = \mathbf{u}'_y \cdot \frac{d\mathbf{u}'_z}{dt} \quad \text{e} \quad c'_z = \mathbf{u}'_z \cdot \frac{d\mathbf{u}'_z}{dt}.\end{aligned}\quad (37.8)$$

Derivando ambos os membros da primeira igualdade em (37.6), obtemos

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{u}'_x \cdot \mathbf{u}'_x) = 0 \quad \implies \quad \frac{d\mathbf{u}'_x}{dt} \cdot \mathbf{u}'_x + \mathbf{u}'_x \cdot \frac{d\mathbf{u}'_x}{dt} = 0, \quad (37.9)$$

Utilizando a propriedade de simetria do produto escalar, ou seja,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ , a última equação toma a forma

$$2\mathbf{u}'_x \cdot \frac{d\mathbf{u}'_x}{dt} = 0, \quad (37.10)$$

ou seja,  $\mathbf{u}'_x \cdot (d\mathbf{u}'_x/dt) = 0$ . Conseqüentemente, a primeira componente  $a'_x$  em (37.8) é nula,  $a'_x = 0$ . Analogamente, derivando ambos os membros das outras duas igualdades em (37.6), concluímos também que  $a'_y = 0$  e  $a'_z = 0$ .

Derivando os dois membros da primeira igualdade em (37.7), obtemos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}'_x \cdot \mathbf{u}'_y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\mathbf{u}'_x}{dt} \cdot \mathbf{u}'_y + \mathbf{u}'_x \cdot \frac{d\mathbf{u}'_y}{dt} = 0,$$

ou seja,

$$\mathbf{u}'_y \cdot \frac{d\mathbf{u}'_x}{dt} + \mathbf{u}'_x \cdot \frac{d\mathbf{u}'_y}{dt} = 0. \quad (37.11)$$

De acordo com as expressões das componentes dadas em (37.8), a última expressão afirma que  $a'_y + b'_x = 0$ . Semelhantemente, derivando ambos os membros das duas outras igualdades em (37.7), concluímos também que  $a'_z + c'_x = 0$  e  $b'_z + c'_y = 0$ . Ao todo, vemos que as componentes têm de satisfazer às condições

$$a'_x = a'_y = a'_z = 0, \quad b'_x = -a'_y, \quad a'_z = -c'_x \quad \text{e} \quad c'_y = -b'_z. \quad (37.12)$$

Usando essas condições em (37.5), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}'_x}{dt} &= a'_y \mathbf{u}'_y - c'_x \mathbf{u}'_z, \\ \frac{d\mathbf{u}'_y}{dt} &= -a'_y \mathbf{u}'_x + b'_z \mathbf{u}'_z \quad \text{e} \\ \frac{d\mathbf{u}'_z}{dt} &= c'_x \mathbf{u}'_x - b'_z \mathbf{u}'_y. \end{aligned} \quad (37.13)$$

Portanto, as derivadas temporais dos unitários que se movimentam junto com o corpo rígido podem ser escritas em termos de apenas três componentes,  $c'_x$ ,  $a'_y$  e  $b'_z$ . A continuação desse nosso cálculo mostrará que é conveniente mudar os símbolos dessas coordenadas. Passaremos a usar para  $c'_x$  o símbolo  $\omega'_y$ , para  $a'_y$ , o símbolo  $\omega'_z$ , e para  $b'_z$ , o símbolo  $\omega'_x$ . A partir de agora, vamos escrever a equação (37.13) em termos desses novos símbolos. Fazendo isso, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}'_x}{dt} &= \omega'_z \mathbf{u}'_y - \omega'_y \mathbf{u}'_z, \\ \frac{d\mathbf{u}'_y}{dt} &= -\omega'_z \mathbf{u}'_x + \omega'_x \mathbf{u}'_z \quad \text{e} \\ \frac{d\mathbf{u}'_z}{dt} &= \omega'_y \mathbf{u}'_x - \omega'_x \mathbf{u}'_y. \end{aligned} \quad (37.14)$$

Note que, de acordo com as fórmulas escritas em (37.8), as componentes  $\omega'_x = b'_z$ ,  $\omega'_y = c'_x$  e  $\omega'_z = a'_y$ , são dadas por

$$\omega'_x = \frac{d\mathbf{u}'_y}{dt} \cdot \mathbf{u}'_z, \quad \omega'_y = \frac{d\mathbf{u}'_z}{dt} \cdot \mathbf{u}'_x \quad \text{e} \quad \omega'_z = \frac{d\mathbf{u}'_x}{dt} \cdot \mathbf{u}'_y. \quad (37.15)$$

Resta, agora, substituir as expressões das derivadas temporais dos unitários, escritas em (37.14), na equação (37.4) para obtermos

$$\frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} = x'_i(\omega'_z\mathbf{u}'_y - \omega'_y\mathbf{u}'_z) + y'_i(-\omega'_z\mathbf{u}'_x + \omega'_x\mathbf{u}'_z) + z'_i(\omega'_y\mathbf{u}'_x - \omega'_x\mathbf{u}'_y), \quad (37.16)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} = (\omega'_y z'_i - \omega'_z y'_i)\mathbf{u}'_x + (\omega'_z x'_i - \omega'_x z'_i)\mathbf{u}'_y + (\omega'_x y'_i - \omega'_y x'_i)\mathbf{u}'_z. \quad (37.17)$$

O lado direito de (37.17) é, precisamente, o produto vetorial  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$ , do vetor

$$\boldsymbol{\omega} = \omega'_x\mathbf{u}'_x + \omega'_y\mathbf{u}'_y + \omega'_z\mathbf{u}'_z \quad (37.18)$$

pelo vetor  $\mathbf{r}'_i = x'_i\mathbf{u}'_x + y'_i\mathbf{u}'_y + z'_i\mathbf{u}'_z$ , definido em (37.3). Conseqüentemente, nosso resultado (37.17) pode ser escrito, simplesmente, como

$$\frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i. \quad (37.19)$$

Esse é o resultado mais difícil no caminho para chegar à fórmula fundamental da cinemática do corpo rígido. Agora, voltemos à situação descrita na **Figura 37.1**. Temos a relação (37.1) para os vetores-posição do ponto  $P_i$  relativos aos dois respectivos sistemas de eixos em uso, o sistema de eixos  $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ , em relação ao qual estamos considerando o movimento do corpo rígido, e o sistema de eixos  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ , fixo em relação ao corpo rígido. Derivando em relação ao tempo os dois termos da igualdade em (37.1), obtemos

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{\mathcal{O}'}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}. \quad (37.20)$$

O lado esquerdo dessa equação é a velocidade  $\mathbf{v}_i$  do ponto  $P_i$  em relação ao sistema de eixos  $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ , isto é, em relação ao nosso referencial inercial. O primeiro termo do lado direito é a velocidade  $\mathbf{v}_{\mathcal{O}'}$  do ponto escolhido como a origem do sistema de eixos  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ . Finalmente, o segundo termo no membro direito da equação (37.20) é a derivada que obtivemos em (37.19). Não nos esqueçamos de que o sistema de eixos  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$  e o ponto  $P_i$  são fixos em relação ao corpo rígido e se movimentam junto com ele em relação ao sistema de eixos  $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ . Portanto, obtemos de (37.20) o resultado

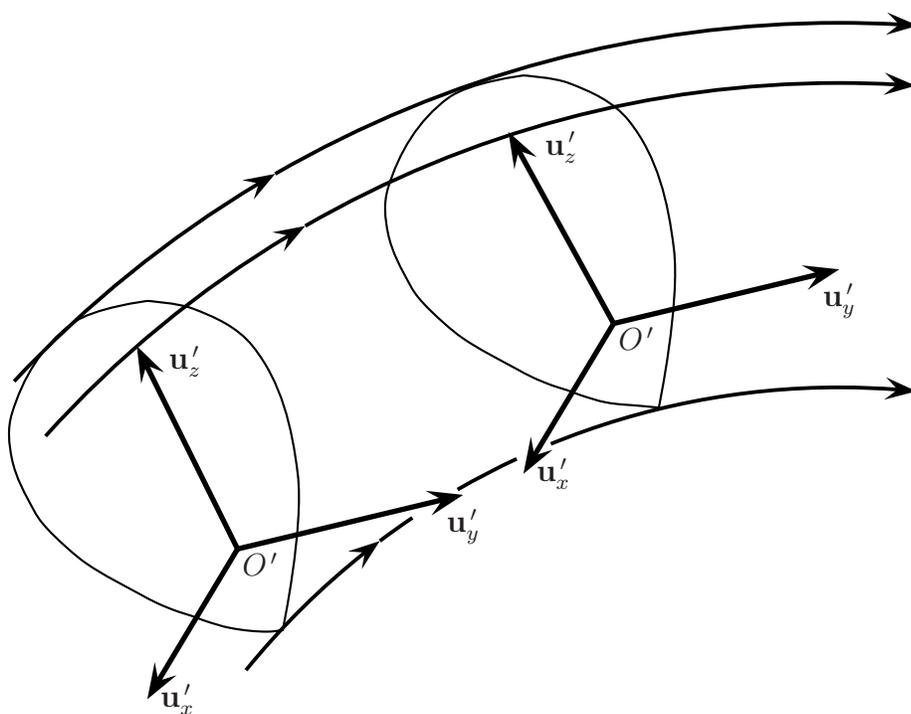
$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\mathcal{O}'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i. \quad (37.21)$$

Essa é a **fórmula fundamental da cinemática do corpo rígido**. Na próxima seção, veremos as informações que ela nos dá sobre o movimento geral de um corpo rígido.

## Movimento geral de um corpo rígido

Na seção anterior, obtivemos a fórmula fundamental (37.21), na qual a velocidade  $\mathbf{v}_i$  de um ponto qualquer  $P_i$ , imóvel em relação ao corpo rígido, é escrita como a soma especial em (37.21), a saber,  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$ . Ela é a soma da velocidade de um outro ponto fixo em relação ao corpo rígido, que chamamos ponto  $O'$ , com um termo que envolve o vetor  $\boldsymbol{\omega}$ , cujas componentes no sistema de eixos fixos em relação ao corpo,  $O'X'Y'Z'$ , são dadas por (37.15). Vamos analisar essa fórmula fundamental.

Primeiramente, suponhamos que os unitários  $\mathbf{u}'_x$ ,  $\mathbf{u}'_y$ ,  $\mathbf{u}'_z$ , que estão fixos em relação ao corpo, não mudem de direção e sentido durante o movimento do corpo. Nesse caso, dizemos que o corpo se move sem mudar sua **orientação no espaço**, como está exemplificado na **Figura 37.2**.



**Figura 37.2:** Durante um movimento de translação a orientação do corpo rígido não muda; cada vetor unitário fixo em relação ao corpo permanece também com direção e sentido constantes.

