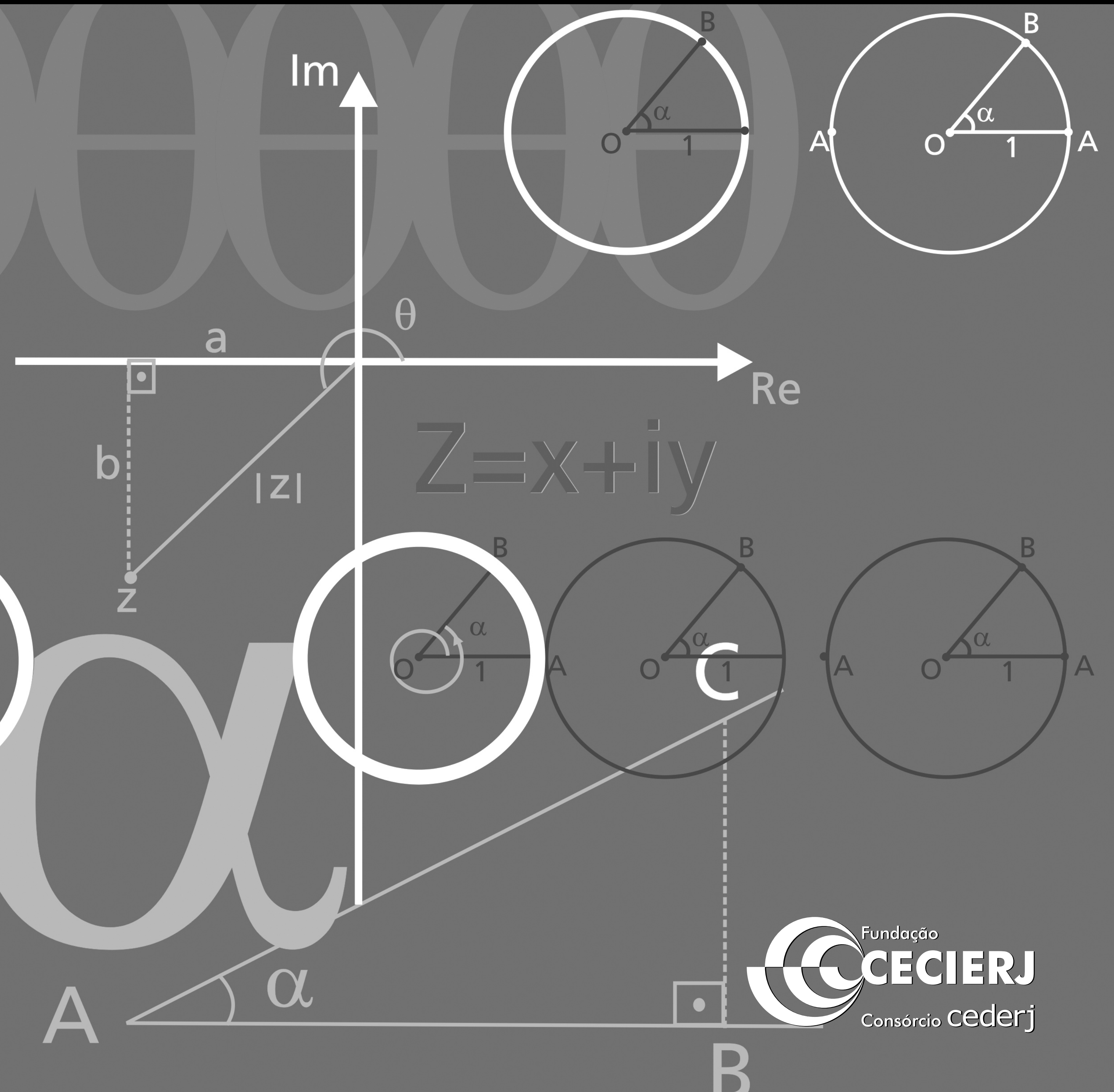
Módulo 2

Celso Costa
Roberto Geraldo Tavares Arnaut

Volume 2

Números Complexos e Trigonometria



Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação CECIERJ

Consórcio cederj

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Números Complexos e Trigonometria

Volume 2 – Módulo 2

Celso Costa
Roberto Geraldo Tavares Arnaut

GOVERNO DO Rio de Janeiro

SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2299-4565 Fax: (21) 2568-0725

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Celso Costa
Roberto Geraldo Tavares Arnaut

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL
Cristine Costa Barreto

Departamento de Produção

EDITORA
Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Jane Castellani

COORDENAÇÃO GRÁFICA
Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Equipe CEDERJ

COORDENAÇÃO DE ILUSTRAÇÃO
Eduardo Bordoni

ILUSTRAÇÃO
Equipe CEDERJ

CAPA
Eduardo Bordoni

PRODUÇÃO GRÁFICA
Andréa Dias Fiães
Fábio Rapello Alencar

C837m

Costa, Celso.
Números complexos e trigonometria. v. 2 / Celso Costa; Roberto Geraldo Tavares Arnaut. Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2009.
79p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-7648-062-X

1. Trigonometria. 2. Leis do seno e cosseno. 3. Números complexos. 4. Plano de Argand-Gauss. I. Arnaut, Roberto Geraldo Tavares. II. Título.

CDD: 516.24

2009/1

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

Números Complexos e Trigonometria

Volume 2 - Módulo 2

SUMÁRIO

Aula 1 – O seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo

Autor: Celso Costa

Objetivos:

1) Compreender a importância do conceito de seno e cosseno de um ângulo;

2) Aprender a construir uma tabela de senos;

3) Usar as funções seno e cosseno para resolver problemas.

Introdução

Você já conhece que um ângulo é a união de duas semi-retas com origem comum: o vértice do ângulo. Também, que todo ângulo tem uma medida expressa em graus ou em radianos. Por exemplo, um ângulo reto mede 90^0 ou $\frac{\pi}{2}\,rd$. Nesta aula vamos introduzir as funções seno e cosseno que associam a ângulos números reais.

Para nosso objetivo, considere um ângulo agudo α, cujo vértice é o ponto A. Com este ângulo, podemos construir um triângulo retângulo ABC, de modo que $\hat{A} = \alpha$ e $\hat{B}$ seja o ângulo reto. Veja a figura 1.1.

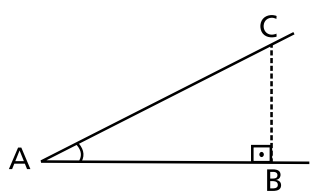


Fig. 1.1

Definição 1.1
O seno e o cosseno do ângulo agudo α são, respectivamente,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{BC}{AC} \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \frac{AB}{AC}\,. \tag{1.1}$$

Notas 1:

a) Definimos $\operatorname{sen}\alpha$ como o quociente entre os comprimentos do cateto oposto ao ângulo e da hipotenusa do triângulo retângulo.

b) Definimos $\cos\alpha$ como o quociente entre os comprimentos do cateto adjacente ao ângulo e da hipotenusa.

c) O triângulo retângulo usado na definição é apenas auxiliar, usando outro triângulo retângulo, o resultado não muda.

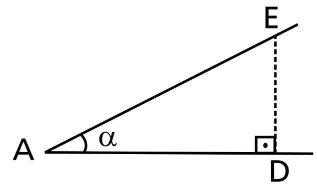


Fig. 1.2

De fato, para um outro triângulo ADE como o da figura 1.2, encontramos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{ED}{AE} \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \frac{AD}{AE}\,. \tag{1.2}$$

Vamos concluir que as definições coincidem nos triângulos ABC e ADE. Para isto é suficiente, usando (1.1) e (1.2), provar que

$$\frac{BC}{AC} = \frac{ED}{AE} \quad \text{e} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}\,. \tag{1.3}$$

Convido você para verificarmos juntos que são verdadeiras estas igualdades. Releia o que foi feito até aqui, reflita e descubra qual a ferramenta que permite provar (1.3). Você acertou se escolheu, na sua caixa de ferramentas, semelhança de triângulos. Por quê? Vamos lá!

Os triângulos ABC e ADE possuem os mesmos ângulos e portanto são semelhantes. Olhando as figuras 1.1 e 1.2, a semelhança de triângulos garante que

$$\frac{BC}{ED} = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}\,. \tag{1.4}$$

Agora isole a primeira igualdade acima e a transforme de modo a obter a primeira igualdade de (1.3). Faça o mesmo com a segunda igualdade de (1.4) para provar a segunda igualdade de (1.3).

d) Volte à figura 1.1 e à definição de seno e cosseno. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABC, encontramos

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = 1\,. \tag{1.5}$$

A igualdade fundamental acima mostra que o conhecimento de $\operatorname{sen}\alpha$ implica no conhecimento de $\cos\alpha$ e vice-versa.

e) Para um ângulo agudo α definimos a função tangente, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

Em relação a um triângulo retângulo ABC, com $\hat{A} = \alpha$ e $\hat{B} = 90°$, veja a figura 1.3, a tangente é igual

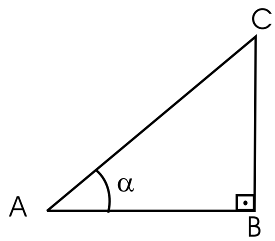


Fig. 1.3

ao quociente entre o cateto oposto e o cateto adjacente. De fato,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{CB/AC}{AB/AC} = \frac{CB}{AB}\,.$$

f) Com o intuito de melhor expressar as equações trigonométricas introduzimos as funções cossecante, cotangente e secante pelas fórmulas:

$$\operatorname{cossec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha},\quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \ \text{ e } \ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\,.$$

Exemplo 1.1

Com as definições acima vale a fórmula

$$\sec^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha + 1\,.$$

De fato, basta verificar a identidade.

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha\,.$$

Exemplo 1.2

Vamos calcular os valores de $\operatorname{sen} 45° = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$ e $\cos 45° = \cos\frac{\pi}{4}$.

O triângulo retângulo ABC da figura 1.4 contém o ângulo $\theta = 45°$ no vértice A, com catetos medindo 1 e hipotenusa medindo $\sqrt{2}$. Este triângulo é a metade de um quadrado de lado igual a 1.

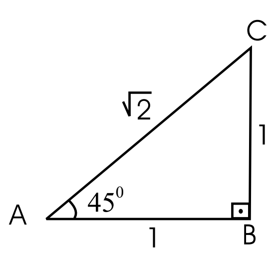


Fig. 1.4

Logo, $\operatorname{sen} 45° = \cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,.$

Atividade 1.1

a) Use um triângulo equilátero de lado $l = 2$, figura 1.5, para calcular $\operatorname{sen} 60^\circ = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3}$ e $\cos 60^\circ = \cos \dfrac{\pi}{3}$.

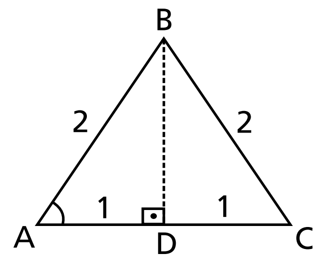


Fig. 1.5 : $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$

Sugestão: Primeiramente, calcule BD usando que ABD é triângulo retângulo e que $AD = DC = 1$. Depois calcule o seno e o cosseno de 60°.

b) Use os dados conseguidos no ítem (a) para calcular $\operatorname{sen} 30^\circ$ e $\cos 30^\circ$.

Sugestão: Como BD é bissetriz vale que $A\hat{B}D = 30^\circ$. Agora use o triângulo retângulo ABD para calcular o seno e cosseno de 30°.

A Trigonometria é uma palavra que têm sua raízes gregas nas palavras *trigonos* que quer dizer triângulo e *metrein* que significa medir. A Trigonometria surge na antiguidade como criação da Matemática grega. Na época de Euclides (séc. IV a.c.) seu estudo era intenso, motivado pelas necessidades da astronomia, cálculo da passagem do tempo e aplicações na Geografia.

Mas, cabe uma pergunta de caráter prático! Ora, se podemos calcular com um transferidor a medida dos ângulos, qual a vantagem de introduzir as funções seno e cosseno? Note que o transferidor pode ser bem sofisticado permitindo medidas com alto grau de precisão.

Vamos justificar. Nós já calculamos anteriormente os valores do seno e cosseno para alguns ângulos. A tabela (figura 1.6), mostra os valores.

	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 60^\circ$
seno	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cosseno	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$

Fig. 1.6

Um pouco mais adiante, usando as fórmulas de adição, veja a proposição 1 e o exercício 3, teremos técnica suficiente para o seguinte resultado: "usando triângulos pequenos podemos construir uma tabela, a mais completa possível, dos valores de seno para ângulos entre 0° e 90°". Esta tabela de senos em mãos é uma ferramenta importante para medir distâncias inacessíveis ou de difícil acesso. Vamos dar um exemplo.

Exemplo 1.3

Vamos supor que a Terra é redonda e indicar um método para calcular seu raio.

Na figura 1.7, temos representada a Terra com centro O e raio R, uma torre de altura h, erguida no ponto A e um outro ponto B.

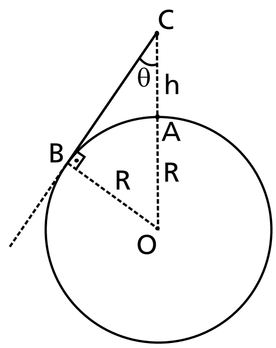


Fig. 1.7

A figura 1.7 foi construída de modo que o raio $\overrightarrow{CB}$ representa a visada de uma luneta que um observador no ponto C, alto da torre, mirasse no ponto mais distante da Terra, no horizonte. θ define este ângulo de visada, que pode ser facilmente medido.

No triângulo retângulo OBC encontramos que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{OB}{OC} = \frac{R}{R+h}\,. \tag{1.6}$$

Então,

$$(R+h)\operatorname{sen}\theta = R \tag{1.7}$$

Substitua (1.7) em (1.6) e trabalhe esta equação, isolando R no primeiro membro, para concluir que

$$R = \frac{h\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}\,.$$

Conclusão: Se medimos θ, usamos a tabela de senos para conhecer o valor do $\operatorname{sen}\theta$ e conhecemos a altura h da torre, então podemos encontrar a medida do raio R da Terra!!!

Projeção de segmentos

Vamos encontrar uma fórmula para o cálculo do comprimento da projeção ortogonal de um segmento sobre uma reta. Este fato é muito útil e já será utilizado na prova das proposições 1 e 2 adiantes. Na figura 1.8, $A'B'$ é a projeção ortogonal do segmento AB sobre a reta r. Seja θ o ângulo entre as direções do segmento e da reta e s uma paralela a r passando por A.

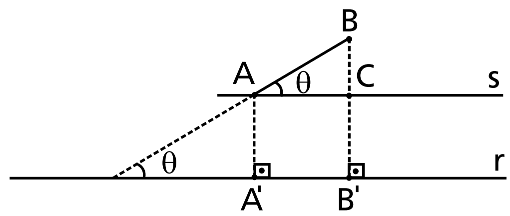


Fig. 1.8

No triângulo retângulo ABC encontramos que

$$\cos\theta = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB.\cos\theta\,.$$

Como $AC = A'B'$, encontramos que

$$A'B' = AB.\cos\theta\,. \tag{1.8}$$

Fórmulas de Adição

Você sabe como calcular os valores dos cossenos e senos dos ângulos 30°, 40° e 60°. Viu também a importância da existência de uma tabela de senos para ângulos entre 0 e 90°. Nós ilustramos esta importância fornecendo um método viável para medir o raio da Terra (evidentemente que a medida seria com erro pois supomos a Terra perfeitamente esférica).

Como construir uma tabela de senos?

Uma máquina de calcular das mais simples pode fornecer uma tabela de senos a mais completa possível. Basta alimentar a máquina e anotar os valores. Mas, qual é o programa embutido na máquina que faz estes cálculos? Os fundamentos estão nas fórmulas de adição que procuraremos demonstrar em seguida.

Proposição 1

Se α, β e $\alpha+\beta$ são ângulos agudos então

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta$$

e

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + \operatorname{sen}\beta.\cos\alpha\,.$$

Prova: Há muitas maneiras de provar esta fórmula. Todas elas tem algum trabalho. No nível em que desenvolvemos nosso estudo optamos por uma prova geométrica direta. Considere a figura 1.9, onde representamos os ângulos α e β e $AD = 1$.

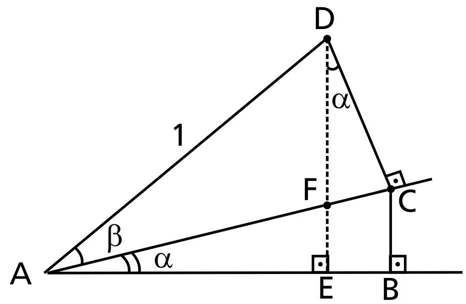


Fig. 1.9

Temos que

$$\cos(\alpha+\beta) = AE \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = DE. \tag{1.9}$$

Vamos interpretar os segmentos AE e DE.

De um lado, para o cálculo de AE, vem que $AE = AB - EB$. Donde,

$$AB = AC.\cos\alpha = \cos\beta.\cos\alpha\,.$$

De outro lado, EB, como projeção de FC sobre o lado AB do ângulo, se escreve como

$$\begin{aligned} EB &= FC.\cos\alpha = DF.\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha \\ &= \frac{DC}{\cos\alpha}.\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha = DC.\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta.\operatorname{sen}\alpha\,. \end{aligned}$$

Então

$$AE = AB - EB = \cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta\,.$$

Esta última equação junto com (1.9) mostra que é verdadeira a primeira fórmula enunciada na proposição.

Estamos na metade do nosso caminho. Volte à leitura das igualdades em (1.9). Vamos interpretar a medida de DE. Temos que $DE = FE+DF$. Donde,

$$\begin{aligned} FE &= AF.\operatorname{sen}\alpha = (AC - FC)\operatorname{sen}\alpha = \\ &= (\cos\beta - DF\operatorname{sen}\alpha)\operatorname{sen}\alpha \\ &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - DF\operatorname{sen}^2\alpha \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} DE = DF + FE &= \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + DF(1-\operatorname{sen}^2\alpha) \\ &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + DF.\cos^2\alpha \end{aligned}$$

Agora
$$DF = \frac{DC}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha}\,.$$

Substituindo este último resultado na penúltima equação obtemos que

$$DE = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha\,.$$

Isto prova a segunda fórmula.

□

Analogamente, raciocinando sobre uma figura equivalente à figura 1.9, podemos provar a seguinte proposição.

Proposição 2

Se α, β e $\beta-\alpha$ são ângulos agudos, então

$$\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta.\cos\alpha - \operatorname{sen}\beta.\operatorname{sen}\alpha$$

e

$$\operatorname{sen}(\beta-\alpha) = \operatorname{sen}\beta.\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha,\cos\beta\,.$$

Prova: Inspirados na figura 1.10 escrevemos que

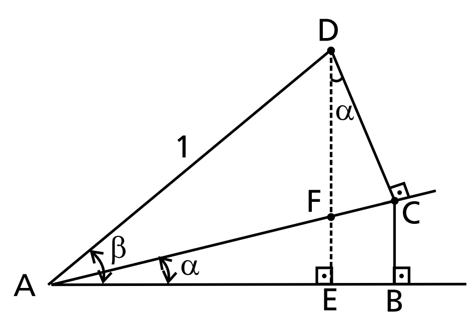


Fig. 1.10

$$\cos(\beta-\alpha) = AC,\ \operatorname{sen}(\beta-\alpha) = DC$$

Então

$$\cos(\beta-\alpha) = AF + FC,\ \operatorname{sen}(\beta-\alpha) = DC\,. \tag{1.10}$$

Vamos aos cálculos:

$$FC = DF\operatorname{sen}\alpha = (DE - FE)\operatorname{sen}\alpha = (\operatorname{sen}\beta - AF\operatorname{sen}\alpha)\operatorname{sen}\alpha$$
$$FC = \operatorname{sen}\beta.\operatorname{sen}\alpha - AF\operatorname{sen}^2\alpha\,.$$

Donde,

$$\begin{aligned} AF + FC &= \operatorname{sen}\beta.\operatorname{sen}\alpha + AF(1-\operatorname{sen}^2\alpha) \\ &= \operatorname{sen}\beta.\operatorname{sen}\alpha + AF\cos^2\alpha\,. \end{aligned}$$

Agora,

$$AF.\cos\alpha = AE \quad e \quad AE = \cos\beta\,.$$

Substituindo estes resultados,

$$AF + FC = \operatorname{sen}\beta.\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta.\cos\alpha\,,$$

provando a primeira fórmula.

Indo adiante, em direção à fórmula de $\operatorname{sen}(\beta-\alpha)$ encontramos de (1.10) e da figura 1.10, que

$$\operatorname{sen}(\beta-\alpha) = DC = DF.\cos\alpha = (DE - EF)\cos\alpha\,.$$

Note que

$$DE = \operatorname{sen}\beta,\ EF.\cos\alpha = AE.\operatorname{sen}\alpha \ \text{ e } \ AE = \cos\beta\,.$$

Estes dados substituídos fornecem

$$\operatorname{sen}(\beta-\alpha) = \operatorname{sen}\beta.\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta\,,$$

Provando a segunda fórmula da proposição 2.

$\square$

Fórmulas para o arco duplo

Se α é um ângulo tal que 2α é um ângulo agudo então

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\,, \tag{1.11}$$

e

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha\,. \tag{1.12}$$

Estas fórmulas são conseqüências diretas da proposição 1. Basta usar $\alpha = \beta$, naquelas fórmulas aditivas.

Outras equações úteis decorrem se juntamos a fórmula (1.11) acima com a relação fundamental

$$1 = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha \tag{1.13}$$

Você pode ver que somando (1.13) e (1.11) ou subtraindo (1.13) de (1.11) encontramos, respectivamente, que

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \tag{1.14}$$

e

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \tag{1.15}$$

Atividade 1.2. Descreva um método que você usaria para construir uma tabela de senos. São solicitados:

a) Os valores de $\operatorname{sen}\frac{\pi}{256} = \operatorname{sen}\left(\frac{180}{256}\right)^{0}$ e de $\cos\frac{\pi}{256} = \cos\left(\frac{180}{256}\right)^{0}$.

b) Os valores de

$$\operatorname{sen}\frac{m\pi}{256} \quad \text{e} \quad \cos\frac{m\pi}{256}\,, \quad \text{para } m = 2,\, 4,\, 8,\, 16,\, 32,\, 64\,.$$

Sugestão: Pense em um uso adequado das fórmulas (1.14) e (1.15).

Proposição 3

Se α, β, $\alpha-\beta$ e $\alpha+\beta$ são ângulos agudos então

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}$$

e

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}\,.$$

Prova: Usando as fórmulas de adição das proposições 1 e 2, encontramos que

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + \operatorname{sen}\beta.\cos\alpha}{\cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta}\,.$$

Dividindo o numerador e o denominador do último membro por $\cos\alpha.\cos\beta$, encontramos que

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\alpha\beta}\,.$$

De modo análogo,

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta.\cos\alpha}{\cos\alpha.\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta}\,.$$

Dividindo o numerador e o denominador do último membro por $\cos\alpha.\cos\beta$, encontramos que

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}\,.$$

$\square$

Exemplo 1.4

Verificar a identidade

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \sec x . \operatorname{cossec} x \, .$$

Solução: Desenvolvendo o primeiro membro vem que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} . \frac{1}{\cos x} = \sec x . \operatorname{cossec} x \, . \end{aligned}$$

Exercícios

1. Encontre a função trigonométrica equivalente a $\dfrac{\sec x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec} x + \cos x}$.
2. Verifique a identidade trigonométrica $(\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x)^2 + (1 - \cos x)^2 - (\sec x - 1)^2 = 0$.
3. Calcule o valor de $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{24}$.
4. Conhecendo que o lado l do decágono regular inscrito numa circunferência de raio R é $l = \dfrac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$, determine $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{10}$.
5. Calcule a medida do ângulo A, para o qual $\operatorname{tg} A . \operatorname{tg} 75^\circ = \dfrac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} - 1}$.
6. Determinar o ângulo C de um triângulo ABC, sabendo que os ângulos A e B, estão relacionados por
$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \operatorname{sen}^2 C, \ \cos A . \cos B = \operatorname{sen} C \, .$$
7. Verifique a identidade:
$$1 + \operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen}(a + 45^\circ)}{\cos a} \, .$$
8. Determine o valor E da expressão
$$E = \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \, .$$

Aula 2 – Extensão das funções trigonométricas

Autor: Celso Costa

Objetivos

1) Compreender seno e cosseno como funções definidas para todos os números reais;
2) Entender a função de Euler como ferramenta para a extensão das funções seno e cosseno;
3) Compreender as funções seno e cosseno como funções periódicas;
4) Compreender que os valores de seno e cosseno no primeiro quadrante determinam todos os outros valores destas funções.

Introdução

Coordenadas em uma reta

É idéia muito útil introduzir coordenadas num plano. Vamos ver como se faz isto e explorar sua utilidade no estudo das funções trigonométricas. Antes de chegar lá, vamos explorar um caso mais simples e que você possivelmente conhece: o caso de coordenadas em uma reta. Vamos recordar!

Dada uma reta r escolha um ponto origem e represente pelo número 0, escolha outro ponto diferente para localizar o número 1. Neste ponto estamos aptos a representar sobre a reta todos os números reais. Veja a figura 2.1.

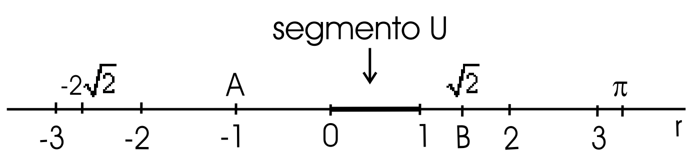


Fig. 2.1 : A reta numérica.

O segmento cujas extremidades são os pontos 0 (zero) e 1 (um), o qual chamaremos U, define a unidade de medida que permite localizar todos os números reais sobre a reta.

De que modo? Sobre a reta r estão definidas duas semi-retas opostas com origem comum 0. Sobre aquela semi-reta que contém o número 1 representaremos todos os números reais positivos e sobre a semi-reta oposta representaremos todos os números reais negativos. Este modo de proceder, faz com que a todo número real corresponda um e apenas um ponto da reta r e a cada ponto da reta corresponda um e apenas um número real. Outro modo de dizer a mesma coisa: "entre os pontos da reta e os números reais estabeleceu-se uma função (ou identificação) biunívoca".

Reforçando e estruturando a idéia! A todo ponto A da reta r está associado um único número real digamos, a, que é a coordenada do ponto. Na figura 2.1, os pontos A e B têm como coordenadas, respectivamente, os números -1 e $\sqrt{2}$.

Mas, qual é a propriedade que determina a localização dos números na reta? É a seguinte: "se os pontos P e Q tem como coordenadas os números p e q então o comprimento do segmento PQ é $|p - q|$.

Uma reta com estrutura de coordenadas é dita uma reta numérica ou a reta real.

Distância entre dois pontos da reta

Conforme já observado, numa reta com coordenadas é muito fácil calcular a distância entre dois pontos A e B. Se a e b são respectivamente os números que representam as coordenadas dos pontos A e B, então é o comprimento do segmento de reta AB é a distância entre os pontos, a qual pode ser calculada por

$$d(AB) = AB = |b - a|\,.$$

Conforme escrito acima, a distância entre A e B é o comprimento do segmento cujos extremos são estes pontos, que pode ser calculado pelo módulo do número $b - a$.

Coordenadas em um plano

Podemos ir além, e introduzir coordenadas em um plano. De que modo? Considere um plano α e um par de retas t e s perpendiculares, cuja interseção ocorre no ponto 0. Veja a figura 2.2.

Introduza nessas retas coordenadas de modo que r e s se tornem retas numéricas, com a mesma unidade U de medida.

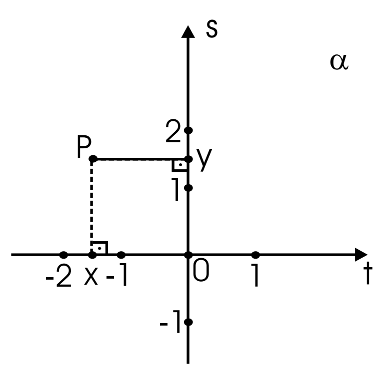


Fig. 2.2

Afirmamos que, com a ajuda deste par de retas (ou eixos), existe uma função biunívoca entre os pontos P do plano α e os pares (x, y), onde x, y são números reais.

Como funciona? Tome um ponto P arbitrário e trace perpendiculares às retas t e s obtendo, respectivamente os pontos x e y. Assim, legitimamente, podemos denotar

$$P = (x, y)\,.$$

Os números x e y são chamados, respectivamente a abcissa e a ordenada do ponto P. As retas t e s são ditas, respectivamente, o eixo horizontal ou das abcissas e o eixo vertical ou das ordenadas.

Retorne a figura 2.2, para visualizar a representação do ponto P.

Distância entre dois pontos do plano

Considere dois pontos $P = (x, y)$ e $Q = (x', y')$. A distância entre P e Q é o comprimento do segmento PQ. Assim

$$d(P, Q) = PQ = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}\,. \qquad (2.1)$$

Vamos ver porque está fórmula funciona. Considere três casos

a) $x = x'$ e $y = y'$. Neste caso os pontos são iguais e a distância é zero. Este resultado é compatível com a fórmula (2.1) da distância.

b) $x = x'$ e $y \neq y'$. Neste caso, os pontos P e Q estão localizados em uma reta paralela ao eixo t das abcissas. Veja a figura 2.3, à esquerda. Como P, Q, x e x' são vértices de um retângulo então

$$PQ = |x - x'|\,.$$

A fórmula (2.1) ainda é válida.

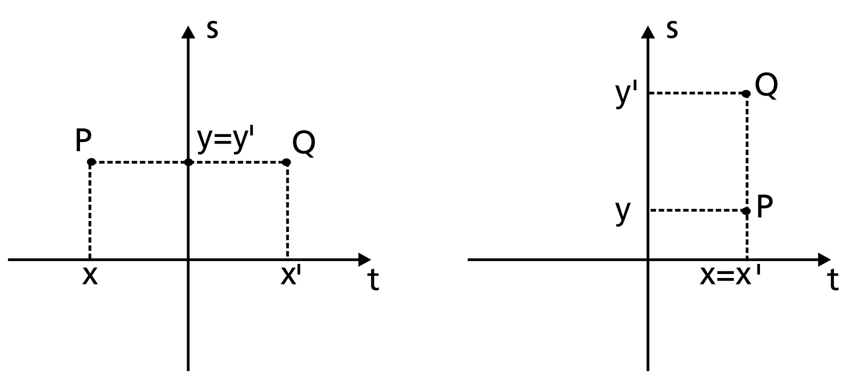


Fig. 2.3

c) $x \neq x'$ e $y = y'$. Este caso é similar ao anterior e aparece representado na figura 2.3 à direita. temos que

$$PQ = |y - y'|\,.$$

De novo a fórmula (2.1) continua válida.

d) $x \neq x'$ e $y \neq y'$. Este é o caso geral e está representado na figura 2.4.

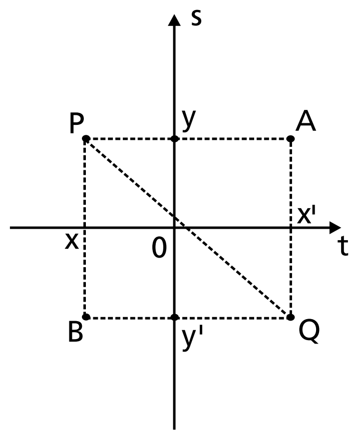


Fig. 2.4

Note que P e Q são vértices opostos de um retângulo cujos lados medem $|x-x'|$ e $|y-y'|$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo, encontramos

$$PQ^2 = |x - x'|^2 + |y - y'|^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

ou

$$d(P,Q) = PQ = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}\,,$$

que é a fórmula 2.1.

O grau e o radiano como medidas de ângulos

No Módulo 1 trabalhamos com duas medidas de ângulo: o grau e o radiano.

Você pode obter um ângulo com medida 1°, dividindo uma circunferência em 360 arcos iguais e considerando um ângulo central que corresponda a uma dessas divisões. Mas, qual é o caminho para obter um ângulo de medida 1 radiano ($1\,rd$)? Radiano é a medida natural de ângulo para os propósitos de um desenvolvimento aprofundado de estudos em Matemática, principalmente quando desejamos ir mais além e poder expressar seno e cosseno como funções definidas em todos os números reais.

Voltando à nossa pergunta. Queremos um ângulo de $1\,rd$! Tome um círculo de centro O e de raio $R = 1$ e fixe dois pontos A e B sobre o círculo de modo que o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ seja 1. Veja a figura 2.5. A medida do ângulo α central $A\hat{O}B$ é $1\,rd$ por definição.

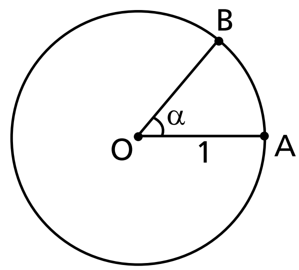


Fig. 2.5 : $\alpha = 1\,rd$

Como o comprimento do círculo de raio $R = 1$ é 2π (aproximadamente $6,28\ldots$) então vale a igualdade $2\pi\,rd = 360°$. Ou seja,

$$1\,rd = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0 .$$

Exemplo 2.1

Tome um segmento CD de comprimento 6 e "enrole" sobre um círculo de raio 1, veja a figura 2.6. Qual é a medida em radianos e em graus do ângulo central β, indicado?

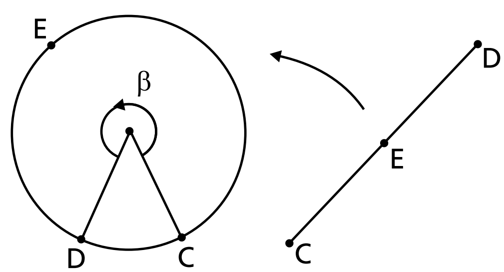


Fig. 2.6

Solução: Por definição $\beta = 6rd$ e $\beta = 6 \times \dfrac{180}{\pi} \Rightarrow \beta = \dfrac{1080}{\pi}$ graus.

Extensão do conceito de ângulo, medidas de ângulos e a função de Euler

Vamos trabalhar com um círculo de raio $R = 1$, onde fixamos um ponto A a que chamamos origem. Temos dois sentidos de percurso sobre o círculo, a partir de A. O positivo percorrido no sentido anti-horário e o negativo no sentido horário. Na figura 2.7, a partir de A, enrolamos sobre o círculo um segmento de comprimento 2 no sentido positivo encontrando o ponto B e analogamente no sentido negativo encontrando o ponto B'. Os ângulos obtidos medem $2\,rd$. No entanto devido ao sentido convencionamos que $\alpha = 2\,rd$ e $\beta = -2\,rd$.