Se um unitário tem direção e sentido constantes, além do seu módulo constante e igual a 1, então ele é um vetor constante. Lembre-se de que o seu deslocamento no espaço junto com o corpo não afeta essa constância, pois um vetor é definido por um módulo, uma direção e um sentido, não importante o ponto do espaço onde desenhamos sua seta. Mas sendo os unitários  $\mathbf{u}'_x$ ,  $\mathbf{u}'_y$ ,  $\mathbf{u}'_z$  constantes, temos que suas derivadas temporais são nulas e, portanto, também é nulo o vetor

$\omega$ , de acordo com a equação (37.15). Conseqüentemente, a fórmula fundamental (37.21) se reduz a

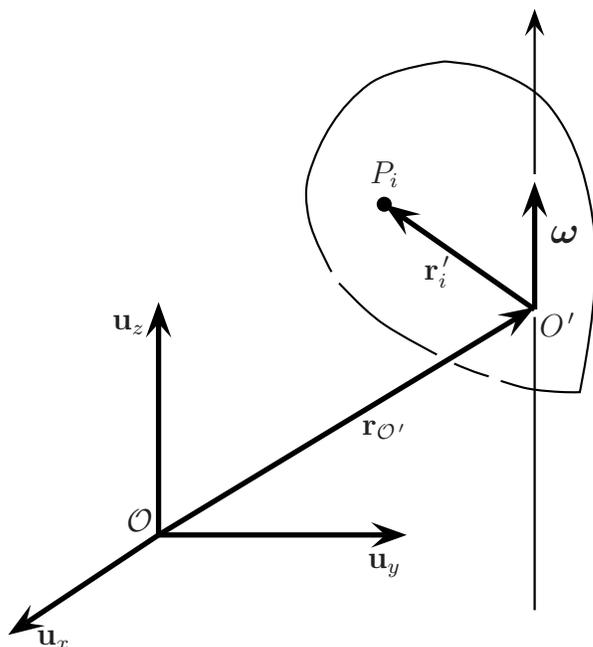
$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{O'} . \quad (37.22)$$

Como  $P_i$  é um ponto fixo em relação ao corpo rígido, podemos considerá-lo como a posição de uma partícula qualquer do corpo, que chamaremos partícula  $i$ . Nesse caso, a fórmula (37.22) afirma que qualquer partícula  $i$  do corpo tem a mesma velocidade que o ponto  $O'$ . Mas um movimento no qual todas as partículas do corpo têm a mesma velocidade é, simplesmente, um movimento de translação. Portanto, se o corpo rígido se move sem mudar sua orientação, o seu movimento é um movimento de translação, com velocidade igual à velocidade  $\mathbf{v}_{O'}$  de algum ponto escolhido como fixo em relação ao corpo rígido. Concluimos, então, que a velocidade  $\mathbf{v}_{O'}$  na fórmula fundamental (37.21) tem o significado de uma velocidade de translação do corpo rígido.

Vamos passar agora ao caso em que o ponto  $O'$ , fixo em relação ao corpo rígido, permanece imóvel em relação ao nosso referencial inercial. Nesse caso, o seu vetor posição  $\mathbf{r}_{O'}$  permanece constante durante o movimento do corpo rígido, sua velocidade  $\mathbf{v}_{O'}$  é nula e a fórmula fundamental (37.21) se reduz a

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i . \quad (37.23)$$

Vamos comparar essa fórmula com a fórmula (34.10) da Aula 34, que descreve um movimento de rotação do corpo rígido em torno de um eixo fixo. As duas fórmulas são exatamente iguais, embora haja uma diferença nos seus significados. A fórmula (34.10), da Aula 34, descreve um movimento de rotação do corpo rígido em torno de um eixo fixo. Isso significa que, em todos os instantes do movimento, o vetor velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$  tem direção constante, pois ele é paralelo ao eixo de rotação. Já a fórmula (37.23), obtida nesta aula, não faz nenhuma restrição à direção do vetor  $\boldsymbol{\omega}$  que nela aparece; no movimento geral do corpo rígido, que estamos considerando nesta seção, a direção do vetor  $\boldsymbol{\omega}$  pode mudar a cada instante, como também pode mudar o seu módulo. Com isso, poderemos concluir que (37.23) descreve um movimento de rotação do corpo rígido com velocidade angular instantânea  $\boldsymbol{\omega}$ , velocidade essa que pode estar mudando a cada instante do movimento. Vamos prosseguir para esclarecer esse fato.



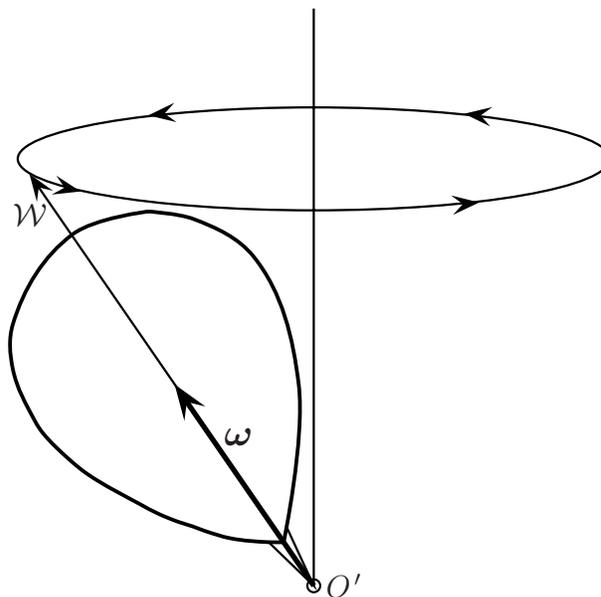
**Figura 37.3:** No movimento do corpo rígido em que o ponto  $O'$  permanece em repouso, todos os pontos da reta que passa por  $O'$  e tem a direção do vetor  $\omega$  também estão em repouso no instante em consideração.

A **Figura 37.3** mostra o corpo rígido, com o ponto  $O'$  em repouso durante o movimento, e um eixo  $O'W$  que passa por esse ponto e tem a direção do vetor  $\omega$  no instante considerado. Se considerarmos  $P_i$  como um ponto qualquer desse eixo, veremos que seu vetor-posição  $r'_i$  passa a ter a mesma direção de  $\omega$ .

Nesse caso, o produto vetorial em (37.23) é nulo, isto é, a velocidade  $v_i$  do ponto  $P_i$  é nula. Portanto, no instante considerado, todos os pontos do eixo  $O'W$  têm velocidade nula. Esse eixo é chamado **eixo instantâneo de rotação**, no instante considerado. Note que, em um outro instante, o vetor  $\omega$  pode ter uma outra direção, de modo que o eixo instantâneo de rotação também pode mudar com o tempo; daí a necessidade de chamá-lo “instantâneo”. O vetor  $\omega$  é chamado **velocidade angular instantânea** de rotação.

Pela definição de produto vetorial da equação (37.23) vemos que, a cada instante, a velocidade de cada partícula do corpo rígido é perpendicular a  $\omega$  e a  $r'_i$ . Também obtemos que todas as partículas do corpo rígido situadas a uma mesma distância do eixo instantâneo de rotação têm velocidades de mesmo módulo, como você pode verificar rapidamente. Essas propriedades mostram que podemos ilustrar o movimento do corpo rígido no instante considerado usando uma figura semelhante à **34.1**, da Aula 34. Porém, é importante lembrar que na Aula 34 essa

figura ilustrava o movimento de rotação do corpo rígido em torno de um eixo fixo, enquanto neste caso está aberta a possibilidade de o eixo de rotação  $O'W$  mudar de direção com o passar do tempo. Um exemplo do movimento descrito pela fórmula (37.23) pode ser observado com facilidade no caso de um pião em movimento com seu eixo de simetria inclinado e seu ponto de contato com o chão fixo (**pião de ponta fixa**). No caso da **Figura 37.4**, o pião está, a cada instante, girando em torno de seu eixo de simetria  $O'W$ , enquanto esse eixo de simetria vai mudando de direção e descrevendo um cone no espaço. Esse não é o movimento mais geral de um pião de ponta fixa, mas trata-se de um de seus movimentos possíveis. Ele ocorrerá para certas condições iniciais bem determinadas. No entanto, o movimento descrito na **Figura 37.4** é, aproximadamente, o que observamos em muitos casos quando brincamos com esse tipo de pião.



**Figura 37.4:** Pião em movimento com seu eixo de simetria inclinado em rotação em torno desse eixo que, por sua vez, gira em torno da vertical.

O tipo de movimento do corpo rígido que acabamos de estudar é chamado movimento de rotação em torno de um eixo instantâneo de rotação. Lembre-se de que chegamos a ele partindo da hipótese de que há um ponto  $O$ , fixo em relação ao corpo rígido, que está em repouso e concluímos que todos os pontos de um eixo  $O'W$ , chamado eixo instantâneo de rotação, estão instantaneamente em repouso. Portanto, nossa conclusão é que todo movimento de um corpo rígido com um ponto fixo é, instantaneamente, um movimento de rotação em torno de um eixo que passa por esse ponto fixo.

---

Em geral, o ângulo entre o eixo de simetria do pião e a direção vertical varia com o tempo, movimento chamado **nutation**; além disso, a rapidez com que o pião gira em torno de seu eixo de simetria e a rapidez com que esse eixo de simetria gira em torno da direção vertical também variam com o tempo, fazendo com que, no caso geral, o movimento de um pião de ponta fixa seja bastante complicado. Vale mencionar que, qualquer que seja seu movimento, a sua energia mecânica se conserva, pois só o peso realiza trabalho.

---

Agora vamos eliminar todas as restrições e voltar à fórmula geral  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$ , dada em (37.21). Quando apenas o primeiro termo do lado direito dessa expressão estiver presente, o corpo rígido estará, instantaneamente, em movimento de translação com velocidade  $\mathbf{v}_{O'}$ . Num outro instante, ele poderá estar com outra velocidade de translação. Quando apenas o segundo termo de (37.21) estiver presente, o corpo rígido estará em movimento de rotação, com velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$ , em torno de um eixo instantâneo de rotação. Em outro instante, ele poderá estar em rotação em torno de outro eixo com outra velocidade angular de rotação. De acordo com o significado da soma de velocidades, quando os dois termos no membro direito de  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$  estiverem presentes, o corpo rígido estará em um movimento que, no instante considerado, será a composição de um movimento de translação com velocidade  $\mathbf{v}_{O'}$  com um movimento de rotação com velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$ . Esse é o significado da equação fundamental da cinemática de um corpo rígido, dado por (37.21), que podemos expressar da forma abreviada:

*o movimento mais geral de um corpo rígido é, a cada instante, a composição de uma translação com uma rotação em torno de um eixo.*

Para obter a velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$ , consideramos um ponto fixo  $O'$  fixo em relação ao corpo rígido e acabamos chegando à fórmula fundamental  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$ . Naturalmente, se fizéssemos uma outra escolha para o ponto fixo em relação ao corpo rígido, digamos um ponto  $O''$ , chegaríamos a uma fórmula  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{O''} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}''_i$ , onde  $\boldsymbol{\omega}'$  seria a velocidade angular vetorial de rotação do corpo rígido em torno de um eixo que passa pelo ponto  $O''$ . Como não sabemos de antemão o valor da velocidade angular em relação ao novo eixo, iremos representá-la por  $\boldsymbol{\omega}'$ . Nessa fórmula, a velocidade do ponto  $P_i$  em relação ao referencial inercial é a mesma pois, obviamente, a velocidade de um ponto não pode depender de nossas escolhas de como calculá-la. Já as outras grandezas dependem, em princípio, da escolha do ponto  $O'$ . Temos  $\mathbf{v}_{O''}$  como a velocidade do ponto  $O''$ ,  $\mathbf{r}''_i$  como o vetor-posição do ponto  $P_i$  relativo a  $O''$  e  $\boldsymbol{\omega}'$  como a velocidade angular de rotação em torno de um eixo que agora passa por  $O''$ . O fato, que pode parecer surpreendente, é que  $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}$ , isto é,

*a velocidade angular de rotação de um corpo rígido não depende do ponto em relação ao qual consideramos a sua rotação.*

No problema proposto 1 sugerimos um modo de demonstrar essa propriedade.

Voltando ao apagador de que falamos na introdução desta aula, agora sabemos que o seu movimento ao ser arremessado para cima, por mais complicado que seja, é, a cada instante, a composição de dois movimentos que já conhecemos, a translação e a rotação em torno de um eixo.

Existe uma escolha particular para o ponto  $\mathcal{O}'$  na fórmula (37.21) que é de imensa importância, pois simplificará algumas expressões matemáticas e permitirá algumas interpretações físicas convenientes, como veremos mais adiante. É quando escolhemos o ponto fixo em relação ao corpo rígido como sendo o seu centro de massa. Nesse caso, a equação (37.21) toma a forma

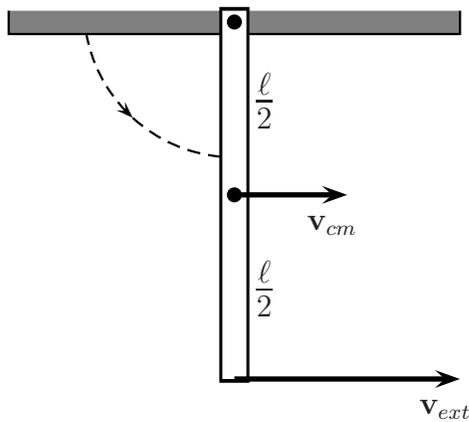
$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{cm} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i, \quad (37.24)$$

onde, agora,  $\mathbf{r}'_i$  é o vetor-posição relativo ao centro de massa de um ponto  $P_i$ , fixo em relação ao corpo rígido. Essa relação é especialmente importante porque dispomos de fórmulas que permitem determinar o movimento do centro de massa, e de outros resultados importantes sobre esse ponto privilegiado. No caso do apagador arremessado para cima, por exemplo, sabemos que seu centro de massa tem o movimento parabólico de um projétil. Podemos então dizer que o apagador está, a cada instante, girando em torno de seu centro de massa. Ele descreve uma parábola durante o vôo.

### Exemplo 37.1

Apenas para ilustrar esse importante resultado, vamos considerar o movimento de um pêndulo físico constituído por uma barra homogênea de comprimento  $\ell$ . Essa barra tem seu extremo superior fixo e oscila sempre num mesmo plano vertical.

A **Figura 37.5** mostra um dos instantes em que a barra está na vertical e girando no sentido anti-horário, como indicam as velocidades do centro de massa da barra ( $\mathbf{v}_{cm}$ ) e de seu extremo inferior ( $\mathbf{v}_{ext}$ ), marcadas na figura. Chamaríamos  $\boldsymbol{\omega}$  a velocidade angular de rotação da barra nesse instante. Calcularemos  $\mathbf{v}_{ext}$  de dois modos diferentes, usando explicitamente o fato de a velocidade angular de rotação da barra não depender do ponto em relação ao qual consideramos a sua rotação.



**Figura 37.5:** O movimento da barra pode ser pensado como uma rotação pura em torno de um eixo fixo, como indicado na figura, ou como a composição de uma translação de seu centro de massa com uma rotação em torno dele.

Inicialmente, pensando no movimento da barra como uma rotação em torno de um eixo fixo perpendicular à página e passando por seu extremo superior (ponto de suspensão desse pêndulo físico), temos para a velocidade  $v_{ext}$  de seu extremo inferior (movimentos de rotação em torno de um eixo fixo foram estudados na Aula 34)

$$\mathbf{v}_{ext} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{ext}, \quad (37.25)$$

onde  $\mathbf{r}_{ext}$  é o vetor-posição do extremo inferior da barra relativo extremo superior, localizado no eixo fixo de rotação. Uma vez que  $\boldsymbol{\omega}$  é, nesse instante, perpendicular à página e aponta para fora dela, vemos que  $\mathbf{v}_{ext}$  é horizontal, para a direita e tem módulo igual a  $\omega l$ .

Com um raciocínio análogo, concluímos que a velocidade do centro de massa da barra, dada por  $\mathbf{v}_{cm} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{cm}$ , é também horizontal, para a direita, mas de módulo igual a  $\omega l/2$ . Por esse motivo, a seta que representa  $\mathbf{v}_{cm}$  na **Figura 37.5** tem metade do tamanho da seta que representa  $\mathbf{v}_{ext}$ . Você saberia desenhar com os tamanhos corretos as setas representativas das velocidades de todos os pontos da barra no instante considerado na **Figura 37.5**?

Pensando agora no movimento da barra como a composição de uma translação com uma rotação em torno de um eixo passando por seu centro de massa, podemos escrever, a partir da equação fundamental da cinemática do corpo rígido,

$$\mathbf{v}_{ext} = \mathbf{v}_{cm} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{ext}, \quad (37.26)$$

onde  $\mathbf{r}'_{ext}$  é o vetor-posição do extremo inferior da barra em relação ao seu centro de massa. Obviamente, as equações (37.25) e (37.26) devem fornecer o mesmo resultado para  $\mathbf{v}_{ext}$ . Vale enfatizar que na equação (37.26) empregamos a mesma

velocidade angular de rotação da barra utilizada em (37.25) (é justamente esse fato que estamos ilustrando nesse exemplo).

É fácil ver que o produto vetorial  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{ext}$  é horizontal e para a direita, mas de módulo igual a  $\omega l/2$ . Portanto, a soma dos dois vetores presentes no lado direito da equação (37.26) também fornece para  $\mathbf{v}_{ext}$  um vetor horizontal, para a direita e de módulo igual a  $\omega l$ , de acordo com o resultado obtido quando pensamos no movimento da barra como uma pura rotação em torno de seu extremo superior. Esse mesmo resultado para  $\mathbf{v}_{ext}$  também pode ser obtido supondo que a rotação seja em torno de um ponto qualquer da barra, não apenas em torno de seu extremo superior ou de seu centro de massa, como fizemos nesse exemplo (veja o problema proposto 2).

Nas seções que seguem, estudaremos diversos movimentos de corpos rígidos, nos quais aplicaremos os resultados desta seção e de outras seções das aulas anteriores.

## Rolamento sem deslizamento de um corpo rígido

É bastante usual observarmos movimentos nos quais corpos rígidos rolam sobre superfícies também rígidas. Exemplos de movimentos desse tipo não faltam em nosso cotidiano: as rodas dos vagões de um trem girando sobre os trilhos da ferrovia, moedas que muitas vezes caem de nossos bolsos e começam a rolar sobre o piso, bolinhas de gude rolando sobre o chão ou mesmo objetos - como discos, cilindros e esferas - que, quando abandonados sobre rampas inclinadas, descem a rampa rolando. Em muitos casos, o rolamento desses corpos ocorre sem que haja deslizamento entre o ponto do corpo e o ponto do solo que estão em contato num dado instante. Quando isso ocorre, ou seja, quando o ponto do corpo que rola sobre uma superfície e está em contato com ela num dado instante não desliza sobre a mesma, dizemos que o corpo está **rolando sem deslizar**. Podemos afirmar, então, que

*rolamento sem deslizamento é, por definição, qualquer movimento no qual um corpo rígido gira mantendo o contato com uma dada superfície e de tal modo que, em qualquer instante, o ponto do corpo que estiver em contato com a superfície terá, necessariamente, velocidade nula (estamos supondo que a superfície esteja em repouso em relação ao referencial inercial em uso).*

No caso de um trem em MRU, as rodas de sua locomotiva estão rolando sem deslizar. No entanto, se por algum motivo o trem der uma freiada muito brusca, chegando ao ponto de travar as suas rodas, o ponto da roda em contato com o trilho deslizará sobre ele e, nessa situação, não teremos rolamento sem deslizamento. Embora os pneus de um carro nem sempre possam ser considerados corpos rígidos, algo análogo ocorre entre eles e o asfalto quando damos uma forte arrancada ou também quando pisamos repentinamente no freio.

Nesta seção, estabeleceremos uma importante relação que será válida sempre que um corpo rígido estiver rolando sem deslizar sobre uma superfície. Essa relação envolverá o módulo da velocidade do centro de massa desse corpo, o módulo de sua velocidade angular de rotação e a distância de seu ponto de contato com a superfície e o eixo de rotação que passa pelo centro de massa do corpo. Essa relação será necessária na solução de problemas que envolvem um corpo rígido em rolamento sem deslizamento. Sem ela, teremos mais incógnitas do que equações para determinar o movimento do corpo rígido em consideração.

Sem perda de generalidade, faremos uma discussão analisando um exemplo específico de rolamento sem deslizamento. Consideremos, então, um disco homogêneo de raio  $R$ , mas fino o suficiente para que pensemos nele como uma distribuição superficial de matéria. Por hipótese, o disco rola sem deslizar sobre uma superfície plana, horizontal e de tal modo que o seu centro de massa descreve um movimento retilíneo uniforme com velocidade  $v_{cm}$ . Conseqüentemente, ao rolar sem deslizar sobre a superfície, o disco se mantém sempre no mesmo plano vertical.

Como você viu, a velocidade de um ponto  $P_i$  qualquer do disco pode ser escrita como

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{cm} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i, \quad (37.27)$$

onde  $\mathbf{r}'_i$  é o vetor-posição do ponto  $P_i$  relativo ao centro de massa do disco. Ou seja, a velocidade de qualquer ponto do disco é dada pela soma de uma parcela comum a todos os pontos ( $\mathbf{v}_{cm}$ ) com outra que é diferente para cada ponto ( $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$ ).