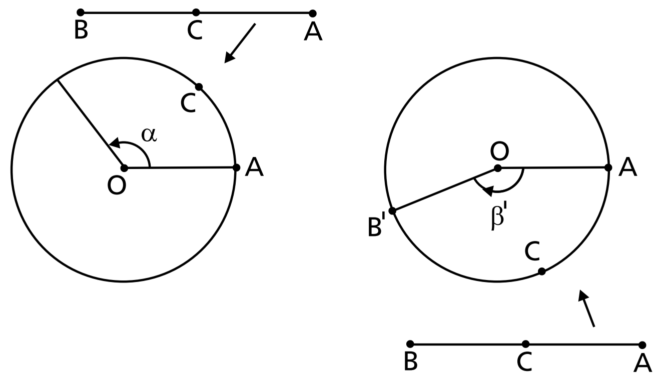


Fig. 2.7

Este exercício poderia ir além e daí, usando percursos sobre o círculo, ampliar o nosso conceito de ângulo. Para exemplificar como ir mais longe com a noção de medida de ângulo, construa o seguinte exemplo. Tome um segmento AB de comprimento 8. Note que $8 > 2\pi$. Então se enrolarmos AB no sentido positivo definimos um ângulo α de medida $8\,rd$ e se enrolamos no sentido negativo, um ângulo β de medida $-8\,rd$.

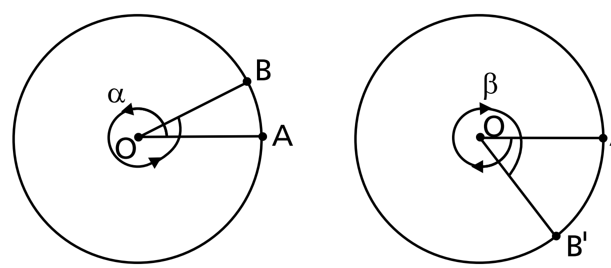


Fig. 2.8

Isto abre caminho para enrolarmos sobre o círculo toda uma reta numérica. Isto é, uma reta onde estão representados os números reais. Esta construção torna possível a existência de uma função $E : \mathbb{R} \to S^1$, chamada função de Euler, que a cada número real associa um ponto S^1 do seguinte modo: se $x = 0$, $E(0) = A$; se $x > 0$, $E(x)$ é o ponto final obtido sobre S^1, quando enrolamos o segmento OX, a partir de A no sentido positivo; se $x < 0$, $E(x)$ é o ponto final obtido quando "enrolamos" sobre S^1 o segmento $0X$, a partir de A no sentido negativo. Veja a figura 2.9.

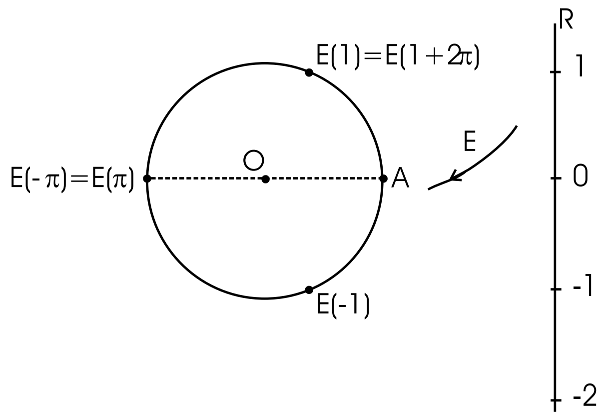


Fig. 2.9

Notas:

a) A operação descrita na figura 2.9 identifica o número real 0 (zero) com o ponto A do círculo S^1, enrola a parte positiva da reta "infinitas vezes" sobre o círculo no sentido anti-horário e, similarmente, o mesmo ocorre com a parte positiva da reta enrolando no sentido horário.

b) Como o comprimento do círculo é 2π, então

$$\ldots = E(-2\pi) = E(0) = E(2\pi) = E(4\pi)\ldots$$

Também,

$$\ldots E(1-4\pi) = E(1-2\pi) = E(1) = E(1+2\pi) + \ldots$$

c) De modo geral, se x é um número real, $E(x+2\pi) = E(x)$. Ou, mais geralmente,

$$E(x+2n\pi) = E(x),\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Isto é, a função de Euler E é periódica, de período 2π.

Extensão das funções trigonométricas

Voltemos ao círculo S^1 de raio $R = 1$, onde está fixado um ponto A origem dos ângulos. Ângulos medidos no sentido anti-horário resultam positivos, enquanto que ângulos medidos no sentido horário resultam negativos. Damos o nome de ciclo trigonométrico a este círculo. Todo ponto B do ciclo define um ângulo positivo α e outro negativo β, veja a figura 2.10.

Nota: Em verdade, todo ponto B no ciclo trigonométrico, define infinitos ângulos positivos e infinitos ângulos negativos. Vamos trabalhar mais concretamente com a figura 2.10, e vamos supor que o ângulo $\alpha = A\hat{O}B$ tem por medida

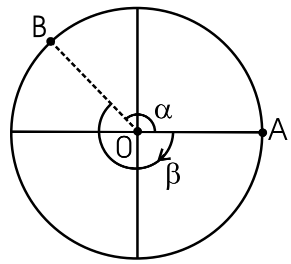


Fig. 2.10

$120°$ ou $\dfrac{5\pi}{6}$. Isto é, podemos a partir de A, no sentido positivo, alcançar B após percorrer um arco de comprimento $\dfrac{5\pi}{6}$. Também podemos a partir de A, no sentido positivo, dar uma volta completa no círculo, percorrendo um arco de comprimento 2π, alcançando de novo A e continuar, no sentido positivo, até B, percorrendo um arco de comprimento total $2\pi + \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{17\pi}{6}$. E assim sucessivamente, podemos pensar em n voltas no sentido positivo e definir de maneira geral como

$$n.2\pi + \frac{5\pi}{6} = 2n\pi + \frac{5\pi}{6}\,, \quad n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots, \tag{2.2}$$

como uma medida de ângulo para o arco AB (percorrido no sentido horário). Todas as medidas positivas possíveis do arco AB (com voltas no sentido horário) estão especificadas em (2.2). Os arcos que originam estas medidas são ditos arcos côngruos.

Analogamente, podemos a partir de A caminhar sobre o círculo S^1 no sentido negativo (sentido horário) e percorrer um arco de comprimento $-\dfrac{7\pi}{6}$. Note que

$$-\frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} - 2\pi\,.$$

Continuando com o processo, podemos a partir de A, no sentido horário (negativo) percorrer m voltas no círculo, voltar ao ponto A e em seguida alcançar o ponto B. A medida deste arco seria

$$-\frac{\pi}{6} - 2m\pi\,, \quad m = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots \tag{2.3}$$

Em resumo, temos que

$$\frac{5\pi}{6} + 2m\pi\,, \quad m \in \mathbb{Z}\,,$$

são todas as medidas possíveis para o arco $\overset{\frown}{AB}$. Os arcos assim construídos são ditos arcos côngruos. Reservamos para o valor $\dfrac{5\pi}{6}$ a denominação de primeira determinação do arco $\overset{\frown}{AB}$.

De modo geral, para qualquer arco a determinação principal é uma medida inferior a 2π e superior ou igual a zero.

Exemplo 2.2

Ache a determinação principal dos arcos $\alpha = \dfrac{25\pi}{4}$ e $\beta = -\dfrac{135\pi}{12}$.

Solução:

$\alpha = \dfrac{25\pi}{4} = \dfrac{24\pi + \pi}{4} = 6\pi + \dfrac{\pi}{4} = 3\,.\,2\pi + \dfrac{\pi}{4}$.

Como $135 = 11 \times 12 + 4$, $\beta = -\dfrac{135\pi}{12} = -\dfrac{11 \times 12\pi + 4\pi}{12} = -11\pi - \dfrac{4\pi}{12}$.
Então $\beta = -10\pi - \pi - \dfrac{\pi}{3} = -10\pi - \dfrac{4\pi}{3}$.

$$\beta = (-5) \times 2\pi - \frac{4\pi}{3} = (-4)2\pi + \frac{2\pi}{3}\,.$$

Então a determinação principal de α é igual a $\dfrac{\pi}{4}$ e a de β é $\dfrac{2\pi}{3}$.

Os quadrantes do ciclo trigonométrico

Considere duas cópias da reta numérica passando pelo centro O do círculo S^1 e definindo um sistema de coordenadas no plano. Esta figura é construída de modo que o ponto A do círculo

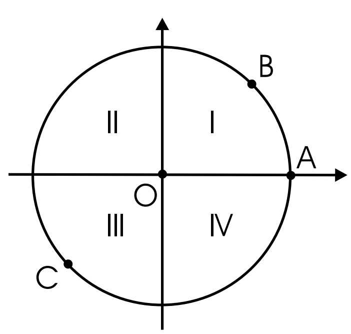


Fig. 2.11

corresponda ao ponto que representa o número real 1 na reta horizontal. Veja a figura 2.11.

As retas perpendiculares dividem o círculo em 4 partes (indicadas por I, II, III, IV) ditas, respectivamente, primeiro, segundo, terceiro e quarto quadrantes. Por exemplo o arco $\overset{\frown}{AB}$ da figura 2.11 pertencente ao primeiro quadrante, enquanto que o arco $\overset{\frown}{AC}$ está no terceiro quadrante.

Qual é a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$, se B divide em duas partes iguais o primeiro quadrante?

Cuidado, você pode errar se responder $\frac{\pi}{4}$. A resposta correta é $\overset{\frown}{AB} = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, para algum número inteiro n.

De fato, n representa o número de voltas necessárias para descrever $\overset{\frown}{AB}$. Por exemplo se $n = -1$ então $\overset{\frown}{AB} = \beta = \frac{\pi}{4} + 2(-1)\pi = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$. Se $n = 0$, $\overset{\frown}{AB} = \alpha = \ dfrac\pi 4 + 2 \times 0 \times \pi = \frac{\pi}{4}$. Veja a figura 2.12. O valor $\frac{\pi}{4}$ corresponde à medida da determinação principal do arco $\overset{\frown}{AB}$.

Definição 2.1
Dois arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{AC}$ são ditos côngruos quando suas medidas diferem por $2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Definição 2.2
Dado um arco $\overset{\frown}{AB}$ qualquer chamamos de primeira determinação à medida x do arco tal que $0 \leq x < 2\pi$, onde,

$$\overset{\frown}{AB} = x + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

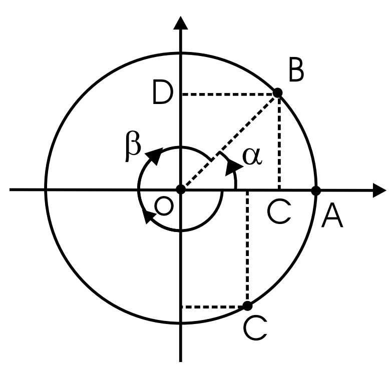


Fig. 2.12

Definição 2.3
Considere o ciclo trigonométrico com o sistema de eixos ortogonais. Isto é, considere o plano com coordenadas retangulares e o ciclo trigonométrico com centro na origem. Veja a figura 2.12.

Definimos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= y \quad \text{(a ordenada do ponto final do arco)} \\ \cos\alpha &= x \quad \text{(a coordenada do ponto final do arco)} \end{aligned}$$

Veja a figura 2.13 para a ilustração da definição.

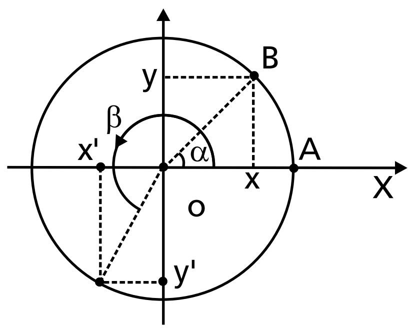


Fig. 2.13

Notas:

(1) Na Aula 1 definimos seno e cosseno para ângulos α agudos ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

Agora acabamos de estender estas definições para qualquer ângulo entre 0 e 2π. Ainda mais, considerando voltas no sentido positivo e no sentido negativo, seno e cosseno passam a ser funções definidas para qualquer número real. Peço que você revise as deinições de Aula 1 e compare com as novas para certificar que elas coincidem para ângulos agudos.

(2) Os ângulos α e β, ilustrados na figura 2.13, estão, respectivamente, no primeiro e no terceiro quadrante, $\operatorname{sen}\alpha = x > 0$, $\cos\alpha = y > 0$, $\operatorname{sen}\beta = y' < 0$ e $\cos\beta = x' < 0$.

(3) Como especificado a definição estende a definição anteriormente feita só para ângulos agudos e ainda vale, para qualquer ângulo

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,.$$

(4) Importante! $\operatorname{sen}(\alpha + 2n\pi) = \operatorname{sen}\alpha$ e $\cos(\alpha + 2n\pi) = \cos\alpha$, para todo número inteiro n. Isto é ângulos côngruos tem o mesmo cosseno e o mesmo seno. Ou seja, seno e cosseno são funções periódicas.

(5) Para todos os ângulos α, exceto aqueles côngruos a $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{3\pi}{2}$, definimos as funções, tangente e secante,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\,.$$

Atividade 2.1: Usando as definições de seno e cosseno, congruência de triângulos e o ciclo trigonométrico mostre que para ângulos $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, valem

$$\cos(-\alpha) = -\cos\alpha, \ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right),$$
$$\cos(\pi - \beta) = -\cos\beta \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\pi - \beta) = \operatorname{sen}\beta\,.$$

(6) Para todos os ângulos α, exceto aqueles côngruos a π e O, definimos as funções cotangente e cossecante,

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}, \quad \operatorname{cossec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\,.$$

Atividade 2.2: Complete a tabela abaixo, com os valores, quando definidos, das funções trigonométricas nos ângulos.

	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
seno	0					
cosseno						
tangente		1				
cotangente						
cossecante						

Representação gráfica da tangente de um ângulo

Vamos retornar à figura 2.13, usada para definir seno e cosseno e introduzir uma nova reta numérica vertical, representada por t, de modo que o ponto que representa o número zero da reta coincida com o ponto A. Veja a figura 2.14.

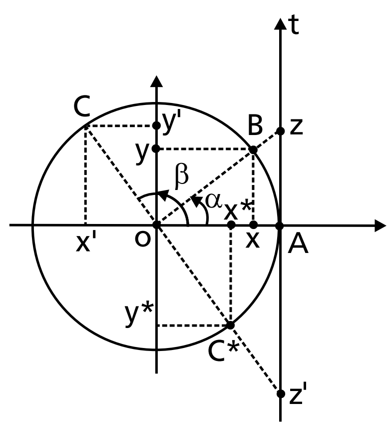


Fig. 2.14

Vamos nos fixar no ângulo α e nos triângulos OBx e OzA, os quais são semelhantes. Logo

$$\frac{Az}{Bx} = \frac{AO}{Ox} \Rightarrow \frac{Az}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}\,.$$

Então,

$$Az = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha\,.$$

Conclusão: α é ângulo do primeiro quadrante, $\operatorname{sen}\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$ e $\operatorname{tg}\alpha > 0$. A tangente aparece na igualdade representada pelo comprimento do segmento Az. No entanto, como A representa 0, ponto zero da reta numérica t e z representa um ponto associado a um número positivo na reta numérica, poderíamos simplesmente escrever

$$\operatorname{tg}\alpha = z \quad (\text{coordenada da reta } t)\,.$$

Vamos ver como funciona esta representação para outros ângulos. Vamos trabalhar com o ângulo β, representado pelo arco $\overset{\frown}{AC}$ no segundo quadrante. Veja a figura 2.14.

Agora preste bem atenção na seqüência de igualdades que vamos escrever baseados na semelhança dos triângulos OC^*x^* e $Oz'A$ e na congruência dos triângulos OCy' e OC^*y^*. Olhe para a figura 2.14!

Da semelhança $OC^*x^* \simeq Oz'A$,

$$\frac{Az'}{C^*x^*} = \frac{OA}{Ox^*}\,.$$

Da congruência $OCy' \equiv OC^*y^*$,

$$C^*x^* = Oy^* = Oy',\; Ox^* = y^*C^* = y'C = Ox'\,.$$

Unindo os resultados encontramos que

$$\frac{Az'}{Oy'} = \frac{1}{Ox'} \Rightarrow \frac{Az'}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{1}{-\cos\beta}\,.$$

Logo,

$$-Az' = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \operatorname{tg}\beta\,. \tag{2.4}$$

Conclusão: Como β é um ângulo no segundo quadrante, $\operatorname{sen}\beta > 0$, $\cos\beta < 0$ e $\operatorname{tg}\beta < 0$. Estes resultados são compatíveis com a igualdade (2.4). Agora como z' é um ponto na reta numérica de coordenada negativa, podemos escrever

$$\operatorname{tg}\beta = z'\,.$$

Moral da história: Para encontrar a tangente de um ângulo α qualquer associado a um arco $\overset{\frown}{AB}$, procedemos do seguinte modo (retorne à figura 2.14 para a ilustração):

1. Traçamos a reta que passa pelo centro do círculo e pelo ponto B determinando um ponto z na reta t.

$$\operatorname{tg}\alpha = z\,.$$

Ou melhor, em termos de comprimento de segmentos,

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm Az\,,$$

onde o sinal negativo ou positivo representam, respectivamente, segmentos abaixo ou acima do eixo horizontal.

Notas importantes

Os valores de seno e cosseno no primeiro quadrante determinam todos os valores destas funções em qualquer número real. De fato, se α é ângulo do primeiro quadrante $\left(0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ então

1) $\operatorname{sen}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$, $\operatorname{sen}(\alpha+\pi) = -\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{sen}\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$.

2) $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\alpha$, $\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$ e $\cos\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\alpha$.

Vamos provar apenas a primeira das igualdades de (1), deixando o restante para a atividade 2.3.

De fato, veja a figura 2.15, onde $\overset{\frown}{AB} = \alpha$ e $\overset{\frown}{AC} = \alpha + \dfrac{\pi}{2}$. Note que os

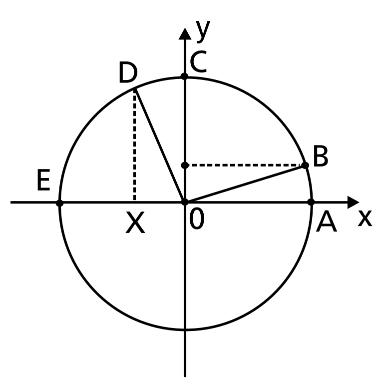


Fig. 2.15

ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são congruentes. Isto significa que $D\hat{O}x' \equiv B\hat{O}y$. Como OBy e ODx' são triângulos retângulos com hipotenusa medindo 1 eles são congruentes. Logo $Oy = Ox'$ (expressão da medida de segmentos). Então $y = -x'$ (em termos de coordenadas). Isto mostra que $\operatorname{sen}\alpha = -\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Atividade 2.3

a) Verifique que são válidas as duas igualdades restantes de (1) e as igualdades de (2) da nota anterior.

b) Como $\operatorname{sen}(\alpha+2m\pi) = \operatorname{sen}\alpha$ e $\cos(\alpha+2m\pi) = \cos\alpha$, para todo $m \in \mathbb{Z}$, conclua que os valores de seno e cosseno estão definidos para qualquer número real, se os conhecemos no primeiro quadrante.

Exercícios

1. Encontre a determinação principal de um arco de $930°$.

2. Mostre que $\operatorname{tg} y + \operatorname{tg}(-x) - \operatorname{tg}(\pi - x) = \operatorname{tg} y$.

3. Exprimir somente em função de cosseno a expressão

$$y = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{cotg}^2 x} - \frac{1}{\sec^2 x}\,.$$

4. Calcule o valor da expressão acima para $x = \dfrac{\pi}{6}$.

5. Determine a menor medida positiva a em graus que satisfaça a igualdade:

$$\operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} 75° = \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-1}\,.$$

6. Calcule o $\operatorname{sen} 690°$.

7. Mostre que é verdadeira a igualdade

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\,\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\,\cos(-x)}{\operatorname{cotg}(\pi+x)\,.\,\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)} = -\operatorname{sen} x\,.$$

Aula 3 – As fórmulas aditivas e as leis do seno e do cosseno

Autor: Celso Costa

Objetivos:

1) Compreender a importância da lei do seno e do cosseno para o cálculo da distância entre dois pontos sem necessidade de medida direta;

2) Entender as fórmulas de adição como o resultado fundamental da Trigonometria.

Introdução

A lei do cosseno é uma fórmula importante para o cálculo da medida de um lado de um triângulo quando se conhecem as medidas dos dois outros lados e o cosseno do ângulo formado por estes lados.

Vamos motivar com uma situação real. Um engenheiro necessita medir a distância entre os pontos A e B que definem a largura l de um pântano P, segundo a figura 3.1.

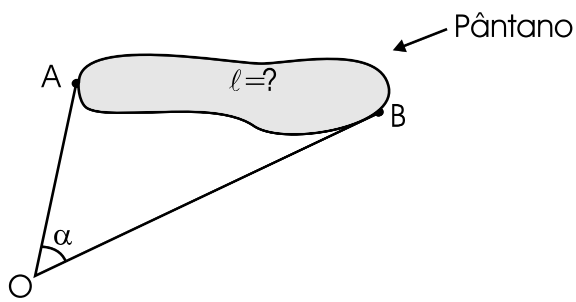


Fig. 3.1

Esta é uma situação ideal para a fórmula do cosseno. O engenheiro após medir OA e OB e consultar uma tabela de cossenos pode determinar a medida l através da fórmula conhecida como lei dos cossenos:

$$l^2 = OA^2 + OB^2 - 2\,OA\,.\,OB.\cos\alpha\,.$$

Exemplo 3.1

Se $OA = 2,5\,km$, $OB = 3,5\,km$ e $\cos\alpha = 0,2$ então

$$\begin{aligned} l^2 &= 6,25 + 12,25 - 2\times 2,5\times 3,5\times 0,2 \\ &= 18,5 - 3,5 \,=\, 15 \Rightarrow l = \sqrt{15} \\ l &\simeq 3,9\,km \end{aligned}$$

Vamos provar a fórmula do cosseno.

Proposição 1

Considere um triângulo cujos lados medem, respectivamente, a, b e c. Se α é o ângulo entre os lados de medidas b e c, então

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,.\,b\,.\,c\,.\,\cos\alpha\,. \tag{3.1}$$

Prova: Considere que ABC é o triângulo, tal que AB, AC e BC medem, respectivamente, c, b e a e que $\alpha = C\hat{A}B$. Temos dois casos:

Primeiro caso: o ângulo α do vértice A é agudo ou reto. Como a soma dos ângulos internos é 180°, pelo menos um dos outros ângulos $\hat{B}$ ou $\hat{C}$ é agudo. Suponha que C é agudo. Então o pé H da altura do triângulo relativa ao vértice B cai sobre o lado b. Veja as duas figuras possíveis, representadas na figura 3.2.

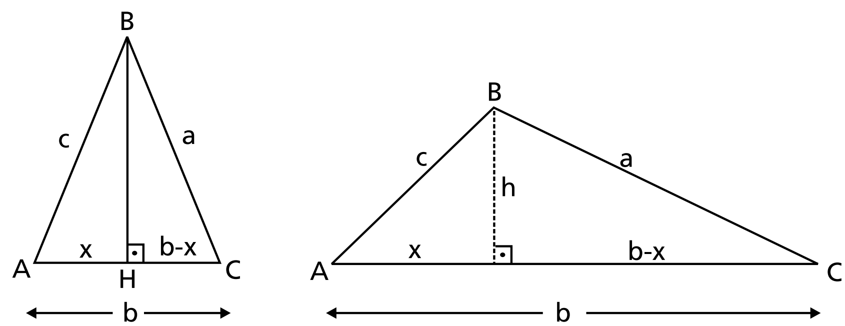


Fig. 3.2

Em qualquer das possibilidades, a partir dos triângulos AHB e BHC escrevemos

$$c^2 = h^2 + x^2 \quad \text{e} \quad a^2 = h^2 + (b-x)^2\,.$$

Eliminando h^2, vem que

$$c^2 - x^2 = a^2 - (b-x)^2\,.$$

ou

$$c^2 + b^2 - 2\,b\,x = a^2\,.$$

Como α é ângulo agudo ou reto, no triângulo AHB vale $x = c\cos\alpha$. Este resultado substituído na equação anterior, implica que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,.\,b\,.\,c\,.\,\cos\alpha\,.$$

Segundo caso: O ângulo α é obtuso. Neste caso o pé da altura pelo vértice B cai fora do lado AC, veja a figura 3.3.

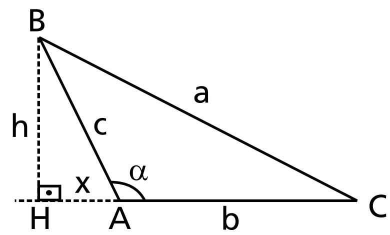


Fig. 3.3

Então nos triângulos BHA e BHC, encontramos que

$$a^2 = (b+x)^2 + h^2,\ c^2 = h^2 + x^2\,.$$

Donde, eliminando h^2, vem que

$$a^2 = b^2 + 2\,b\,x + c^2\,. \tag{3.2}$$

Mas no triângulo BHA, $\cos(\pi-\alpha) = \dfrac{h}{x}$. Também, $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ (lembra da atividade 2.1?)

Então, $x\ \cos(\pi-\alpha) = h$. Donde $-x\ \cos\alpha = h$.

Substituindo em 3.2, encontramos que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,.\,b\,.\,c\,.\ \cos\alpha\,.$$

Neste ponto de nosso trabalho estamos em condição de apresentar demonstrações das fórmulas aditivas para as funções seno e cosseno.

Teorema 1

Para quaisquer números reais x e y, valem

$$\begin{aligned}
\cos(y-x) &= \cos y\ \cos x + \operatorname{sen} y\ \operatorname{sen} x\,,\\
\cos(y+x) &= \cos y\ \cos x - \operatorname{sen} y\ \operatorname{sen} x\,,\\
\operatorname{sen}(y-x) &= \operatorname{sen} y\ \cos x - \operatorname{sen} x\ \cos y \quad \text{e}\\
\cos(y+x) &= \operatorname{sen} y\ \cos x + \operatorname{sen} x\ \cos y\,.
\end{aligned}$$

Prova: Considere ângulos α e β que representam as primeiras determinações dos arcos correspondentes a x e y. Podemos supor então, sem perda de generalidade que $0 \le \alpha \le \beta < 2\pi$. Vamos provar a fórmula

$$\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\,.\,\cos\alpha + \operatorname{sen}\beta\,.\,\operatorname{sen}\alpha\,. \tag{3.3}$$

Temos dois casos a considerar:

1º *caso:* $\beta - \alpha < \pi$ ou $\beta - \alpha > \pi$; 2º *caso:* $\beta - \alpha = \pi$.

Vamos provar a fórmula (3.3) no primeiro caso. Geometricamente, este caso pode ser representado pelas figuras 3.4. Nas duas possibilidades indicadas, podemos expressar os pontos B e C em coordenadas retangulares como,

$$B = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha), \quad C = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)\,.$$

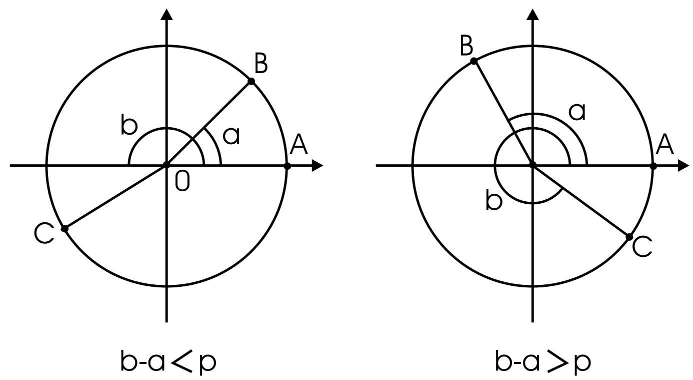


Fig. 3.4

Por um lado, usando as coordenadas de A e B e a fórmula (2.1) que definde a distância BC entre os pontos B e C se expressa como

$$BC = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2}\,.$$

Desenvolvendo, encontramos que

$$BC^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\,.\,\cos\beta + \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\,.\,\operatorname{sen}\beta\,.$$

Ou seja

$$BC^2 = 2 - 2(\cos\alpha\,.\,\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\,.\,\operatorname{sen}\beta) \tag{3.4}$$

Por outro lado, nos triângulos OBC da figura 3.4, temos que $\hat{O} = \beta - \alpha$ ou $\hat{O} = 2\pi - (\beta - \alpha)$. Em qualquer situação $\cos\hat{O} = \cos(\beta - \alpha)$. Como, além disso, $OB = OC = 1$, aplicamos a lei dos cossenos para encontrar que

$$BC^2 = 1^2 + 1^2 - 2\,.\,\cos(\beta - \alpha) = 2 - 2\cos(\beta - \alpha)\,.$$

Comparando esta equação com a equação (3.4), deduzimos que

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha\,.\,\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\,.\,\operatorname{sen}\beta\,.$$

Vamos ao segundo caso, aquele em que $\beta - \alpha = \pi$. Então $\beta = \alpha + \pi$ e um exame direto, veja a figura 3.5, mostra que

$$\cos\beta = \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\alpha + \pi) = -\operatorname{sen}\alpha\,.$$

Também, $\cos(\beta - \pi) = \cos\pi = -1$. Com estes valores

$$\cos\alpha \,.\, \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \,.\, \operatorname{sen}\beta = -\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = -1 = \cos(\beta - \pi)\,.$$

Logo, também nesta situação, vale a fórmula 3.3.

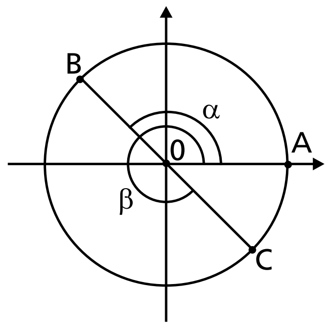


Fig. 3.5

Isto finaliza a prova da primeira fórmula de adição. Isto é, para quaisquer números x e y,

$$\cos(y - x) = \cos y \,.\, \cos x + \operatorname{sen} y \,.\, \operatorname{sen} x\,. \tag{3.5}$$

As outras fórmulas são conseqüências desta. Pois,

$$\begin{aligned} \cos(y + x) &= \cos[y - (-x)] = \cos y \,.\, \cos(-x) + \operatorname{sen} y \,.\, \operatorname{sen}(-x) \\ &= \cos y \,.\, \cos x - \operatorname{sen} y \,.\, \operatorname{sen} x\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ainda, aplicando as fórmulas (3.5) e (3.6) obtemos que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right) = \mp \operatorname{sen} z, \text{ para qualquer } z\,.$$

Então,

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (y - x)\right] = \operatorname{sen}(y - x)\,. \tag{3.7}$$

Logo

$$\begin{aligned} &\cos\left[\frac{\pi}{2} - (y - x)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + x\right] = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) .\, \cos x - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) .\operatorname{sen} x = \\ &= \operatorname{sen} y \, \cos x - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \operatorname{sen} x \end{aligned} \tag{3.8}$$

Mas,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right] = \cos y\,. \tag{3.9}$$

Juntando (3.7), (3.8) e (3.9) obtemos que

$$\operatorname{sen}(y-x) = \operatorname{sen} y \, \cos x - \operatorname{sen} x \, \cos y\,.$$

Está provada a terceira fórmula do teorema.

Também,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(y+x) &= \operatorname{sen}[y-(-x)] = \operatorname{sen} y \, \cos(-x) - \operatorname{sen}(-x) \, \cos y \\ &= \operatorname{sen} y \, \cos x + \operatorname{sen} x \, \cos y\,.\end{aligned}$$

Está provado o Teorema 1.

Lei dos senos

O objetivo desta seção é provar a lei dos senos para um triângulo qualquer.

Proposição 2
Em qualquer triângulo ABC vale as igualdades:

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{AC}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{BC}{\operatorname{sen}\hat{A}}\,.$$

Prova: Você conhece do módulo 1, que todo triângulo está inscrito num círculo de centro O e de raio R. Veja a figura 3.6.

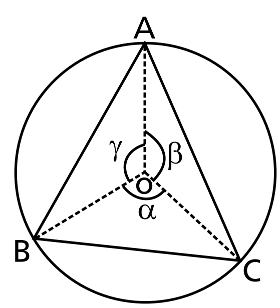


Fig. 3.6

Os ângulos α, β e γ são os ângulos centrais correspondentes, respectivamente, aos ângulos inscritos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Então vale

$$\alpha = 2\,\hat{A},\ \beta = 2\,\hat{B} \ \text{ e } \ \gamma = 2\,\hat{C}\,.$$

Vamos agora, a partir da figura 3.6, isolar o lado BC oposto ao ângulo $\hat{A}$, como mostra a figura 3.7. O triângulo OBC é isósceles com base BC. Logo, a altura OH é também bissetriz do ângulo $\hat{O} = \alpha$.

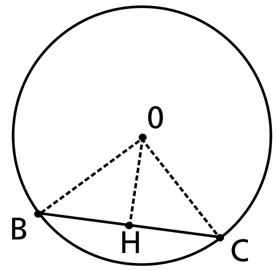


Fig. 3.7

Então $B\hat{O}H = \dfrac{\alpha}{2} = \hat{A}$ e assim no triângulo OBH, $BH = R \operatorname{sen} \hat{A}$. Ou seja, $\dfrac{1}{2}\,BC = R \operatorname{sen} \hat{A}$. Finalmente encontramos que

$$\frac{BC}{\operatorname{sen} \hat{A}} = 2R\,.$$

A igualdade que encontramos vem do fato de trabalharmos com o lado BC oposto ao ângulo $\hat{A}$. Se trabalharmos igualmente com o lado AB oposto ao ângulo $\hat{C}$ ou o lado AC oposto ao ângulo $\hat{B}$, encontraríamos, respectivamente,

$$\frac{AB}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R \quad \text{e} \quad \frac{AC}{\operatorname{sen} \hat{B}} = 2R\,.$$

O raio R é uma constante e presente em todas as equações. Portanto vale

$$\frac{AB}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{AC}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{BC}{\operatorname{sen} \hat{A}}\,,$$

que é a lei dos senos.

Gráfico das funções seno e cosseno

Usando os valores de seno e cosseno calculados na atividade 1.2 da aula 1 e a atividade 2.3 da aula 2 podemos construir gráficos para essas funções. Veja as figuras 3.8 e 3.9 para os gráficos.