Vamos, a partir de agora, voltar a nossa atenção apenas para pontos da periferia do disco, isto é, para pontos de sua borda, situados a uma distância  $R$  de seu centro de massa. Observe que qualquer um desses pontos necessariamente tocará o solo em algum instante. Para tais pontos, cada termo da equação (37.27) está ilustrado na **Figura 37.6**. Para não sobrecarregar muito os desenhos feitos nessa figura, escolhemos oito pontos da periferia do disco.

---

Caso o disco tivesse uma espessura finita, ou seja, fosse um cilindro bem achatado, o termo  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$  poderia ser igual para pontos diferentes do disco, bastando para isso que a distância entre esses pontos e o eixo de rotação que passa pelo centro de massa fosse a mesma.

---

A parte (a) da **Figura 37.6** mostra somente a primeira parcela do lado direito da equação (37.27), que é comum a todos os pontos do disco (inclusive os que não estão na periferia). A parte (b) dessa figura mostra apenas a segunda parcela do lado direito da equação (37.27). Note que todas as setas desenhadas na parte (b) são tangentes à circunferência de raio  $R$  e têm o mesmo tamanho, pois tais contribuições têm todas o mesmo módulo, dado por  $\omega R$ . Finalmente, a parte (c) dessa figura indica o resultado da soma vetorial das duas parcelas desenhadas nas partes (a) e (b). Tente, mentalmente, efetuar a soma vetorial das duas parcelas para cada um dos oito pontos e verifique que os resultados são, realmente, as setas desenhadas em (c).

Vamos considerar agora o ponto do disco  $P_s$  que está, num dado instante, em contato com a superfície. Como o disco rola sem deslizar, esse ponto está necessariamente em repouso, isto é,

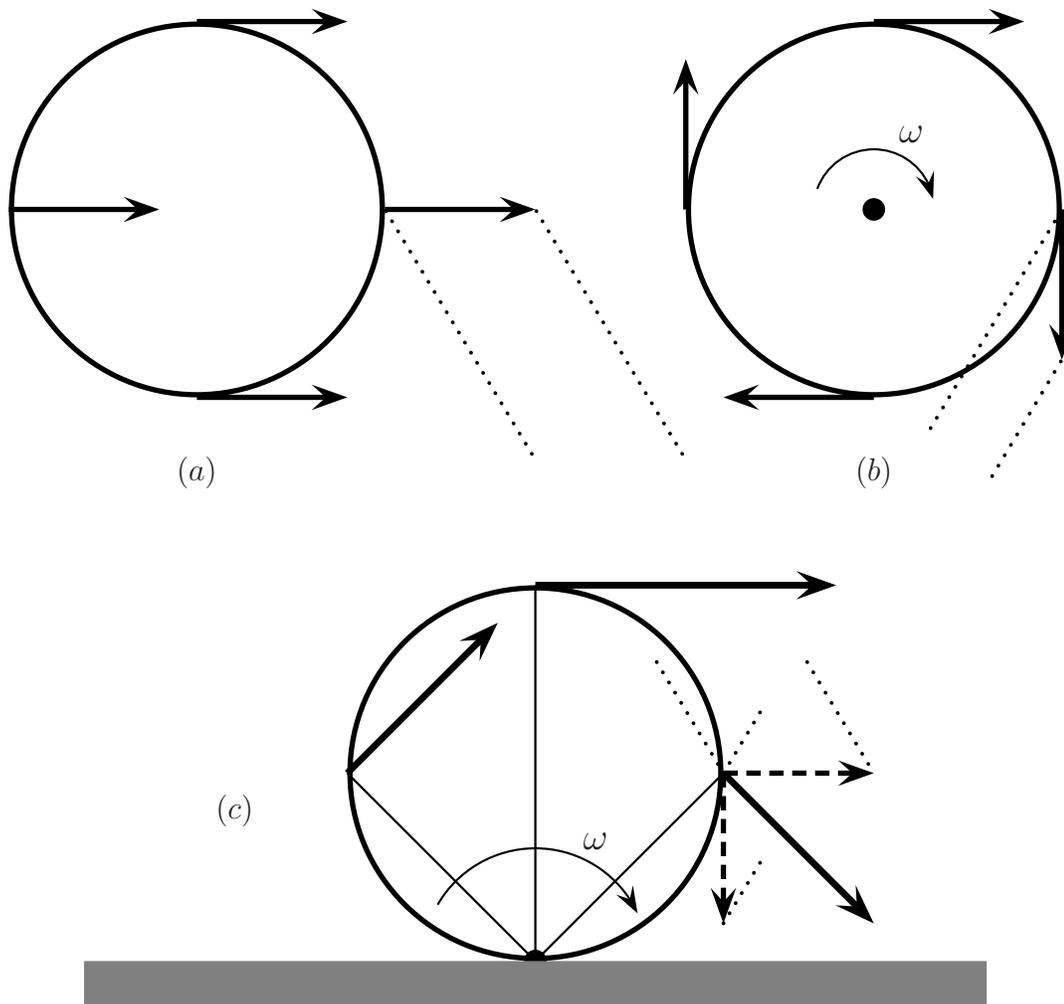
$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_{cm} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_s = \mathbf{0} \quad \implies \quad \mathbf{v}_{cm} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_s.$$

Podemos concluir, então, que os vetores  $\mathbf{v}_{cm}$  e  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_s$ , além de terem a mesma direção e sentidos opostos, têm o mesmo módulo, ou seja:

$$v_{cm} = \omega R. \quad (37.28)$$

Esta é a importante relação que queríamos demonstrar, a chamada condição de rolamento sem deslizamento. Ela é válida a cada instante do movimento do disco. No caso discutido aqui, supusemos um movimento retilíneo uniforme para o centro de massa do disco. No entanto, mesmo se o centro de massa do disco estivesse realizando um movimento retilíneo acelerado, mas continuasse rolando sem deslizar sobre a superfície, a equação anterior continuaria sendo válida. A única diferença, nesse caso, é que, a cada instante, os valores de  $v_{cm}$  e  $\omega$  seriam diferentes, mas ainda assim  $v_{cm} = \omega R$ . Embora a equação anterior tenha sido deduzida para o movimento de um disco rolando sem deslizar, a sua generalização para um corpo rígido qualquer rolando sem deslizar é imediata:

*A condição de rolamento sem deslizamento para um corpo rígido qualquer é dada por  $v_{cm} = \omega r$ , onde  $v_{cm}$  é o módulo da velocidade de seu centro de massa,  $\omega$  é o módulo de sua velocidade angular de rotação e  $r$  é a distância entre o ponto desse corpo que está em contato com a superfície e o eixo de rotação que passa pelo seu centro de massa.*



**Figura 37.6:** A parte (a) mostra a mesma contribuição  $\mathbf{v}_{cm}$  para a velocidade de um ponto qualquer da periferia  $P_i$ ; a parte (b) mostra a contribuição proveniente da rotação em torno do centro de massa,  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ , para a velocidade desses pontos e na parte (c) estão indicadas as velocidades desses pontos, obtidas por meio da soma vetorial das contribuições desenhadas nas partes (a) e (b) da figura.

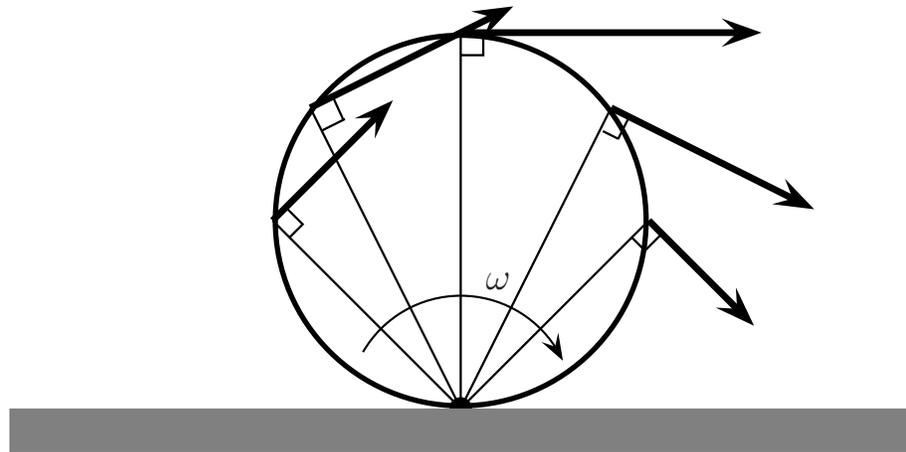
Em geral, a distância  $r$  entre o ponto de contato e eixo de rotação que passa pelo centro de massa do corpo será o raio do corpo (do disco, do cilindro ou da esfera). Há situações, no entanto, em que isso não ocorre, como por exemplo o caso de uma esfera de raio  $R$  que rola sem deslizar dentro de uma canaleta cuja distância entre os trilhos é menor que seu diâmetro.

Finalizaremos esta seção com um comentário que pode ser muito elucidativo. No movimento que acabamos de discutir, o ponto de contato do corpo com a superfície está sempre em repouso (a cada instante, um novo ponto do corpo que está em contato com a superfície). No instante considerado na **Figura 37.6**, o

ponto  $P_s$  está em contato com a superfície e, portanto, é justamente esse o ponto que tem velocidade nula. Isso significa que o movimento do corpo rígido, nesse instante, pode ser considerado como uma pura rotação em torno de um eixo que passa por esse ponto e é perpendicular ao plano da página, com  $\boldsymbol{\omega}$  apontando para dentro dela. Ora, num movimento de pura rotação de um corpo rígido em torno de um eixo, a velocidade de qualquer um de seus pontos é sempre perpendicular ao eixo, à reta que liga o ponto ao eixo e tem módulo igual a  $\omega d$ , onde  $d$  é a distância entre o ponto e o eixo de rotação. Isso tudo fica evidente se aplicarmos a equação fundamental da cinemática do corpo rígido escolhendo o ponto  $P_s$  desse corpo, ou seja, escrevendo para a velocidade de um ponto  $P_i$  qualquer

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_s + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s) = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s).$$

onde usamos o fato de que  $\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$ . Desse modo, vemos que  $\mathbf{v}_i$  está no plano do disco, tem direção perpendicular ao vetor  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s$  e tem módulo igual a  $\omega|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s|$ .



**Figura 37.7:** As velocidades de todos os pontos do disco, num dado instante, são perpendiculares às direções das retas que passam por esses pontos e pelo ponto de contato (ponto pelo qual passa o eixo instantâneo de rotação). Seus módulos são proporcionais às respectivas distâncias desses pontos ao ponto de contato.

O que acabamos de afirmar pode ser ilustrado aproveitando a parte (c) da **Figura 37.6**. Por questões de clareza, repetiremos aqui esse desenho, no qual inserimos as semiretas que ligam alguns dos pontos da figura ao ponto de contato, por onde passa o eixo de rotação. Observe que cada seta desenhada representa a velocidade de cada um dos oito pontos escolhidos e é, de fato, perpendicular à

semireta que liga esse ponto ao ponto de contato, como indica a **Figura 37.7**. Note, ainda, que o tamanho de cada seta é proporcional à distância do ponto do disco ao ponto de contato ( $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s|$ ), por onde passa o eixo de rotação em cada instante.

## Movimento plano de um corpo rígido e aplicações simples

A equação fundamental da cinemática do corpo rígido afirma que, num dado instante, a velocidade de qualquer ponto de um corpo rígido pode ser escrita como a soma da velocidade de um de seus pontos com a velocidade gerada por uma rotação em torno de um eixo que passa por esse ponto. É comum escolher esse ponto como o centro de massa e escrever  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{cm} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ , como fizemos anteriormente. No entanto, num movimento geral, tanto a velocidade do centro de massa quanto a velocidade angular de rotação em torno do centro de massa podem variar. Uma simples mudança da direção do eixo de rotação já tornaria o movimento do corpo rígido bastante complicado. Por esse motivo, não temos a pretensão de estudar o movimento geral de um corpo rígido. Vamos nos contentar em analisar casos particulares.

Já analisamos movimentos de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo. Nesta parte da aula vamos fazer uma pequena generalização e estabelecer as equações que descrevem o movimento de um corpo rígido em casos um pouco mais gerais, a saber, nos chamados **movimentos planos de um corpo rígido**. Por definição, um corpo rígido está num movimento plano se todas as partículas que o compõem se movimentam em planos de mesma jazitura, isto é, em planos paralelos entre si.

O movimento do disco rolando sem deslizar discutido na seção anterior é um exemplo de movimento plano. Nesse caso, inclusive, todas as partículas do disco estão sempre no mesmo plano, o do disco. Um outro exemplo de movimento plano de um corpo rígido é o de uma esfera abandonada a partir do repouso sobre uma rampa inclinada. Note que nesses exemplos, embora a direção do eixo de rotação em torno do centro de massa não tenha se alterado, o centro de massa mudou de posição, de modo que o eixo de rotação que passa pelo centro de massa não está fixo no espaço, mas também muda de posição com o passar do tempo.

Para que o movimento de um corpo rígido no qual o eixo de rotação que passa pelo seu centro de massa varie com o tempo seja, de fato, um movimento plano, é necessário que a velocidade do centro de massa do corpo não tenha componente alguma ao longo do eixo de rotação, ou seja,  $\mathbf{v}_{cm}$  deve ser

perpendicular a  $\boldsymbol{\omega}$ .

De acordo com o que você aprendeu nas aulas anteriores, as equações que descrevem o movimento do centro de massa do corpo rígido e o seu movimento de rotação em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{F}^{ext} = M\mathbf{a}_{cm} \quad (37.29)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{cm}^{ext} = I_{cm}\boldsymbol{\alpha}, \quad (37.30)$$

onde  $\boldsymbol{\tau}_{cm}^{ext}$  é a componente, ao longo do eixo de rotação que passa pelo centro de massa, do torque externo total relativo ao centro de massa.

### Energia cinética de um corpo rígido em movimento plano

Nesta breve seção, pretendemos apenas mostrar que a energia cinética de um corpo rígido pode ser escrita como a soma de dois termos, um deles associado à translação do centro de massa do sistema e o outro associado à rotação do sistema em torno do centro de massa. Por simplicidade, consideraremos somente movimentos nos quais o eixo de rotação que passa pelo centro de massa não muda de direção. Supondo que o corpo rígido seja formado por  $N$  partículas, a sua energia cinética é dada por

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2.$$

Substituindo na equação anterior a relação  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{cm} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$ , obtemos

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_{cm} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N m_i \right) \mathbf{v}_{cm}^2 + \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \cdot \mathbf{v}_{cm} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i|^2 \\ &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_{cm}^2 + \left[ \boldsymbol{\omega} \times \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \right) \right] \cdot \mathbf{v}_{cm} + \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N m_i b_i'^2 \right) \boldsymbol{\omega}^2, \end{aligned} \quad (37.31)$$

onde  $M$  é a massa total do sistema e  $b_i' = |\mathbf{r}'_i| \sin\theta_i'$  é a distância da  $i$ -ésima partícula ao eixo de rotação que passa pelo centro de massa do sistema. Observe que, na última passagem, utilizamos a propriedade da distributividade do produto vetorial em relação à soma. Usando, agora, a definição de centro de massa, ou

seja, lembrando que

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = M \mathbf{r}'_{cm} = \mathbf{0} ,$$

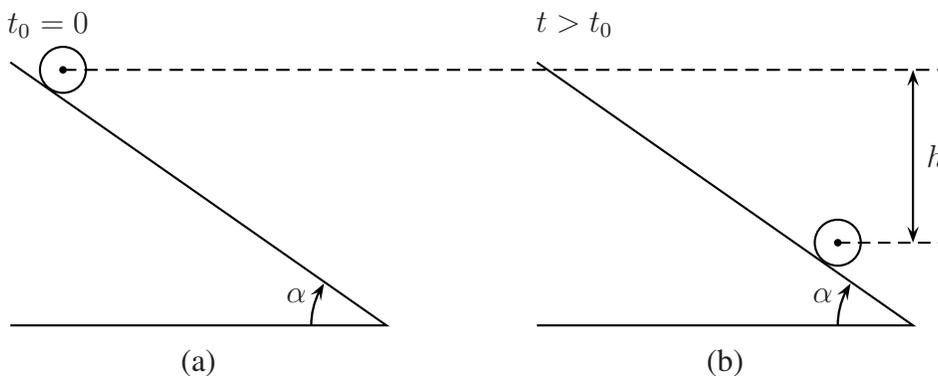
e identificando a expressão para o momento de inércia do sistema relativo ao eixo de rotação que passa pelo centro de massa,  $I_{cm}$ , obtemos

$$K = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \boldsymbol{\omega}^2 . \quad (37.32)$$

É comum chamar os termos do lado direito da equação anterior **energia cinética de translação** e **energia cinética de rotação** do corpo rígido. Desse modo, escrevemos  $K = K_{tr} + K_{rot}$ , onde  $K_{tr}$  é a igual à energia cinética de uma partícula com a massa total do sistema e a velocidade de seu centro de massa e  $K_{rot}$  é a energia cinética associada à rotação em torno do centro de massa. A seguir, faremos algumas aplicações simples das fórmulas anteriores em movimentos planos de corpos rígidos.

### Exemplo 37.2

Uma esfera homogênea de massa  $M$  e raio  $R$  é abandonada em  $t_0 = 0$  a partir do repouso de um ponto sobre uma rampa inclinada. Seja  $\alpha$  o ângulo entre a rampa e a horizontal, como ilustra a parte (a) da **Figura 37.8**.



**Figura 37.8:** (a) Esfera em repouso sobre a rampa no instante inicial  $t_0 = 0$ ; (b) Esfera num instante genérico  $t > 0$ , após ter rolado sem deslizar sobre a rampa e descido uma altura  $h$ .

Suponha que a esfera role sem deslizar durante todo o movimento sobre a rampa. A parte (b) da **Figura 37.8** mostra um instante genérico  $t > t_0$  no qual o centro de massa da esfera possui uma velocidade de módulo  $v_{cm}$  e está a uma altura  $h$  abaixo de sua posição inicial. Tanto  $v_{cm}$  quanto  $h$  serão determinados em função de  $t$  e dos dados do problema (a aceleração da gravidade é sempre considerada como dada, a não ser que se afirme explicitamente o contrário).

O movimento dessa esfera rampa abaixo é, de fato, um movimento plano. Para determiná-lo, devemos utilizar as equações apropriadas, escritas na seção anterior: a que descreve o movimento do centro de massa e a que descreve o movimento de rotação da esfera em torno do centro de massa, equações (37.29) e (37.30), respectivamente. Como a esfera é rígida e está sempre em contato com a superfície da rampa, a aceleração de seu centro de massa é paralela à rampa e para baixo. Temos, então

$$Mg \operatorname{sen} \alpha - f_{at} = Ma_{cm} \quad (37.33)$$

$$f_{at} R = I_{cm} \alpha, \quad (37.34)$$

onde  $I_{cm} = (2/5)MR^2$ , e  $a_{cm}$ ,  $\alpha$  e  $f_{at}$  são, respectivamente, os módulos de  $\mathbf{a}_{cm}$ ,  $\alpha$  e  $\mathbf{f}_{at}$ . Como a esfera rola sem deslizar,  $v_{cm} = \omega R$  em qualquer instante. Conseqüentemente, temos também

$$a_{cm} = \alpha R. \quad (37.35)$$

Substituindo a equação (37.35) em (37.34), obtemos

$$f_{at} R = \frac{2}{5} MR^2 \frac{a_{cm}}{R} \implies f_{at} = \frac{2}{5} Ma_{cm},$$

que inserida na equação (37.33) nos leva ao resultado

$$Mg \operatorname{sen} \alpha - \frac{2}{5} Ma_{cm} = Ma_{cm} \implies a_{cm} = \frac{5}{7} g \operatorname{sen} \alpha. \quad (37.36)$$

Conhecida a aceleração do centro de massa da esfera e lembrando que ela partiu do repouso em  $t_0 = 0$ , é fácil obter, por integração no tempo, o módulo da velocidade do centro de massa num instante qualquer  $t > t_0$  (obviamente, o movimento do centro de massa é retilíneo, paralelo à rampa para baixo)

$$v_{cm} = \frac{5}{7} g \operatorname{sen} \alpha t. \quad (37.37)$$

Integrando uma vez mais no tempo, obtemos a distância percorrida pelo centro de massa no intervalo de tempo  $[t_0, t]$ ,  $\Delta s_{cm}$ , e a sua variação de altura,  $h$  (veja a parte (b) da **Figura 37.8**):

$$\Delta s_{cm} = \frac{5}{14} g \operatorname{sen} \alpha t^2 \quad \text{e} \quad h = \Delta s_{cm} \operatorname{sen} \alpha = \frac{5}{14} g \operatorname{sen}^2 \alpha t^2. \quad (37.38)$$

A partir das equações (37.36), (37.37) e (37.38), podemos eliminar o tempo da expressão de  $v_{cm}$  e relacionar essa velocidade diretamente com  $h$ , isto é,

$$v_{cm}^2 = \frac{10}{7} gh. \quad (37.39)$$

Vale a pena chamar atenção para o fato de que a última equação poderia ter sido obtida diretamente do Teorema da Conservação da Energia Mecânica. De fato, como só realizam trabalho forças conservativas a soma da energia cinética da esfera (de translação e de rotação) com a sua energia potencial gravitacional permanece constante ao longo de um movimento possível da esfera. Lembrando que a esfera partiu do repouso, podemos escrever

$$Mgz_0 = Mgz + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2.$$

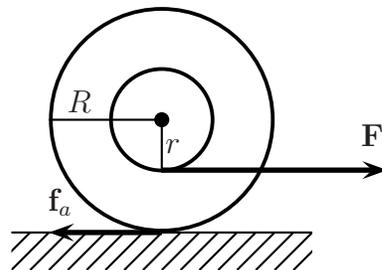
Como a esfera rola sem deslizar, temos  $v_{cm} = \omega R$ , e fazendo a identificação  $z_0 - z = h$ , obtemos

$$Mg(z_0 - z) = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\left(\frac{v_{cm}^2}{R^2}\right) = \frac{7}{10}Mv_{cm}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{cm}^2 = \frac{10}{7}gh,$$

de acordo com a equação (37.39).