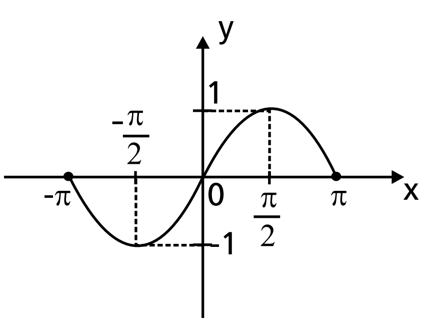


Figura 3.8 : $y = \operatorname{sen} x$

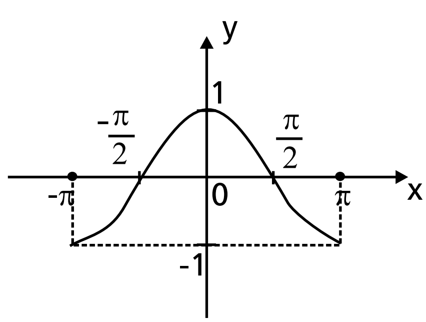


Figura 3.9 : $y = \cos x$

Exercícios

1. Conhecendo que $\operatorname{tg} a = \sqrt{2}$, calcule $\operatorname{cossec}\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)$.

2. Sendo $\operatorname{tg} x = -1$ e $x > \dfrac{3\pi}{2}$, descreva as soluções da equação.

3. Calcule o valor de

$$\left(\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\right)\left[\cos\frac{17\pi}{4} - \operatorname{tg}\left(\frac{-15\pi}{4}\right)\right].$$

4. Calcule o seno do ângulo $\hat{A}$ do triângulo ABC sabendo que $\hat{B} = \dfrac{\pi}{4}\,rd$ e $\hat{C} = \dfrac{\pi}{6}\,rd$.

5. Calcule $\operatorname{sen}(a - b)$, sendo que $\cos a = \dfrac{4}{5}$ e $\operatorname{sen} a = \dfrac{5}{13}$.

6. Conhecendo que $\operatorname{tg} x = 2\sqrt{3}$ e que $x - y = \dfrac{\pi}{3}$, encontre $\operatorname{tg} y$.

7. Determine a medida do ângulo C de um triângulo ABC, onde os ângulos A, B e C satisfazem

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \operatorname{sen}^2 C \quad \text{e} \quad \cos A \,.\, \cos B = \operatorname{sen} C\,.$$

8. Calcule $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}$.

Aula 4 – Números Complexos - Forma algébrica

Autores: Celso Costa e Roberto Geraldo Tavares Arnaut

Objetivos

1) Entender o contexto que originou o aparecimento dos números complexos;

2) Compreender os números complexos como um conjunto que estende o conjunto dos números reais, guardando as propriedades algébricas fundamentais;

3) Dominar as operações fundamentais com números complexos.

Introdução

Os números complexos, como um conjunto mais abrangente que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, historicamente, surge da necessidade de dar sentido a soluções de equações polinomiais. Vamos olhar isto mais de perto.

Considere no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ as equações polinomiais

$$3x - 2 = 0 \;\text{ e }\; x^2 - 3x + 2 = 0\,.$$

Temos métodos para resolver. Para encontrar a solução da primeira fazemos

$$3x - 2 = 0 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}\,.$$

Para solucionar em $\mathbb{R}$ a segunda equação, usamos o "método de completar o quadrado",

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \\ &= x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

Portanto, resolver a equação é equivalente a encontrar os valores x em $\mathbb{R}$ tais que

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}\,.$$

E as duas soluções possíveis são:

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \;\text{ e }\; x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1\,.$$

De modo geral, se $ax+b=0$ é uma equação polinomial de grau 1, com $a \neq 0$, então $x = \dfrac{b}{a}$ é a solução.

Por outro lado, se ax^2+bx+c, é uma equação polinomial de grau dois, com $a \neq 0$, conhecemos que o método de completar quadrado, fornece as soluções

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\,, \tag{4.1}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nesta situação se $\Delta \geq 0$ a equação possui soluções reais. Se $\Delta < 0$, a equação não tem solução real. O caso de $\Delta < 0$ representa um obstáculo à solução. Para ilustrar, considere a equação

$$x^2 + 2x + 2 = 0\,.$$

Ora, a equação é equivalente a

$$(x+1)^2 + 1 = 0\,. \tag{4.2}$$

Como $(x+1)^2 \geq 0$, qualquer que seja o número real x , a igualdade (4.2) é impossível. Portanto a equação não tem solução em $\mathbb{R}$. Por outro lado, a fórmula (4.1) fornece

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}\,. \tag{4.3}$$

E não temos como dar sentido em $\mathbb{R}$ ao segundo membro da igualdade (4.3). No entanto, desde a antigüidade existe um esforço de interpretação das “soluções” fornecidas em (4.3), denominando-as soluções imaginárias.

O que temos visto até aqui? Em síntese, para equações polinomiais de graus um e dois, existem fórmulas envolvendo no máximo radicais que fornecem as soluções reais destas equações.

Agora uma pergunta que sobreviveu a quase dois mil anos até ser solucionada: existe uma fórmula envolvendo no máximo radicais que forneça as soluções reais de uma equação polinomial de grau 3?

Vamos ver alguns detalhes deste problema. Note que a equação de grau 3 em discussão tem a forma geral:

$$a\mathbf{y}^3 + b\mathbf{y}^2 + c\mathbf{y} + d = 0\,,$$

onde a, b, c, d são números reais e $a \neq 0$.

Veja que dividindo tudo por a, a equação é equivalente a

$$\mathbf{y}^3 + \frac{b}{a}\mathbf{y}^2 + \frac{c}{a}\mathbf{y} + \frac{d}{a} = 0\,.$$

Logo é necessário resolver uma equação do tipo $y^3 + \mathbf{b}y^2 + \mathbf{c}y + \mathbf{d}$. No entanto, se fizermos uma mudança de variável

$$y = x - \frac{b}{3}\,,$$

a equação que precisamos resolver se torna,

$$\left(x - \frac{b}{3}\right)^3 + b\left(x - \frac{b}{3}\right)^2 + c\left(x - \frac{b}{3}\right) + d = 0\,.$$

Ou, desenvolvendo,

$$x^3 + \left(-\frac{b^2}{3} + c\right)x + \left(\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d\right) = 0\,.$$

Então a equação polinomial de grau 3 mais geral, pode ser colocada na forma

$$x^3 + px + q = 0\,. \tag{4.4}$$

Em 1545 o médico e matemático italiano Cardano, publica em seu livro "Ars Magna", a fórmula resolutiva da equação cúbica

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{D}}\,, \quad D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3. \tag{4.5}$$

Em 1572, Bombelli, apresentou a equação

$$x^3 - 15x - 4 = 0\,, \tag{4.6}$$

que se resolvida pela fórmula de Cardano apresenta aspectos muito interessantes. Antes de tudo, nossa experiência do ensino médio, nos leva a procuras entre os divisores do termo independente 4, soluções inteiras da equação. Os divisores de 4 são ± 4, ± 2, ± 1. Uma verificação direta mostra que $x = 4$ é solução de (4.6).

No entanto a fórmula de Cardano, mostra que as soluções são expressas por

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}\,.$$

Daí, a Bombelli, surge a importante questão: se 4 é solução, como dar sentido a $\sqrt{-121}$, de modo que

$$4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \quad ? \tag{4.7}$$

Bombelli observou que escrevendo $\sqrt{-121} = 11\sqrt{-1}$, usando as propriedades usuais dos números reais com a convenção que $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$, poderia obter a expressão (4.7) como

$$4 = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1}\,.$$

Para se convencer do resultado acima façamos uma atividade,

Atividade 4.1

a) Vamos calcular $\left(2+\sqrt{-1}\right)^3$ e $\left(2-\sqrt{-1}\right)^3$.

$$\begin{aligned}\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 &= \left(2+\sqrt{-1}\right)\left(2+\sqrt{-1}\right)^2 = \\ &= \left(2+\sqrt{-1}\right)\left[4+4\sqrt{-1}+\left(\sqrt{-1}\right)^2\right] = \\ &= \left(2+\sqrt{-1}\right)\left(4+4\sqrt{-1}-1\right) = \left(2+\sqrt{-1}\right)\left(3+4\sqrt{-1}\right) \\ &= 6+8\sqrt{-1}+3\sqrt{-1}-4 = 2+11\sqrt{-1}\end{aligned}$$

b) Imite o que foi feito acima para encontrar

$$\left(2-\sqrt{-1}\right)^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

c) Com estes resultados dê um sentido à fórmula (4.7).

Em 1777, Leonhard Euler representaria o símbolo $\sqrt{-1}$ por i. Assim,

$$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2\,, \quad i^3 = i^2.i = -i\,, \quad i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1\,.$$

Então as contas que fizemos na atividade 1, poderiam ser simplificadas: Por exemplo

$$\begin{aligned}(2+i)^3 &= 2^3 + 3.2^2.i + 3.2.i^2 + i^3 \\ &= 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i\,.\end{aligned}$$

Números Complexos

Como vemos, os números reais, mostravam-se insuficientes para expressar as soluções de equações polinomiais de grau 3. Era preciso dar sentido a expressões onde apareciam $\sqrt{-1}$, por exemplo.

O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ surge como um conjunto que contém os números reais $\mathbb{R}$. Um número complexo z arbitrário se expressa como

$$z = a + bi\,,$$

onde a e b são números reais. Isto é a unidade imaginária, $i = \sqrt{-1}$ e bi é a multiplicação do número real b por i.

Na forma geral $z = a + bi$ de um número complexo, se:

a) $b = 0$, então $z = a$ é um número real. Assim, o conjunto dos números reais é um subconjunto de $\mathbb{C}$. Isto é, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

b) $a = 0$ e $b \neq 0$, então $z = bi$ é dito um número complexo puro.

c) Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$ então $z = w \Leftrightarrow a = c$ e $d = b$.

d) os números reais a e b são ditos, respectivamente, a parte real e a parte imaginária do número complexo $z = a + bi$. Usamos a notação $Re(z) = a$ e $Im(z) = b$.

Para dar uma estrutura algébrica a $\mathbb{C}$ é preciso saber calcular a soma e o produto de números complexos. Por definição, se $a+bi$ e $c+di$ são números complexos, então

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (bc + ad)i \quad \text{e}$$

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i\,.$$

Com esta definição o conjunto dos números complexos.

$$\mathbb{C} = \{a + bi;\ a, b \in \mathbb{R}\}\,,$$

possui as propriedades fundamentais herdadas de $\mathbb{R}$.

Se $z = a + bi$, $w = c + di$ e $u = e + fi$ são números complexos, então vale:

a) comutatividade,

$$z + w = w + z \quad \text{e} \quad z.w = w.z$$

b) associatividade

$$(z + w) + u = z + (w + u) \quad \text{e} \quad (z.w)u = z(w.u)\,.$$

c) Existência de um único elemento neutro para a adição e de um único elemento unidade. O elemento nulo é o $0 = 0 + 0.i$ e a unidade é $1 = 1 + 0.i$. Então:

$$z.i = z \quad \text{e} \quad z + 0 = z\,,\ \forall z\,.$$

d) Se $z = a + bi$ é diferente de zero, então z possui inverso z^{-1},

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\, i\,.$$

Note que $z.z^{-1} = z^{-1}.z = 1$.

e) Se z e w são números complexos e $w \neq 0$, então

$$\frac{z}{w} = \frac{z.w^{-1}}{w.w^{-1}} = \frac{z.w^{-1}}{1} = z.w^{-1}\,,$$

define a divisão de números complexos.

Em torno de 1800, Gauss (1777-1855), teve a idéia genial de dar um significado geométrico ao número complexo $z = a+bi$, associando um par ordenado (a, b) e representando o número complexo z como um ponto do plano. Assim, com o plano munido com eixos coordenados teríamos a representação geométrica de z. Veja a figura 4.1.

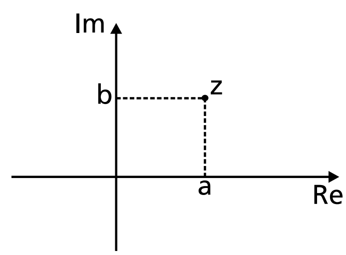


Fig. 4.1

Módulo de um número complexo

O módulo do número complexo $z = a+bi$ é o número positivo $\sqrt{a^2 + b^2}$. Usamos para o módulo a notação $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Note, a partir da figura 4.1, que $|z|$ representa a distância de z até a origem.

Exemplo 4.1

a) $(1 - 3i) + (-4 + 2i) = (1 - 4) + (-3 + 2)i = -3 - i$;

b) $(3 - 2i) - (5 - 3i) = (3 - 5) + (-2 + 3)i = -2 + i$;

c) $(3 - i)(-2 + 2i) = 3(-2) + (-i)(-2) + 3(2i) + (-i)(2i) = -6 + 2i + 6i - 2i^2 = -4 + 8i$.

Número complexo conjugado

Dado o número complexo $z = a + bi$, o número complexo conjugado de z é $a - bi$ é denotado por $\overline{z}$

Exemplo 4.2

(a) $z = 3 - i \Rightarrow \overline{z} = 3 + i$

(b) $z = 4i \Rightarrow \overline{z} = -4i$

(c) $z = 5 \Rightarrow \overline{z} = 5$

Propriedades do conjugado

A operação de conjugação de um número complexo, possui as propriedades seguintes

(1) $\overline{\overline{z}} = z$, o conjugado do conjugado do número é o prórpio número;

(2) $z = \overline{z} \Rightarrow z \in \mathbb{R}$, se um número e seu conjugado coincidem o número é real;

(3) $z + \overline{z} = 2Re(z)$;

(4) $z - \overline{z} = 2iIm(z)$;

(5) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

(6) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$;

(7) $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$;

(8) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2 \neq 0$;

(9) $(\overline{z})^n = (\overline{z^n}),\ n \in \mathbb{N}$;

(10) $z.\overline{z} = |z|^2$.

Exemplo 4.3

Divisão de complexos

Para efetuar a divisão basta multiplicar o número complexo do denominador pelo seu conjugado. Se $c + di \neq 0$, então,

$$\begin{aligned} \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)}{(c+di)}.\frac{(c-di)}{(c-di)} &= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2 i^2} = \\ &= \frac{ac + bd + bc + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)i}{c^2 + d^2}\,. \end{aligned}$$

Exemplo 4.4
$$\frac{4+5i}{3-2i} = \frac{(4+5i)}{(3-2i)} . \frac{(3+2i)}{(3+2i)} = \frac{12+15i+8i-10i^2}{9-4i^2} = \frac{22+23i}{9+4} = \frac{22}{13} + \frac{23}{13} i \,.$$

Atividade 4.2: Observe a seqüência de potênciasde i:

$$\begin{aligned} &i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1, \\ &i^5 = i^4 . i = i,\ i^6 = i^4 . i^2 = i^2 = -1, \\ &i^7 = i^4 . i^3 = i^3 = -i,\ i^8 = i^4 . i^4 = 1,\ \text{etc} \ldots \end{aligned}$$

Observe que as potências de expoentes naturais de i se repetem de quatro em quatro. Logo para calcularmos o resultado de uma potência inteira de i, basta elevarmos i ao resto da divisão desta potência por 4. Calcule (a) i^{458}, (b) i^{83} e (c) i^{1001}.

Exercícios resolvidos

1. Determine o inverso do complexo $2i$.

   Solução:
   $$\frac{1}{2i} = \frac{1}{2i} . \frac{i}{i} = \frac{i}{-2} = -\frac{i}{2}.$$

2. Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo que o número complexo $z = \dfrac{3-i}{1+ai}$ seja real.

   Solução:
   $$\frac{(3-i)}{(1+ai)} . \frac{(1-ai)}{(1-ai)} = \frac{3-i-3ai+ai^2}{1-a^2i^2} = \frac{3-a}{1+a^2} + \frac{(-1-3a)}{1+a^2} i.$$
   Para que z seja real devemos ter $(-1-3a) = 0$. Isto é, $a = -\dfrac{1}{3}$.

3. Determine o valor da expressão $i^{31} + i^{32} + i^{33} + i^{34}$.

   Solução:

   Como $i^4 = 1$ e usando as técnicas da atividade 2, dividimos todos os expoentes por 4 e ficamos apenas com os restos. Então,
   $$i^{31} + i^{32} + i^{33} + i^{34} = i^3 + i^0 + i^1 + i^2 = -i + 1 + i - 1 = 0$$

4. Determine x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que $z = \dfrac{2-xi}{1+2xi}$ seja imaginário puro.

   Solução:
   $$z = \frac{(2-xi)}{(1+2xi)} . \frac{(1-2xi)}{(1-2xi)} = \frac{2-4xi-xi+2x^2i^2}{1-4x^2i^2} = \frac{2-2x^2}{1+4x^2} - \frac{5x}{1+4x^2} i.$$
   Para que z seja imaginário puro devemos ter $Re(z) = 0$ e $Im(z) \neq 0$. Logo, $\dfrac{2-2x^2}{1+4x^2} = 0$ e $\dfrac{-5x}{1+4x^2} \neq 0$, o que implica $2 - 2x^2 = 0$. Isto é, $x \pm 1$ é a nossa resposta.