### Exemplo 37.3

Considere um carretel de linha, inicialmente em repouso, formado por um cilindro interno homogêneo de raio  $r$  e por dois discos idênticos, homogêneos, de raio  $R$  cada um ( $R > r$ ) e que estão presos nas extremidades do cilindro (como um iô-iô de criança). Seja  $I_{cm}$  o momento de inércia do carretel em relação ao seu eixo de simetria (eixo perpendicular aos discos que passa pelo seu centro de massa) e seja  $M$  a massa total do carretel. Há um fio ideal enrolado no carretel que é puxado a partir de  $t_0 = 0$  com uma força horizontal de módulo constante  $F$ , como indica a **Figura 37.9**.



**Figura 37.9:** Corte vertical do carretel, mostrando o raio  $r$  do cilindro em torno do qual o fio está enrolado e o raio externo  $R$  dos discos presos nos extremos do cilindro. A força  $F$  é exercida pelo fio sobre o cilindro interno e  $f_a$  é a força de atrito resultante exercida pela superfície sobre os discos.

Suponha que o valor de  $F$  seja pequeno o suficiente para que o carretel role sem deslizar sobre a superfície. Desejamos saber se ele irá se mover para a esquerda, desenrolando o fio, ou para a direita, enrolando o fio. Além disso, também queremos determinar qual será a aceleração do centro de massa do carretel.

A força de atrito aqui não realiza trabalho, pois, como a esfera rola sem deslizar, o ponto de aplicação dessa força não se desloca.

Aplicando as equações (37.29) e (37.30) ao movimento do carretel e usando a condição de rolamento sem deslizamento, temos

$$F - f_{at} = Ma_{cm} \quad (37.40)$$

$$f_{at}R - Fr = I_{cm}\alpha \quad (37.41)$$

$$\alpha = \frac{a_{cm}}{R}, \quad (37.42)$$

onde  $f_{at} = |f_{at}|$  e  $a_{cm} = |a_{cm}|$ . Antes, porém, de determinar a partir das três equações anteriores o valor de  $a_{cm}$ , utilizaremos um raciocínio qualitativo para descobrir para que lado o carretel se moverá.

Se  $F = f_{at}$ , de (37.40) vemos que  $a_{cm} = 0$ , mas de (37.41), temos  $\alpha \neq 0$ , de modo que a condição de rolamento sem deslizamento não poderá ser cumprida, violando a hipótese inicial.

Se  $F < f_{at}$ , de (37.40) vemos que o centro de massa do carretel deveria se mover para a esquerda, mas de (37.41) vemos que o carretel deveria girar com  $\alpha \neq 0$  no sentido horário. No entanto, é impossível que o centro de massa do carretel vá para a esquerda e ao mesmo tempo gire no sentido horário sem que seja violada a condição de rolamento sem deslizamento, de modo que essa possibilidade também viola a hipótese inicial.

Resta, portanto, a possibilidade em que  $F > f_{at}$ . Nesse caso, vemos que o centro de massa do carretel se move para a direita. Mas como, por hipótese, o carretel rola sem deslizar, ele deve girar no sentido horário. Para que isso ocorra, mesmo sendo  $f_{at} < F$ , devemos ter  $f_{at}R > Fr$ , o que de fato ocorre, como ficará claro na determinação de  $a_{cm}$ , que passamos a discutir.

Inserindo a equação (37.42) em (37.41), temos

$$f_{at}R - Fr = I_{cm} \frac{a_{cm}}{R} \implies f_{at} = F \frac{r}{R} + \frac{I_{cm}}{R^2} a_{cm},$$

que substituída em (37.40), nos fornece o resultado

$$F - F \frac{r}{R} - \frac{I_{cm}}{R^2} a_{cm} = Ma_{cm} \implies F \left(1 - \frac{r}{R}\right) = \left(M + \frac{I_{cm}}{R^2}\right) a_{cm},$$

ou seja,

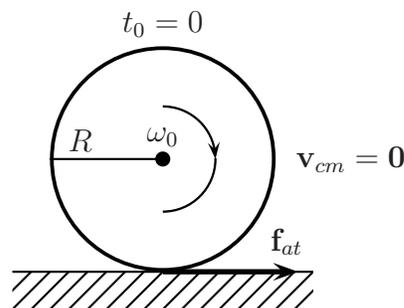
$$a_{cm} = \frac{F(1 - r/R)}{M(1 - I_{cm}/R^2)}. \quad (37.43)$$

Embora pareça estranho, e até mesmo contrário à nossa intuição, o carretel, ao ser puxado como indicado na **Figura 37.9**, isto é, com o fio na horizontal e passando por baixo do cilindro se move na direção e sentido de quem o puxa, enrolando mais ainda o fio no carretel. Se você não está convencido desse resultado tão interessante, faça agora mesmo a experiência com algum carretel velho

que encontrar em sua casa (caso não encontre um, construa um carretel desse tipo). No problema 5, você analisará o movimento desse mesmo carretel quando o fio é puxado com a sua direção mantida sempre na vertical (tente resolver agora mesmo esse problema).

### Exemplo 37.4

Uma esfera homogênea de massa  $M$  e raio  $R$  é colocada, em  $t_0 = 0$ , sobre uma superfície plana de tal modo que, nesse instante, a velocidade de seu centro de massa é nula e a sua velocidade angular de rotação em torno de um eixo horizontal que passa pelo seu centro de massa tem módulo  $\omega_0$ , como indica a **Figura 37.10**.



**Figura 37.10:** Esfera tocando a superfície horizontal com velocidade inicial do centro de massa nula, mas com velocidade angular inicial diferente de zero.

Supondo que a superfície não seja lisa, desejamos saber qual será o módulo da velocidade do centro de massa depois que a esfera passar a rolar sem deslizar sobre a superfície.

Note que quando a esfera tocar a superfície, a condição de rolamento sem deslizamento não será satisfeita. Devido ao deslizamento sobre a superfície, haverá uma força de atrito cinético sobre a esfera horizontal e para a direita, de módulo constante e denotada por  $f_{at}$ . Essa força produzirá uma aceleração constante no centro de massa da esfera, dada por  $a_{cm} = f_{at}/M$ , e também um torque relativo ao centro de massa, fazendo com que a sua rotação diminua com uma aceleração angular de módulo constante igual a  $f_{at}R/I_{cm}$ , onde  $I_{cm} = (2/5)MR^2$ . Com isso, vemos que em algum instante, que designaremos por  $t_1$ , a condição de rolamento sem deslizamento será satisfeita. A partir desse momento, como não haverá mais tendência de movimento relativo entre os pontos da esfera e da superfície que estiverem em contato, não haverá mais força de atrito. Conseqüentemente, tanto  $v_{cm}$  quanto  $\omega$  permanecerão com esses valores e a esfera passará a rolar sem deslizar.

Esse resultado era conhecido (empiricamente) e utilizado por funcionários que tinham como tarefa enrolar longos rolos de filmes em grandes carretéis, muito embora eles provavelmente não soubessem a explicação física que você acabou de aprender.

A partir das afirmativas anteriores, podemos escrever

$$v_{cm} = \frac{f_{at}}{M} t \quad (37.44)$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{f_{at}R}{M} t, \quad (37.45)$$

equações válidas somente no intervalo de tempo  $[t_0, t_1]$ . Para encontrarmos o instante  $t_1$ , basta utilizar as duas equações anteriores e impor que a condição de rolamento sem deslizamento seja satisfeita:

$$v_{cm} = \omega R \quad \Rightarrow \quad \frac{f_{at}}{M} t_1 = \left( \omega_0 - \frac{f_{at}R}{M} t_1 \right) R,$$

ou seja,

$$t_1 = \frac{M}{f_{at}} \left( \frac{\omega_0 R}{1 + MR^2/I_{cm}} \right). \quad (37.46)$$

Substituindo a equação (37.46) em (37.44), e usando também o fato de que  $I_{cm} = (2/5)MR^2$ , obtemos

$$v_1 = \frac{\omega_0 R}{1 + MR^2/I_{cm}} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{2}{7} \omega_0 R, \quad (37.47)$$

que é justamente o valor da velocidade do centro de massa da esfera quando ela entra em rolamento sem deslizamento.

## Resumo

A velocidade de um ponto  $P_i$  qualquer de um corpo rígido é dada por  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\mathcal{O}'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$ , onde  $\mathcal{O}'$  é um ponto fixo qualquer do corpo rígido,  $\boldsymbol{\omega}$  é a velocidade angular vetorial de rotação do corpo rígido em torno de um eixo que passa por  $\mathcal{O}'$  e  $\mathbf{r}'_i$  é o vetor-posição de  $P_i$  relativo ao ponto  $\mathcal{O}'$ . Essa fórmula mostra que, a cada instante, o movimento de um corpo rígido é uma combinação de um movimento de translação com um movimento de rotação. O eixo de rotação pode, inclusive, mudar a sua direção com o passar do tempo. Por esse motivo são comuns as expressões “velocidade instantânea de rotação” e “eixo instantâneo de rotação”. A equação anterior é conhecida como fórmula fundamental da cinemática de um corpo rígido.

A velocidade angular de rotação de um corpo rígido não depende do ponto em relação ao qual consideramos a sua rotação. É comum, e bastante conveniente, pensar no movimento de um corpo rígido como uma translação mais uma rotação em torno de um eixo que passe pelo seu centro de massa. Nesse caso, a fórmula

anterior se escreve como  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{cm} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$ , onde, agora,  $\mathbf{r}'_i$  é o vetor-posição de  $P_i$  relativo ao centro de massa do corpo rígido.

Dizemos que um corpo rígido, como por exemplo uma esfera ou um disco, rola sem deslizar sobre uma dada superfície quando o ponto do corpo que estiver em contato com a superfície num dado instante não deslizar sobre ela nesse instante. Em outras palavras, a condição de rolamento sem deslizamento será satisfeita quando o ponto do corpo que estiver de contato com a superfície possuir exatamente a mesma velocidade do ponto da superfície, ou seja, velocidade nula. Num rolamento sem deslizamento sempre é possível descrever o movimento do corpo rígido em questão como uma rotação pura em torno de um eixo que passa pelo ponto de contato do corpo com a superfície. A cada instante, o ponto de contato está em outra posição, de modo que o eixo em torno do qual o movimento do corpo rígido é uma rotação pura muda de posição com o tempo. Num rolamento sem deslizamento, vale a condição  $|\mathbf{v}_{cm}| = |\boldsymbol{\omega}|R$ , onde  $R$  é o raio da esfera, do disco ou, rigorosamente falando, a distância entre o centro de massa do corpo e o eixo de rotação em torno do qual o movimento do corpo é uma rotação pura.

## Questionário

1. O que é movimento de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo instantâneo de rotação?
2. Escreva a chamada fórmula fundamental da cinemática de um corpo rígido e explique o seu significado.
3. A velocidade angular vetorial de rotação de um corpo rígido depende do ponto em relação ao qual consideramos a sua rotação?
4. O que significa rolamento sem deslizamento de um corpo rígido sobre uma superfície?
5. Escreva a expressão matemática da condição de rolamento sem deslizamento e explique cada quantidade que nela aparece.
6. O que é movimento plano de um corpo rígido? Dê alguns exemplos.
7. Uma esfera, um disco e um anel, todos eles homogêneos e de mesma massa são abandonados a partir do repouso de uma mesma altura sobre uma rampa inclinada e passam a rolar sem deslizar rampa abaixo. Sem fazer contas, responda qual é a ordem de chegada na base da rampa?

## Problemas propostos

1. Neste problema você demonstrará que a velocidade angular de rotação de um corpo rígido não depende do ponto em relação ao qual consideramos a sua rotação. Siga exatamente o procedimento sugerido a seguir.

Considere dois pontos distintos de um corpo rígido,  $\mathcal{O}'$  e  $\mathcal{O}''$  e seja  $\mathbf{h}$  o vetor-posição de  $\mathcal{O}''$  relativo a  $\mathcal{O}'$ . De acordo com a equação fundamental da cinemática do corpo rígido, a velocidade de um ponto  $P_i$  qualquer desse corpo pode ser escrita como

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\mathcal{O}'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i \quad \text{ou também} \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\mathcal{O}''} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}''_i,$$

onde  $\boldsymbol{\omega}$  é a velocidade de rotação em torno de um eixo que passa por  $\mathcal{O}'$ ,  $\boldsymbol{\omega}'$  é a velocidade de rotação em torno de um eixo que passa por  $\mathcal{O}''$ ,  $\mathbf{r}'_i$  é o vetor-posição de  $P_i$  relativo a  $\mathcal{O}'$  e  $\mathbf{r}''_i$  é o vetor-posição de  $P_i$  relativo a  $\mathcal{O}''$ . Pois bem, igualando essas duas expressões para  $\mathbf{v}_i$  e usando as relações

$$\mathbf{v}_{\mathcal{O}''} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}'_i = \mathbf{h} + \mathbf{r}''_i,$$

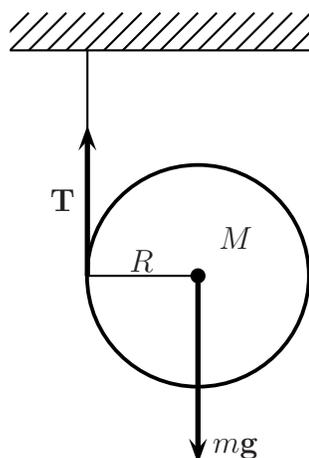
demonstre que  $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}$ .

2. Reconsidere o exemplo 37.1 e calcule novamente a velocidade  $\mathbf{v}_{ext}$  do extremo inferior da barra quando ela está na vertical (veja a **Figura 37.5**) a partir da equação

$$\mathbf{v}_{ext} = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{ext} - \mathbf{r}_P),$$

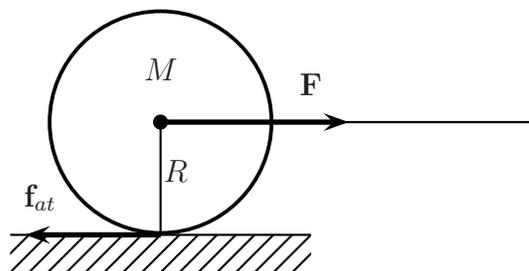
em que  $P$  é um ponto situado a uma distância  $s$  do extremo superior da barra. Confira o resultado com o obtido no exemplo 37.1.

3. Um fio ideal tem um de seus extremos preso na periferia de um disco e está enrolado várias voltas em torno dele, tendo seu outro extremo preso ao teto. O disco é homogêneo, de massa  $M$  e raio  $R$ . Ele é abandonado a partir do repouso e de tal modo que esteja, inicialmente, num plano vertical. A partir desse instante o centro de massa do disco se move com uma aceleração constante e o disco gira em torno de um eixo horizontal que passa pelo centro de massa com uma aceleração angular constante. A **Figura 37.11** mostra um instante genérico desse movimento. Nela estão marcadas as forças que atuam no disco. Suponha que o fio não desliza sobre a periferia do disco.



**Figura 37.11:** Fio se desenrolando do disco à medida que esse desce acelerado.

- (a) Determine a aceleração do centro de massa do disco e verifique que seu módulo é menor do que  $g$ . Explique esse resultado à luz da Lei da Conservação da Energia Mecânica.
- (b) Determine o módulo da aceleração angular do disco e a tensão no fio.
- (c) Calcule a velocidade do centro de massa do disco depois que ele descer uma altura  $h$ , em relação a sua posição inicial, diretamente a partir da Lei da Conservação da Energia Mecânica.
4. Um disco homogêneo de massa  $M$  e raio  $R$  é puxado por um fio ideal horizontal que está preso em seu eixo por uma força constante  $F$ , como ilustra a **Figura 37.12**. O disco rola sem deslizar sobre a superfície.



**Figura 37.12:** Disco puxado por uma força horizontal  $F$  exercida sobre seu eixo.

Determine os módulos da aceleração do centro de massa desse disco, de sua aceleração angular e da força de atrito.

5. Reconsidere o exemplo 37.3, mas agora suponha que o fio seja puxado de modo que a sua direção seja mantida sempre na vertical, como indica a **Figura 37.13**. Suponha que a força exercida pelo fio sobre o carretel, de

módulo  $F$ , (a tensão no fio), seja pequena o suficiente para que o carretel role sem deslizar sobre a superfície.

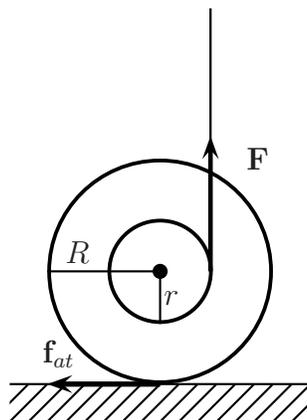


Figura 37.13: Carretel puxado na vertical.

- (a) Usando argumentos qualitativos, determine se o carretel irá se mover para a direita ou para a esquerda.
  - (b) Calcule, para um dado valor de  $F$ , os módulos da aceleração do centro de massa do carretel, da sua aceleração angular e da força de atrito.
  - (c) Para valores de  $F$  cada vez maiores, mas ainda menores do que  $Mg$  para que o carretel não perca o contato com a superfície, o módulo da normal vai diminuindo. Com isso, também diminui o valor de  $\mu_e N$ , sendo  $\mu_e$  o coeficiente de atrito estático entre a superfície e o carretel. Portanto, haverá um valor de  $F$  acima do qual não será mais possível para o carretel rolar sem deslizar. Determine esse valor.
6. Reconsidere o problema do carretel estudado tanto no exemplo 37.3 quanto no problema anterior, mas suponha agora que o fio seja puxado de tal modo que sua direção seja mantida fixa e fazendo um ângulo  $\alpha$  com a horizontal, como ilustra a **Figura 37.14**. Suponha, ainda, que a tensão no fio seja pequena o suficiente para que nunca haja deslizamento do carretel sobre a superfície.

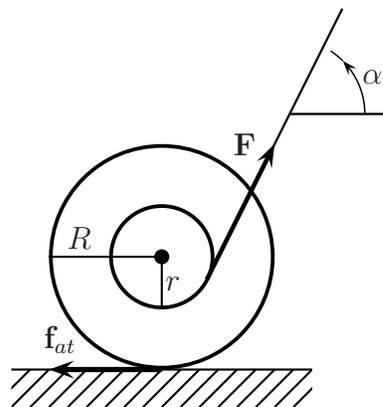
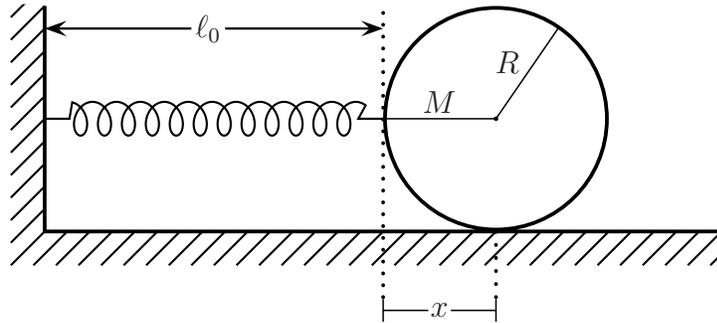


Figura 37.14: Carretel com fio inclinado.

Determine o ângulo  $\alpha$  em termos dos raios  $r$  (do cilindro interno do carretel) e  $R$  (dos discos externos que formam o carretel) para que o carretel permaneça em repouso, qualquer que seja a tensão no fio (mas desde que seja pequena o suficiente para que não haja deslizamento, como supusemos anteriormente).