5. Determine o complexo z tal que $z^2 = 21 + 20i$.

   Solução:

   Seja $z = a + bi$ com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Então $z^2 = 21 + 20i$ implica $a^2 - b^2 + 2abi = 21 + 20i$. Desta última equação resulta que

   $$a^2 - b^2 = 21 \text{ e } 2a.b = 20\,.$$

   Da segunda equação encontramos $a = \dfrac{10}{b}$. Este valor substituído na primeira equaçãoo resulta

   $$\left(\frac{10}{b}\right)^2 - b^2 = 21 \Rightarrow b^4 + 21b^2 - 100 = 0\,.$$

   Resolvendo, obtemos $b^2 = \dfrac{-21 \pm \sqrt{441 + 400}}{2}$. Isto implica que $b^2 = \dfrac{-21+29}{2} = 4$ ou $b^2 = \dfrac{-21-29}{2} = -25$ (não serve!). Logo $b = \pm 2$ o que implica $a = \dfrac{10}{\pm 2} = \pm 5$.

   Daí temos dois números complexos tal que $z^2 = 21 + 20i$ que são $z_1 = 5 + 2i$ e $z_2 = -5 - 2i$.

6. Provar que se z e w são dois números complexos então $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

   Solução:

   Sejam $z = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$. Então

   $$\begin{aligned} z + w &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \\ \overline{z+w} &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i \\ \overline{z+w} &= (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) \;=\; \overline{z} + \overline{w}\,. \end{aligned}$$

   Daí $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

7. Dê o valor de $\dfrac{-1}{i - \dfrac{1}{i - \dfrac{1}{i}}}$.

   Solução:

   $$\frac{-1}{i - \dfrac{1}{i - \dfrac{1}{i}}} = \frac{-1}{i - \dfrac{1}{\dfrac{i^2-1}{i}}} = \frac{-1}{i - \dfrac{i}{-2}} = \frac{-1}{i + \dfrac{i}{2}}$$
   $$= \frac{-1}{\dfrac{3i}{2}} = \frac{-2}{3i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{-2i}{-3} = \frac{2}{3}\, i$$

8. Determine z tal que $z^2 = \overline{z}$.

   Solução:

   Seja $z = a + bi$. Então $(a + bi)^2 = a - bi \Rightarrow a^2 + 2abi - b^2 = a - bi$. Daí tem-se o sistema $\begin{cases} a^2 - b^2 & = & a \\ 2ab & = & -b \end{cases}$

   Se $b = 0$ então $a^2 = a$, isto é, $a^2 - a = 0$ o que implica $a = 0$ ou $a = 1$. Logo os dois números $z_1 = 0$ e $z_2 = 1$ são soluções.

   Se $b \neq 0$ então $2a = -1$ 0 que implica $a = -\dfrac{1}{2}$. Substituindo este valor de a em $a^2 - b^2 = a$ temos que $b = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Tem-se mais dois números complexos z_3 e z_4 a saber: $z_3 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ e $z_4 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

9. Dê o conjugado do número complexo $\dfrac{1+3i}{2-i}$.

   Solução:
   $\dfrac{(1+3i)}{(2-i)} \cdot \dfrac{(2+1)}{(2+i)} = \dfrac{2+6i+i+3i^2}{4-i^2} = \dfrac{2-3}{5} + \dfrac{7}{5}i = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{7}{5}i.$

   O conjugado de $-\dfrac{1}{5} + \dfrac{7}{5}i$ é $-\dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{5}i$.

10. Qual a condição para que o produto de dois números complexos $a + bi$ e $c + di$ dê um número real?

    Solução:

    $(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i.$

    Logo a condição para que o produto seja um número real é que $bc+ad = 0$.

Exercícios propostos

1. Verficar se as afirmações são verdadeiras ou falsas justificando.

   (a) $z = i$ é o elemento neutro da multiplicação de números complexos.

   (b) Se $z = x + yi$ então $x = 1$ e $y = 2$.

   (c) Se x+2i=1-yi então $x = 1$ e $y = 2$.

   (d) Se $z = \overline{z}$ então z é número real.

2. Efetue $\dfrac{(2-i)^2}{3+i}$.

3. Efetue $(1+i)^{-1}(1+i^3)(1+i)^2$.

4. Determine uv se $u = 4+3i$ e $v = 6-3i$.

5. Determine o conjugado do número complexo $-6i+3$.

6. Se $f(z) = z^2 - z + 1$ determine $f(1-i)$.

7. Considere os complexos $z_1 = 4-3i$, $z_2 = 3+2i$ e $z_3 = 7i-2$. Determine:

   (a) $z_1 + z_2$

   (b) $z_1 + z_3$

   (c) $z_2 - z_1$

   (d) $\overline{z_3} - z_1$

8. Se $z_1 = 3-2i$ e $z_2 = 5+3i$ calcule:

   (a) $z_1.z_2$

   (b) $z_1.\overline{z_2}$

   (c) $\dfrac{z_1}{z_2}$

9. Resolva as equações:

   (a) $x^2 + 25 = 0$

   (b) $x^2 - 6x + 15 = 0$

   (c) $x^4 - 49 = 0$

   (d) $x^2 - 2x + 2 = 0$

10. Determine todos os números reais x e y tais que $(x+6)-(y^2-16)i$ seja:

    (a) Um número real

    (b) Um imaginário puro

11. Determine os números reais a e b tais que $z = ai - 3b + 4i - 6$ seja real.

12. Determine os números reais a e b de modo que seja verficada a igualdade $(4ai - 2) + (3b - 5i) = 8 - 1$.

13. Determine a equação do 2^o grau cujas raízes são $5 + 3i$ e $5 - 3i$.

14. Determine $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ de modo que $(2x - 3y) + 6i = -3 + (x + 2y)i$.

15. Resolver as equações onde $z \in \mathbb{C}$.

    (a) $\overline{z} - 4 = 2z + i$

    (b) $5z - 2\overline{z} = 3 - 7i$

16. Calcule o valor de cada uma das expressões:

    (a) $(3 + 2i)(1 - i) + i^{48} - i^{507}$

    (b) $(2 + i)(2 - i) + i^{72} - i^{248}$

17. Calcule o valor de m sabendo que $m = i.i^3.i^5.i^7 \ldots i^{59}$.

18. Seja $\dfrac{1 - 2i}{3 + i^3} = a + bi$. Obtenha $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

19. Resolva o sistema $\begin{cases} (1 - i)z_1 + z_2 & = & i \\ 2z_1 + (1 + i)z_2 & = & 0 \end{cases}$ onde z_1 e z_2 são números complexos de partes reais iguais.

20. Seja o número complexo z tal que $zi = 3i - 2\overline{z}$. Obtenha o conjugado de z.

Aula 5 – Plano de Argand-Gauss

Autores: Celso Costa e Roberto Geraldo Tavares Arnaut

Objetivos

1) Representar geometricamente os números complexos;
2) Interpretar geometricamente a soma, o produto e o quociente de dois números complexos.

Introdução

Na aula anterior, inntroduzimos a representação geométrica dos números complexos. A cada número $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$, e $b \in \mathbb{R}$, associamos o ponto (a, b) de um plano.

Para estabelecer esta correspondência este plano é dotado de um sistema de coordenadas. No eixo das abcissas são representados os números reais e no eixo das coordenadas os números complexos puros. Denominamos este plano por Plano Complexo.

Na figura 5.1, sendo $z = a + bi$ um número complexo, temos que Re é o eixo real, Im é o eixo imaginário e $z = (a, b)$ é a imagem geométrica ou afixo do complexo $z = a + bi$.

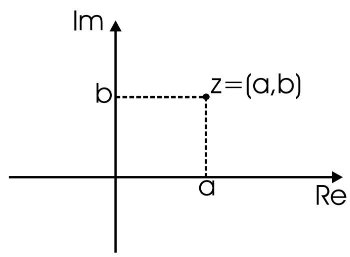


Fig. 5.1 : A forma algébrica, $z = a + bi$ e a forma cartesiana $z = (a, b)$.

Exemplo 5.1

Considere os pontos assinalados no gráfico da figura 5.2. Determine os números complexos representados por esses pontos.

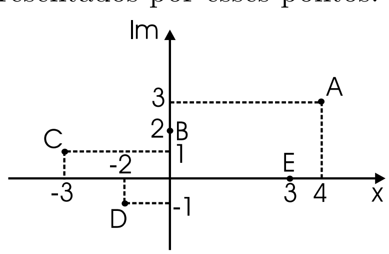


Fig. 5.2

O ponto A representa o número complexo $4+3i$, B o número complexo $2i$, C o número complexo $-3+i$, D o número complexo $-2-i$ e E o número complexo 3 (real).

Módulo de um número complexo

Definição 5.1
O módulo de um número complexo $z = a + bi$ e o número positivo $\sqrt{a^2 + b^2}$.
Denotamos o módulo pelo símbolo $|z|$.

Em relação à representação geométrica no plano complexo, o módulo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ representa a distância do número até o ponto origem do plano. Veja figura 5.3.

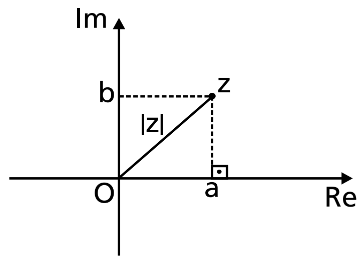


Fig. 5.3

Podemos obter o módulo como distância do número à origem O, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo Oaz. Temos que $a^2 + b^2 = |z|^2$ o que implica ser $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemplo 5.2

Determinar o módulo dos complexos:

(a) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$

Solução: $|z| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4$

(b) $z = -5i$

Solução: $|z| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$

(c) $z = -8$

Solução: $|z| = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = 8$

Observação:
No plano a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ representa uma circunferência de centro $C = (a, b)$ e raio r. Em particular, a equação $x^2 + y^2 = r^2$ representa uma circunferência de centro na origem e raio r.

Exemplo 5.3

Encontre o lugar geométrico dos pontos no plano de Gauss tais que:

(a) $|z| = 4$

(b) $|z - i| = 2$

(c) $|z - 2 + i| \leq 1$

Solução: $z = a + bi$. Então

(a) $\sqrt{a^2 + b^2} = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4^2$. Quando a e b variam como números reais a equação anterior representa no plano uma circunferência de centro na origem e raio 4. Veja a figura 5.4.

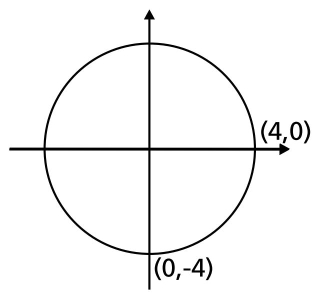


Fig. 5.4

(b) $|a + bi - i| = 2 \Rightarrow |a + (b-1)i| = 2$. Então $\sqrt{a^2 + (b-1)^2} = 2 \Rightarrow a^2 + (b-1)^2 = 2^2$. Esta equação, no plano representa uma circunferência de centro $C = (0, 1)$ e raio 2. Veja a figura 5.5.

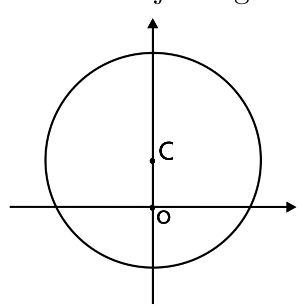


Fig. 5.5

(c) $|a + bi - 2 + i| \leq 1 \Rightarrow |a - 2 + (b+1)i| \leq 1 \Rightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2} \leq 1$. No plano representa o interior de um círculo de centro $C = (2, -1)$ e raio 1. Veja a figura 5.6.

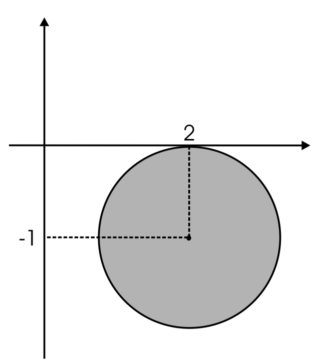


Fig. 5.6

Propriedades do Módulo

Sejam $z \in \mathbb{C}$, $z_1 \in \mathbb{C}$ e $z_2 \in \mathbb{C}$.

(1) O módulo de qualquer número complexo é positivo ou nulo. Isto é, $|z| \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(2) O módulo do produto é o produto dos módulos

$$|z_1 \, . \, z_2| = |z_1| \, . \, |z_2| \, .$$

(3) O módulo do quociente é o quociente dos módulos

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \;\; z_2 \neq 0 \, .$$

(4) O módulo de um número complexo é igual ao módulo do seu conjugado.

$$|z| = |\overline{z}| \, .$$

(5) O módulo de uma potência é a potência do módulo.

$$|z^n| = |z|^n \, .$$

Todas as demonstrações das propriedades enunciadas do módulo são imediatas. A título de exemplo, vamos provar a propriedade (2). As demais vamos deixar como atividade.

Considere $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$. Então

$$z_1 \, . \, z_2 = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i \, .$$

Temos que $|z_1| = \sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2}$ e $|z_2| = \sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2}$ logo

$$|z_1| \, . \, |z_2| = \sqrt{{a_1}^2 {a_2}^2 + {a_1}^2 {b_2}^2 + {b_1}^2 {a_2}^2 + {b_1}^2 {b_2}^2} \, . \tag{5.1}$$

Também temos que

$$\begin{aligned} |z_1 \, . \, z_2| &= \sqrt{(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2} \\ &= \sqrt{{a_1}^2 {a_2}^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2 + {b_1}^2 {b_2}^2 + {a_1}^2 {b_2}^2 + 2 a_1 b_2 b_1 a_2 + {b_1}^2 {a_2}^2} \\ &= \sqrt{{a_1}^2 {a_2}^2 + {b_1}^2 {b_2}^2 + {a_1}^2 {b_2}^2 + {b_1}^2 {a_2}^2} \end{aligned} \tag{5.2}$$

De (5.1) e (5.2) concluímos que $|z_1 \, . \, z_2| = |z_1| \, . \, |z_2|$.

Nota: De um modo geral se $z_1, \dots, z_n$ são números complexos vale

$$|z_1 \,.\, z_2 \,.\, z_3 \,\dots\, z_n| = |z_1| \,.\, |z_2| \,.\, |z_3| \,\dots\, |z_n| \,. \tag{5.3}$$

A prova deste fato é feita usando a propriedade de (a). De fato

$$z_1 \,.\, z_2 \,.\, z_3 \,\dots\, z_n = z_1 \,.\, (z_2 \,.\, z_3 \,\dots\, z_n) \,.$$

Logo $|z_1 \,.\, z_2 \,\dots\, z_n| = |z_1||z_2 \,.\, z_3 \,\dots\, z_n|$.. Este processo fornece no próximo passo

$$|z_1 \,.\, z_2 \,\dots\, z_n| = |z_1||z_2| \,.\, |z_3 \,\dots\, z_n| \,.$$

Prosseguindo encontramos a fórmula (5.3).

Atividade 5.1: Construa uma prova das propriedades (2), (3), (4) e (5) para os módulos de números complexos.

Vamos usar as propriedades do módulo, nos exemplos abaixo.

Exemplo 5.4

Determine o módulo do número complexo $\dfrac{2+3i}{-5-i}$.

Solução: Usando a propriedade (3) temos:

$$\left|\frac{2+3i}{-5-i}\right| = \frac{|2+3i|}{|-5-i|} = \frac{\sqrt{4+9}}{\sqrt{25+1}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{26}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \,.$$

Exemplo 5.5

Determine o módulo do número complexo $(1+3i)^{10}$.

Solução: Usando a propriedade (5) temos:

$$|(1+3i)^{10}| = |1+3i|^{10} = (\sqrt{1+9})^{10} = \sqrt{10^{10}} = 10^5 \,.$$

Exemplo 5.6

Determine o módulo do número complexo $\dfrac{(1+i)^4(1-i)^3}{(2+i)^5}$.

Solução: Usando a propriedade (2), (3) e (5) temos:

$$\left|\frac{(1+i)^4(1-i)^3}{(2+i)^5}\right| = \frac{|1+i|^4|1-i|^3}{|2+i|^5} = \frac{(\sqrt{2})^4(\sqrt{2})^3}{(\sqrt{5})^5} = \frac{2^3\sqrt{2}}{5^2\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{2}}{25\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{10}}{125} \,.$$

Argumento de um número complexo

Definição 5.2

Seja z o ponto do plano complexo, que representa o número complexo $z = a + bi$, $z \neq 0$. Veja a figura 5.7. Ao ângulo θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, que o sentido positivo do eixo real forma com a semi-reta de origem O e que contém P denomina-se argumento principal de z (notação: $Arg(z)$).

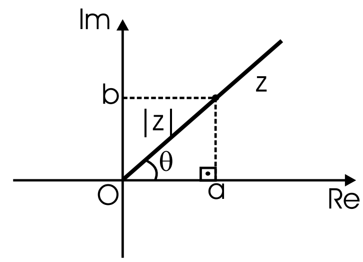


Fig. 5.7

Quando representamos sobre o plano complexo o ciclo trigonométrico (um círculo orientado de raio 1 centrado na origem) podemos dar um sentido amplo ao argumento de um número complexo. Veja a figura 5.8, onde $z = a + bi$ é um número complexo com $a = Re(z) > 0$ e $b = Im(z) < 0$.