7. Uma bola de sinuca de raio  $R$  sofre uma pancada, isto é, uma força impulsiva horizontal e aplicada a uma altura  $h$  acima da superfície da mesa, com  $R < h < 2R$ . Determine  $h$  para que a bola comece seu movimento rolando sem deslizar.
8. Reconsidere o problema anterior, mas suponha que a pancada seja dada a uma altura  $h = R$ , de modo que imediatamente após a pancada o centro de massa da bola tenha adquirido uma velocidade inicial  $v_0$ , mas não possua nenhuma velocidade angular de rotação inicial. Determine a velocidade do centro de massa da bola depois que ela passar a rolar sem deslizar sobre a mesa.
9. Suponha que uma barra homogênea de massa  $m$  e comprimento  $\ell$ , inicialmente em repouso, seja golpeada por uma força impulsiva em um ponto distante  $s$  de seu centro de massa, com  $0 < s < \ell/2$ . Suponha que essa força impulsiva tenha sido aplicada numa direção perpendicular à barra. Determine o ponto da barra que estará em repouso logo após a pancada ter sido aplicada. Você acha que essa informação pode ser relevante na prática de alguns esportes com raquetes, como o tênis, por exemplo?
10. Um disco homogêneo de massa  $M$  e raio  $R$  tem presa ao seu eixo uma das extremidade de uma mola ideal de constante elástica  $k$ . A outra extremidade dessa mola está fixa a uma parede. A mola está na horizontal e, por

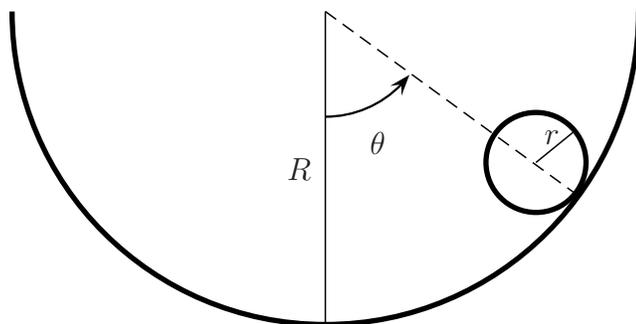
hipótese, o disco rola sem deslizar sobre a superfície horizontal como indica a **Figura 37.15**.



**Figura 37.15:** Disco oscilando harmonicamente sobre uma superfície horizontal, mas sem nunca deslizar sobre ela devido a uma mola ideal que tem um de seus extremos preso em seu eixo e o outro numa parede vertical.

Determine o período das oscilações do disco.

11. Uma barra homogênea de massa  $m$  e comprimento  $\ell$  está inicialmente em repouso sobre uma mesa de superfície horizontal e lisa. Uma partícula de massa  $m$  e velocidade de direção perpendicular à barra e de módulo  $v_0$  atinge um dos extremos da barra e a partir desse instante fica grudada nesse extremo da barra.
  - (a) Determine a velocidade do centro de massa do sistema partícula-barra antes e depois da colisão.
  - (b) Calcule a posição do centro de massa do sistema partícula-barra no instante em que a partícula atinge a barra.
  - (c) Determine a velocidade angular de rotação do sistema partícula-barra em torno de seu centro de massa após a colisão.
  
12. Uma esfera homogênea de massa  $m$  e raio  $r$  oscila, com pequenas amplitudes de oscilação, dentro de uma calha cilíndrica de raio  $R$ , com  $R > r$ , como ilustra a **Figura 37.16**.



**Figura 37.16:** Esfera oscilando e rolando sem deslizar sobre a superfície interna de uma calha cilíndrica.

Suponha que o movimento da esfera seja plano e que ela role sem deslizar sobre a calha cilíndrica. Determine o período das oscilações da esfera.

13. Uma barra homogênea de massa  $m$  e comprimento  $\ell$  é lançada para cima de modo que um de seus extremos tem velocidade nula. Supondo que o módulo da velocidade de seu centro de massa seja  $v_0$ , determine o valor de  $v_0$  para que ela tenha dado duas voltas completas desde o seu lançamento até o instante em que seu centro de massa atingiu o ponto mais alto de sua trajetória .
14. Certifique-se de que você entendeu todas as passagens matemáticas feitas na equação (37.31).

### Auto-avaliação

Trata-se do último questionário e da última lista problemas de seu curso de Física 1B, uma vez que a próxima aula é experimental e você será solicitado a realizar apenas tarefas experimentais. Por esse motivo, mais do que nunca, você deve responder ao questionário inteiro e tentar resolver todos os problemas. Não será fácil, pois alguns dos deles são difíceis. Mas não há nada melhor para fechar um curso com chave de ouro do que resolver integralmente toda a lista proposta de problemas. Nesta última auto-avaliação, não diremos quais são os problemas mais complicados, pois você já deve ter adquirido o discernimento para distinguir os problemas fáceis dos difíceis. Esperamos, também, que você tenha adquirido a segurança necessária para atacar qualquer problema que esteja dentro de suas possibilidades.



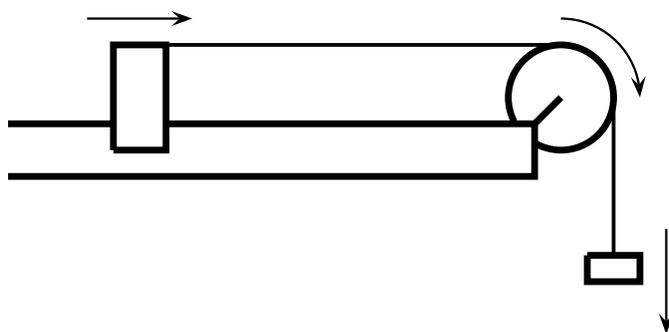
## Aula 38 – Medindo momento de inércia

### Objetivos

- Medir as energias envolvidas em um sistema composto de um carrinho sobre o trilho de ar, ligado por um fio que passa por uma polia real a um corpo.
- Determinar a energia cinética de rotação da polia.
- Determinar o momento de inércia da polia a partir dessa energia cinética.

### Introdução

Faremos, nesta aula, um experimento muito semelhante ao que fizemos na Aula 27. A diferença fica por conta da polia usada; ela terá um momento de inércia bastante grande, de tal forma que será necessário considerar a energia cinética de sua rotação no cálculo da energia mecânica do sistema. A figura a seguir é um desenho esquemático do experimento.



**Figura 38.1:** Na descida do peso suspenso, que puxa o carrinho no trilho, o fio faz a polia girar e ganhar energia cinética de rotação.

### Procedimento Experimental

1. Utilize o mesmo procedimento adotado na Aula 27, “Medindo a energia mecânica de um sistema”, substituindo a polia utilizada naquele experimento pelo disco de aço fixado à haste vertical.
2. Meça o diâmetro do disco e determine o seu raio com a respectiva incerteza.

---

Na Aula 27, “Medindo a energia mecânica de um sistema”, usamos uma polia que, para o caso em questão, podia ser considerada ideal. Este não será o caso agora. Usamos, então, o termo “polia real”. Leia as aulas teóricas sobre rotações para verificar em que situações pode-se considerar uma polia como ideal.

---

3. Acrescente duas massas de 50g (uma de cada lado) ao carrinho que você for usar. Meça a massa total com a balança do laboratório. Faça também a medição da massa do corpo que se deslocará verticalmente quando suspenso por um fio amarrado ao carrinho e passando pelo disco que funcionará como polia. Escolha um corpo com massa entre 40 e 60g. Não se esqueça de anotar as incertezas nessas medidas.
4. Posicione o disco alinhado com o trilho de ar e próximo a uma das suas extremidades. Passe o fio que liga o carrinho ao corpo suspenso pela borda do disco (veja o desenho esquemático na figura anterior). Procure fazer isso de tal forma que o disco não fique inclinado em relação ao alinhamento do trilho de ar.
5. Faça algumas simulações sem a fita termossensível, soltando o corpo de várias alturas, para que você possa escolher, não só a frequência adequada do centelhador, mas também a altura inicial da qual o corpo será abandonado.
6. Posicione a fita termossensível de modo que a região de tomada de dados esteja sobre ela.

### **Tomada de dados**

1. Antes de começar a tomada de dados, registre na fita a posição da qual o carrinho será abandonado e aquela em que ele se encontrará no instante em que o corpo suspenso tocar o chão.
2. Volte o carrinho para a primeira posição e o solte (partindo do repouso), registrando o movimento na fita.
3. Retire a fita do trilho de ar e a coloque fixada a uma mesa. Proceda à leitura dos pontos marcados na fita e, como já foi feito em experimentos anteriores, construa uma tabela da posição do carrinho em função do tempo.
4. Não se esqueça de obter, também na fita, a altura inicial da qual o corpo foi abandonado. Em todas as suas medições, lembre-se de estimar e anotar as incertezas.

## Análise dos dados

1. Obtenha uma tabela da velocidade como função do tempo, usando os dados da tabela que você obteve da posição do carrinho *versus* tempo. Faça, então, um gráfico da velocidade *versus* tempo. Use os mesmos procedimentos adotados nos experimentos anteriores. Em particular, não se esqueça de calcular as incertezas.
2. Usando o gráfico obtido no item anterior, verifique qual o tipo de movimento que o carrinho executou ao longo do trilho de ar. Também por meio do gráfico, determine a aceleração do carrinho e a aceleração angular do disco enquanto o carrinho estava se movendo. Não se esqueça das incertezas nos resultados das duas acelerações.
3. A partir do gráfico, determine o instante  $t_c$  e a velocidade  $v_c$  com que o corpo toca o solo. Estime as incertezas para essas duas grandezas a partir das incertezas dos pontos do gráfico. Compare-as com os resultados analíticos obtidos no exemplo resolvido da Aula 35.
4. Calcule a energia potencial gravitacional do sistema no início do movimento. Considere como ponto padrão a posição inicial do carrinho. Não se esqueça de calcular a incerteza associada.
5. Calcule a energia potencial gravitacional do sistema em outro instante de tempo. Calcule a energia cinética de translação do sistema neste mesmo instante. Não se esqueça das incertezas. Veja como calculá-las na Aula 27.
6. Calcule a diferença entre a energia calculada no item 4 e a soma das energias obtidas no item 5. A partir deste resultado, estime o valor do momento de inércia do disco. Compare com o momento de inércia de um disco homogêneo:  $I_{CM}^{disco} = MR^2/2$ , onde  $M$  e  $R$  são, respectivamente, a massa e o raio do disco.

## Atividades extras

1. Calcule, a partir dos seus resultados, as tensões sobre o fio em cada um dos lados do disco.
2. Suponha que você fizesse este experimento com o carrinho em cima de uma mesa comum, isto é, permitindo que, sobre o carrinho, atuem além das forças do experimento uma força de atrito. Se você verificar que a roldana

rodou de um ângulo  $\Delta\theta$  num intervalo de tempo  $\Delta t$ , como você poderia estimar a força de atrito entre o carrinho e a mesa? Analise em que casos haverá movimento e em que casos o sistema ficará parado.

### **Auto-avaliação**

Como sempre, a melhor maneira de se auto-avaliar numa aula experimental é por meio da confecção do relatório. É tentando fazer o que é pedido nos itens da tomada e análise dos dados que podem aparecer eventuais dúvidas. Procure também responder às questões do item “Atividades extras”.



ISBN 85-7648-111-1



9 788576 481119



**UENF**  
Universidade Estadual  
do Norte Fluminense



Ministério  
da Educação