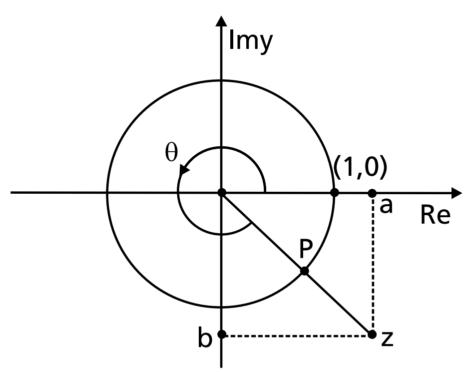


Fig. 5.8

O ponto P é obtido pela interseção do segmento Oz com o ciclo trigonométrico. O ângulo θ acima é definido como o argumento principal do número complexo z. Na figura $\dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$. Então

$$Arg(z) = \theta$$

é o argumento principal de z. Mas, associado ao ponto P do ciclo trigonométrico temos uma infinidade de ângulos. São as determinações dos ângulos associados ao ponto P e então ao número complexo z. Todas estas determinações definem o argumento de z. Usamos a notação $arg(z)$. Então

$$arg(z) = \theta + 2k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}\,.$$

Note a sutileza na notação: $Arg(z)$ é o argumento principal de z e representa um ângulo de medida $0 \leq \theta < 2\pi$ enquanto que o $arg(z)$ é a notação para todos os ângulos côngruos a $Arg(z)$.

Exemplo 5.7

a) Os números reais positivos tem argumento principal $\theta = 0$. Na figura 5.9 está representado o argumento principal de $z = 3$.

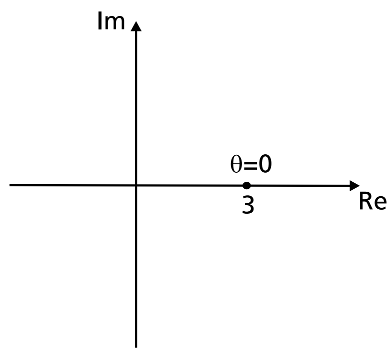


Fig. 5.9

b) Os números reais negativos tem argumento principal $\theta = \pi$. Na figura 5.10 está representado o argumento principal de $z = -4$.

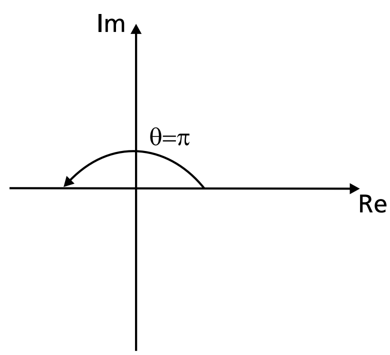


Fig. 5.10

c) Os números imaginários puros positivos tem argumento principal $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Veja a figura 5.11.

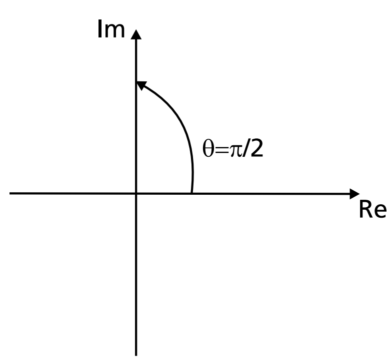


Fig. 5.11

d) Os números imaginários puros negativos tem argumento principal $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$. Veja a figura 5.12.

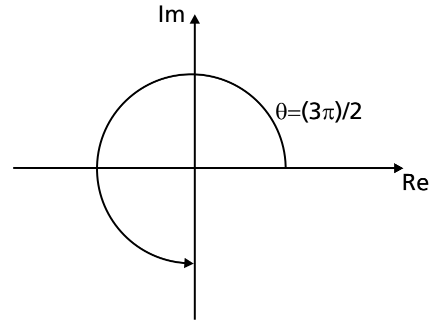


Fig. 5.12

Nas figuras abaixo (figura 3.14), representamos números complexos nos vários quadrantes.

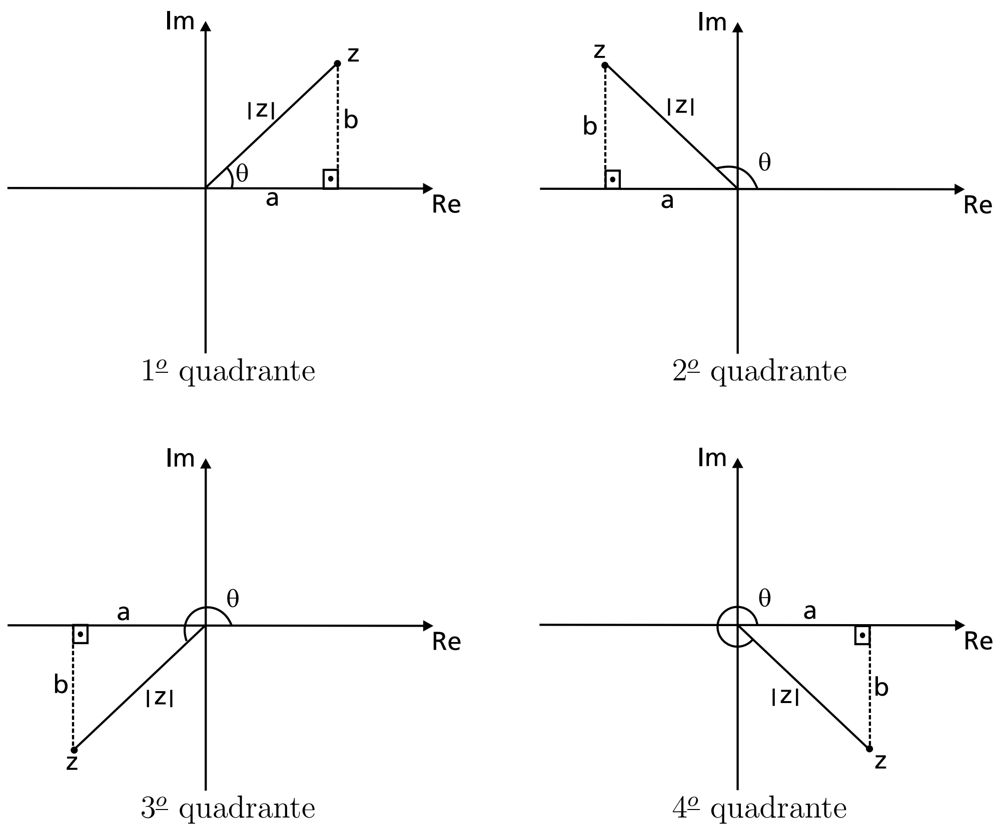


Figura 5.13

Qualquer que seja a posição do número complexo $z = a + bi$, $z \neq 0$, podemos escrever

$$\begin{cases} |z| & = & \sqrt{a^2+b^2} \\ \operatorname{sen}\theta & = & \dfrac{b}{|z|} \\ \cos\theta & = & \dfrac{a}{|z|} \end{cases}$$

Ou seja, para todo complexo $z = a + bi,\ z \neq 0$ vale

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta),\ \ \theta = Arg(z)\,.$$

Ou de modo geral, usando $arg(z) = \theta + 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$, escrevemos, de modo equivalente, que

$$z = |z|\,[\cos(\theta + 2m\pi) + \mathrm{sen}(\theta + 2m\pi)],\ m \in \mathbb{Z}\,.$$

Exemplo 5.8

$z = 1 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Temos que $\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Isto implica $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Logo $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Exemplo 5.9

$z = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Temos que $\mathrm{sen}\,\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ o que implica θ pertencer ao 4º quadrante e $\theta = \dfrac{5\pi}{3} = 2\pi - \dfrac{\pi}{3}$. Logo, $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

Exemplo 5.10

$z = -4\sqrt{3} - 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = \sqrt{(48)(16)} = 8$. Temos que $\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{-4}{8} = -\dfrac{1}{2}$ e $\cos\theta = \dfrac{-4\sqrt{3}}{8} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ o que implica θ pertencer ao terceiro quadrante e $\theta = \dfrac{7\pi}{6} = \pi + \dfrac{\pi}{6}$. Então, $-4\sqrt{3} - 4i = 8\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

Exemplo 5.11

$z = -1 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Temos que $\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $\cos\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ o que implica θ pertencer ao segundo quadrante e $\theta = \dfrac{3\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{4}$. Logo, $-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Exercícios Propostos

1. Expresse na forma trigonométrica $|z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, o número complexo $\dfrac{11+3i}{1+i} - (2-i)^2 - 4i$.
2. Represente na forma trigonométrica os números complexos z tais que $z^2 = 5iz$.
3. Determine o menor número natural n de modo que $(\sqrt{3}-i)^n$ seja um número imaginário (complexo) puro.
4. Calcule o módulo de $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^{13}$.
5. Obtenha a forma trigonométrica dos números $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ e $2\sqrt{3} - 2i$.
6. Encontre todos os números complexos tais que $z(\overline{z} + i) \in \mathbb{R}$.

Aula 6 – Forma trigonométrica ou polar e forma exponencial de um número complexo

Autores: Celso Costa e Roberto Geraldo Tavares Arnaut

Objetivos

1) Entender a forma trigonométrica e exponencial de um número complexo não nulo;

2) Operar com potências inteiras de números complexos;

3) Entender e operar com soluções em w das equações $w = z^{\frac{1}{n}}$, onde $z \neq 0$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Introdução

Seja o número complexo $z = a + bi$, $z \neq 0$ representado pelo ponto $z = (a, b)$, na figura 6.1.

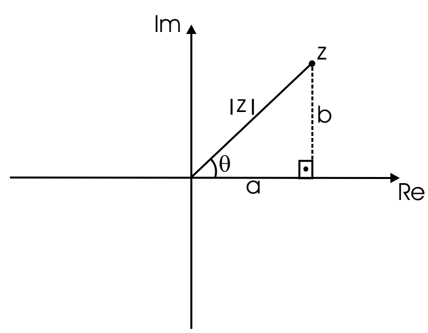


Fig. 6.1

Temos que $\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$ e $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|}$. Então, encontramos que $z = a + bi = |z|\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$.

A expressão do número complexo $z = a + bi$ escrito na forma

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

é dita a representação trigonométrica do número.

Observação:
A forma trigonométrica é bastante útil quando efetuamos as operações de potenciação e radiciação de números complexos, como veremos a seguir.

Exemplo 6.1

Escreva na forma trigonométrica os complexos

(a) $z = \sqrt{3} + i$;

(b) $z = -1 + i$;

(c) $z = -1 - \sqrt{3}i$;

(d) $z = 4\sqrt{3} - 4i$;

Solução:

(a) Temos que $z = (\sqrt{3}, 1)$ onde z pertence ao 1º quadrante $0 < \theta < 90^0$.

Calculemos $|z|$.

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2\,.$$

Agora calculemos o valor de θ.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^0 = \frac{\pi}{6}\,.$$

Escrevendo $z = \sqrt{3} + i$ na forma trigonométrica temos

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right).$$

(b) Temos que $z = (-1, 1)$ pertence ao 2º quadrante.

Calculemos $|z|$.

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}\,.$$

Calculemos o valor de θ.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\,.$$

Escrevendo $z = -1 + i$ na forma trigonométrica temos

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right).$$

(c) Temos que $z = (-1, -\sqrt{3})$ pertence ao 3º quadrante.

Calculemos $|z|$.

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2\,.$$

Calculemos o valor de θ.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\,.$$

Escrevendo $z = -1 - \sqrt{3}i$ na forma trigonométrica temos

$$z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right).$$

(d) Temos que $z = (4\sqrt{3}, -4)$ pertence ao 4º quadrante.

Calculemos $|z|$.

$$|z| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = 8\,.$$

Calculemos o valor de θ.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}\,.$$

Escrevendo $z = 4\sqrt{3} - 4i$ na forma trigonométrica temos

$$z = 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right).$$

Forma exponencial de um número complexo

Foge ao nosso objetivo definir nesta aula potenciação de números complexos. No entanto, caso simples são evidentes.

Por exemplo z^n, onde $z = a + bi$ é número complexo e n é um número natural

$$z^n = \underbrace{z\,.\,z\,.\,\ldots\,.\,z}_{n\ \text{vezes}}\,.$$

Já usamos esta notação anteriormente. No entanto não sabemos dar sentido a uma expressão do tipo a^z, onde $a > 0$, é um número real positivo e $z \in \mathbb{C}$. Mais tarde, estudando análise complexa, você encontrará uma boa definição para a^z. Por enquanto vamos apenas informar que neste estudo futuro você vai concluir que

$$e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\operatorname{sen} b)\,.$$

Esta é uma magnífica expressão, onde $e \simeq 2,712\ldots$ é o número irracional e, a base do sistema de logaritmos neperianos. Observe que se $\theta \in \mathbb{R}$, então

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta\,. \tag{6.1}$$

Notas:

1) Os números irracionais $e \simeq 2,712\ldots$ e $\pi = 3,1415\ldots$ são os dois mais importantes números da Matemática. Aparecem em um sem número de importantes equações. É interessante observar que se $\theta = \pi$ na equação (6.1) então

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi\,.$$

Sendo $\cos\pi = -1$ e $\mathrm{sen}\,\pi = 0$, então

$$e^{i\pi} + 1 = 0\,.$$

Esta última equação é perfeita. Possue os dois mais importantes números da Matemática π e e, a unidade 1, a nulidade zero e tudo costurado por uma igualdade. Dizem que esta equação está escrita no livro de Deus. Livro imaginário, contendo poucas equações: as mais belas e mais importantes, que regem a natureza.

2) Se $z = a + bi = |z|\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, onde $\theta = Arg(z)$. Então podemos escrever

$$z = |z|\,.\,e^{i\theta}\,.$$

3) Seja $z = a + ib$ um número complexo, tal que $|z| = 1$. Então para algum número real θ, $z = e^{i\theta}$. Na representação no plano complexo z está sobre o círculo S^1, de raio 1 e centro na origem. Veja a figura 6.2.

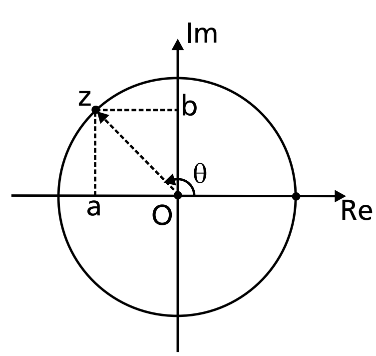


Fig. 6.2

Quando θ varia em $\mathbb{R}$, os números complexos unitários $z = e^{i\theta}$, variam sobre S^1. Na verdade a função $E : \mathbb{R} \to S^1$

$$E : \mathbb{R} \to S^1, \quad E(\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta\,,$$

é a função de Euler que definimos na Aula 2.

Exemplo 6.2

Motivados pelo exemplo 6.1, escrever na forma exponencial os números complexos:

a) $z = \sqrt{3} + i$.

Solução: $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) $z = -1 + i$.

Solução: $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$.

c) $z = -1 - \sqrt{3}i$.

Solução: $z = 2e^{i\frac{4}{3}\pi}$.

d) $z = 4\sqrt{3} - 4i$.

Solução: $z = 8e^{i\frac{11}{6}\pi}$.

Operações com número complexo

Dados os números complexos z e w então valem as propriedades:

(1) $Arg(z\,.\,w) = Arg(z) + Arg(w)$.

(2) Se $w \neq 0$, $Arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = Arg(z) - Arg(w)$.

Vamos mostrar porque valem as propriedades.

Propriedade (1)

Leia a propriedade (1) e venha no caminho da demonstração de sua validade. Suponha que $z = |z|\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ e que $w = |w|\,(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$. Então

$$\begin{aligned} z\,.\,w &= |z|\,|w|\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) \;= \\ &= |z|\,|w|\,.\,[\cos\theta\,.\,\cos\varphi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + i(\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta)] \\ &= |z|\,|w|\,[\cos(\theta+\varphi) + i\operatorname{sen}(\theta+\varphi)]\,. \end{aligned}$$

Na última igualdade usamos a propriedade do cosseno e do seno da soma de dois arcos.

Ora a igualdade acima, explica que o módulo de $z\,.\,w$ é o produto dos módulos (fato já conhecido) e que o argumento de $z\,.\,w$ é igual a soma dos argumentos de z e w.

Observação: Poderíamos fazer uma prova mais direta da propriedade (1). Como

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = |z|\,e^{i\theta} \quad \text{e} \quad w = |w|\,(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi) = |w|\,e^{i\varphi}\,,$$

então $z\,.\,w = |z|\,|w|\,.\,e^{i\theta}\,.\,e^{i\varphi} = |z|\,|w|\,.\,e^{i(\theta+\varphi)}$. O expoente $i(\theta+\varphi)$ define o argumento de $z\,.\,w$ como sendo $\theta+\varphi$.

Propriedade (2)

Leia a propriedade (2) e sem demora vamos à prova. Se $z = |z|\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ e $w = |w|\,(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$. Veja que

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi} = \frac{(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)(\cos\varphi - i\,\mathrm{sen}\,\varphi)}{(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)(\cos\varphi - i\,\mathrm{sen}\,\varphi)} = \\
&= \frac{\cos\theta\,\cos\varphi + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + i(\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta - \cos\theta\,\cos\varphi)}{\cos^2\varphi + \mathrm{sen}^2\,\varphi} = \\
&= \cos(\theta-\varphi) + i\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi)\,.
\end{aligned}$$

Então

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\,[\cos(\theta-\varphi) + i\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi)]\,,$$

mostrando que o argumento de $\dfrac{z}{w}$ é a diferença $\theta-\varphi$ dos argumentos de z e w.

Exemplo 6.3

Determine o número $e^{3\pi i}$

Solução: $e^{3\pi i} = \cos 3\pi + i\,\mathrm{sen}\,3\pi = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi = -1 + i\,.\,0 = -1$.

Fórmula de Moivre

Dado um número inteiro n e um número complexo não nulo $z = |z|\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, então vale

$$z^n = |z|^n\,(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta)\,. \tag{6.2}$$

A fórmula acima, conhecida como primeira fórmula de Moivre, é muito útil no cálculo de potências arbitrárias de números complexos. Antes de provarmos a fórmula, veja o exemplo a seguir.

Exercício resolvido

1. Sendo $z = 2 - 2i$, calcule z^{12}.

   Temos que $|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Logo, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Então, como z é ponto do quarto quadrante, podemos escrever $\theta = 2\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}$.

   Logo,
$$\begin{aligned} z^{12} &= |z|^{12}\left(\cos 12 \times \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} 12 \times \frac{7\pi}{4}\right) = \\ &= \sqrt{8^{12}}\left(\cos \frac{21\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{21\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

   Como $\dfrac{21\pi}{4} = \dfrac{16\pi + 5\pi}{4} = 4\pi + \dfrac{5\pi}{4}$, então o argumento principal de 12θ é $\dfrac{5\pi}{4}$. Assim,
$$z^{12} = 8^6\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}\right).$$

Agora vamos provar a fórmula de Moivre. É conveniente dividir a prova em duas partes

Parte 1: Demonstração de (6.2) para todo inteiro $n \geq 0$.

Neste caso, vamos usar o princípio da indução. Se $n = 0$ então
$$z^0 = |z|^0 (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) \Rightarrow 1 = 1\,(1 + i \times 0) \Rightarrow 1 = 1$$

e a fórmula vale para $n = 0$. Suponha agora que a fórmula (6.2) vale para algum $n \geq 0$ (esta é a hipótese de indução). O passo seguinte é provar que a fórmula vale para $n+1$. De fato
$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z\,.\,z^n = z\,.\,|z|^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \\ &= |z|\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\,.\,|z|^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)\,. \end{aligned}$$

Na penúltima igualdade, usamos a hipótese de indução. Para prosseguir, usando que na multiplicação de números complexos multiplicamos os módulos e adicionamos os argumentos, escrevemos
$$z^{n+1} = |z|^{n+1}\left[\cos(n+1)\theta + i \operatorname{sen}(n+1)\theta\right].$$

Isto prova a fórmula (6.2) para $n \geq 0$.

Parte 2: Demonstração de (6.2) para todo inteiro $n < 0$.

Se $n > 0$, então $-n > 0$. Assim, usando a parte 1, encontramos que

$$\begin{aligned} z^{-n} &= |z|^{-n}\left[\cos(-n\theta) + i\,\mathrm{sen}(-n\theta)\right] = \\ &= |z|^{-n}\left(\cos n\theta - i\,\mathrm{sen}\,n\theta\right). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} z^n &= \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{|z|^{-n}\left(\cos n\theta - i\,\mathrm{sen}\,n\theta\right)} = \\ &= |z|^n \frac{1}{(\cos n\theta - i\,\mathrm{sen}\,n\theta)} \cdot \frac{\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta}{(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta)} = \\ &= |z|^n \frac{\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta}{\cos^2 n\theta + \mathrm{sen}^2\,n\theta} = |z|^n\left(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta\right). \end{aligned}$$

Está provada a fórmula de Moivre para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplos:

1. Determine o menor inteiro positivo n de modo que $(-1-i)^n$ seja um número real.

   Solução: Temos que $z = -1 - i$ implica $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ e $z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{4}\pi\right)$. Isto implica $z^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{5}{4}n\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{4}n\pi\right)$.

   Para que z^n seja número real devemos tem $Im(z^n) = 0$. Isto é, $\mathrm{sen}\,\frac{5}{4}n\pi = 0$. Logo, $\frac{5}{4}n\pi = k\pi$, isto é, $n = \frac{4}{5}k$, $k \in \mathbb{Z}$.

   O menor inteiro positivo n ocorre quando $k = 5$ e $n = 4$. Portanto a resposta é $n = 4$.

2. Determine o valor de $cos 3\alpha$ e $\mathrm{sen}\,3\alpha$ em função de, respectivamente, $\mathrm{sen}\,\alpha$ e $\cos\alpha$ utilizando a primeira fórmula de Moivre.

   Solução: Sendo $z = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ então $z^3 = \cos 3\theta + i\,\mathrm{sen}\,3\theta$.

   Como $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ temos que

   $$\begin{aligned} z^3 &= \cos^3\theta + i3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta - i\,\mathrm{sen}^3\,\theta \\ &= \cos 3\theta + i\,\mathrm{sen}\,3\theta. \end{aligned}$$

   Logo

   $$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1 - \cos^2\theta) = \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta. \end{aligned}$$

   Também,

   $$\begin{aligned} \mathrm{sen}\,3\theta &= 3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}^3\,\theta = \\ &= 3(1 - \mathrm{sen}^2\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}^3\,\theta = 3\,\mathrm{sen}\,\theta - 4\,\mathrm{sen}^3\,\theta. \end{aligned}$$

Raízes n-ésimas de números complexos ($2^{\underline{a}}$ fórmula de Moivre)

Já sabemos como lidar com expressões do tipo z^n, onde $n \in \mathbb{Z}$. Queremos ir além. Estamos interessados em dar sentido à expressão $z^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{z}$, onde z é um número complexo não nulo e $k > 0$ é um inteiro positivo. Isto é, queremos extrair raízes k-ésimas de $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$.

Vamos devagar com o andor!

O problema se simplifica se $|z| = 1$. Por que? Ora neste caso

$$z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$$

é um ponto do círculo unitário S^1. Vamos trabalhar com esta hipótese, $|z| = 1$.

Queremos encontrar números complexos w tais que $w = z^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{z}$. Ou seja, queremos resolver a equação

$$w^k = z\,. \tag{6.3}$$

Vamos atrás do w. Ora, a equação (6.3) implica que $|w^k| = |z| = 1$. Ou seja $|w|^k = 1$ e então $|w| = 1$. Isto é, toda solução w de (6.3) é um número complexo de módulo 1. Então podemos escrever

$$w = \cos x + i\operatorname{sen} x\,. \tag{6.4}$$

Devemos então encontrar $x = Arg(w)$ de modo que (6.3) seja verdadeira. Como $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, então

$$w^k = z \Rightarrow (\cos x + i\ senx)^k = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\,.$$

Logo,

$$\cos kx + i\operatorname{sen} kx = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\,.$$

A equação acima diz que os números complexos cujos argumentos são, respectivamente kx e θ, coincidem. Estes números representam o mesmo ponto do círculo S^1. Logo, enquanto argumentos, vale

$$kx = \theta + 2m\pi, \quad \text{para todo } m \in \mathbb{Z}\,. \tag{6.5}$$

Afirmamos que para os valores $m \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$, os ângulos x que verificam (6.5) são distintos para cada $m \in \mathbb{Z}$. Ainda mais para todo

$m < 0$ ou $m > k-1$, o valor de x dada pela equação (6.5) não fornece uma nova solução. Veja porque. Fazendo, $m = 0, 1, 2, \ldots, k-1$, encontramos de (6.5)

$$kx_0 = \theta,\ kx_1 = \theta + 2\pi,\ kx_2 = \theta + 4\pi,\ \ldots\ ,\ kx_{k-1} = \theta + 2(k-1)\pi\,.$$

Ou seja,

$$x_0 = \frac{\theta}{k},\ x_1 = \frac{\theta}{k} + \frac{2\pi}{k},\ x_2 = \frac{\theta}{k} + \frac{4\pi}{k},\ \ldots\ ,\ x_{k-1} = \theta + \frac{2(k-1)}{2}\,\pi \qquad (6.6)$$

A seqüência acima, começa com $\dfrac{\theta}{k}$ e nos seguintes vamos acrescentando a cada vez o ângulo $\dfrac{2\pi}{k}$. É evidente que estes ângulos são todos distintos. Explicando mais, quaisquer dois destes ângulos x_i e x_j não são côngruos.

Por outro lado, considere um ângulo genérico qualquer. Podemos escrever $m = kq + r$, onde $r \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$. Isto é o resultado da divisão euclidiana de m por k. Assim, de (6.5) vem que

$$kx = \theta + 2(4k + r)\pi\,.$$

Logo $x = \dfrac{\theta}{k} + \dfrac{r}{k}\,2\pi + 2q\pi$. Este ângulo é um dos ângulos que aparecem em (6.6). Ou melhor, este ângulo é côngruo a $\dfrac{\theta}{k} + \dfrac{r}{k}\,2\pi,\ r \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ que é um ângulo que aparece em (6.6).

Conclusão, todas as soluções w da equação $w^k = z$, com $|z| = 1$ são $w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}$, onde

$$\begin{aligned}
w_0 &= \left(\cos\frac{\theta}{k} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{k}\right)\\
w_1 &= \left[\cos\left(\frac{\theta}{k} + \frac{2\pi}{k}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{k} + \frac{2\pi}{k}\right)\right]\\
w_2 &= \left[\cos\left(\frac{\theta}{k} + 2\,.\,\frac{2\pi}{k}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{k} + 2\,.\,\frac{2\pi}{k}\right)\right]\\
&\vdots\\
w_{k-1} &= \left[\cos\left(\frac{\theta}{k} + (k-1)\,\frac{2\pi}{k}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{k} + (k-1)\,\frac{2\pi}{k}\right)\right].
\end{aligned}$$

De tudo que foi feito, e passando ao caso geral, podemos concluir o seguinte: Se $z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \neq 0$ é um número complexo e $k > 0$ é um número inteiro, então as soluções w, da equação $w^k = z \Leftrightarrow w = z^{\frac{1}{k}}$ são exatamente:

$$\begin{aligned}
w_0 &= |z|^{\frac{1}{k}}\left(\cos\frac{\theta}{k} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{k}\right)\\
w_1 &= |z|^{\frac{1}{k}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{k} + \frac{2\pi}{k}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{k} + \frac{2\pi}{k}\right)\right]\\
w_2 &= |z|^{\frac{1}{k}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{k} + 2\,.\,\frac{2\pi}{k}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{k} + 2\,.\,\frac{2\pi}{k}\right)\right]\\
&\vdots\\
w_{k-1} &= |z|^{\frac{1}{k}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{k} + (k-1)\,\frac{2\pi}{k}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{k} + (k-1)\,\frac{2\pi}{k}\right)\right].
\end{aligned}$$

que é denominada segunda fórmula de Moivre para raízes k-ésimas.

Exemplo 6.4

Encontre todos os números complexos w, tais que $w^4 = -1$.

Solução: $-1 = (\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi)$ e $w = \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x$. Queremos que

$$(\cos x + i\,\mathrm{sen}\,x)^4 = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi\,.$$

Logo

$$\cos 4x + i\,\mathrm{sen}\,4x = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi\,.$$

Então concluímos que

$$4x = \pi + 2m\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{m}{4}\,.\,2\pi,\ m \in \mathbb{Z}\,.$$

Quantos ângulos diferentes possuímos para x com m variando? Veja a figura 6.3 e os cálculos que apresentamos:

$$m = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{4};\quad m = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4};$$
$$m = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4};\quad m = 3 \Rightarrow x_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4};$$

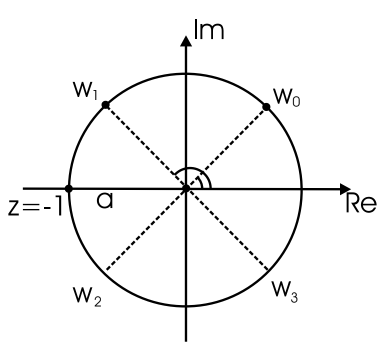


Fig. 6.3

As soluções apontadas fornecem, os números

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\,, \quad w_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\,,$$
$$w_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4} \;\text{ e }\; w_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\,.$$

Exercícios resolvidos

1. Sejam o, z_1 e z_2 as representações gráficas dos complexos $2+3i$ e $-5-i$, respectivamente. Determine a menor representação positiva do ângulo $z_1\hat{o}z_2$.

   Solução: Se $a = Arg(z_1)$ e $b = Arg(z_2)$, então $\text{tg}\,a = \dfrac{3}{2}$ e $\text{tg}\,b = \dfrac{-1}{-5} = \dfrac{1}{5}$. Logo $\text{tg}\,(b-a) = \dfrac{\frac{1}{5}-\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{5}\frac{3}{2}} = -1$ o que implica $b - a = 135°$.

2. Seja $z = x + iy$ um número complexo não nulo onde x e y são reais. Se a e b são números reais tais que $\dfrac{x-iy}{x+iy} = a + ib$, prove que $a^2 + b^2 = 1$.

   Solução: Para resolver este exercício basta achar o módulo na igualdade dada, ou seja,

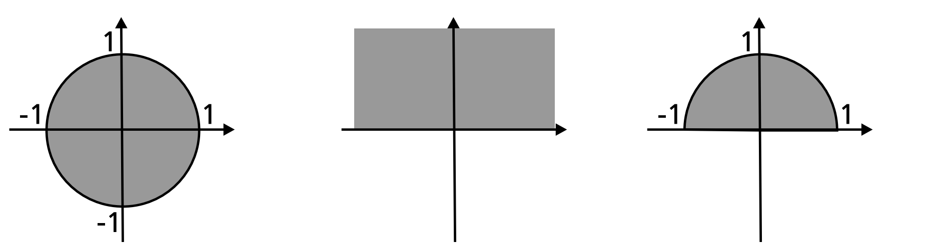
$$\left|\frac{x-iy}{x+iy}\right| = |a+ib| \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+(-y)^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = a^2+b^2 \Rightarrow a^2+b^2 = 1\,.$$

3. Seja $A = \{2e^{i\theta}/0 \leq \theta < 2\pi\}$. Determine o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que representa geometricamente A.

   Solução: Temos que $2e^{i\theta} = 2(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$. Daí temos uma circunferência de centro na origem e raio 2.

4. No plano complexo, represente graficamente o conjunto dos pontos $z = x + iy$ tais que $|z| \leq 1$ e $y \geq 0$.

   Solução: Se $z = (x, y)$, então $|z| \leq 1$ implica que $x^2 + y^2 \leq 1$. A representação gráfica é o interior do círculo de centro na origem e raio 1 e a representação gráfica de $y \geq 0$ são os 1º e 2º quadrantes. Logo o conjunto pedido é um semi-disco no hiperplano superior. Veja a figura abaixo.



$|z| \leq 1$ $\quad$ $y \geq 0$ $\quad$ Interseção dos dois gráficos do exercício 4

5. Calcule $(1+i)^{12}$.

   Solução: Se $z = (1+i) = a + ib = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. Então $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|}$.

   Logo $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ e $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$. Então

$$\begin{aligned} z^{12} &= (1+i)^{12} = (\sqrt{2})^{12}\left(\cos\frac{12\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{12\pi}{4}\right) = \\ &= 2^6(\cos 3\pi + i\operatorname{sen} 3\pi) = 64(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi) \\ &= -64 \end{aligned}$$

Exercícios

1. Determine o módulo do número complexo $(1+3i)^8$.
2. Determine o menor inteiro $n > 0$ de modo que $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)^n$ seja real positivo.
3. Esboce no plano de Argand-Gauss a equação $z\overline{z} - 4 = 0$.
4. Efetua $(1-i)^{20}$.
5. Determine o módulo do número complexo $\dfrac{1}{1 + i\operatorname{tg} x}$ onde $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ e $k \in \mathbb{Z}$.
6. Determine o módulo e o argumento do complexo $z = -8\sqrt{3} - 8i$.
7. Encontre a forma trigonométrica do número complexo $z = \dfrac{(1+i)^2}{1-i}$.
8. Determine o valor de $\left(\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{11}$.
9. Esboce no plano Argand-Gauss a inequação $|z-1| \leq 3,\ z \in \mathbb{C}$.
10. Escreva na forma trigonométrica e exponencial os números complexos:

    (a) $z = 2 + 2i$

    (b) $z = 1 - i$

    (c) $z = \sqrt{3}i - 1$

    (d) $z = -2\sqrt{3} - 2i$

    (e) $z = 3i$

    (f) $z = 4$

11. Calcule o valor da expressão $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{50}$.

12. Sendo $z = e^{\pi i}$ e $w = e^{\frac{3}{4}\pi\, i}$, calcule:

    (a) zw

    (b) $\dfrac{z}{w}$

    (c) z^3

    (d) w^6

13. Dê a representação geométrica no plano Argand-Gauss do conjunto $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 3\}$.

14. Determine as raízes quartas do número complexo $33\,i$.

15. Calcule no conjunto dos números complexos $\sqrt[4]{16}$.

16. Resolva no conjunto dos números complexos a equação

    (a) $x^4 + 4 = 0$

    (b) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

17. Calcule no conjunto dos números complexos $\sqrt[6]{1}$.

18. Determine a área do quadrilátero formado pelas raízes da equação $x^4 - x^2 - 2 = 0$.

Respostas de alguns exercícios selecionados

Aula 1

1. $\operatorname{tg} x$
3. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$
4. $\dfrac{\pi}{3}$
5. $\dfrac{\pi}{2}$

Aula 2

1. 210^0
5. 60^0
6. $-\dfrac{1}{2}$

Aula 3

1. $\sqrt{3}$
2. $\dfrac{7\pi}{8}+2m\pi\,,\ m\in\mathbb{Z}$
3. 0
4. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
5. $\dfrac{16}{65}$
6. $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$
7. $\dfrac{\pi}{2}$
8. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ISBN 85-7648-062-X
9788576480624

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense

Universidade do Estado do Rio de Janeiro UERJ

Universidade Federal Fluminense
uff

Universidade do Brasil

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

UNIRIO

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

Ministério da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL