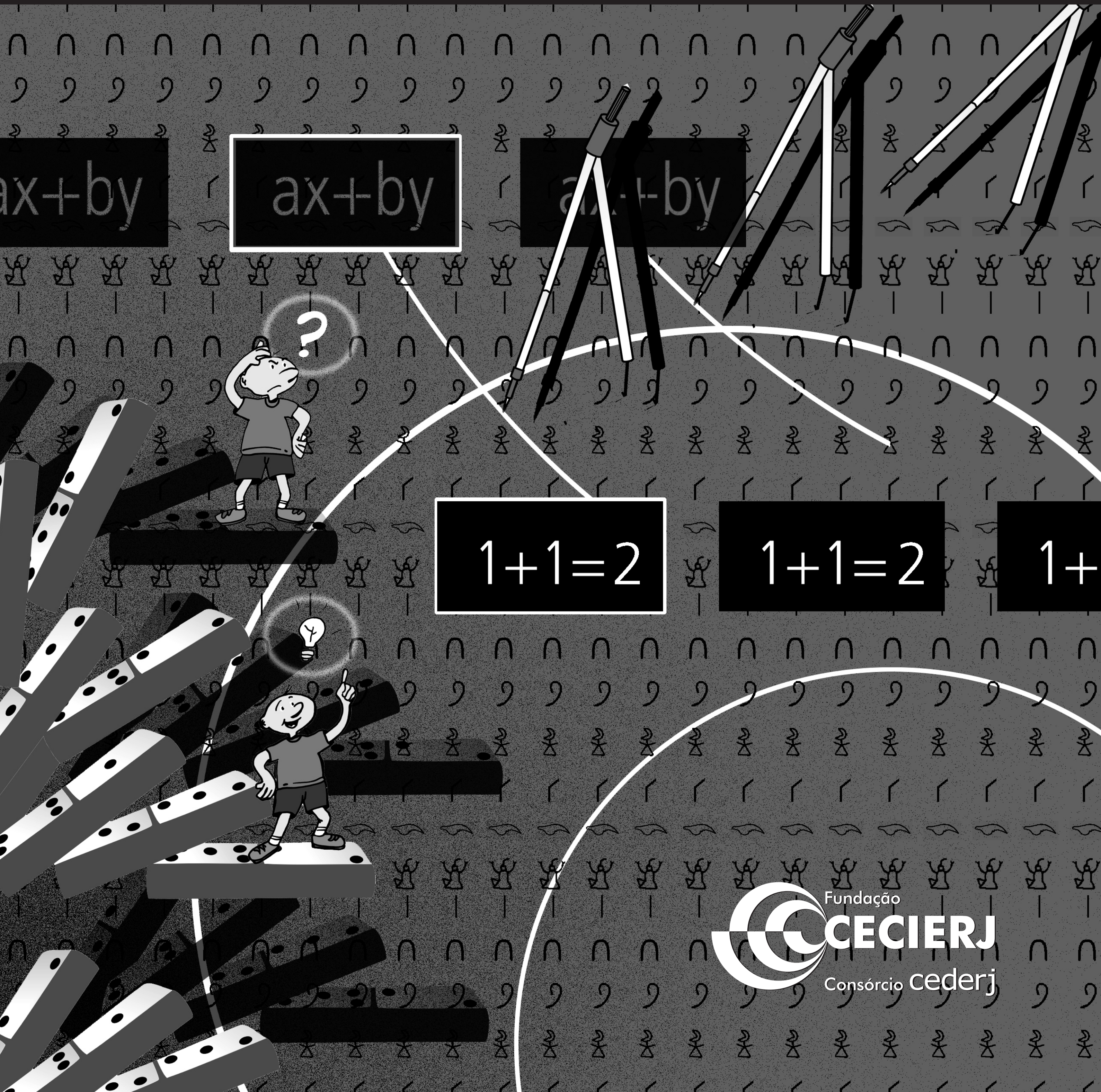
Ana Lúcia Vaz da Silva
Andreia Carvalho Maciel Barbosa
Marcelo Almeida Bairral
Rosana de Oliveira

Volume | 3

Instrumentação do Ensino da Aritmética e da Álgebra



Fundação
CECIERJ

Consórcio cederj

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Volume 3

Ana Lúcia Vaz da Silva
Andreia Carvalho Maciel Barbosa
Marcelo Almeida Bairral
Rosana de Oliveira

GOVERNO DO
Rio de Janeiro

SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2299-4565 Fax: (21) 2568-0725

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Ana Lúcia Vaz da Silva
Andreia Carvalho Maciel Barbosa
Marcelo Almeida Bairral
Rosana de Oliveira

EDITORA
Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Jane Castellani

COORDENAÇÃO DE DESIGN INSTRUCIONAL
Cristine Costa Barreto

COORDENAÇÃO DE REVISÃO
Maria Angélica Alves

DESIGN INSTRUCIONAL E REVISÃO
Anna Carolina da Matta Machado
Anna Maria Osborne
Luciana Messeder
José Meyohas

COPIDESQUE
José Meyohas
Nilce Rangel Del Rio

REVISÃO TIPOGRÁFICA
Cristina Freixinho
Elaine Bayma
Patrícia Paula
Luciana Nogueira Duarte

COORDENAÇÃO GRÁFICA
Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Alexandre d´Oliveira
Bruno Gomes
Katy Araújo

ILUSTRAÇÃO
Fabiana Rocha

CAPA
Eduardo Bordoni

PRODUÇÃO GRÁFICA
Ana Paula Trece Pires
Andréa Dias Fiães

2005/1

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governadora
Rosinha Garotinho

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação
Wanderley de Souza

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
Reitor: Raimundo Braz Filho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Nival Nunes de Almeida

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Cícero Mauro Fialho Rodrigues

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: José Antônio de Souza Veiga

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

Instrumentação do Ensino de Aritmética e Álgebra

Volume 3

SUMÁRIO

AULA 21

Jogos com expressões

Meta da aula

Instrumentalizar o ensino de expressões algébricas.

objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Diferenciar uma expressão de uma equação.
- Relacionar o conceito de área com expressões algébricas.
- Aplicar jogos no ensino de expressões algébricas.

Pré-requisitos

Para acompanhar esta aula, você deverá saber representar através de expressão algébrica a área lateral de sólidos geométricos e efetuar operações entre expressões algébricas. Volte à Aula 16 e reveja alguns desses aspectos.

INTRODUÇÃO

Um dos conteúdos considerados mais áridos e sem significado para os alunos são as expressões algébricas (polinômios) e as operações feitas com essas expressões. Este tópico normalmente aparece na 7ª série (4º ciclo) do Ensino Fundamental.

Dentre os objetivos desse ciclo, o PCN de Matemática diz que para o desenvolvimento do pensamento algébrico é importante que o aluno observe regularidades e estabeleça a relação de dependência entre as variáveis envolvidas:

> Desse modo, o ensino de álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significado à linguagem e às idéias matemáticas. Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poder reconhecer diferentes funções de álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas) (BRASIL. MEC. PCN, 1998, p.84).

No ensino das expressões, é muito importante que os alunos compreendam a noção de variável, por meio da escrita de fórmulas, e apreendam as regras de "sintaxe" para operar as mesmas. É importante também que o aluno estabeleça as conexões entre expressões e equações e as diferencie. Uma das maneiras de desenvolver o pensamento algébrico é por intermédio de jogos, como você verá nesta aula.

!

Alguns dos jogos aqui propostos foram inspirados em material de aula, não publicado, do Dr. Joaquim Giménez, ilustre educador matemático, colaborador de vários trabalhos realizados na área de Educação Matemática aqui no Brasil.

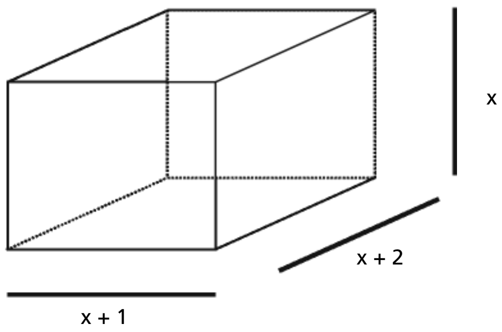
DOMINÓ DE EXPRESSÕES

Uma das maneiras de atribuir significado para as expressões algébricas é relacioná-las com conceitos geométricos. O objetivo desse dominó é associar expressões algébricas correspondentes à superfície total de figuras desenhadas. O material é composto por peças de dominó que contêm de um lado desenhos de figuras geométricas planas ou espaciais e do outro lado expressões algébricas que correspondem às respectivas áreas dessas figuras.

Antes de apresentarmos o jogo, veja um exemplo e faça uma atividade.

Observe a figura espacial a seguir, com suas dimensões indicadas, e determine a área total dessa superfície.

Trata-se de um paralelepípedo reto retângulo (ou bloco retangular) de dimensões x, x + 1 e x + 2.



Este sólido geométrico possui seis faces, todas retangulares. Nele, duas a duas possuem a mesma área. Vamos identificá-las:

• a da frente e a de trás, que são retângulos de dimensões x+1 e x e cujas áreas medem x (x+1);

• as laterais, que são retângulos de dimensões x+2 e x e, portanto, suas áreas medem x(x+2);

• as de baixo e de cima, de dimensões x+1 e x+2, cujas áreas medem (x+1) (x+2).

A área total da superfície desse bloco retangular é representada pela expressão 2x(x+1) + 2x(x+2) + 2(x+1)(x+2).Tal expressão pode ser representada com outra escrita se efetuarmos todas as operações indicadas. Temos, então, que:

$2x(x + 1) = 2x^2 + 2x$

$2x(x + 2) = 2x^2 + 4x$

$(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2.$

Somando essas áreas, temos $2x^2 + 2x + 2x^2 + 4x + x^2 + 3x + 2 = 5x^2 + 9x + 2$. Portanto, a área total desse sólido pode ser mais bem expressa por $5x^2 + 9x + 2$. Isso tudo pode ser representado pela equação $S = 5x^2 + 9x + 2$.

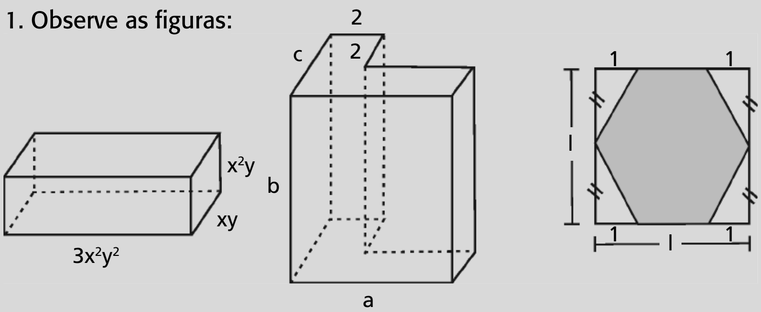
Atenção para o seguinte fato:

$5x^2 + 9x + 2$ é uma expressão que envolve apenas uma variável (x);

$A = 5x^2 + 9x + 2$ é uma equação que envolve duas variáveis (A e x).

ATIVIDADE

1. Observe as figuras:



a. Escreva suas áreas (área total dos dois sólidos e área do hexágono hachurado) em função das variáveis envolvidas em suas dimensões.

____

____

____

b. Em cada caso, quais os valores reais que as variáveis podem assumir?

____

____

____

TRABALHANDO COM O DOMINÓ

Voltando ao dominó, as sete figuras geométricas que aparecem são as seguintes:

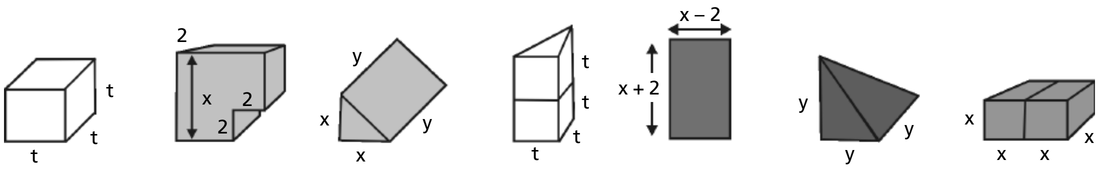
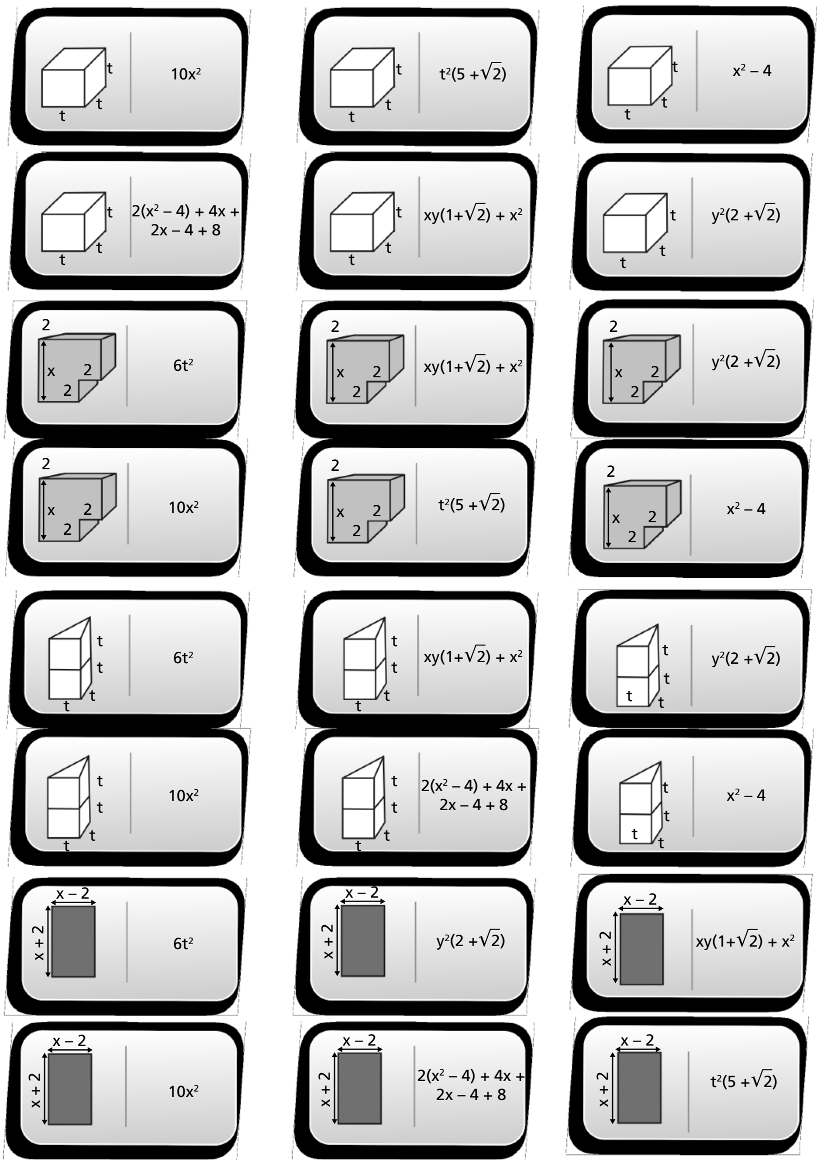


Figura 21.1: Formas e expressões que compõem o dominó.

> **!** As formas envolvidas no dominó buscam explorar em conjunto a geometria plana e espacial.

Ser for um jogo individual, as peças devem ser recortadas e colocadas todas viradas para baixo, o jogador deve virá-las e procurar formar uma "serpente" de dominó. No caso de ser jogado em grupo, use as regras usuais do dominó ou crie outras coletivamente. Veja as peças do dominó.



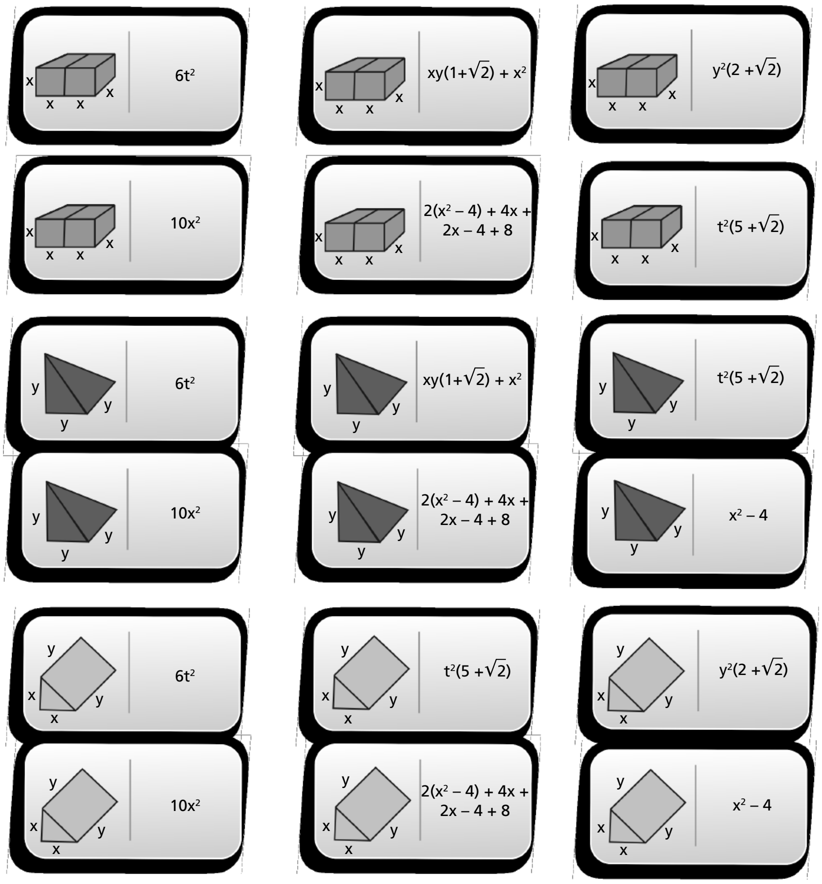


Figura 21.2: As peças do dominó.

ATIVIDADE

2. Recorte do Módulo Prático o jogo do dominó. Depois jogue, sozinho, procurando formar uma serpente com todas as peças, ou com outros colegas, estabelecendo as regras. Registre as estratégias que você utilizou.

IDENTIFICAÇÃO DE OPERAÇÕES COM EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Esse jogo tem por objetivo levar os alunos a efetuarem adições, subtrações e multiplicações de expressões algébricas identificando os resultados.

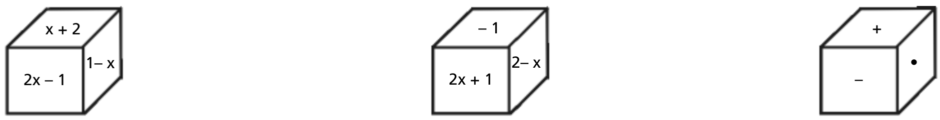
Antes de começar o jogo, deve-se construir dois dados com expressões algébricas e outro dado com operações de adição, subtração e multiplicação. Cada um desses símbolos se repete em duas faces. Por isso, você deverá ter uma cartela com expressões algébricas escritas, onde o jogador identificará os resultados. Tenha em mãos fichas, grãos ou tampas de garrafa, de cores diferentes para cada jogador.

Como jogar? Vamos lá!! Acompanhe passo a passo:

- O primeiro a jogar atira os 3 dados e efetua a operação correspondente.
- O jogador busca o resultado no tabuleiro e, se encontrá-lo, coloca uma de suas fichas na casa correspondente. Os demais jogadores conferem se ele está certo.
- Esse procedimento se repete para cada novo jogador.
- Se alguém colocar a ficha na casa errada, deverá devolver uma de suas fichas e colocá-la no monte como prenda.
- Não se pode colocar uma ficha em um lugar já ocupado.
- Se alguém conseguir quatro fichas consecutivas alinhadas, ganha o jogo.
- Se ninguém conseguir, ganha quem colocar mais fichas.

> **!**
>
> O jogo pode começar apenas com adição e subtração. Neste caso, observe que sobrará resposta no tabuleiro.
> Poderíamos também jogar sem usar os dados das operações, combinando entre os jogadores a operação conveniente.

Conheça aqui o material do jogo que você encontrará em tamanho maior no Módulo Prático para ser recortado e utilizado.



$x + 2$	$-2x + 3$	$-2x$	$-3x$	$-2x -2$	$-3x + 1$	$-x + 4$	$-4x + 2$
$4x + 1$	$3x - 1$	$2x + 2$	$5x + 1$	$4x + 3$	$5x$	$-2x + 3$	$x + 3$
$2x - 1$	$3x + 1$	$x - 1$	$2x - 3$	x	$4x - 2$	$-x - 2$	$x + 5$
$2x + 1$	-1	$2 - x$	$2x + 3$	$3x$	2	-3	$4 - x$
1	$x + 1$	$-1 - x$	3	$-x$	$2x$	$-x- 3$	$-2x + 1$
$2x - 2$	$-x + 1$	$3x + 3$	$2x + 5$	$3x + 2$	4	$-3x -1$	$-x -1$
$x - 2$	-2	$4x$	$4x - 1$	$3x - 3$	$x - 4$	$-3x + 3$	$2 - 2x$
$4x + 2$	$2x + 6$	$-2x + 4$	$2x^2$	$3x^2 + 3x$	$x^2 + x + 2$	$2x^2 + x - 1$	$4x + 2$
$-2x^2 + x + 1$	$3x^2 + 9x$	$x^2 + 3x$	$x^2 + 5x + 6$	$2x^2 + 5x - 3$	$-x^2 - 2x + 3$	$6x^2$	$-3x^2 + 6x$
$2x^2$	$-x^2 + 4x$	$-2x^2 + 4x$	$4x^2 - 2x$	$-2x^2 + 5x +4$	$2x^2 + 2x$	$-x^2 + 2x$	$x^2 - 3x + 2$

Figura 21.3: Peças do tabuleiro de expressões.

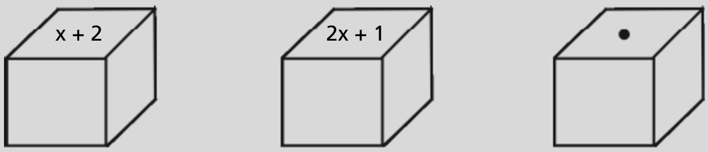
Para você se preparar para o jogo, sugerimos que você faça as atividades a seguir, pois elas envolvem operações entre polinômios.

ATIVIDADES

3. Sejam:
$A = 3x - 5$
$B = -x$
$C = x^2 + 4x.$

Encontre o valor de:
a. $A.B - C =$ ____________________
b. $A - C =$ ____________________
c. $A + B.C =$ ____________________

4. Ao jogar os três dados, as faces viradas para cima nos três dados foram:



Qual o resultado encontrado para ser marcado no tabuleiro?
____

5. Complete o quadro seguinte com as jogadas entre Daniele e Gláucia.

	Dado 1	**Dado 2**	**Dado 3**	**Resultado**
Daniele	$1 - x$	$3x$	$+$	
Gláucia	$2x - 1$	$2x + 1$	$-$	
Daniele		x		$x^2 + 3x$
Gláucia	$3x$			$3x^2 + 3x$

6. As faces sorteadas foram $-3x$ e $2 - x$ e "–". A resposta é única, independente da ordem que a operação seja feita? Justifique sua resposta.
____
____
____
____
____

Relacionando expressões algébricas com área de quadrados e retângulos.

Mais uma vez, atribuiremos significado para expressões algébricas utilizando o conceito de área das figuras planas, nesse caso, quadrado e retângulo.

Construa as figuras que se seguem, de acordo com as medidas a seguir. No trabalho com os alunos, cada um deverá ter o número de figuras apontado na ilustração. Em seguida, divida a turma em grupos de três ou quatro alunos e inicie a "brincadeira".

Os modelos desses quadrados estão no Módulo Prático, onde as dimensões estão em centímetros.

4 quadrados 8 x 8 | 8 retângulos 8 x 2 | 10 quadrados 2 x 2

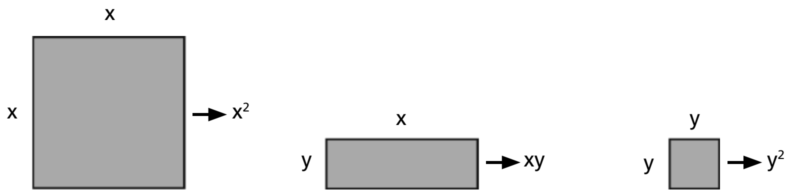
> **!**
>
> Observe que os lados do quadrado maior e do quadrado menor correspondem às dimensões do retângulo.

Em um primeiro momento, o aluno deve ter contato com o material, medir as dimensões das figuras, encontrar o valor numérico das áreas.

$8 \times 8 = 8^2 = 64$ | $8 \times 2 = 16$ | $2 \times 2 = 2^2 = 4$

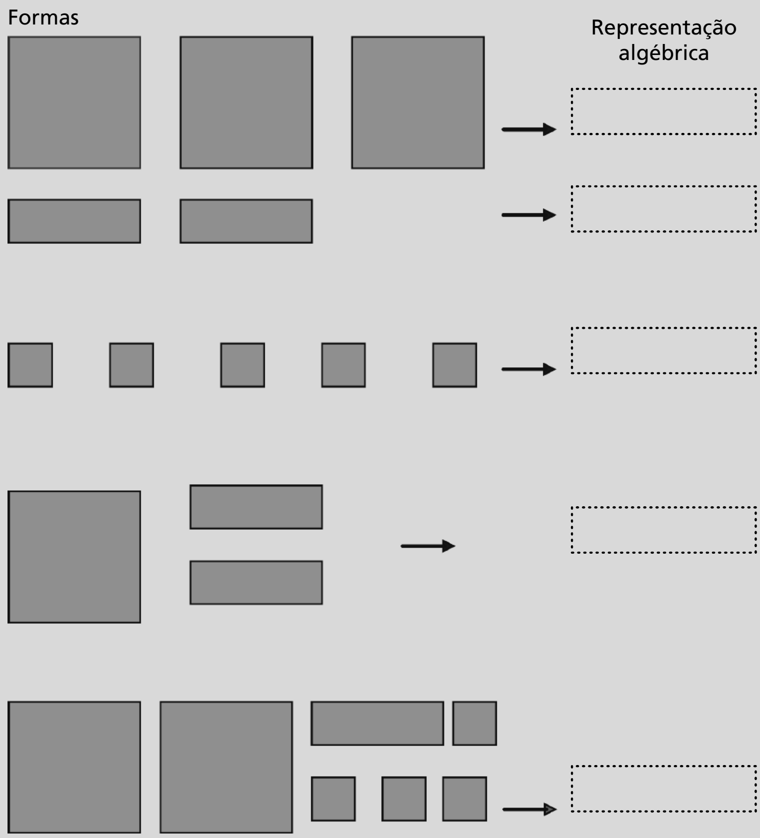
É importante expressar a área dos quadrados em forma de potência, ou seja, l^2, pois utilizaremos para o trabalho com polinômios a expressão algébrica que representa as áreas das figuras.

Considere o lado do maior quadrado como x, o lado do menor quadrado como y e as dimensões do retângulo como x e y. Nesse caso, podemos expressar a área de cada uma das figuras da seguinte forma.



ATIVIDADES

7. Expresse com uma expressão algébrica, as seguintes situações:



COMENTÁRIO

Nesse caso, são distribuídas algumas peças para que o aluno as represente através de uma expressão algébrica (codificação).

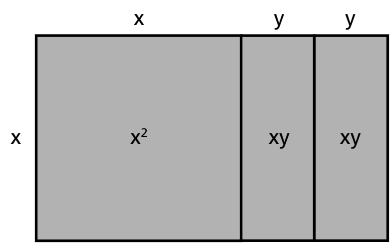
8. Represente com o material os seguintes polinômios.
a. $x^2 + 2xy$
b. $3x^2 + y^2$
c. $3xy + 4y^2$
d. $x^2 + xy + y^2$

COMENTÁRIO

Nesse caso, são dadas algumas expressões algébricas para que o aluno apresente as figuras (decodificação).

MULTIPLICAÇÃO DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

A seguir, vamos explorar esse material para atribuir significado à multiplicação de expressões algébricas



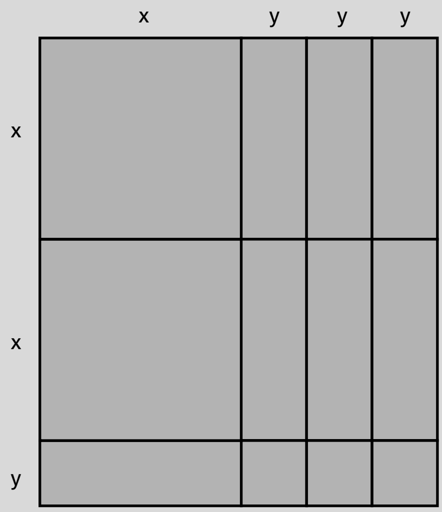
Lados do retângulo x e (x + 2y).

Calculamos a área multiplicando as duas dimensões, ou seja, $x \cdot (x + 2y)$. Observando a figura ao lado, podemos escrever a área total como a soma da área do quadrado (x^2), utilizando a soma das áreas dos dois retângulos (2xy).

$$\boxed{x \cdot (x + 2y) = x^2 + 2xy}$$

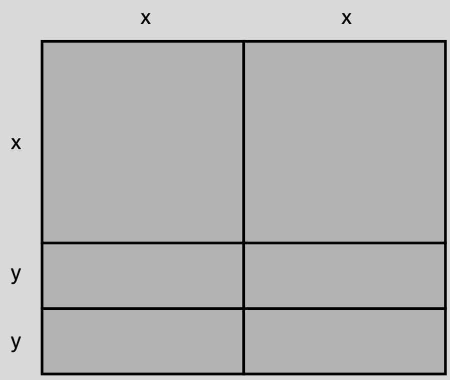
ATIVIDADES

9. Observando as figuras a seguir, expresse a área dessas figuras através da igualdade de duas expressões algébricas.



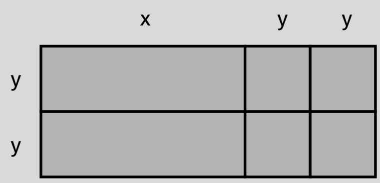
dimensões do retângulo

área do retângulo



dimensões do retângulo

área do retângulo



dimensões do retângulo

área do retângulo

COMENTÁRIO

Após identificar as igualdades, multiplique as dimensões do retângulo utilizando os procedimentos algébricos e verifique se as respostas são iguais.

10. Agora você deve fazer o processo inverso, ou seja, são dadas as igualdades entre duas expressões e você deverá montar o retângulo correspondente.
a. $y \cdot (x + 3y) = xy + 3y^2$.
b. $(x + y) \cdot x = x^2 + xy$.

COMENTÁRIO

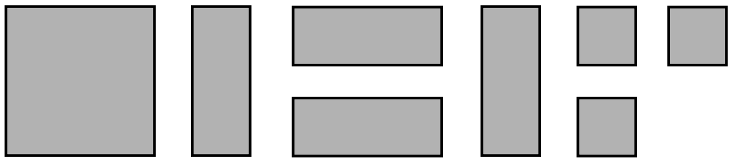
Um bom caminho é começar escolhendo as peças pelas áreas e então formar o retângulo que possua as dimensões dadas.

Com esse tipo de situação também podemos trabalhar a divisão de duas expressões algébricas. Mas apenas as divisões exatas. Nesse caso, usaremos o fato de que a multiplicação e divisão são operações inversas.

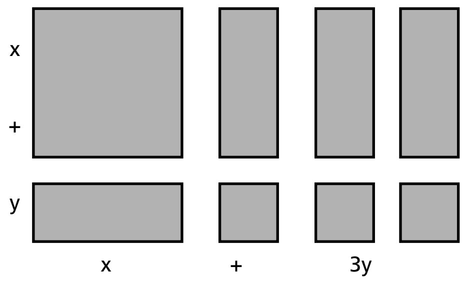
A divisão a ser feita é:

$(\mathbf{x^2 + 4xy + 3y^2}) : (\mathbf{x + y})$

Devemos começar separando as peças que representam o dividendo.



O próximo passo é tentar construir um retângulo em que um dos lados seja o divisor, no nosso caso, $(x + y)$. Você pode observar este processo na figura a seguir.



Ao ver o retângulo construído, irá observar que o outro lado do retângulo corresponde ao quociente da divisão. Nesse caso, $(x + 3y)$.

Visto de uma outra forma, você deve identificar que:
$(x + y) \,.\, (x + 3y) = x^2 + 4xy + 3y^2$.

Considerando a multiplicação e divisão operações inversas, temos:
$(x^2 + 4xy + 3y^2) : (x + y) = x + 3y$.

ATIVIDADE

11. Agora, você é o professor. Crie duas atividades em que o material seja usado para trabalhar com a divisão de expressões algébricas.

ATIVIDADE FINAL

Agora você vai idealizar e confeccionar um dominó para trabalhar a forma fatorada de uma expressão algébrica. Veja um exemplo de peça:

$x^2 - 4$	$(x + 1)(x - 3)$

O modelo do dominó deve ter de um lado uma expressão algébrica reduzida e do outro uma na forma fatorada.

Ao idealizar seu jogo, você deve orientar-se por essas perguntas.

a. Quantas peças têm seu dominó?

b. Quantas expressões algébricas estão envolvidas em seu dominó?

c. Considerando uma expressão algébrica reduzida **A** de seu dominó, quantas peças possuem expressões fatoradas que se encaixam na expressão **A**? Esse número é o mesmo para todas as expressões de seu jogo?

d. Depois de confeccioná-lo, convide um colega, ou mesmo alguém que esteja no 3º ciclo (7ª e 8ª séries), para jogar com você. Essa é a melhor forma de testar esse jogo.

CONCLUSÃO

O ensino da álgebra provoca por vezes ansiedade no professor. Todas as “regras” de operações com expressões algébricas são consideradas importantes e, por vezes, o aluno não compreende os processos. Para incorporar essa perspectiva abstrata do ensino da Matemática, o professor deve lançar mão de muitos recursos, dentre os quais os jogos com expressões.

RESUMO

Mais uma vez, fica evidente a relação entre Álgebra e Geometria. Para trabalhar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de expressões algébricas, utilizamos os conceitos de perímetro e área de figura plana. Ao identificarmos expressões que expressam a área lateral de sólido, estamos estimulando mais uma vez a visualização. Um outro aspecto relevante diz respeito às equivalências algébricas. Uma mesma situação pode ser expressa por diferentes expressões algébricas equivalentes, e a cada uma atribuímos um significado diferente.

AUTO-AVALIAÇÃO

Você confeccionou todos os jogos? Investiu algum tempo em jogá-los? Caso sua resposta seja não, você deve voltar e rever a aula seguindo as indicações solicitadas. É importante que você vivencie as situações para poder identificar aspectos positivos e negativos no uso de cada um dos materiais.

INFORMAÇÃO PARA A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você fará um mergulho nos conceitos da Matemática Discreta. Os processos de contagem são habilidades essenciais que devem ser desenvolvidas com os alunos nos diferentes níveis de ensino.

RESPOSTAS

Atividade 1

a. $A_1 = 6x^4y^3 + 6x^3y^4 + 2x^3y^3$, $A_2 = 2bc + 2a(c – 2) +2ab$ e $A_3 = l^2 – 2l$.

b. $x > 0$ e $y > 0$; $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$; $l > 2$.

Atividade 3

a. $-4x^2 + x$.

b. $-x^2 - x - 5$.

c. $-x^3 + 4x^2 + 3x - 5$.

Atividade 4

$(x + 2)(2x + 1) = 2x^2 + 5x + 1$.

Atividade 5

Complete o quadro seguinte com as jogadas entre Daniele e Gláucia.

	Dado 1	**Dado 2**	**Dado 3**	**Resultado**
Daniele	$1 – x$	$3x$	+	$2x+1$
Gláucia	$2x – 1$	$2x + 1$	–	-2
Daniele	x	$x + 3$	.	$x^2 + 3x$
Gláucia	$3x$	$x + 2$	.	$3x^2 + 3x$

Atividade 6

Não, pois a subtração não é comutativa.

Atividade 7

$3x^2$.

$2xy$.

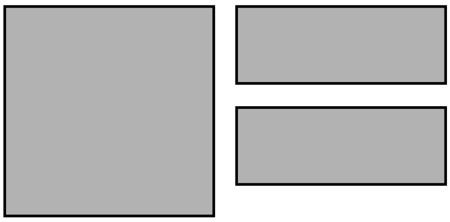
$5y^2$.

$x^2 + 2xy$.

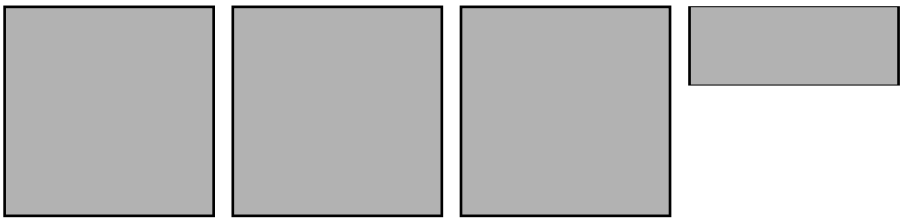
$x^2 + xy + 4y^2$.

Atividade 8

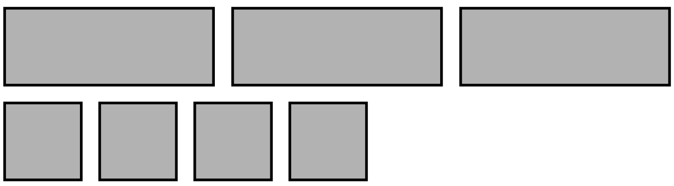
a.



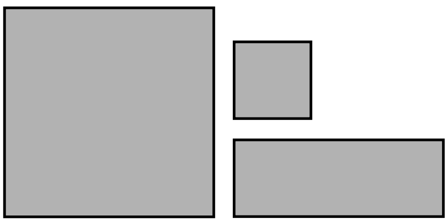
b.



c.



d.



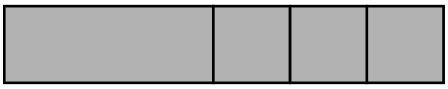
Atividade 9

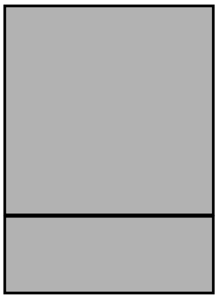
$(2x + y) . (x + 3y) = 2x^2 + 7xy + 3y^2$.

$(x + 2y) . 2x = 2x^2 + 4xy$.

$2y . (x + 2y) = 2xy + 4y^2$.

Atividade 10

a. 

b. 

ATIVIDADE FINAL

Temos um exemplo de dominó que pode ser formado com as regras dadas.

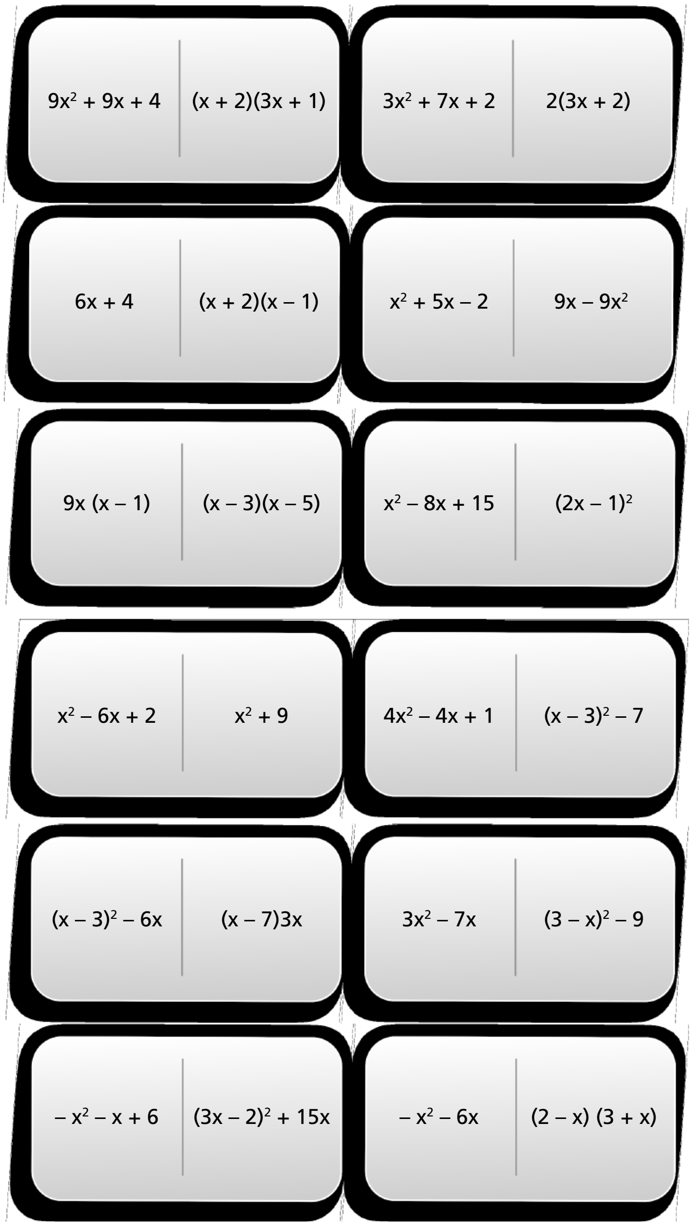


Figura 21.4: Dominó de expressões algébricas e fatoração.

a. Esse dominó tem 12 peças

b. 6 expressões apresentadas com duas escritas diferentes

c. Uma única. Sim, é o mesmo.

AULA 22

Vamos contar

Meta da aula

Instrumentalizar o ensino de análise combinatória.

objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Discutir sobre abordagens da análise combinatória.
- Relacionar situações-problema aos problemas de contagem.
- Diferenciar problemas de contagem.

Pré-requisitos

Para o desenvolvimento desta aula, é necessário que você saiba o princípio multiplicativo. É interessante também que você tenha em mãos os Módulos 1 e 2 da disciplina de Matemática Discreta.

INTRODUÇÃO

Nesta aula, vamos discutir alguns aspectos do ensino de análise combinatória e a relação desse temas com situações contextualizadas na Matemática e em situações-problema bastante utilizadas no Ensino Básico.

> **!**
>
> Lembre-se de acessar a disciplina na Plataforma Cederj. Lá, você encontrará diferentes animações e recursos que auxiliarão sua aprendizagem na aula.

O trabalho de raciocínio lógico e abstrato, assim como o de interpretação de texto e sistematização de problemas, é muito importante no ensino de Matemática. A proposta do estudo de análise combinatória será feita com base na metodologia de resolução de problemas. No estudo de análise combinatória, em uma abordagem tradicional, enuncia-se o Princípio Fundamental da Contagem, em que o professor aplica esse princípio com alguns exemplos e segue com um rol de exercícios. Dando continuidade, define-se arranjo, combinação, permutação e resolvem-se problemas por fórmulas. Acontece que os problemas que envolvem esse conteúdo nem sempre são aplicações diretas de fórmula ou precisa-se usar mais de uma fórmula. O resultado disso é que o aluno não consegue resolver os problemas.

O PCN indica que o problema é o ponto de partida para o conhecimento. Assim, antes de falar no Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou Princípio Multiplicativo, o professor deve sugerir problemas e deixar que seus alunos resolvam de uma forma mais livre. Dessa forma, surgirão diferentes estratégias e aí, sim, o professor deve atuar como um mediador, colocando em discussão as soluções apresentadas que surgiram e discutindo com os alunos qual é a que leva à solução do problema, qual é a que envolve menos tempo. É preciso ficar atento para o fato de que o bom encaminhamento de um problema é aquele que leva o aluno à resolução final desse problema.

Feita essa etapa, o professor inicia a sistematização das estratégias adotadas, enunciando então o Princípio Fundamental da Contagem.

> **!**
>
> Caso queira ler mais sobre o Ensino de Matemática no Ensino Médio, visite a página do MEC http://www.mec.gov.br. Lá você encontra as bases legais e todos os volumes do PCN e do PCN+.
>
> Especificamente, você encontra o PCN+ de Ciências da Natureza no endereço http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf

FALANDO SOBRE ESTRATÉGIAS E DIFICULDADES DE PROBLEMAS DE CONTAGEM

Nos problemas que envolvem contagem, é sempre bom nos colocarmos no papel do sujeito que vai fazer a ação pedida no problema e, a partir daí, ver quais são as escolhas possíveis e as decisões que podem ser tomadas.

Essas decisões devem ser escolhidas ou transformadas em decisões mais simples. Uma dica importante é que não se deve adiar as dúvidas surgidas durante o processo de resolução, pois elas podem se tornar grandes dificuldades.

Veja alguns exemplos sobre o que acabamos de dizer.

Exemplo 1: Com 4 homens e 4 mulheres, de quantas maneiras podemos formar um casal?

Resolução:

A ação é formar casais, então devemos nos colocar nessa posição, que é de formar os casais. Para isso, tomamos as seguintes decisões: escolha do homem e escolha da mulher, que são decisões mais simples.

Escolhas possíveis de homens: 4

Escolhas possíveis de mulheres: 4

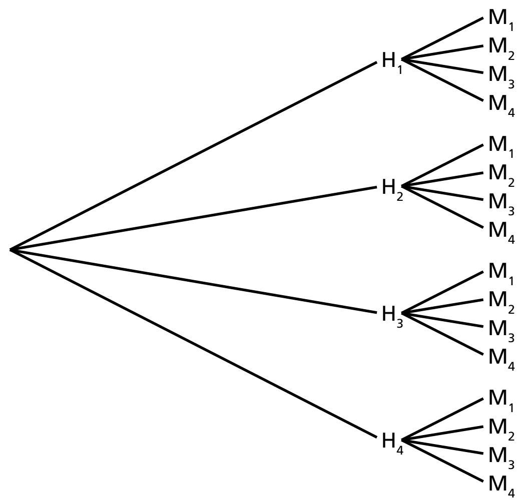
Como para cada homem podemos escolher 4 mulheres, e temos 4 homens, o total de casais que podem ser escolhidos são 4x4 = 16.

Podemos pensar nesse problema por meio de uma tabela.

Vamos chamar os homens de H_1, H_2, H_3 e H_4 e as mulheres de M_1, M_2, M_3 e M_4.

	H_1	H_2	H_3	H_4
M_1	H_1M_1	H_2M_1	H_3M_1	H_4M_1
M_2	H_1M_2	H_2M_2	H_3M_2	H_4M_2
M_3	H_1M_3	H_2M_3	H_3M_3	H_4M_3
M_4	H_1M_4	H_2M_4	H_3M_4	H_4M_4

Isso nos dá uma outra maneira de encontrar a solução do problema que pode ser explorada desde as 5ª e 6ª séries. Outra estratégia de resolução que também pode ser realizada a partir do 3º ciclo é por meio da árvore de possibilidades. Veja:



!

Apesar de não ser o caminho mais curto, a árvore de possibilidades e o uso de tabelas explicita as possibilidades e ajuda a concretizar o princípio multiplicativo. É importante que o professor explore o problema de várias maneiras e faça o paralelo da árvore com o princípio multiplicativo.

Na maioria dos processos de contagem, precisamos do princípio multiplicativo. Você lembra o que ele nos diz?

!

O princípio multiplicativo, na disciplina de Matemática Discreta, nos diz:
"*Suponha que existam N_1 maneiras de se realizar uma tarefa T_1 e N_2 maneiras de realizar uma tarefa T_2. Então há $N_1 x N_2$ maneiras de realizar a tarefa T_1 seguida da tarefa T_2.*" (*Matemática discreta*, p.57)
E de forma generalizada temos:
"*Se uma tarefa T_1 pode ser feita de N_1 maneiras, uma tarefa T_2 de N_2 maneiras, ..., uma tarefa Tk de Nk maneiras, então o número de maneiras de realizar T_1, T_2, ..., Tk,em seqüência, é $N_1 x N_2 x ... x N_k$.*" (*Matemática discreta*, p. 57)

Vamos agora a outro exemplo.

Exemplo 2: Com 4 homens e 4 mulheres, de quantas maneiras podemos formar uma dupla?

Resolução:

Observe que o nível de dificuldade aumentou, pois duplas podem ser formadas com um homem e uma mulher, com dois homens ou com duas mulheres.

Aproveitando o exemplo 1, vamos dividir o problema em etapas mais simples, já que sabemos que são 16 duplas com um homem e uma mulher. Falta contar quantas são as duplas formadas apenas por homens e quantas duplas são formadas apenas de mulheres. Como o número de homens é igual ao número de mulheres, basta resolver uma contagem dessas, pois a outra dará o mesmo resultado.

Para formarmos duplas de homens, precisamos fazer a escolha de um homem e depois de outro homem. Sejam eles H_1, H_2, H_3 e H_4. Temos as duplas:

H_1H_2, H_1H_3, H_1H_4, H_2H_3, H_2H_4 e H_3H_4, que somam um total de seis.

Fechando o problema, encontramos 28 duplas, veja:

Casais: 16.

Duplas apenas de homens: 6.

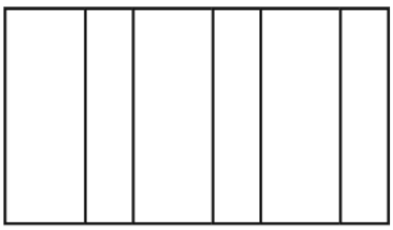
Duplas apenas de mulheres: 6.

Total de duplas: $16 + 6 + 6 = 28$.

Foi preciso dividir o problema em duas etapas, cálculo de casais e cálculo de duplas do mesmo sexo. Será que temos uma forma de resolver este problema sem dividir em etapas? Por que na contagem das duplas formadas só por homens não procedemos como na das mulheres, por meio de uma multiplicação, isto é, para cada um dos quatro homens, temos outros três homens, portanto, temos $4\text{x}3 = 12$ duplas de homens?

Pense neste fato e mais adiante voltaremos a conversar sobre isso.

Exemplo 3: Uma bandeira é formada por seis listras (veja a ilustração) que devem ser coloridas usando apenas as cores amarelo, azul e vermelho. Sabendo que cada listra deve ser colorida com uma única cor e que listras vizinhas não podem ter a mesma cor, de quantas maneiras se pode colorir esta bandeira?



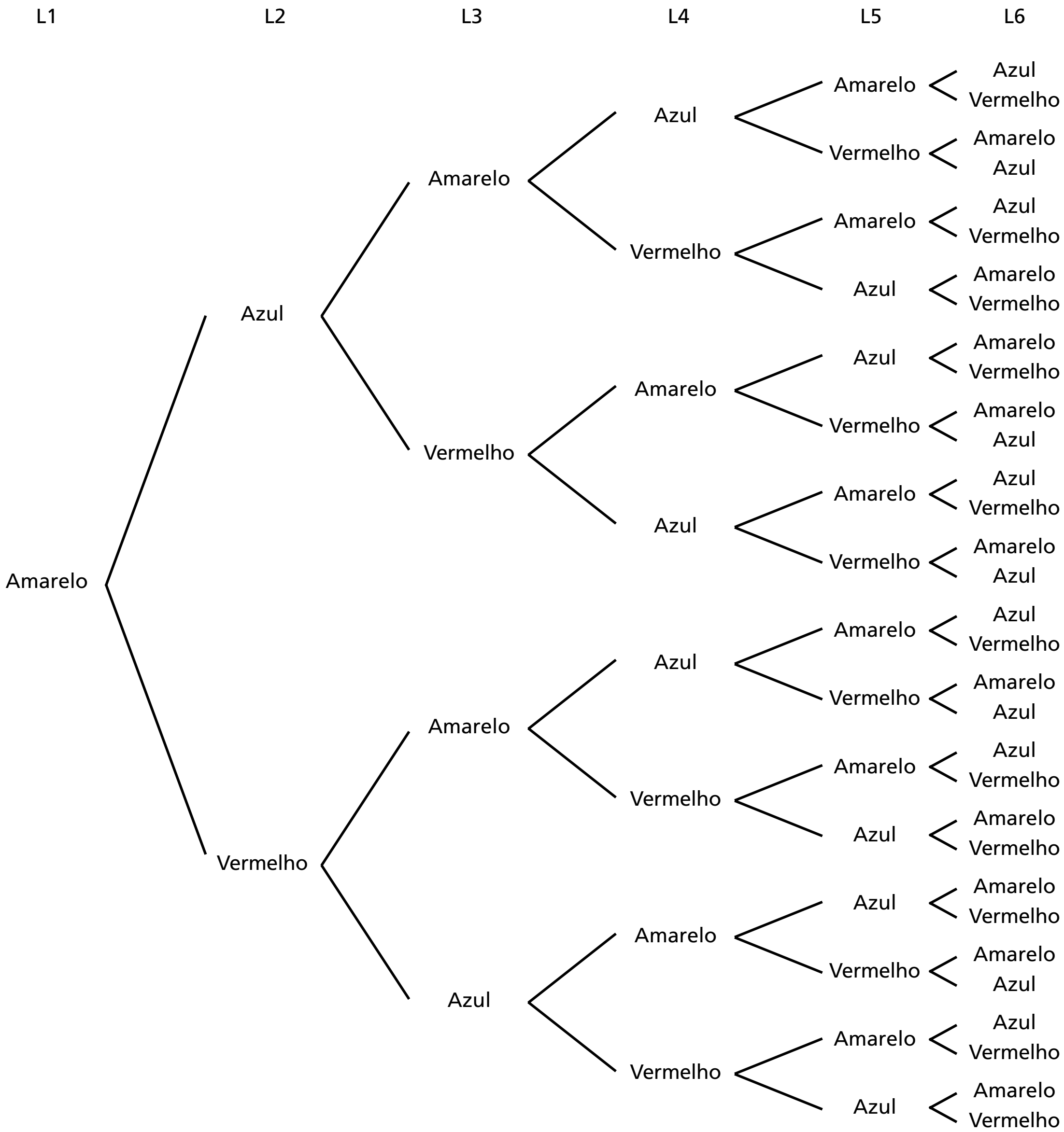
Resolução

Vamos pensar primeiro em colorir uma das listras. Podemos usar qualquer uma das três cores (amarelo, azul ou vermelho), tendo um total de três possibilidades.

Pensando em uma listra vizinha, poderemos usar todas as cores com exceção da que usamos para colorir a primeira listra, nos dando um total de duas possibilidades.

Nas demais listras, raciocinamos do mesmo modo, tendo também duas possibilidades para colorir. Temos, então, 3x2x2x2x2x2 = 96 maneiras diferentes de colorir esta bandeira nas condições estabelecidas.

Uma outra maneira de resolver o problema é por meio da árvore de possibilidades. Vamos construir um ramo dessa árvore, chamando as listras de L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6. Construiremos o ramo onde L_1 é pintado de amarelo. Veja:



Como vemos na árvore, o ramo que começa com L_1 amarelo tem 32 possibilidades, assim como o vermelho e o azul, totalizando 3 x 32 = 96 maneiras de colorir essa bandeira.

ATIVIDADES

1. Quantos são os números formados por três dígitos distintos? Desses, quantos são pares? E quantos são múltiplos de três?

____

____

Falando um pouco mais sobre o problema dos números formados por três algarismos distintos, este é um problema bastante simples, mas contém a idéia de restrição, que é uma idéia-chave em problemas de contagem, e deve ser bem trabalhada pelo professor.
Vamos chamar esse número de CDU.

C	D	U
↓	↓	↓
Algarismo das centenas	Algarismo das dezenas	Algarismo das unidades

Pelos dados do problema, temos duas restrições muito importantes para destacar:

- O algarismo C não pode ser zero, pois não queremos um número com menos de três dígitos.
- Os algarismos C, D e U são distintos.

A maior restrição do problema é o fato de o algarismo C não ser zero, então a escolha do algarismo C deve acontecer primeiro. Assim, temos 9 maneiras de escolher o algarismo C (os algarismos de 1 a 9).

9		
↓	↓	↓
Algarismos de 1 a 9. Total de 9 possibilidades.		

Para escolher o algarismo D, temos apenas de levar em conta que ele é diferente de C. Logo, a escolha é entre 9 dos dez algarismos. Finalmente, para U, temos 8 possibilidades, uma vez que dois algarismos já foram utilizados.

9	9	8
↓	↓	↓
Algarismos de 1 a 9. Total de 9 possibilidades.	Todos os algarismos de 0 a 9, menos o C. Total de 9 possibilidades.	Todos os algarismos de 0 a 9, menos o C e o D. Total de 8 possibilidades.

RESPOSTA COMENTADA

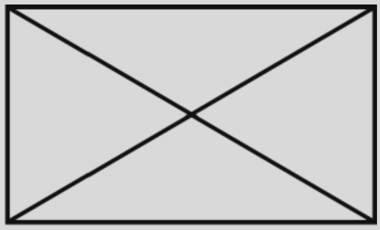
Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números de três algarismos que podem ser formados no sistema decimal é $9 \cdot 9 \cdot 8 = 9^2 \cdot 8$*, ou seja, 648.*

Procure pensar em como você abordaria com seus alunos as duas outras perguntas desta atividade.

2. Você conhece o código Morse? Esse código usa duas letras (dois símbolos) que são o ponto e o traço. As palavras desse código têm de uma a quatro letras. Qual o número total de palavras desse código?

3. Um conjunto A possui 5 elementos, e um conjunto B possui 6 elementos. Quantas funções f: $A \to B$ existem? Quantas delas são injetoras? Quantas delas são sobrejetoras?

4. Usando as cores, amarelo, azul, rosa, verde e vermelho, vamos colorir a bandeira a seguir.



A regra é colorir cada região usando uma única cor. Responda às questões a seguir:
a. De quantas maneiras podemos colorir essa bandeira sem nenhuma outra restrição?
b. De quantas maneiras podemos colorir essa bandeira sem repetir a mesma cor?
c. De quantas maneiras podemos colorir essa bandeira, sabendo que regiões vizinhas não podem ter a mesma cor?
d. Como você explicaria o item (c) a um aluno que teve dificuldade na resolução?

A IDÉIA DE SEQÜÊNCIA E A DE CONJUNTO...

As atividades e exemplos citados têm uma característica comum e fundamental: a ordem importa.

E de que ordem estamos falando? Quando consideramos o problema dos números de três algarismos, o algarismo 673, por exemplo, é diferente do algarismo 763. Assim, quando trocamos a ordem dos algarismos temos um número diferente. A idéia envolvida nesse problema é a de seqüência, pois, em uma seqüência numérica, a ordem que dispomos os elementos importa. Nos problemas com a idéia de seqüência, a interpretação do problema, divisão em casos considerando possíveis restrições e o princípio multiplicativo são os elementos necessários para resolvê-los.

Vamos analisar mais dois exemplos.

Exemplo 4: Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

Resolução

Podemos fazer assim:

$\underline{5} \,.\, \underline{4} \,.\, \underline{3} = 60.$

Como podemos escrever isso usando fatorial?

Sabemos que $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$. Na expressão acima faltam, então, os fatores 2 e 1. Vamos adicioná-los multiplicando e dividindo a expressão por eles:

$$5 \,.\, 4 \,.\, 3 = \frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1}{2 \,.\, 1} = \frac{5!}{2!}$$

Observe! $\left.\begin{array}{r}\text{5 opções}\\ \text{3 escolhas}\end{array}\right\}\quad 5 - 3 = 2$

Exemplo 5: Quantos números de três algarismos distintos podemos fazer com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

Resolução

$\underline{6} \,.\, \underline{5} \,.\, \underline{4} = 120.$

Vamos usar fatorial:

Para transformar a expressão em 6! Falta acrescentar os fatores 3, 2 e 1. Vamos adicioná-los:

$$6 \,.\, 5 \,.\, 4 = \frac{6 \,.5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1}{3 \,.\, 2 \,.\, 1} = \frac{6!}{3!}$$

Observe! $\left.\begin{array}{r}\text{6 opções}\\ \text{3 escolhas}\end{array}\right\}\quad 6 - 3 = 3$

Podemos concluir que, se fossem n opções e 3 escolhas, a solução seria $\frac{n!}{(n-3)!}$.

Mas, e se não fossem 3 escolhas? É fácil deduzir que:

Se fossem 2 escolhas, a solução seria $\frac{n!}{(n-2)!}$.

Se fossem 4 escolhas, a solução seria $\frac{n!}{(n-4)!}$.

Se fossem 5 escolhas, a solução seria $\frac{n!}{(n-5)!}$.

Se fossem **p** escolhas, a solução seria $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Este tipo particular de problema é chamado de ARRANJO SIMPLES e suas características são: a ordem importa (o número 243 é diferente do 432, por exemplo) e a cada escolha decresce de uma unidade o número de opções.

Escrevemos $A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ ou $A_n^p \frac{n!}{(n-p)!}$ e lemos "arranjo de **n** elementos **p** a **p**".

!

Observe que o aluno pode trabalhar todos os problemas de contagem sem o uso de fórmulas. Elas podem ser trabalhadas pelo professor se este desejar, mas o aluno deve decidir a estratégia de resolução que deseja usar.
Outra coisa em que você deve prestar bastante atenção é que a maioria dos problemas de contagem não é aplicação direta de fórmulas. Como exemplo, podemos citar o problema de formar números distintos usando os algarismos de 0 a 9, que envolve restrições. Assim, quando o professor opta por uma abordagem cujo enfoque central são as fórmulas, o aluno não constrói estratégias de resolução dos problemas de contagem.

Vamos falar um pouco de anagramas. Lembra-se deles? Quantos são os anagramas das palavras AMO, AMOR, AMORE, AMORES?

Número de anagramas de AMO: 3.2.1 = 3!

Número de anagramas de AMOR: 4.3.2.1 = 4!

Número de anagramas de AMORE: 5.4.3.2.1 = 5!

Número de anagramas de AMORES: 6.5.4.3.2.1 = 6!

Se houvesse **n** letras diferentes, o número de anagramas seria n!.

Nestes exemplos, o que fizemos foi permutar as letras para formar os anagramas. Este tipo de problema é chamado de *permutação simples*. A permutação simples de n elementos é representada por Pn = n!.

Repare, no entanto, um detalhe! A permutação de n elementos pode ser encarada como um arranjo simples de **n** elementos, **n** a **n** (o número de opções é igual ao número de escolhas). Por quê? Porque tem as mesmas características: a ordem importa, e a cada escolha decresce de uma unidade o número de opções.

Se usarmos a fórmula de arranjo simples, teremos, então:

$$A_{n,\,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$$

Sabemos que Pn = n!, portanto, convencionou-se que 0! = 1 e podemos escrever

$$Pn = A_{n,\,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1!} = n!$$

Entretanto, quando falamos de conjunto, a ordem dos elementos não importa e não repetimos elementos. Por exemplo, o conjunto A = {a, b, c} é igual ao conjunto B = {c, b, a}, que também é igual ao conjunto C = {a, a, b, c, c, c}.

Será que nos problemas envolvendo conjuntos conseguimos usar o mesmo raciocínio que usamos até agora?

Quantos conjuntos de 2 elementos podemos formar a partir dos elementos do conjunto A = {a, b, c, d}?

Aqui temos a seguinte restrição: não repetir elementos, ou seja, a **ordem não importa**.

Podemos escrever todos os 6 conjuntos possíveis: {a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {b, d} e {c, d}.

Pelo princípio fundamental da contagem, teríamos 4 . 3 = 12 possibilidades. Como o conjunto {a, b} = {b, a}, por exemplo, o valor obtido foi o dobro de subconjuntos. Então, temos de dividir esse valor por 2 para obter a resposta correta: $\frac{12}{2} = 6$.

Lembra-se do exemplo 2, quando perguntamos quantas duplas podíamos formar com 4 homens e 4 mulheres? No caso em que estávamos formando as duplas somente com homens, por que a resposta não é 4x3 = 12 duplas? Você viu por meio da árvore e da tabela que são 6 duplas formadas somente por homens. Qual a diferença deste problema para os anteriores? Por que ao usarmos o princípio multiplicativo encontramos possibilidades repetidas?

O fato que acontece agora é que a dupla H_1H_2 é a mesma dupla H_2H_1. Por isso não podemos contá-las duas vezes. Cada dupla foi contada duas vezes, dessa forma, é necessário dividir o total encontrado por 2. Assim, o resultado fica $\frac{4 \times 3}{2} = 6$.

Este mesmo exercício poderia ser resolvido de uma só vez sem separar em casos. Basta considerar o total de pessoas entre homens e mulheres, que é 8.

Como queremos formar duplas, sem qualquer retrição, temos:

1ª escolha: 8 possibilidades.

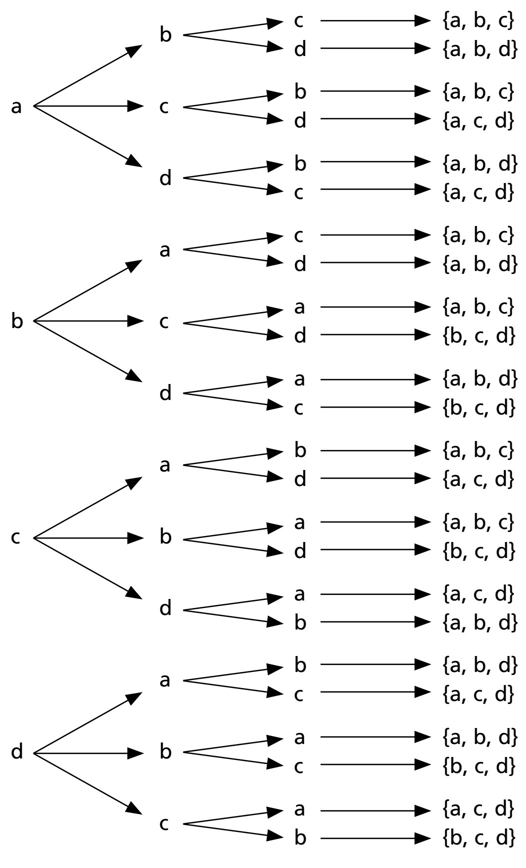
2ª escolha: 7 possibilidades.

Total de duplas importando a ordem: 8 x 7 = 56

Total de duplas retirando as duplas repetidas: $\frac{8 \times 7}{2} = 28$.

Mas, ainda não temos um "mecanismo" para trabalhar o fato de a ordem não importar. No exemplo acima, tínhamos 2 fatos, o que torna o problema mais simples, pois é suficiente dividir por 2. O que ocorreria se fossem mais fatos? Por qual número teremos de dividir?

Por exemplo, quantos conjuntos de 3 elementos podemos formar a partir dos elementos do conjunto A = {a, b, c, d}?



Procurando todas as possibilidades distintas, encontramos ao todo 4 conjuntos, que são: {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d} e {b, c, d}.

Volte e observe a árvore.

Repare que dos 24 conjuntos que aparecem pelo PFC, 20 são repetições, pois nesse caso a ordem dos elementos não importa.

Se você observou bem, cada subconjunto de 4 elementos apareceu 6 vezes. Para eliminarmos a repetição basta dividir 24 por 6, o que nos leva à solução: 4 subconjuntos.

Por que cada conjunto aparece 6 vezes?

Basta pensar que para cada 3 elementos, a, b e c, é possível escrever 6 seqüências: abc, acb, bac, bca, cab e cba. Contudo, essas 6 seqüências formam um único conjunto {a, b, c}.

Poderíamos obter o número de seqüências fazendo 3 . 2 . 1 = 6 (pensando que temos três possibilidades para escolher o primeiro elemento, duas para o segundo e uma para o terceiro). E esse número depende apenas do número de escolhas (no caso, de subconjuntos) que tem de ser feitas.

São problemas do tipo "Como formar uma comissão de três pessoas a partir de um grupo de oito pessoas?". Observe que não importa a ordem em que se escolhem as três pessoas.

A solução desse problema é: "Podem ser formadas $\frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$ comissões diferentes".

Poderemos identificar um fatorial no denominador e um arranjo no numerador se escrevermos a solução assim:

$$\frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6}{3!} = \frac{A_{8,3}}{3!} = \frac{\frac{8!}{(8-3)!}}{3!} = \frac{8!}{(8-3)! \,.\, 3!} = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

= 56 comissões.

O que acabamos de fazer foi relacionar esse tipo de contagem, chamada de combinação, com as contagens vistas até agora, os arranjos e as permutações.

E se o problema fosse "Como formar uma comissão de **p** pessoas, retiradas de um grupo de **n** pessoas?"

Analogamente, teríamos um total $\frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! \,.\, p!}$ comissões

A solução de um problema dessa natureza, onde a ordem não importa (a comissão formada por João, Maria e José é a mesma formada por Maria, João e José, por exemplo) e não podemos escolher o mesmo elemento mais de uma vez, é chamada de COMBINAÇÃO SIMPLES e representada por:

$C_{n,\,p} = \dfrac{A_{n,\,p}}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,.\,p!}$, que lemos: "combinação simples de **n** elementos **p** a **p**".

Uma outra notação usada para a combinação simples de n elementos p a p é C_n^p.

UMA APLICAÇÃO BEM INTERESSANTE: O BINÔMIO DE NEWTON

Agora trabalharemos com um exemplo de contagem aplicado na álgebra, vamos mostrar qual é o desenvolvimento de (x + a)n. Para isso, vamos descobrir qual a idéia matemática envolvida, fazer alguns casos iniciais, descobrir padrões e generalizar.

Sabemos já que

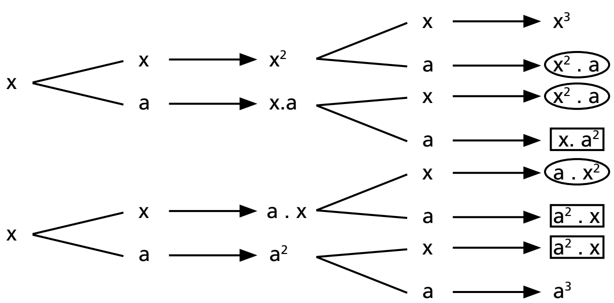
$(x + a)^0 = 1$,

$(x + a)^1 = x + a$ e

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.

Voltando ao caso do expoente dois, para desenvolver $(x + a)^2$, efetuamos o produto repetido $(x + a).(x + a)$ usando a propriedade distributiva, isto é, multiplicaremos cada termo do primeiro fator por cada termo do segundo fator. Veja a árvore que mostra os produtos obtidos:

Saíram quatro produtos, que somados nos dão três termos não semelhantes x^2, ax e a^2. Vamos ver, ainda pela árvore, o que acontece ao desenvolvermos a potência $(x + a)^3$.



Encontramos ao todo 8 produtos. Desses produtos, temos quatro que não possuem termos semelhantes. São estes x^3, x^2a, xa^2 e a^3, onde x^3 e a^3 aparecem uma única vez; já x^2a e xa^2 aparecem três vezes cada um.

Portanto, $(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3ax^2 + a^3$.

Vamos agora pensar: o que acontecerá com o desenvolvimento de $(x + a)^4$? Esta árvore passará a ter 16 galhos.

ATIVIDADES

5. Apresente os 16 produtos obtidos do desenvolvimento $(x + a)^4$ e depois apresente essa soma reduzindo todos os termos semelhantes.

____

____

____

____

RESPOSTA COMENTADA

Chegou o momento de generalizarmos essa situação, isto é, mostrar o que acontece no desenvolvimento de $(x + a)^n$. Veja:

$$(x + a)^n = \underbrace{(x + a).(x + a).\ (x + a).\ \ldots\ .(x + a)}_{\textbf{n vezes}}$$

Para fazermos esse produto de n fatores repetidos, onde cada fator possui dois termos (x e a), aplicaremos a propriedade distributiva. Portanto, escolhemos um termo de cada fator e os multiplicamos. Por este fato, o número de fatores de cada termo resultante é sempre n, já que escolhemos n termos, um de cada fator (x + a).

Observe no exemplo do desenvolvimento $(x + a)^3$, onde os termos são x^3, x^2a, xa^2 e a^3. Sempre temos três fatores envolvidos:

$x^3 = x.x.x$

$x^2a = x.x.a$

$xa^2 = x.a.a$

$a^3 = a.a.a.$

O mesmo acontecerá em (x +a)n. Os termos serão x^n, x^{n-1a}, $x^{n-2}a^2$, ..., x^2a^{n-2}, xa^{n-1}, a^n. Veja que cada termo possui exatamente n fatores, pois escolhemos um termo de cada fator (x + a).

Um importante resultado é que no desenvolvimento de $(x + a)^n$ teremos ao final um total de 2^n resultados (contando todos, repetidos ou não).

6. Observe.
$(x + a)^1 = x + a$ possui 2 termos no total.
$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$ possui 4 termos no total.
$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 2xa^2 + a^3$ possui 8 termos no total.
$(x + a)^4$ você fez na Atividade 5.
Agora, responda:
a. Quantos termos possui o desenvolvimento de $(x + a)^5$?
b. Quantos termos possui o desenvolvimento de $(x + a)^8$?
c. Por que afirmamos que o desenvolvimento de $(x + a)^n$ possui 2^n termos no total?

____
____
____
____

RESPOSTA COMENTADA

O problema é investigar quantos termos repetidos de cada termo aparece nesse desenvolvimento.
No caso de x^n, estamos escolhendo, de todos os n fatores, sempre o mesmo termo que é x e o mesmo acontece quando escolhemos todos iguais ao termo a, chegando ao termo a^n. Nestes dois casos, só temos uma única possibilidade de escolha.
Vamos fazer a mesma pergunta para o termo x^2a^{n-2}, isto é, quantos deles existem no desenvolvimento? Estamos escolhendo o ***termo x*** *em dois fatores num total de n (2 escolhas em n onde a ordem não importa e, conseqüentemente, o* ***termo a*** *em n-2 fatores.*
Quantas são as maneiras de se escolher 2 em n?
1ª escolha: n possibilidades.
2ª escolha: n-1 possibilidades.
Total de escolhas: n.(n-1).
Acontece que temos escolhas repetidas, pois, por exemplo, escolher x nos fatores 1 e 2 é o mesmo que fazer essa escolha nos fatores 2 e 1.
Total de escolhas distintas: $C_{n,\,2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Quantas são as maneiras de se escolher 3 em n?
1ª escolha: n possibilidades.
2ª escolha: n-1 possibilidades.
3ª escolha: n-2 possibilidades.
Total de escolhas: n.(n - 1).(n - 2).
Total de escolhas distintas: $C_{n,\,3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\,.\,2\,.\,1}$.

E assim vamos encontrando o número de termos semelhantes de cada um desses termos do desenvolvimento.

Cada número $C_{n,p}$ *é chamado de* número binomial *e indicado por* $\binom{n}{p}$.

Não se esqueça de que $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,.\,(n-p)!}$.

Dessa forma, o desenvolvimento de $(x + a)^n$ *fica:*

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}a^1x^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-2}a^{n-2}x^1 + \binom{n}{n-1}a^{n-1}x^1$$

$+\binom{n}{n}a^n$ *ou, usando a notação de somatório,* $(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kx^{n-k}$.

!

Uma das maneiras de demonstrar formalmente que $(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kx^{n-k}$ é através do princípio da indução finita. Se desejar recordar, veja na disciplina Álgebra 1.

Os coeficientes que aparecem nesse desenvolvimento formam um triângulo, que você já viu em algumas aulas. É o famoso Triângulo de Pascal. Vamos relembrá-lo. Veja:

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

ATIVIDADES

7. Escreva as três próximas linhas desse triângulo.

___

___

___

RESPOSTA COMENTADA

Escrevendo esses números com a notação de combinação, temos:

C_0^0

$C_1^0 \quad C_1^1$

$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$

$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$

$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$

$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Algumas relações importantes são formuladas a partir dos elementos desse triângulo. Observe com atenção e pense sobre elas.

- Relação das combinações complementares: $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Exemplo: Escolher 2 em 5 dá o mesmo resultado que escolher 3 em 5, isto é C5,2 = C5,3. Observe essa simetria que acontece em todas as linhas do triângulo de Pascal.

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

...

- Relação de Stifel: $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

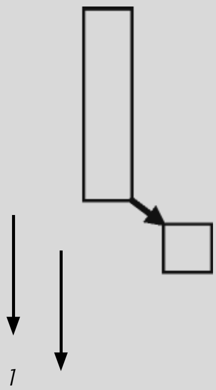
Essa propriedade nos diz que a soma de dois elementos consecutivos de um determinada linha é igual ao resultado imediatamente abaixo da segunda parcela dessa soma.

– A soma dos elementos de uma linha n é 2n, isto é, $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n} = 2^n$.

Observe esta propriedade nas sete primeiras linhas do triângulo, basta somar todos os elementos de cada linha.

1							$1 = 2^0$
1	1						$1+1 = 2 = 2^1$
1	2	1					$1+2+1 = 4 = 2^2$
1	3	3	1				$1+3+3+1 = 8 = 2^3$
1	4	6	4	1			$1+4+6+4+1 = 16 = 2^4$
1	5	10	10	5	1		$1+5+10+10+5+1 = 32 = 2^5$
1	6	15	20	15	6	1	$1+6+15+20+15+6+1 = 64 = 2^6$

Cada elemento do triângulo é a soma do elemento que está acima com o elemento à esquerda deste. Por exemplo, 3 é a soma do 2 com o 1, conforme ilustramos. Em outras palavras, $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \ldots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$*. Veja a ilustração que sugere essa idéia.*



1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

...

Exemplo: Observe as setas nas segunda e terceira colunas:
2^a coluna: $1+2 = 3$ ou $1+2+3 = 6$ ou $1+2+3+4 = 10$ ou $1+2+3+4+5 = 15$.
3^a coluna: $1+3 = 4$ ou $1+3+6 = 10$ ou $1+3+6+10 = 20$.

A soma dos elementos de uma diagonal é igual ao elemento que está imediatamente abaixo da última parcela.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Exemplo:
Descendo os 5 primeiros elementos na diagonal da esquerda para a direita.
1^a diagonal: $1+1+1+1+1 = 5$.
2^a diagonal: $1+2+3+4+5 = 15$.
3^a diagonal: $1+3+6+10+15 = 35$.

8. Escreva essa última propriedade usando números binomiais.

____

____

QUANDO AS LETRAS SE REPETEM NOS ANAGRAMAS

O número de anagramas da palavra amigo é 5!. Mas, e quando as palavras têm letras iguais?

Por exemplo, quantos anagramas distintos têm a palavra ASA?

Para melhor visualização, vamos escrever as letras A de forma diferenciada, AS**A**. Escrevendo todos os anagramas, temos:

AS**A** ⟷ **A**SA   SA**A** ⟷ S**A**A   A**A**S ⟷ **A**AS

iguais   iguais   iguais

Então, na verdade, não são 6 anagramas, são apenas 3.

Como temos duas letras repetidas (as letras A), elas trocam de posição 2 . 1 = 2! = 2 vezes.

O número de anagramas distintos é, então, $\frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$.

E se houvesse outras letras repetidas?

Por exemplo, quantos anagramas distintos tem a palavra ASSA?

Se não houvesse letras repetidas, o número de anagramas seria 4! = 24.

Mas existem duas letras A e duas letras S.

As duas letras A trocam de posição 2 . 1 = 2! = 2 vezes.

As duas letras S trocam de posição 2 . 1 = 2! = 2 vezes.

O número de anagramas distintos é, então, $\frac{4!}{2!.2!} = \frac{24}{4} = 6$.

Quantos anagramas distintos tem a palavra ARARA?

Se não houvesse letras repetidas, o número de anagramas seria 5! = 120.

Mas existem três letras A e duas letras R.

As três letras A trocam de posição 3 . 2 . 1 = 3! = 6 vezes.

As duas letras R trocam de posição 2 . 1 = 2! = 2 vezes.

O número de anagramas distintos é, então, $\frac{5!}{3!.2!} = \frac{120}{6 . 2} = \frac{120}{12} = 10$.

!

Cada vez que uma letra se repete, é necessário retirar do total de permutações todas as repetições possíveis. Fazemos isso utilizando a mesma idéia usada nas combinações, isto é, precisamos dividir pelo total de permutações que cada letra repetida gera.

ATIVIDADE

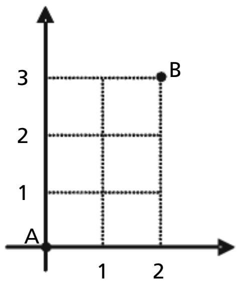
9. Quantas soluções (x, y, z), com {x, y ,z} $\in$ IN, possui a equação: x + y + z = 7?

RESPOSTA COMENTADA

Use apenas os símbolos □ e + para representar as situações possíveis. Assim, 1 + 0 + 6 fica sendo □ + + □□□□□□
2 + 1 + 4 fica sendo □□ + □ + □□□□
4 + 3 + 0 fica sendo □□□□ + □□□ +.

ATIVIDADE FINAL

A figura a seguir indica os pontos A e B nos eixos coordenados.



Quantos caminhos diferentes podem ser percorridos do ponto A ao ponto B, na figura, deslocando uma unidade de cada vez para a direita ou para cima?
Pense em duas estratégias diferentes de resolução do problema.

CONCLUSÃO

Esta aula apresentou uma alternativa didática sobre as várias maneiras de se abordar um problema de contagem. Os problemas devem ser explorados usando vários tipos de estratégias, pois elas fazem com que você amadureça os vários processos e propicia um maior entendimento da matemática envolvida.

O trabalho feito com análise combinatória já é iniciado com os alunos desde o primeiro ciclo, onde eles resolvem as situações descrevendo as possibilidades e listando-as. Esse trabalho é estruturado aos poucos até que, no Ensino Médio, os alunos têm acesso às fórmulas. Esta passagem deve ser bem trabalhada, colocando para eles diversas situações nas quais somente a fórmula dá conta e outras tantas em que o uso da fórmula dificulta a resolução desses problemas. É válido ressaltar que o conceito é o mais importante, e a grande estratégia está no fato de desenvolvê-lo, seja qual for o procedimento utilizado.

RESUMO

O estudo da Análise Combinatória não deve ser reduzido ao uso das fórmulas. Isso pode conduzir a vários erros. A visualização do problema é fundamental e você deve inserir-se no problema e estar atento às restrições, para, a partir daí, traçar um plano de resolução, que pode ser, em muitos casos, trabalhar por etapas.
Saber se a ordem modifica ou não o elemento que está sendo contado é de suma importância. Faça sempre um caso particular e verifique!
Você viu diferentes atividades que retomam problemas de arranjos, permutações e combinações. Procure outras nas aulas anteriores e nos seus livros de Matemática. Os *sites* também costumam ter bons exemplos. Quanto mais exercícios e estratégias você conhecer e manipular, mais seguro você ficará para resolver os futuros problemas que virão. A Análise Combinatória contém exercícios de idéias simples, mas pode se tornar um bicho-de-sete-cabeças em outros tantos.
Uma boa aplicação na Matemática é o triângulo de Pascal. Investigue mais sobre este interessante triângulo que disponibiliza os números de forma não-convencional.

AUTO-AVALIAÇÃO

A sua visão sobre ensino e abordagem de problemas de contagem com alunos foi ampliada? Durante a aula, você conheceu algumas estratégias diferentes de resolução. Reflita sobre o uso delas, o quanto são válidas e em que momentos podem ser utilizadas.

É relevante você entender que a abordagem feita para esta aula requer mais cuidados por parte do professor, pois ela envolve os conceitos das quatro operações fundamentais.

Na Atividade 1 e na Atividade 4, o objetivo foi refletir sobre a abordagem de problemas com alunos.

A Atividade Final pede que você vá além e reflita sobre um problema diferente.

Se você entendeu bem o triângulo de Pascal, você alcançou um dos nossos principais objetivos desta aula, que é trabalhar diferentes aspectos de contagem. Caso contrário, você deve investigar mais esse triângulo. Procure o tutor do pólo caso as dúvidas permaneçam.

É importante que você utilize com seus alunos tabelas e árvores, pois elas propiciam o desenvolvimento das idéias envolvidas em cada problema.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você irá trabalhar jogos e equações. Um pouco do lúdico na Álgebra sempre ajuda a torná-la mais divertida e suave.

RESPOSTAS

Atividade 1

Três dígitos distintos: 648.

Pares: 324.

Múltiplos de 3: 216.

Atividade 2

Palavras de uma letra: 2 (o ponto e o traço).

Palavras de duas letras: 2 x 2 = 4 (ponto-ponto, ponto-traço, traço-ponto e traço-traço).

Palavras de três letras: 2 x 2 x 2 = 8 .

Palavras de quatro letras: 2 x 2 x 2 x 2 = 16.

Número total de palavras: 20.

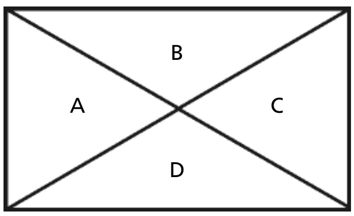
Atividade 3

Total de funções: 6 x 6 x 6 x 6 x 6 = 6^5.

Total de funções injetoras: 6 x 5 x 4 x 3 x 2 = 720.

Total de funções sobrejetoras: zero.

Atividade 4



a. 5 x 5 x 5 x 5 = 5^4 = 625.

b. 5 x 4 x 3 x 2 = 120.

c. 5 x 4 x 1 x 4 + 5 x 4 x 3 x 3 = 240.

d. Vamos chamar as regiões envolvidas de A, B, C e D.

Quando pensamos nessa bandeira, começando pela região A, temos 5 possibilidades para colori-la. Se pensarmos que, para colorir a região B, temos 4 possibilidades, e para colorir a região D, também temos 4, pois a única restrição dessas é ser diferente de A, faltará apenas pensar em quantas possibilidades temos para colorir a região C.

Nesse ponto, temos um conflito. Observe que se eu usei amarelo para pintar tanto a região D quanto a região B, poderei escolher qualquer uma das 4 cores restantes. Entretanto, se usamos vermelho na região B e amarelo na região D, teremos 3 possibilidades de colorir a região C.

Assim, devemos quebrar o problema em dois casos exatamente nesse conflito: quando as regiões B e D têm a mesma cor e quando as regiões B e D têm cores diferentes.

Deve ser trabalhada com os alunos a análise de restrições e de possibilidades de quebra do problema em duas partes que se complementam. E você deve pensar em outras maneiras de explicar essa situação.

Na verdade, o que fundamenta essa idéia é o fato de termos duas situações R e S. A situação R é: "as regiões B e D têm a mesma cor", e a situação S é: "as regiões B e D têm cores diferentes", como $R \cap S = \emptyset$, $n(R \cup S) = n(R) + n(S)$.

Atividade 5

Os 16 produtos que estão apresentados na tabela a seguir são as células sombreadas.

	x^3	$x^2 . a$	$x^2 . a$	$x . a^2$	$x^2 . a$	$x . a^2$	$x . a^2$	a^3
vezes x	x^4	$x^3 . a$	$x^3 . a$	$x^2 . a^2$	$x^3 . a$	$x^2 . a^2$	$x^2 . a^2$	xa^{3x}
vezes a	x^3a	$x^2 . a^2$	$x^2 . a^2$	$x . a^3$	$x^2 . a^2$	$x . a^3$	$x . a^3$	a^4

$x^4 \to 1$

$x^3a \to 4$

$x^2a^2 \to 6$

$xa^3 \to 4$

$a^4 \to 1$

Total de 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 termos

$(x + a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$

Atividade 6

a. 32 termos.

b. 256 termos.

c. Porque para cada x temos duas possibilidades de escolha, que são x e a, o mesmo acontecendo para cada a. Dessa forma, cada galho da árvore se ramifica em outros dois. Como são n fatores, a árvore bifurca duas possibilidades n vezes, e ficamos então com um total de 2x2x2x...x2 (n vezes), o que nos dá 2^n.

Atividade 7

1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1.

Atividade 8

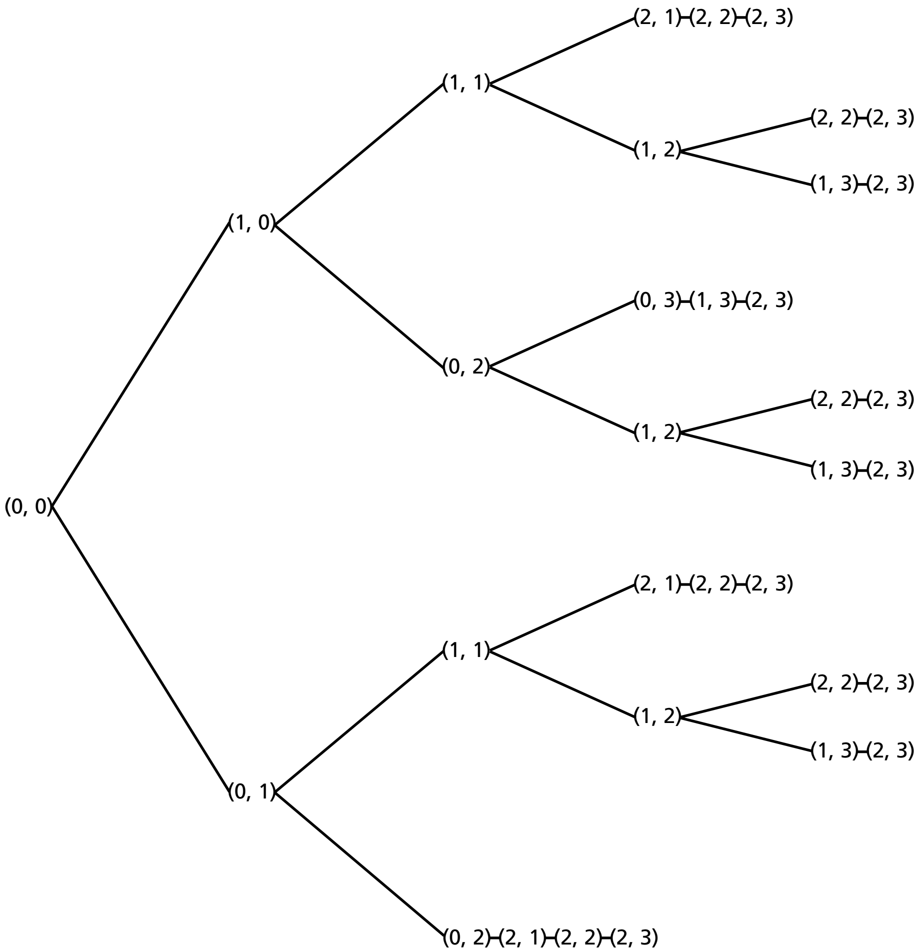
$C_{1,0} + C_{2,1} + C_{3,2} + C_{4,3} + \ldots + C_{n,\, n-1} + C_{n+1,n} = C_{n+2,n}$.

Atividade 9

Observe pelo esquema sugerido que em qualquer solução da equação temos 9 objetos, onde 7 são □ e dois são +. Assim, temos $\frac{9!}{7!.2!}$ = 36 soluções.

Atividade Final

Considerando a localização de cada ponto indicado na figura no plano cartesiano, todos os caminhos partem do ponto A. Os caminhos possíveis para chegar até o ponto B a partir de um único movimento para cima ou para a direita estão indicados no esquema que segue.



Outra estratégia é pensar que todos os caminhos têm dois movimentos à direita e três à esquerda: DDCCC, ou seja: $\frac{5!}{3!.2!}$ = 10.

AULA 23

Jogos com equações

Meta da aula

Instrumentalizar o ensino de jogos.

objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Diferenciar as idéias que envolvem o conceito de equação.
- Dar exemplo de jogos com equações.
- Utilizar a escrita como instrumento de reflexão sobre o jogo.

Pré-requisitos

Para acompanhar esta aula, você deverá saber resolver equações do 1º e 2º graus e reconhecer suas representações gráficas, além de utilizar as operações básicas do conjunto dos números reais.

INTRODUÇÃO

Iniciamos o trabalho com jogos na Aula 13. Nesta aula, vamos dar continuidade à proposta, e você terá oportunidade de conhecer jogos que envolvem equações. Nosso foco serão as equações de 1º e 2º graus e suas representações gráficas. Algumas noções importantes devem ser trabalhadas com os alunos para que eles compreendam o conceito de equação. As noções que vamos explorar são de equilíbrio, igualdade, conjunto universo e incógnita.

MANTENDO O EQUILÍBRIO

Na noção de equilíbrio que envolve o conceito de equação, é importante utilizar as operações inversas. Usualmente, o professor ensina aos alunos o método de resolução, sem uma preocupação com a compreensão do conceito, assim, muitas vezes, o ensino de equações do 1º grau se reduz a "passar para o outro lado com sinal trocado".

!

O "passar para o outro lado com sinal trocado" é o que você viu no curso de Álgebra, o que garante a solução e a unicidade de uma equação do 1º grau do tipo $ax + b = c$, onde $a \neq 0$, em uma estrutura algébrica chamada corpo, é a existência do elemento simétrico ou oposto da adição (-c) e do inverso multiplicativo a^{-1}.

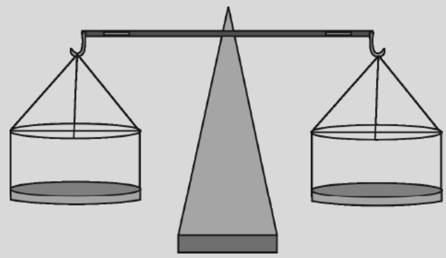
Para trabalhar equilíbrio, nada melhor do que recorrermos a uma balança ou gangorra. No nosso caso interessa uma balança de dois pratos. Embora ela já não seja usualmente utilizada, este é um bom momento para apresentá-la aos alunos. Em alguns estabelecimentos onde são produzidos materiais didáticos manipulativos, você poderá encontrar esta balança. O princípio é bastante simples, e a balança pode ser confeccionada a partir de materiais que são fáceis de encontrar ou de materiais reciclados.

O professor deverá levar para a sala de aula uma balança de dois pratos. Essa balança poderá ser construída pelo próprio professor ou por algum aluno mais habilidoso.

!

Faça você, ou proponha a seus alunos esta tarefa. A seguir, oferecemos a você uma sugestão de como confeccioná-la.

1. Pegue uma haste de madeira e coloque o ponto de apoio bem no meio (centro). Uma sugestão é que sua haste meça 50cm.
2. Em cada extremo da haste de madeira, coloque um gancho onde serão presos os pratos.
3. Prenda a cada gancho um copo de plástico ou qualquer outro recipiente que possuam o mesmo peso, amarrado em um barbante.

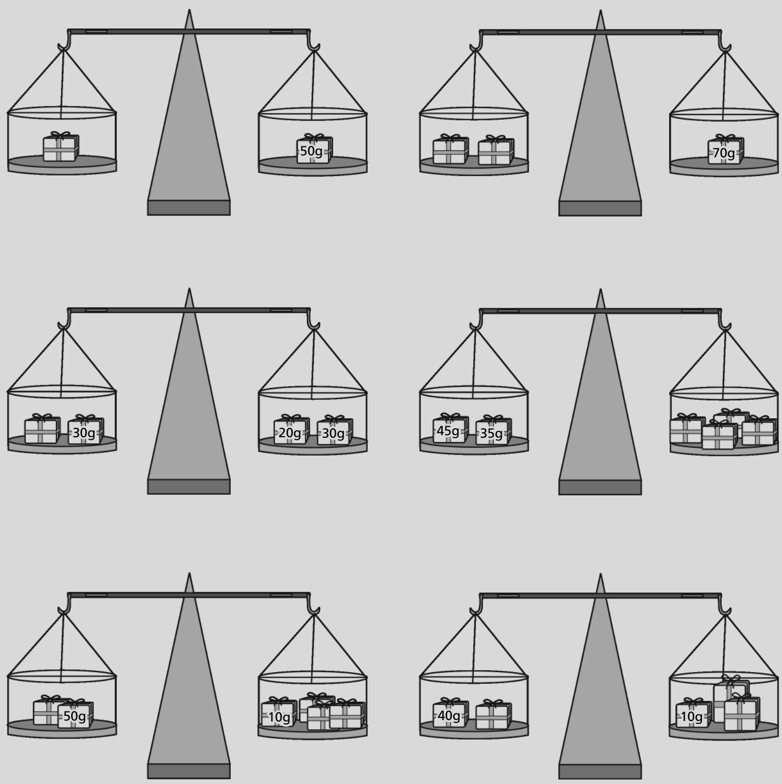


Atenção para alguns cuidados!

- Quanto maior for a haste, maior será a precisão (sensibilidade) de sua balança.
- A distância do gancho até o apoio da balança terá de ser rigorosamente a mesma de um lado e do outro.
- Depois de pronta, sua balança poderá ficar inclinada para um dos lados, devido às diferenças na madeira. Para compensar essas diferenças, amarre um pedaço de fita adesiva suficiente para deixar a haste na posição horizontal.

ATIVIDADES

1. Nesta atividade, o professor deve propor oralmente várias situações aos alunos, e perguntar: "Quanto deve pesar cada saco para que a balança permaneça em equilíbrio?"



!

Não se preocupe com o tamanho dos pesos. Fixe-se, apenas, em suas quantidades.

COMENTÁRIO

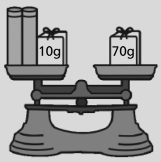
Crie outras situações e solicite que alguns alunos também proponham que os colegas tenham de resolver.

Após a Atividade 1, o professor pode retomar cada uma das situações ou propor outras e pedir que os alunos registrem o que vêm. Esse registro pode vir em forma de equação, como desenhos ou com números e símbolos, numa tentativa de registrar de forma simbólica aquilo que observam.

Além disso, o professor pode propor situações desenhadas como faz MEIRA (2004) na atividade a seguir

2. Veja os exemplos na tabela abaixo e encontre em cada caso o valor de x ou y.

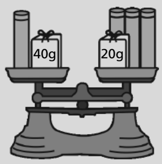
$3x = 90$



$2x + 10 = 70$

$x + 80 = 3x$

$x + 60 = 3x + 20$



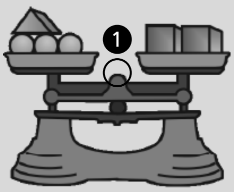
$x + 40 = x + 2y + 20$

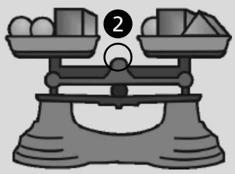
$x + y + 70 = x + 2y + 20$

COMENTÁRIO

Para encontrar os valores de x e y, você poderá resolver a equação ou criar outras estratégias, lembrando que as balanças devem manter-se em equilíbrio.

3. Fazendo experiências com uma balança usando objetos de três tipos, foi possível verificar que três bolas tinham pesos iguais, o mesmo acontecendo com dois cubos. Sabendo que a balança ficou em equilíbrio nas duas maneiras, representadas a seguir, descubra a relação que existe entre os pesos da bolinha e do cubo, isto é, a quantas bolinhas corresponde um cubo.





EQUILIBRANDO EXPRESSÕES NUMÉRICAS

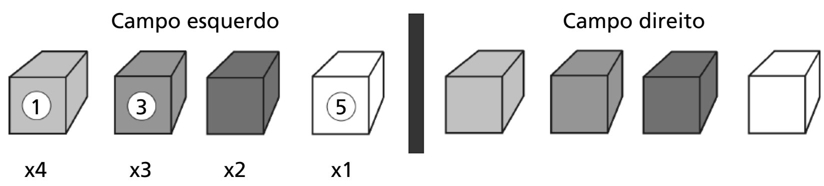
Este jogo pode ser aplicado desde o 2º ciclo do Ensino Fundamental, bastante apropriado também para os alunos do 3º ciclo (5ª série). Ele explora a idéia de equilíbrio, e o objetivo é igualar os resultados de duas expressões numéricas que envolvem as operações de adição e multiplicação.

O Jogo do Equilíbrio é para dois participantes ou dois grupos adversários. Os materiais necessários são: 1 palito de picolé, 8 caixas de fósforos, 18 tampinhas numeradas de 1 a 9 para cada jogador.

Para começar, coloque o palito de picolé para dividir os dois campos. De cada lado, disponha 4 caixas de fósforo.

Agora, veja como jogar!

Cada caixa tem um fator multiplicador. Quando se coloca uma tampinha numerada sobre uma caixa, o valor dessa tampinha será multiplicado pelo valor da caixa. Uma vez efetuados os produtos de cada lado do palito, esses valores serão somados. Na configuração a seguir, por exemplo, o valor total do campo esquerdo será 2 x 4 + 3 x 3 + 5 x 1:



1. O jogo inicia-se quando um dos jogadores coloca algumas tampinhas nas caixas que escolher e desafia o oponente a conseguir o mesmo total no outro campo, porém com uma configuração diferente.

2. A meta é obter um equilíbrio de pontos, isto é, o total obtido no campo do lado esquerdo deve ser sempre igual ao obtido no campo direito.

3. Em uma caixa pode-se colocar até 3 tampinhas.

4. O oponente tem meio minuto para fazer o seu registro. Feito o registro, ele deve ser conferido. Se os totais são iguais, o oponente ganha um ponto, se diferentes, o desafiador é quem ganha um ponto.

5. Joga-se três vezes. Quem obtiver dois pontos, ganha a rodada.

6. Inicia-se, então, a 2ª rodada, e os papéis dos jogadores se invertem. O vencedor será aquele que, em primeiro lugar, ganhar 7 rodadas.

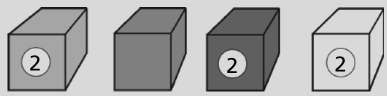
!

O Jogo como instrumento de uso didático deve vir acompanhado de sugestões do professor que conduzam a uma reflexão ou ao registro de etapas do jogo.

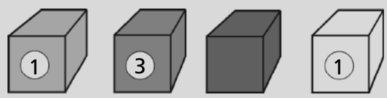
EXPLORANDO O JOGO DO EQUILÍBRIO

ATIVIDADES

4. Na sua vez, o desafiador colocou a seguinte configuração em seu jogo:
Campo esquerdo:



O adversário começou a jogar e colocou, inicialmente, 3 peças:
Campo direito:



a. Escreva o cálculo para obter o total referente ao campo esquerdo.
b. Sem considerar a peça que o oponente ainda não colocou, escreva o cálculo para obter o total parcial referente ao campo direito.
c. Descubra o valor que deve ter a próxima peça e onde deve ficar para que equilibre o jogo.

COMENTÁRIO

Para efetuar os cálculos e dar agilidade, uma boa dica é iniciar pelas multiplicações por 1.

5. Os cálculos do desafiador e do oponente estão escritos a seguir. Desenhe a situação e verifique quem ganhou.
Desafiador: 2 x 4 + 1 x 3 + 7. Oponente: 4 x 3 + 2 x 3 + 3.

COMENTÁRIO

Lembre-se de que as caixas mais próximas do palito possuem fator multiplicador menor.

6. Na sua vez, o desafiador colocou suas peças que resultaram no seguinte cálculo:
1 x 4 + 2 x 3 + 1 x 2.
a. Encontre uma solução para a jogada do oponente de tal forma que utilize o menor número de tampinhas possível.
b. Encontre outra solução para o oponente de tal forma que utilize exatamente 4 tampinhas.

COMENTÁRIO

Atenção ao valor total encontrado: crie uma estratégia e comente toda a atividade com um colega ou tutor.

7. Os cálculos do desafiador e do oponente estão escritos a seguir, sendo que o oponente ainda não decidiu pela última peça. A peça que está na mão dele foi representada pela letra p.
Desafiador: 1 x 4 + 1 x 3 + 7 x 2.
Oponente: 2 x 4 + p x 3 + 3 x 2 + 4.
a. Encontre o valor da peça p, sabendo que o oponente ganhou.
b. Encontre o valor da peça p, sabendo que o desafiador ganhou.

COMENTÁRIO

Nesta atividade, introduzimos o uso da letra, passo importante para a construção da linguagem algébrica.

8. Os cálculos do desafiador e do oponente estão escritos a seguir e o oponente ainda vai colocar duas peças de mesmo valor. Cada peça que ele vai colocar tem seu valor representado pela letra y, já que são iguais.
Desafiador: 1 x 4 + 2 x 3 + 8 x 2.
Oponente: 2 x 4 + 1 x 3 + y x 2 + y.
Encontre o valor da peça y.

COMENTÁRIO

Você já pode representar esta atividade por meio de uma equação, mas para resolvê-la você pode utilizar a forma usual ou as operações inversas relacionadas à idéia de equilíbrio.

9. A seguir, você vai encontrar uma igualdade que expressa as jogadas do desafiador e as do oponente em uma situação em que o oponente ainda não sabe qual será a última peça que vai colocar. O valor da peça ainda não colocada recebeu por designação a letra **p**.
8 x 3 + 5 x 2 + 7 = 3 x 4 + **p** x 2 + 9

a. Qual foi a jogada do desafiador (tampinhas e caixas), sabendo que todas as multiplicações do primeiro fator representam as peças e as caixas que utilizou?
b. Encontre o valor da peça **p**.
c. Descreva a jogada do oponente: as tampinhas e caixas que utilizou.

COMENTÁRIO

Nesta atividade, voltamos a pensar no material utilizado no jogo. Esse processo de feedback *deve ser uma constante na construção do conhecimento matemático.*

10. A seguir estão representadas as ações de dois jogadores. Está faltando o valor de uma tampinha, indicada pela letra **f**. Descubra que valor deve ter **f** para que seja igual ao número de pontos dos dois campos.
1 2 1 2 3 1 f 2
x4 x3 x2 x1 x1 x2 x3 x4

COMENTÁRIO

Articule uma estratégia sobre a idéia de equilíbrio e depois resolva o problema com uma equação. Que caminho foi mais confortável para você? Reflita!

EQUAÇÕES EQUIVALENTES

Você, com certeza, sabe o que são frações equivalentes. Em Matemática, algumas vezes, usamos um mesmo termo para designar coisas diferentes. Aqui, o objetivo é reconhecer o que são EQUAÇÕES EQUIVALENTES.

Julgamos interessante abordar esse aspecto, pois é bastante comum os alunos cometerem alguns erros na resolução de equações do 1º grau. Isso acontece em grande parte pelo fato de eles seguirem um procedimento, sem avaliar, a cada passo, o significado do que estão fazendo. ARCAVI (1999) nos traz uma importante contribuição sobre o sentido do símbolo. Afirma que, ao resolvermos uma equação, estamos em busca de uma solução final, e não avaliamos os passos dessa resolução. No exemplo a seguir, vamos procurar avaliar o sentido de cada passo da resolução:

EQUAÇÕES EQUIVALENTES

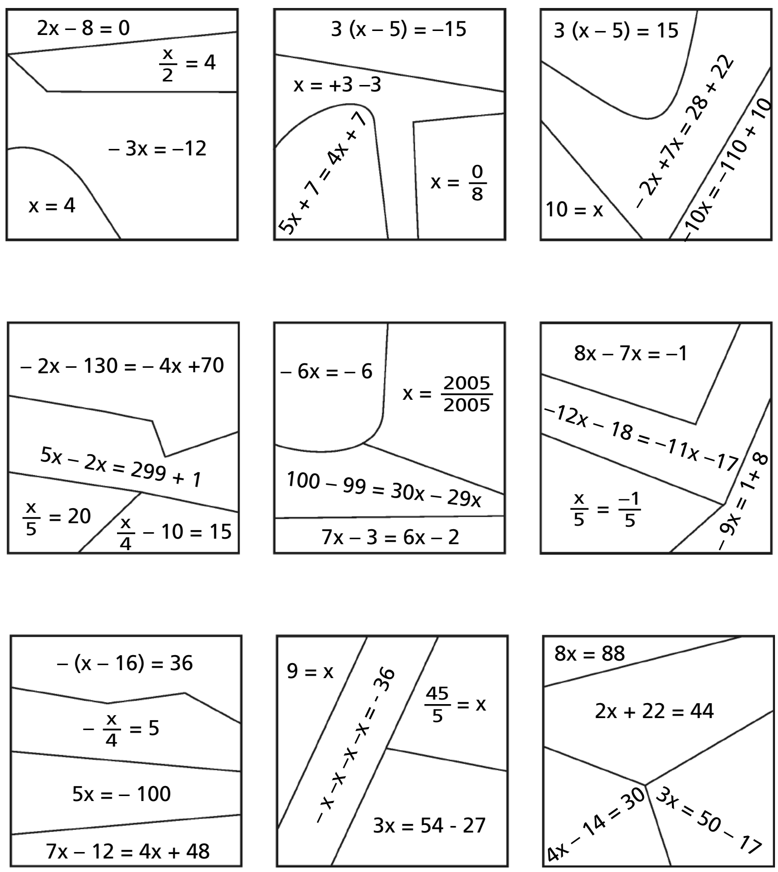
São aquelas que possuem o mesmo conjunto-solução.

$$5x - 7 = 3x + 9 \text{ (I)}$$
$$5x - 3x = 9 + 7 \text{ (II)}$$
$$2x = 16 \text{ (III)}$$
$$x = \quad \text{(IV)}$$
$$x = 8 \text{ (V).}$$

Na resolução da equação (I), a cada passo seguinte, encontramos equações equivalentes. As equações (I), (II), (III), (IV) e (V) são equações equivalentes, pois possuem a mesma solução. Se trabalharmos esse aspecto com nossos alunos, poderemos ajudá-los a produzir significado para as identidades algébricas.

O jogo que apresentaremos a seguir tem como objetivo que o aluno, sem necessariamente chegar à solução, identifique equações do 1º grau equivalentes.

O material a ser utilizado são peças de pequenos quebra-cabeças. O objetivo é reunir 4 peças e formar um quadrado onde as quatro equações sejam equivalentes. O aluno poderá orientar-se pela avaliação que ele mesmo faz de cada equação ou pelo recorte e encaixe das peças.



Como jogar? Recortadas as 36 partes, cada um dos três jogadores (número ideal de participantes), pega aleatoriamente doze peças, e com elas procura formar o maior número de quadrados possível. As peças que não se encaixarem deverão ser colocadas à disposição de todos para serem compradas. Sorteia-se quem começa o jogo, e cada um na sua vez compra uma peça. As peças podem estar com as equações visíveis (viradas para cima) ou não. O jogo termina quando o primeiro participante formar quatro quadrados (este será o vencedor).

!

Lembre-se de que as regras aqui sugeridas podem ser modificadas, desde que todos os participantes estejam de acordo. Além disso, a partir dos jogos aqui apresentados, você poderá ampliar ou criar novos jogos.

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE PARÁBOLAS

Quando trabalhamos gráficos de parábolas, é importante que o aluno reconheça alguns elementos do gráfico e associe-os à lei da função. Um jogo que pode ser criado nessa direção é um jogo com uma estrutura parecida com o jogo de bingo.

!

Podemos montar um jogo desse tipo usando função polinomial do 1º grau ou afim, ou até mesmo vários tipos de modelo gráfico diferentes: afim, quadrática, exponencial, logaritmo, trigonométrica.

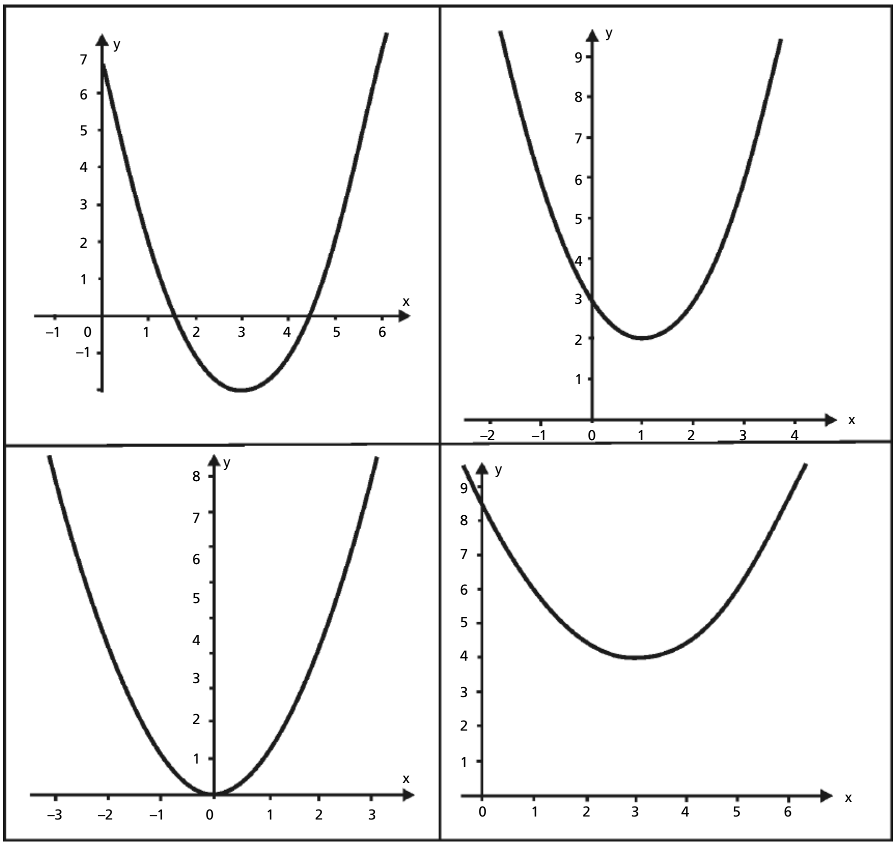
O jogo possui três cartelas, uma para cada jogador. Cada uma das cartelas apresenta 4 gráficos de funções quadráticas e 12 cartões com a expressão algébrica das funções. A finalidade é associar cada expressão algébrica ao gráfico correspondente.

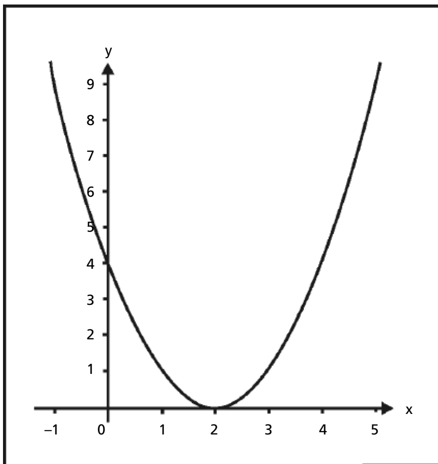
Os cartões com as expressões algébricas devem ser retirados um a um. Se um jogador julgar que a expressão algébrica corresponde ao gráfico presente em sua cartela, ele pega o cartão e sobrepõe sobre sua cartela no local adequado. Ganha o jogo o primeiro a preencher a cartela.

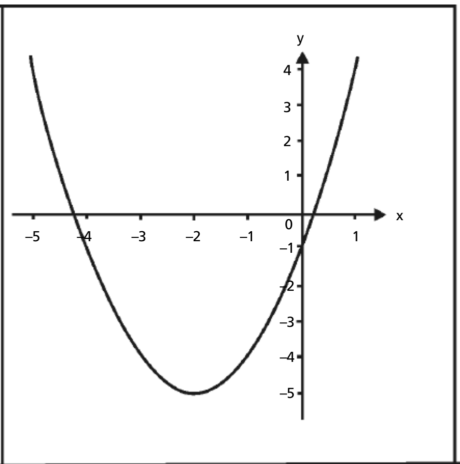
!

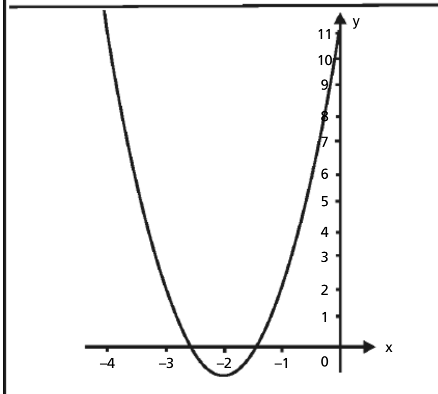
É importante que os outros jogadores confiram as jogadas dos adversários.

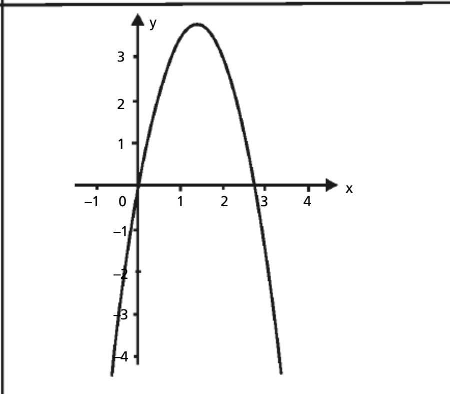
A $y = x^2 - 6x + 7$	B $y = x^2 - 2x - 3$	C $y = x^2$
D $y = ½(x - 3)^2 + 4$	E $y = (x - 2)^2$	F $y = x^2 + 4x - 1$
G $y = 3x^2 + 12x + 11$	H $y = -2x^2 + 6x - 1$	I $y = (2 - x)(2 + x)$
J $y = 2x^2 - 4x - 3$	L $y = x^2 - 6x$	M $y = x^2 + 3$

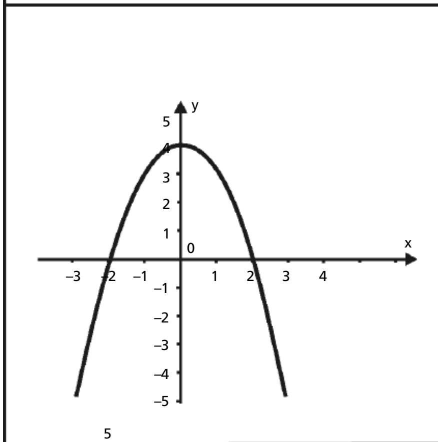


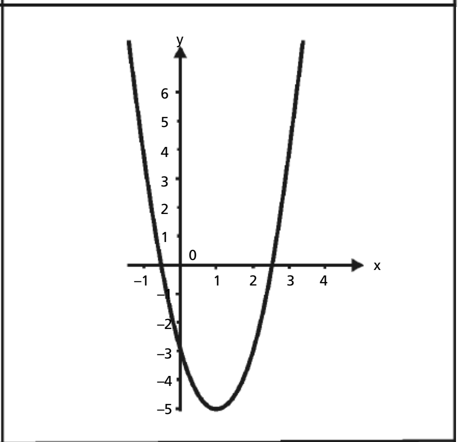

y
9 8 7 6 5 4 3 2 1
x
–1 0 1 2 3 4 5

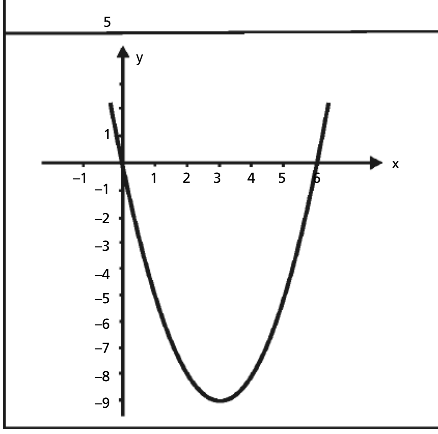

y
4 3 2 1
x
–5 –4 –3 –2 –1 0 1
–1 –2 –3 –4 –5

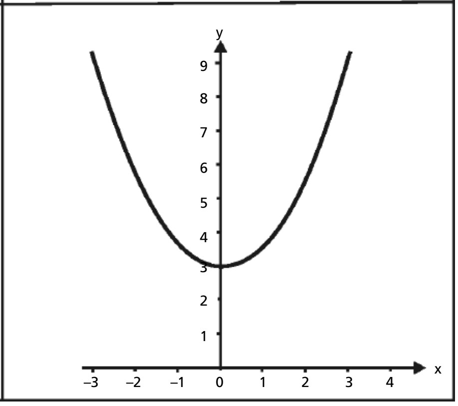

y
11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
x
–4 –3 –2 –1 0


y
3 2 1
x
–1 0 1 2 3 4
–1 –2 –3 –4


y
5 4 3 2 1 0
x
–3 –2 –1 1 2 3 4
–1 –2 –3 –4 –5


y
6 5 4 3 2 1 0
x
–1 1 2 3 4
–1 –2 –3 –4 –5


5
y
1
x
–1 1 2 3 4 5 6
–1 –2 –3 –4 –5 –6 –7 –8 –9


y
9 8 7 6 5 4 3 2 1
x
–3 –2 –1 0 1 2 3 4

ATIVIDADE FINAL

Agora é sua vez! Idealize e confeccione um jogo envolvendo conceitos algébricos e coloque em exposição no seu pólo. Converse com seu tutor.

CONCLUSÃO

Os jogos com equações têm por objetivo contribuir com uma outra perspectiva no ensino da Álgebra. De maneira geral, a resolução de equações fica restrita ao uso de manipulações algébricas. Os jogos aqui apresentados sugerem que os alunos consigam avaliar as situações e fazer escolhas na hora de jogar, sem necessariamente resolver as equações.

RESUMO

Exploramos diferentes aspectos que circulam o conceito de equação, como a idéia de equilíbrio relacionado à aplicação das operações inversas, ao significado das equações equivalentes e à igualdade. Exploramos ainda a relação entre representação algébrica e gráfica.

AUTO-AVALIAÇÃO

No trabalho com jogos, é importante que você avalie a estrutura de criação e os conteúdos envolvidos, para que, além de jogar, possa trabalhar com essa metodologia junto aos seus alunos. Uma forma de você se avaliar é criar novos jogos com os conteúdos envolvidos nesta aula.

INFORMAÇÃO PARA A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você verá um pouco mais sobre jogos. Estaremos explorando jogos com expressões.

RESPOSTAS

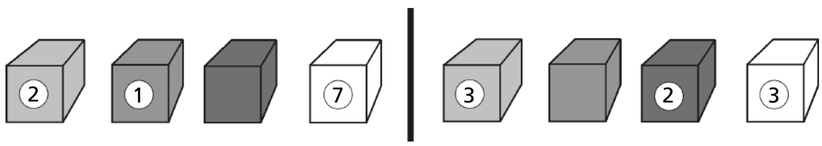
Atividade 4

a. 2x4 + 2x2 + 2x1 = 14

b. 4x1 + 2x2 + 1x1 = 9

c. O desafiador ganhou.

Atividade 5



O desafiador ganhou.

Atividade 6

a. O resultado deve ser 12. O oponente vence o jogo colocando a tampinha de valor 3 na caixa cujo fator multiplicador é 4.

b. Por exemplo, 4x1 + 3x1 + 2x2 + 1x1, mas existem outras respostas.

Atividade 7

O desafiador somou 21 pontos.

O oponente: 3p + 18.

a. p = 1.

b. p = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ou 9.

Atividade 8

Desafiador: 26 pontos.

Oponente: 3y + 11.

O valor das peças colocadas será 5.

Atividade 9

A seguir, você vai encontrar uma igualdade que expressa as jogadas do desafiador e do oponente em uma situação em que o oponente ainda não sabe qual será a última peça que vai colocar. O valor da peça ainda não colocada recebeu por designação a letra **p**.

8 x 3 + 5 x 2 + 7 = 3 x 4 + **p** x 2 + 9

a. Qual foi a jogada do desafiador (tampinhas e caixas), sabendo que todas as multiplicações do primeiro fator representam as peças e as caixas que utilizou?

b. Encontre o valor da peça **p**.

c. Descreva a jogada do oponente: as tampinhas e caixas que utilizou.

a. A tampinha p na caixa cujo fator multiplicador é 2.

b. p = 5.

c. Jogou a tampinha 3 na caixa cujo fator multiplicador é 4, a tampinha 5 na caixa cujo fator multiplicador é 2, e a tampinha 9 na caixa cujo fator multiplicador é 1.

Atividade 10

Não existe possibilidade para que esse número seja igual. A menor peça a ser colocada seria 1 e, nesse caso, no lado esquerdo teríamos 14 pontos e no direito 16.

AULA 24

Quem tem medo do logaritmo?

Meta da aula

Instrumentalizar o ensino de logaritmos.

objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Discutir sobre abordagens do ensino de logaritmos.
- Conhecer episódios da história dos logaritmos.
- Relacionar logaritmos a progressões.

Pré-requisitos

Para o desenvolvimento desta aula, é necessário que você saiba funções e logaritmo.

INTRODUÇÃO

Nesta aula e na Aula 25, o tema abordado será logaritmo. Aqui, vamos discutir alguns aspectos do ensino, da história e das relações como as progressões aritmética e geométrica. Na Aula 25, daremos continuidade ao assunto discutindo um pouco mais sobre a função logarítmica vendo algumas aplicações e uma outra maneira de definir seu conceito.

É comum o logaritmo aterrorizar os alunos e provocar a reflexão sobre o motivo pelo qual é ensinado nas escolas, principalmente quando eles se direcionam a outras áreas de conhecimento onde não utilizarão matemática futuramente. Os depoimentos dos alunos sobre esse assunto têm uma mistura de pavor e falta de interesse. Então, por que ensinar este tópico?

O logaritmo é um bom exemplo do pensamento científico-matemático. Além disso, no Ensino Médio, desejamos que o aluno compreenda a Matemática como parte integrante do mundo e que compreenda fenômenos que podem ser descritos por modelos matemáticos,

> O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas. As funções exponencial e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras. A resolução de equações logarítmicas e exponenciais e o estudo das propriedades de características e mantissas podem ter sua ênfase diminuída e, até mesmo, podem ser suprimidas (BRASIL. MEC. PCN, 2001, p.121).

!

Caso queria ler mais sobre o Ensino de Matemática no Ensino Médio, visite a página do MEC http://www.mec.gov.br Lá você encontra as bases legais e todos os volumes do PCN e do PCN+.
Especificamente, você encontra o PCN+ de Ciências da Natureza no endereço http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf

!

Lembre-se de acessar a disciplina na Plataforma Cederj. Lá você encontrará diferentes animações e recursos que auxiliarão sua aprendizagem na aula.

COMO TUDO COMEÇOU

O logaritmo surgiu num momento histórico de bastante desenvolvimento científico. No século XVI e início do XVII, foi muito grande a expansão do conhecimento científico em todos os campos: Geografia, Física, Navegação, Astronomia.

Na Astronomia, houve uma quebra de dogmas que mudaram a percepção do homem sobre o universo com o sistema heliocêntrico de Copérnico. Na navegação, foi feito por Gerhard Mercator, em 1569, um novo mapa do mundo, causando um impacto decisivo nesta área. Na Física, Galileu Galilei (Itália), estava fundando a mecânica, e Kepler, na Alemanha, formulou suas três leis dos movimentos dos planetas.

Estas descobertas aumentaram muito a ordem de grandeza dos números, forçando enormes e tediosos cálculos numéricos. Por coincidência, o desenvolvimento dos logaritmos, aliados à trigonometria, estavam também tendo lugar durante esses anos.

Na verdade, é possível que a idéia de logaritmo tenha ocorrido a Jobst Bürgi em 1588, seis anos antes de Napier trabalhar na mesma direção. Porém, só publicou seus resultados em 1620. Os dois partiram das propriedades das seqüências aritméticas e geométricas, estimulados, provavelmente, pelo método da **PROSTAFÉRESE**. Os princípios fundamentais que usaram eram os mesmos.

PROSTAFÉRESE

Do gr. *prósthen*, 'adiante' + gr. aphaíresis, 'subtração', significa diferença entre o movimento real e o movimento médio de um planeta.

John Näpier não era matemático profissional, e só se interessava por certos aspectos da Matemática, particularmente os que se referiam à computação e à trigonometria. Como ouviu falar sobre o maravilhoso artifício da prostaférese, muito usado em computações no observatório, redobrou os esforços para publicar, em 1614, o *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos).

Näpier conta que trabalhou em sua invenção dos logaritmos durante vinte anos antes de publicar seus resultados, o que colocaria a origem de suas idéias em 1594 aproximadamente.

!

A palavra *logaritmo* vem da composição, feita por Näpier, de duas palavras gregas: *lógos*, que significa *razão*, e *arithmos*, que significa *número*.

A publicação, em 1614, do sistema de logaritmos teve sucesso imediato, e entre seus admiradores mais entusiasmados estava Henry Briggs, que propôs o uso de potências de dez, e Näpier concordou dizendo que já havia pensado nisso. Briggs publicou seu *Logarithmorum chilias prima* (isto é, os logaritmos calculados de 1 a 1000, cada um calculado com 14 casas) e em 1624 em *Arithmetica logarithmica*, Briggs ampliou sua tabela incluindo logaritmos comuns dos números de 1 a 20000 e de 90000 a 100000, novamente com 14 casas onde todas as leis usuais sobre logaritmos se aplicavam.

Poucas vezes uma descoberta nova "pegou" tão depressa como foi a invenção dos logaritmos, e o resultado foi o aparecimento imediato de tabelas de logaritmos que eram mais que adequadas para a época. Os logaritmos foram bem recebidos por Kepler porque aumentavam enormemente a capacidade de computação dos astrônomos.

A FUNÇÃO LOGARÍTMICA

A maioria das abordagens atuais do ensino de logaritmo estuda primeiro o logaritmo como operador e depois a função logarítmica. Esse fato é uma espécie de resquício da utilização do logaritmo para simplificar o cálculo de números muito grandes. Até a década de 1970, era comum nos cursos da área tecnológica o uso da régua de cálculo. Nesta régua, utilizamos a escala logarítmica para fazer cálculos mais rapidamente.

Figura 24.1: Régua de cálculo.

!

Caso você queira saber como era utilizada a régua de cálculo, visite http://members.tripod.com/caraipora/aplicac_logarit.htm.

Hoje em dia, os computadores e as calculadoras científicas se desenvolveram, e a necessidade do uso do logaritmo nos processos de cálculo desapareceu. Assim, não se justifica colocar a ênfase do estudo do assunto logaritmo nessa abordagem.

Apesar de ser interessante que o professor mostre aos alunos como o logaritmo era usado nesse sentido, uma abordagem que privilegie as relações entre a função logarítmica e a exponencial, uma como inversa da outra, é mais apropriada nos dias atuais.

Assim, como você viu na Aula 40, da disciplina Pré-cálculo, página 131:

Definição 19 (Função logaritmo na base a)
O logaritmo na base a, onde $a > 0$ e $a \neq 1$, é a função denotada por $\log_a$ e definida por:

$$y = \log_a x \text{ se, e somente se, } a^y = x$$

com domínio e imagem dados por $Dom(\log_a) = (0,\infty)$ e $Im(\log_a) = \mathbb{R}$.

Na continuidade da aula, você viu que a função $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = a^y$ são funções inversas. Como conseqüência direta desse fato, você viu que uma das maneiras de esboçar o gráfico da função logarítmica $y = \log_a x$, é fazer a simetria em relação à reta $y = x$ da função $y = a^x$. Veja:

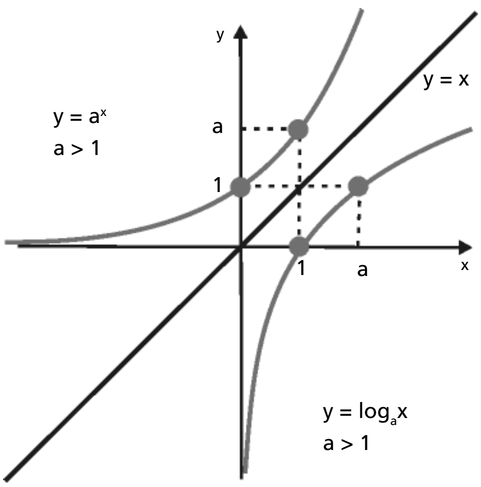


Figura 24.2: $y = \log_a x$ e $y = a^2$ com $a > 1$.

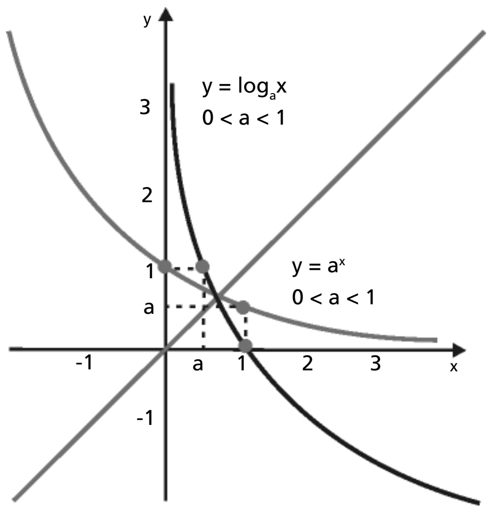


Figura 24.3: $y = \log_a x$ e $y = a^x$ com $0 < a < 1$.

!

Na construção do gráfico da exponencial e do logaritmo, é importante que o professor explore o domínio contido nos reais. Por exemplo, para construir esses gráficos através de tabelas de pontos, devem-se utilizar muitos números e, além dos números inteiros, o cálculo de imagens de números racionais não-inteiros e irracionais deve estar presente. É um bom momento para utilizar a calculadora científica.

É importante explorar também as assíntotas das funções exponencial e logarítmica.

Repare que tanto para $a > 1$ quanto para $0 < a < 1$, a função

- $y = ax$ tem assíntota na reta $y = 0$,
- $y = loga\ x$ tem assintota na reta $x = 0$.

Na proposição 4 da página 133, você viu que as propriedades do logaritmo decorrem das propriedades das potências. Vamos relembrar!

Proposição 4 (Propriedades do logaritmo na base a)
Sejam $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$ e $y > 0$ números reais quaisquer.
Valem as seguintes propriedades:

(i) $\log_a 1 = 0$ e $\log_a a = 1$

(ii) $\log_a x = 0$ se, e somente se, $x = 1$

(iii) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

(iv) $\log_a x^y = y\log_a x$

(v) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(vi) Se $a > 1$ e $x < y$, então $\log_a x < \log_a y$

(vii) Se $0 < a < 1$ e $x < y$, então $\log_a x > \log_a y$

(viii) (Mudança de base) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

Uma abordagem que relacione as funções exponencial e logarítmica enfatiza que descobrir o $y = loga\ x$ é encontrar o expoente com o qual escrevemos y na base a.

ATIVIDADES

1. Na função $y = \log_a x$, existem restrições.

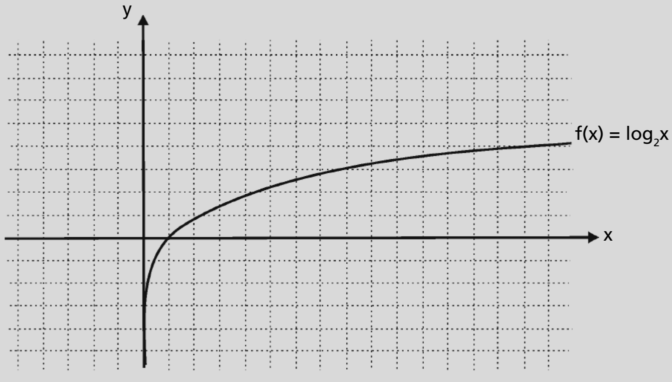
a. Que valores não podem ser assumidos pela base a?

b. Que valores não podem ser assumidos pelo número x?

c. Existe alguma restrição para o valor de y? Por quê?

d. O que ocorre se $a = 1$?

2. No plano cartesiano a seguir, temos o esboço da função f.



a. Esboce no mesmo plano cartesiano, usando caneta azul, o gráfico de $g(x) = -2 + \log_2 x$.

b. Qual é a assíntota dessa função?

c. Esboce no mesmo plano cartesiano, usando caneta vermelha, o gráfico de $h(x) = \log_2(x + 3)$.

O LOGARITMO E OS PROBLEMAS DE JUROS

O estudo de problemas de juros são uma aplicação direta do estudo das progressões aritmética e geométrica, pois podemos, por exemplo, deduzir a fórmula do montante, a partir do estudo da PA, M = Cit, que modela problemas que envolvem juros simples; já a partir da PG, M = C(1 + i)t, onde C0 é o capital inicial, i é a taxa expressa por um número decimal e t é o tempo pelo qual o capital foi empregado. O modelo se refere a juros compostos. Neste último caso, quando desejamos nos remetemos ao cálculo do tempo, precisamos usar logaritmos.

Considerar questões de perda ou ganho de dinheiro é sempre muito interessante, não apenas para Matemáticos, mas para pessoas que lidam com questões financeiras. Difícil, para nós contemporâneos, é imaginar que esse interesse seja tão antigo.

Um tablete vindo da Mesopotâmia, datado de 1700 a.C., que hoje se encontra no museu do Louvre, contém o seguinte problema: *Quanto tempo levará para que certa quantia dobre se a investirmos sob taxa de 20% ao ano?*

> **!**
>
> É interessante notar que já na época dos babilônios existia a necessidade do estudo de logaritmos para a solução de problemas, mesmo que tal conceito não houvesse sido definido.

Como sabemos, aplicando um capital C a juros compostos, podemos utilizar a fórmula $M = C(1 + i)^t$.

No problema proposto, i = 0,2. Queremos duplicar o capital, logo, M = 2C. Isso se dará num tempo t = x.

Então: $2C = C(1 + 0{,}2)^x$, ou seja, $2C = C(1{,}2)^x$.

Assim, o problema proposto reduz-se à resolução da equação: $\mathbf{1{,}2^x = 2}$, que não depende do capital inicial aplicado.

Atualmente, resolvemos esta equação facilmente utilizando logaritmos decimais, e encontramos x ≅ 3,8018. Veja a resolução a seguir:

$$1{,}2^x = 2 \Rightarrow \log 1{,}2^x = \log 2 \Rightarrow x \log 1{,}2 = \log 2 \Rightarrow x = \frac{\log 2}{\log 1{,}2} \cong 3{,}8018.$$

Os babilônios não dispunham desse recurso, eles encontraram uma solução aproximada. Consideraram que no problema existia proporcionalidade, e fizeram assim:

Calcularam $1{,}2^3 = 1{,}728$ e $1{,}2^4 = 2{,}0736$.

Concluíram que x estaria entre 3 e 4.

Pensaram, então, que x devia ter um valor entre 3 e 4 na mesma razão que 2 divide o intervalo de 1,728 a 2,0736 e montaram a proporção $\frac{x-3}{4-3}=\frac{2-1{,}728}{2{,}0736-1{,}728}$, encontrando x = 3,7870. Observe que o valor encontrado pelos babilônios foi uma boa aproximação para a época. Porém, o método utilizado por eles é um método linear, e sabemos que a representação gráfica da função não é uma reta.

ATIVIDADES

3. Expresse usando logaritmos decimais t em função de k e i, onde t é o tempo que um capital C leva para se tornar kC a uma taxa de juros de i%.

Vamos examinar agora uma outra situação: suponha que seja investido um capital inicial C_0 a uma taxa de i% ao ano.

Ao final de 1 ano, teremos um capital $\Rightarrow C_0(1+i)$.

Ao final de 2 anos, teremos um capital $\Rightarrow C_0(1+i)^2$.

Ao final de 3 anos, teremos um capital $\Rightarrow C_0(1+i)^3$.

Ao final de t anos, teremos um capital $\Rightarrow C_0(1+i)$, e nosso objetivo é investigar os valores assumidos por C incrementando valores para n.

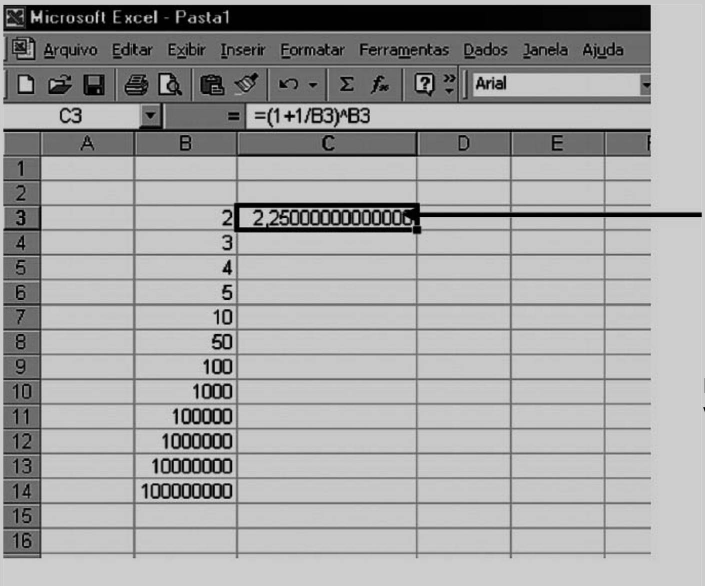
4. Com o auxílio de uma calculadora científica, preencha a tabela.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	
2	
3	
4	
5	
10	
50	

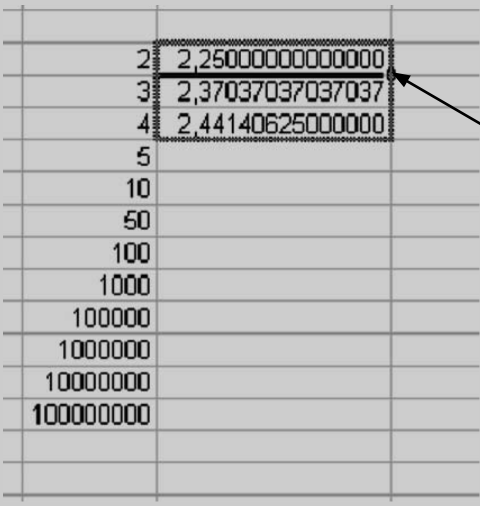
100	
1000	
10000	
100000	
1000000	
10000000	

!

Caso não tenha uma calculadora científica, você pode utilizar o EXCEL para isso. Veja como:



Aqui você escreve a fórmula que deseja, tomando o cuidado de, em vez de digitar a variável, digitar o endereço da célula que nesta planilha é B3. A fórmula, em vez de $(1+1/n)^n$, fica, então, "= (1+1/B3)^B3". Para calcular os outros valores, basta clicar na célula C3. Ela ficará acionada, e você clica no vértice direito inferior e escorrega para baixo. Veja a próxima figura.



Clique neste canto e arraste para baixo: todos os valores desta função irão aparecendo.

É importante colocar o máximo de casas decimais que o EXCEL permite.

Em uma primeira análise da tabela que você preencheu, surgem alguns questionamentos:

• Quando o valor de n cresce, o valor de C cresce também?

• Será que C cresce acima de qualquer valor? Podemos encontrar um valor de C, por exemplo, maior do que 20? Veremos que não.

Esta seqüência é limitada, convergente e estritamente crescente. Assim, quanto maior for o número de capitalizações (n), maior será o montante recebido (C), mas esse montante não cresce infinitamente.

Para definir $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, temos de verificar que essa seqüência é limitada e estritamente crescente. Como toda seqüência de números reais crescente e limitada é convergente, concluímos que existe $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Assim, definimos o $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

Além disso, como a seqüência é crescente, pelas contas feitas, pode-se afirmar que:

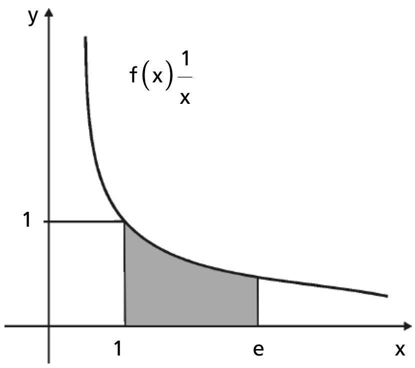
$2{,}71828 < e < 2{,}793$

($n = 10^6$ na tabela).

Esses resultados são facilmente encontrados em livros de Análise Real.

> **!** O número irracional e recebeu essa letra porque Leonhard Euler foi um dos primeiros matemáticos a estudar suas propriedades.

Uma outra maneira de definir o número *e* é considerar a área da região do primeiro quadrante localizada pela curva $y = \dfrac{1}{x}$. Nesse caso, $1 = \int_1^x \dfrac{1}{x}$, e o valor de x é o número *e*.



Adaptado do livro *Carta a uma Princesa da Alemanha*, Leonhard Euler retrata a importância do número e. Observe:

> Minha princesa: (...) no princípio criou Deus
> O Céu e a Terra. A Terra estava vazia
> E nua, e as trevas cobriam a face do abismo;
> E o espírito de Deus era levado
> Por cima das águas.
> Então disse Deus:
> — Faça-se a luz.
> E fez-se a Luz.
> E viu Deus que a Luz era boa;
> Então dividiu a Luz das Trevas.
> E a chamou de Luz de Dia;
> e as trevas, Noite.
> E da tarde e da manhã fez-se o primeiro dia.

Todo esse texto poderia ser resumido, sem perda de generalidade por:

> "Então disse Deus, π, i, 0, e, 1 e fez-se o Universo."
> Leonhard Euler

Esses cinco números mencionados são os mais importantes da Matemática. Eles foram reunidos por Euler (1703-1783) na famosa relação:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

O que representam esses números na matemática?

0 e 1	Aritmética
π	Geometria
i	Álgebra
e	Análise Matemática

FAZENDO CONTAS

Como dissemos antes, a principal utilidade dos logarimos até a difusão dos computadores e calculadoras era fazer contas. Mas como isso funcionava?

Nosso enfoque agora é com o uso de logaritmos decimais. É usual escrevermos $\log_{10} x$ simplesmente como $\log x$. Para calcular logaritmos sem uso de calculadoras, é necessário saber suas propriedades operatórias e consultar uma tabela com os valores de logaritmos chamada de tábua de logaritmos.

No nosso caso, vamos usar uma tábua com 4 casas decimais e colocamos nela apenas os números de 0 a 100, que serão suficientes para vermos sua utilização.

Tabela 24.1: Tábua de logaritmos

TÁBUA DE LOGARITMOS									
N	**m**	**N**	**m**	**N**	**m**	**N**	**m**	**N**	**m**
1	0000	21	3222	41	6128	61	7853	81	9085
2	3010	22	3424	42	6232	62	7924	82	9138
3	4771	23	3617	43	6335	63	7993	83	9191
4	6021	24	3802	44	6435	64	8062	84	9243
5	6990	25	3979	45	6532	65	8129	85	9294
6	7782	26	4150	46	6628	66	8195	86	9345
7	8451	27	4314	47	6721	67	8261	87	9395
8	9031	28	4472	48	6812	68	8325	88	9445
9	9542	29	4624	49	6902	69	8388	89	9494
10	0000	30	4771	50	6990	70	8451	90	9542
11	0414	31	4914	51	7076	71	8513	91	9590
12	0792	32	5051	52	7160	72	8573	92	9638
13	1139	33	5185	53	7243	73	8633	93	9685
14	1461	34	5315	54	7324	74	8692	94	9731
15	1761	35	5441	55	7404	75	8751	95	9777
16	2041	36	5563	56	7482	76	8808	96	9823
17	2304	37	5682	57	7559	77	8865	97	9868
18	2553	38	5798	58	7634	78	8921	98	9912
19	2788	39	5911	59	7709	79	8976	99	9956
20	3010	40	6021	60	7782	80	9031	100	0000

Observe que o valor que consta da tábua é a parte decimal do número. Para determinar o logaritmo a partir da tábua, temos de considerar também a menor potência de 10 em que o número está localizado.

Assim, de acordo com a tábua, log 2 = 0,3010, pois 2 é 2×10^0.

Log 20 = log 2×10^1 = log 2 + log 10^1 = 0,3010 + 1 = 1,3010.

!

A parte decimal do logaritmo é chamada de mantissa. Todo número real está compreendido entre duas potências de 10, 10^x e 10^{x+1}. Esse valor de x será chamado de característica do logaritmo.

ATIVIDADES

5. Calcule usando a tábua.

a. log 7200.

b. log 0,0039.

Agora estamos prontos para usar o logaritmo como operador. Suponha que desejamos fazer o cálculo aproximado de 7200x0,0039.

Sabemos pelas propriedades operatórias que log (7200x0,0039) = log 7200 + log 0,0039.

> **!**
>
> Lembre-se de que a função $f(x) = \log_a x$ possui as seguintes propriedades:
> $f(xy) = f(x) + f(y)$
> $f(x/y) = f(x) - f(y)$
> $f(x^y) = yf(x)$.
> Considere sempre as restrições necessárias aos valores assumidos por x e y.

Assim,

log (7200x0,0039) ≅ 3,8573 - 2,4089 = 1,4484 = 1 + 0,4484 = log 10 + 0,4484.

Agora precisamos novamente consultar a tábua. Veja que o valor mais próximo da mantissa 0,4484 é o 4472, que corresponde ao 28.

Temos, então, que log (7200x0,0039) ≅ log 10 + log 28 = log (280).

Como a função logarítmica é injetora, 7200x0,0039 ≅ 280.

> **!**
>
> Se uma função é injetora, temos que f(x) = f(y) implica x = y para qualquer x e y pertencentes ao domínio da função.

Fazendo o cálculo com a calculadora, você encontra 7200x0,0039 = 280,8. Quanto mais números tiver a tábua que utilizamos, mais próximos estaremos do resultado real.

6. Calcule, utilizando a tábua de logaritmos, o valor aproximado de: 7200÷0,0039. Compare o resultado com a conta feita na calculadora ou se quiser no Excel.

PG VIRA PA?

Uma propriedade dos logaritmos em qualquer base é a seguinte:

Se os valores de uma seqüência (a_1, a_2, ..., a_n, ...) de números positivos crescem em PG, os respectivos logaritmos crescerão em PA.

Considere a PG onde o primeiro termo é a1, e a razão é q, onde a1 e q são números reais positivos. Vamos aplicar o logaritmo na base c ($c > 0$ e $c \neq 1$) a cada termo dessa PG. Observe a **Tabela 24.2**.

Tabela 24.2: Seqüência de uma PG e de logaritmos de uma PG.

a_1	$\log_c a_1$
$a_2 = a_1.q$	$\log_c a_2 = \log_c a_1 . q = \log_c a_1 + \log_c q$
$a_3 = a_1.q^2$	$\log_c a_3 = \log_c a_1 . q^2 = \log_c a_1 + \log_c q^2 = \log_c a_1 + 2\log_c q$
$a_4 = a_1.q^3$	$\log_c a_4 = \log_c a_1 . q^3 = \log_c a_1 + \log_c q^3 = \log_c a_1 + 3\log_c q$
$\vdots$	$\vdots$
$a_n = a_1.q^n$	$\log_c a_n = \log_c a_1 . q^n = \log_c a_1 + \log_c q^n = \log_c a_1 + n\log_c q$
$\vdots$	$\vdots$

Assim, se a seqüência de números a_1 a_2, a_3, ..., a_n, ... é uma PG de razão q, a seqüência formada por seus logaritmos na base c ($c > 0$ e $c \neq 1$): $\log_c a_1$, $\log_c a_2$, $\log_c a_3$, ..., $\log_c a_n$, ... é uma PA de razão $\log_c q$.

E a recíproca é valida, ou seja, se a seqüência de logaritmos na base c (onde $c > 0$ e $c \neq 1$): $\log_c a_1$, $\log_c a_2$, $\log_c a_3$, ..., $\log_c a_n$, ... forma uma PA de razão r, então a seqüência a_1 a_2, a_3, ..., a_n, ... é uma PG. A razão dessa PG em função de r será c^r. Verifique! Use o fato de que $\log_c c = 1$, assim, $r = r.\log_c c$.

ATIVIDADES

7. A progressão geométrica (a, b, c) tem razão igual a 10. Dê o valor de:

a. log c - log b =

b. log b - log a =

c. log c - log a =

8. Considere a seqüência infinita (log 40; log 20; log 10; log 5; ...).

a. Mostre que essa seqüência é uma PA.

b. Qual é o valor numérico da razão dessa PA?

ATIVIDADE FINAL

Construa o gráfico das funções $f(x) = \log 2\ x$ e $g(x) = -3$ num mesmo plano cartesiano e determine os valores de x para que:

a) $f(x) = g(x)$.

b) $f(x) > g(x)$.

c) $f(x) \leq g(x)$.

CONCLUSÃO

Esta aula apresentou algumas alternativas didáticas no ensino de logaritmos possíveis de serem implementadas no currículo do Ensino Médio, onde você pôde observar alguns tipos de seqüências e suas relações com os logaritmos. Além disso, também utilizamos o conceito de função inversa na própria definição e o de função injetora no uso das tabelas.

O uso de calculadoras científicas ou do próprio EXCEL é uma importante ferramenta, pois agiliza algumas etapas e possibilita a investigação de outros problemas.

Pesquise mais sobre esse assunto, você vai descobrir um mundo impressionante de aplicações dos logaritmos na própria Matemática e em outras áreas do conhecimento.

RESUMO

Nesta aula, você observou que o estudo do logaritmo não deve estar reduzido somente ao seu cálculo e ao uso sem aplicações de suas propriedades.

Nesse primeiro estudo dos logaritmos, abordamos sua aparição dentro da História da Matemática, com o uso das tábuas e suas vantagens no uso de cálculos com números muito grandes ou muito pequenos e na busca da solução de um problema de juros compostos.

Tratamos a função logarítmica como função inversa da função exponencial e fizemos um breve resumo das propriedades já vistas no curso de Cálculo. Relacionamos o logaritmo com a PA e a PG, e mostramos uma seqüência, de onde surge o famoso número *e*, tão importante na análise Matemática.

AUTO-AVALIAÇÃO

Durante a aula, você conheceu algumas possibilidades de contextualização do logaritmo. Você já vivenciou sobre algumas dessas abordagens? Registre os aspectos positivos e negativos do uso de logaritmos e em que momentos podemos fazer uso desse conceito.

É relevante você entender que a abordagem feita na definição do logaritmo utilizando a função exponencial requer cuidados quanto ao entendimento do aluno sobre número real, pois esse assunto não é bem visto nos Ensinos Fundamental e Médio. Dessa forma, é importante ser feito um bom trabalho com potências.

Busque pensar em outras atividades como a Atividade Final, onde a base do logaritmo é um número entre 0 e 1 para o estudo de desigualdades logarítmicas. Todas as atividades são importantes de serem feitas, cada uma tem um objetivo e um contexto diferente. Caso tenha dúvidas, troque idéias com seus colegas ou consulte o tutor.

INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você verá outra definição do logaritmo e mais aplicações práticas para se trabalhar no Ensino Médio.

RESPOSTAS

Atividade 1

a. Todos os reais não-positivos e o 1.

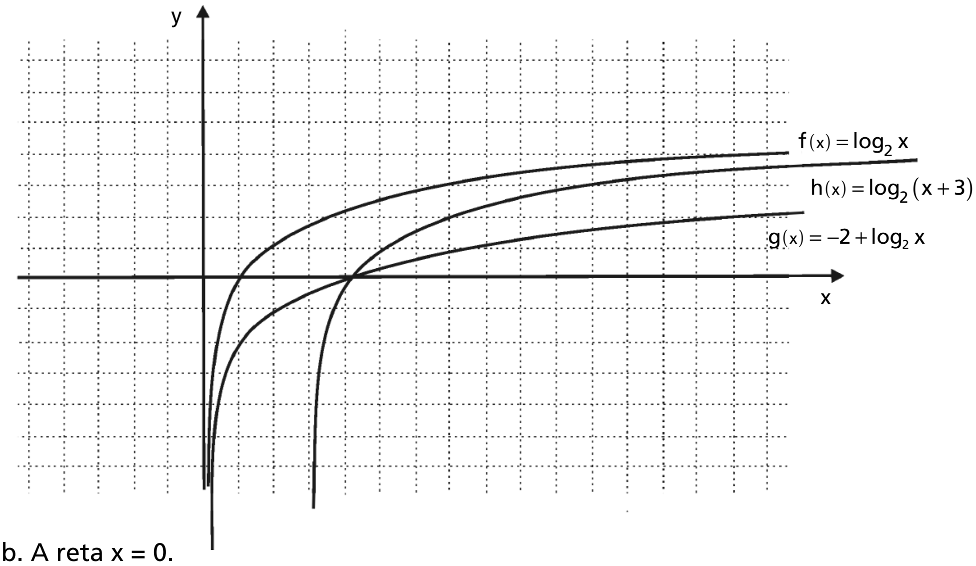
b. Todos os reais não-negativos.

c. Não, o y é o expoente do número x na base *a,* e podemos elevar esse número *a* a qualquer expoente real.

d. Teríamos a função constante $y = 1^x = 1$.

Atividade 2

Veja, no plano cartesiano a seguir, as respostas das letras a e c.



b. A reta x = 0.

Atividade 3

$kC = C(1 + i)^t \Rightarrow k = (1 + i)^t \Rightarrow \log k = \log (1 + i)^t \Rightarrow t = \dfrac{\log k}{\log(1+i)}$. Este resultado também pode ser expresso utilizando apenas um logaritmo, que é $\log_{1+i} k$. Basta usar o resultado de mudança de base.

Atividade 4

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,3703703
4	2,441406
5	2,48832
10	2,5937424
50	2,691588
100	2,7048138
1000	2,7169239
10000	2,7181459
100000	2,7182682
1000000	2,7182805
10000000	2,7182817

Atividade 5

a. 7200 = 7,2 x 103. Identificamos sua característica, que é 3. Vamos procurar a mantissa na tabela, no número 72. Encontramos 8573.

Assim, log 7200 = 3 + 0,8573 = 3,8573.

b. 0,0039 = 3,9 x 10^{-3}, logo, sua característica é -3. Procuramos 39 na tábua e encontramos 5911. Então, log 0,0039 = -3 + 0,5911 = -2,4089.

Atividade 6

a. log (7200¸0,0039) = log 7200 - log 0,0039 $\cong$ 3,8573 + 2,4089 = 6,2662 = 6 + 0,2662 $\cong$.log10^6 + log 1,8 = log10^6.18 = log 1.800.000. Assim, 7200÷0,0039 $\cong$ 18.000.000.

b. O valor exato da conta é 1.846.153,8.

Atividade 7

Se (a, b, c) é uma PG de razão 10, podemos escrever que c = 10b, b = 10a e c = 100a.

a. log c - log b = log 10b - log a = log 10 + log b - log b = log 10 = 1.

b. log b - log a = log 10a - log a = log 10 + log a - log a = log 10 = 1.

c. log c - log a = log 100a - log a = log 100 + log a - log a = log 100 = 2.

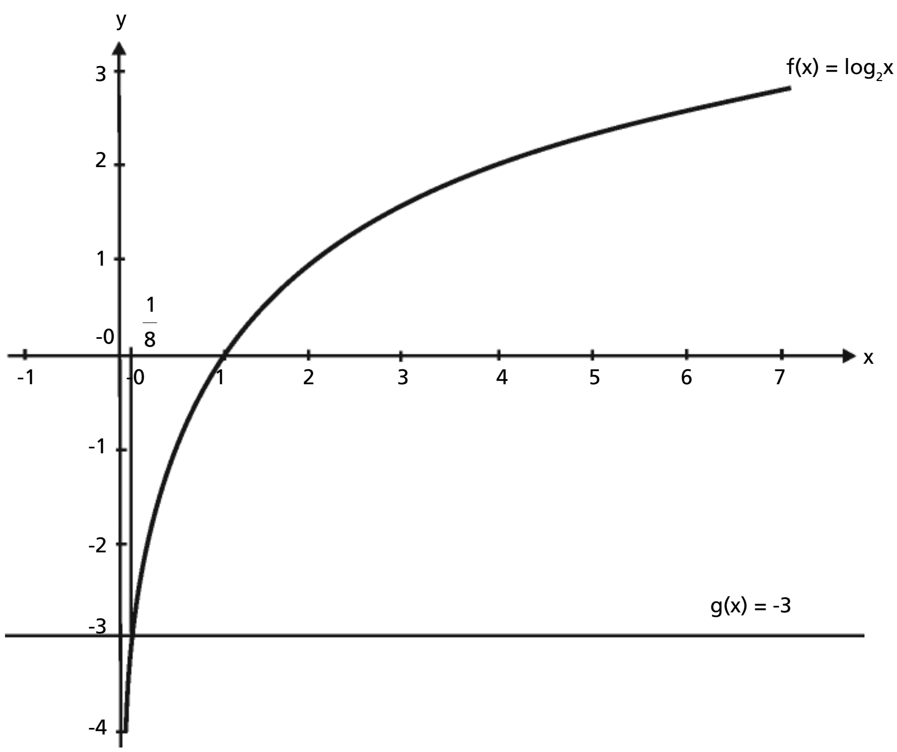
Atividade 8

Considere a seqüência infinita (log 40; log 20; log 10; log 5; ...).

a. Considere a seqüência (40, 20, 10, 5...). Essa seqüência é uma PG de razão ½. Logo, usando o resultado apresentado, temos que a seqüência (log 40; log 20; log 10; log 5; ...) é uma PA.

b. log ½.

Atividade Final



a. f(x) = g(x) quando x = 1/8.

b. x > 1/8.

c. x ≤ 1/8.

AULA 25

Um pouco mais sobre logaritmos

Meta da aula

Instrumentalizar o ensino de logaritmos.

objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Analisar o comportamento no infinito da função logarítmica.
- Relacionar o modelo do logaritmo a alguns fenômenos.
- Utilizar outra maneira de conceituar logaritmo.

Pré-requisitos

Para o desenvolvimento desta aula, é necessário que você saiba funções e logaritmo.

INTRODUÇÃO

Nesta aula, daremos continuidade ao estudo de logaritmo que iniciamos na Aula 24. Discutiremos mais algumas características da função logarítmica e veremos também algumas de suas aplicações. Por fim, apresentaremos a você outra maneira de conceituar logaritmo, por meio de uma abordagem defendida por muitos matemáticos.

Nosso objetivo, com esta aula, não é de que você apenas utilize as abordagens apresentadas em sala de aula, mas que você se instrumentalize na prática de problemas que envolvam logaritmos.

!

Lembre-se de acessar Disciplina na Plataforma Cederj. Lá você encontrará diferentes animações e recursos que auxiliarão sua aprendizagem na aula.

UMA FUNÇÃO QUE CAMINHA LENTAMENTE PARA O INFINITO...

Você já deve ter visto que a função logarítmica é mais lenta que qualquer função polinomial, enquanto a função exponencial e mais rápida. Com isso, dizemos que na função

$y = \log_a x$, para "grandes" variações da variável x, a variável y sofre "pequenas" variações.

ATIVIDADE

1. Com o uso de uma calculadora científica ou do Excel, calcule:

x	log x	log (log x)	log (log (log x))
10^3	3	0,48	– 0,32
10^{10}			
10^{30}			
10^{100}			
10^{300}			
$10^{1.000}$			
$10^{1.000.000}$			

RESPOSTA COMENTADA

Observando o quadro preenchido na atividade, você pode constatar que, quando aplicamos o logaritmo, os valores de log x já estão bem mais próximos que os valores de x.

Tabela 25.1: log x

x	log x
10^3	3
10^{10}	10
10^{30}	30
10^{100}	100
10^{300}	300
$10^{1.000}$	1.000
$10^{1.000.000}$	1.000.000

Assim, 10^3 está bem mais longe de 10^{10} do que 3 de 10.
Calculando o valor de log (log(x)), aproximamos esses valores ainda mais.

Tabela 25.2: log (log x)

x	log (log (log x))
10^3	0,48
10^{10}	1
10^{30}	1,5
10^{100}	2
10^{300}	2,5
$10^{1.000}$	3
$10^{1.000.000}$	6

Veja que de 10^3 até 10^{10} temos uma diferença de 9.999.999.000, enquanto de log (log 10^3) para log (log 10^{10}) essa diferença é de apenas 0,52.

Tabela 25.3: log (log (log x))

x	log (log (log x))
10^3	–0,32
10^{10}	0
10^{30}	0,2
10^{100}	0,3
10^{300}	0,4
$10^{1.000}$	0,5
$10^{1.000.000}$	0,8

Acompanhando a tabela, você pode observar que os valores de log (log (logx)) estão todos com diferença menor que uma unidade, apesar de diferenças significativas nos intervalos de x.

!

Uma outra maneira de estudar a "lentidão" da função logarítmica no infinito é fazer uma tabela na qual se analise os valores de x, (log x)/x, (log x)/x^2, (log x)/x^3, ...
Não é difícil encontrar a demonstração que $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^a} = 0$, mas no Ensino Médio devemos analisar e comparar a velocidade das função polinomiais, da exponencial e do logaritmo.

APLICAÇÕES PRÁTICAS

Um exemplo prático de um modelo onde temos presente uma grandeza de crescimento muito lento para o infinito é o de intensidade relativa β de uma onda sonora, medida em decibel (dB), definida por:

$$\beta = 10 \,.\, \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Nesse caso, é a intensidade sonora medida em Watt/m^2 e I_0 corresponde a intensidade sonora de referência.

Tabela 25.4: Intensidade relativa de uma onda sonora. Extraído de Resnick, Halliday e Krane no livro Física 2, 5ª ed. Editora LTC, 2003.

Situação Particular	I	β(dB)
Limiar da audição humana	10^{-12}	0
Roçar de folhas	10^{-11}	10
Sussurro a 1 metro	10^{-10}	20
Rua com pouco tráfego	10^{-9}	30
Escritório ou sala de aula	10^{-7}	50
Conversa normal a 1metro	10^{-6}	60
Martelada a 1 metro	10^{-3}	90
Grupo de rock	10^{-1}	110
Limiar de dor	1	120
Turbina a 50 metros	10	130
Motor de nave espacial a 50 metros	10^{8}	200

Na Física, você já deve ter ouvido falar de ordem de grandeza.

Vamos relembrar.

Um número X escrito em notação científica, ou seja, $X = Nx10^L$, onde $1 \leq N < 10$, possui ordem de grandeza:

10 se $A < 3{,}16$ e

10^{L+1} se $A \geq 3{,}16$.

Assim, por exemplo, se temos 8x104, a ordem de grandeza é 5, e se temos $2x10^4$, a ordem de grandeza é 10^4.

Determinar a ordem de grandeza de um número é um método de arredondamento que consiste em arredondar log X para um número inteiro.

Assim, no número X escrito em notação científica, temos:

$\log X = \log Nx10^L = \log N + \log 10^L = \log N + L$.

Então, log X será arredondado para L se $\log N < 0{,}5$, e para L + 1 se $\log N \geq 0{,}5$.

Nessa aproximação, o número que divide os dois casos é o número N tal que $\log N = 0{,}5$. E qual é esse número? Para descobrir, basta usar a definição de logaritmo.

$$\text{Log } N = 0{,}5 \Rightarrow N = 10^{0{,}5} \Rightarrow N = \sqrt{10}$$

Dessa forma, $N \cong 3{,}16$.

Temos outro exemplo de aplicação à Física no problema a seguir, adaptado de uma questão de vestibular.

Após adicionado o *flash* de uma câmera fotográfica, a bateria começa imediatamente a recarregar o capacitor que armazena uma quantidade de carga elétrica (medida em Coulomb) dada por:

$Q = Q(t) = Q_0 (1 - e–A^{-\lambda t})$,

onde:

– Q(t) igual à carga elétrica armazenada até o instante t, medida em segundos;

– Q_0 igual à carga máxima;

– λ uma constante igual a $\frac{1}{2}$.

a. Lembrando que ln (x) é o logaritmo na base e do número x, expresse o tempo t em função de Q e Q_0.

Aqui se pede que se expresse tempo em função de Q e Q_0. Isso significa que temos de isolar o t!!! Na fórmula, temos:

$Q = Q(t) = Q_0(1 - e^{-\frac{t}{2}})$, pois $\lambda = \frac{1}{2}$.

$Q = Q_0\,(1 - e^{-\frac{t}{2}}) \Rightarrow 1 - e^{-\frac{t}{2}} = \frac{Q}{Q_0} \Rightarrow e^{-\frac{t}{2}} = 1 - \frac{Q}{Q_0}$.

Aplicando log na base e, ou seja, ln, de ambos os lados temos:

$$\text{In}\, e^{-\frac{t}{2}} = \text{In}\left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right) \Rightarrow -\frac{t}{2} = \text{In}\left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right) \Rightarrow t = -2\text{In}\left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right) \text{ou } t = \text{In}\left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right)^{-2}.$$

b. Considerando In 10 = 2,3, qual o tempo necessário, em segundos, para que o capacitor recarregue 90% da carga máxima ($Q = 0{,}9Q_0$)?

Temos que: $t = -2\ \text{In}\left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right)$ do item (a).

Para fazer $Q = 0{,}9Q_0$, basta substituir: $t = -2\ \text{In}\left(1 - \frac{0{,}9Q_0}{Q_0}\right)$.

Cancelando Q_0, encontramos:

$t = -2\ \text{In}\ (1 - 0{,}9) \Rightarrow t = -2\ \text{In}\ (0{,}1) \Rightarrow t = -2\ \text{In}\left(\frac{1}{10}\right) \Rightarrow$

$t = -2(\text{In}1 - \text{In}10) \Rightarrow t = -2\ (0 - 2{,}3) \Rightarrow t = 4{,}6.$

Assim, o tempo é igual a 4,6 segundos.

OUTRAS APLICAÇÕES

ATIVIDADE

2. Segundo Resnick e Halliday (2003), a intensidade relativa I_R de uma onda sonora, medida em decibel (dB), é definida por:

$I_R = 10 \,.\, \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$,

sendo **I** a intensidade sonora medida em Watt/m² e I_o a intensidade sonora de referência (correspondente ao limiar da audição humana), também medida em Watt/m².

Apresentam-se, a seguir, os valores em **dB** das intensidades relativas (IR) das ondas sonoras correspondentes a algumas situações particulares.

Situação Particular	I_R (dB)
Limiar da audição humana	0
Sussurro médio	20
Conversa normal	65
Limiar da dor	120

Na unidade **Watt/m²**, pode-se afirmar que:
(A) a intensidade sonora do sussurro médio é menor que 10 vezes a intensidade sonora do limiar da audição humana;
(B) a intensidade sonora do limiar da dor é 120 vezes a intensidade sonora do limiar da audição humana;
(C) a intensidade sonora do limiar da dor é igual a 1010 vezes a intensidade sonora de um sussurro médio;
(D) a intensidade sonora do limiar da dor é, aproximadamente, o dobro da intensidade sonora de uma conversa normal;
(E) a intensidade sonora de uma conversa normal é menor 104 vezes que a intensidade sonora de um sussurro médio.

!

O contexto gerado na Atividade 2 é o mesmo do exemplo do primeiro tópico da aula. Aqui, em vez da variável β, ela é chamada de I_R.

Na química, você conhece a escala do pH. Quando um ácido ou uma base são dissolvidos na água, formam-se H_3O^+ e OH^-, que dão o caráter ácido ou básico de uma solução.
Quando $[H_3O^+] = [OH^-] = 10^{-7}$ mol/l, a solução é dita neutra.
Quando $[H_3O^+] > [OH^-]$, ou seja, $[H_3O^+] > 10^{-7}$ mol/l, a solução é dita ácido.
Quando $[H_3O^+] < 10^{-7}$ mol/l, temos uma base.

O químico Sorensen definiu como pH de uma solução neutra como $-\log 10^{-7} = \log (10^{-7})^{-1}$.

Assim, a solução será neutra quando tiver pH = 7, base quando tiver pH > 7 e ácido quando pH < 7.

!

Os logaritmos também são usados na música. Para ler a respeito, visite: http://www.geocities.com/matematicacomprazer/logaritmomusica.html.

Na informática, encontramos o uso de potências de 2, ou seja, o logaritmo utilizado é de base 2. Temos um exemplo do uso de logaritmo na relação entre as grandezas "profundidade da cor" e "número de cores utilizadas na representação na tela de um monitor de computador". Veja:

Tabela 25.5: Profundidade da cor

Número de cores	Profundidade de cor
16	4
256	8
65.536	16
16.777.216	24

ATIVIDADE

3. Responda com base na **Tabela 25.5**.
a. Chamando o número de cores de x e a profundidade de y, escreva y em função de x.
b. Monitores e placas de vídeo de uso profissional são capazes de reproduzir 4.294.967.296 cores. Qual a respectiva profundidade de cor?

!

Além dos problemas de juros, os problemas relacionados ao crescimento populacional também são resolvidos usando logaritmo.

Que a equação diz que o crescimento (ou decrescimento) da grandeza em cada instante é proporcional ao valor da grandeza naquele instante?

A resposta é: chamando a grandeza de Y, temos $\frac{dY}{dt} = k.Y$ quando $t \to 0$, que é uma equação diferencial, e para resolvê-la, precisamos separar as variáveis, obtendo: $\frac{dY}{Y} = kdt$.

Integrando, temos $\ln Y = kt + c \Rightarrow Y = e^{kt+c} = e^{kt}.e^{c} = Ce^{kt}$.

Portanto, podemos dizer que a equação usada para resolver esse tipo de situação é

$Y = Ce^{kt}$, onde **e** é a base dos logaritmos naturais.

Para esclarecer alguns nomes : $P = P_0.e^{kt}$;

$t \rightarrow$ tempo;

$k \rightarrow$ taxa de crescimento ou decrescimento;

$P_0 \rightarrow$ valor inicial;

$P \rightarrow$ valor final; $e^{kt} \rightarrow$ fator de crescimento ou decrescimento.

ATIVIDADE

4. Determine a taxa de crescimento de uma espécie que no início do ano tinha uma população de 100 e ao final desse mesmo ano tinha uma população de 110. E se a população fosse 2000, qual seria após 5 anos e meio?

INDO UM POUCO ALÉM DO ENSINO MÉDIO: A ÁREA DA HIPÉRBOLE

Uma outra maneira de construir a teoria de logaritmos é através de uma associação geométrica à área da hipérbole. O Matemático Euler chamava os logaritmos naturais de *logaritmos hiperbólicos*. Ele definiu o logaritmo natural de um número real positivo a como a área abaixo da hipérbole no intervalo [1, a]. A hipérbole em questão é o ramo positivo da função $f(x) = \frac{1}{x}$, quando consideramos que o domínio é o conjunto R_+^*.

!

Você viu esta hipérbole na Aula 17. Nela, porém, consideramos seus dois ramos. Aqui consideraremos somente o ramo do 1º quadrante.

Para cada número real $\mathbf{a \geq 1}$, chamaremos $\mathbf{H_1^a}$ a faixa de hipérbole formada pelos pontos do plano cujas coordenadas (x, y) satisfazem às desigualdades $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ e $1 \leq x \leq a$.

E esta área será definida como **ln a.** Portanto, **ln a = área** $\mathbf{H}_1^a$. Veja na figura a seguir:

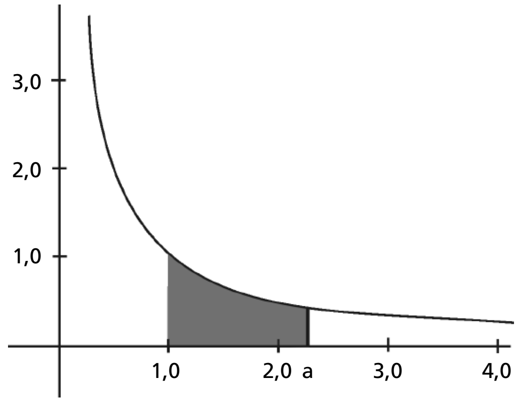


Figura 25.1: Definição do logaritmo natural de a, onde a ≥ 1.

Agora, no caso em que **a ≤ 1** , teremos **–ln a = área**($\mathbf{H}_a^1$). Veja na **Figura 25.2**:

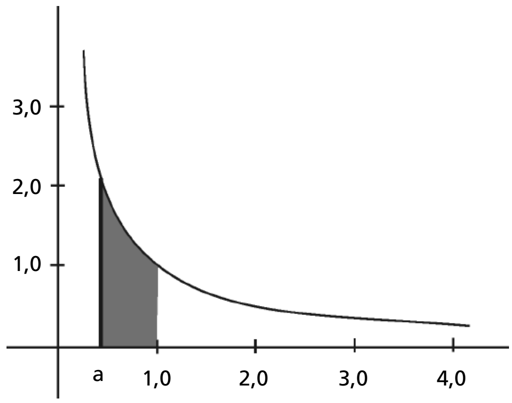


Figura 25.2: Definição do logaritmo natural de a, onde a ≤ 1.

O fato de que a área da faixa de hipérbole $\mathbf{H}_a^1$ é igual ao logaritmo natural de *a* pode ser tomado como definição de logaritmo e permite desenvolver toda a teoria de logaritmos.

Vamos calcular aproximadamente o ln 2. Para isso, vamos dividir o intervalo [1, 2] em quatro partes iguais e somar as áreas dos quatro retângulos sob o gráfico da hipérbole. Veja:

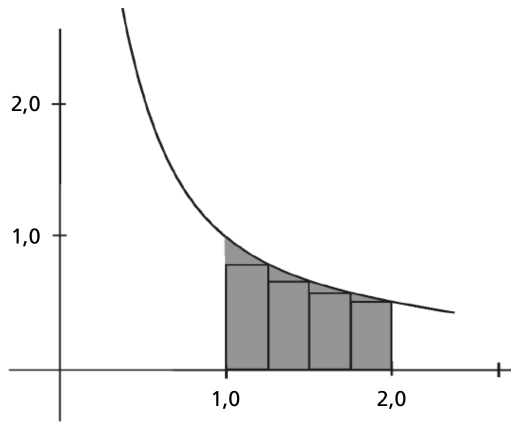


Figura 25.3: Retângulos sob o gráfico da hipérbole.

Observe que os quatro retângulos têm base igual a 0,25. As alturas são determinadas pelas imagens de cada x, da divisão do intervalo. São eles 1,25, 1,5, 1,75 e 2. Suas imagens são $\frac{1}{1.25} = 0,8$, $\frac{1}{1.5} \cong 0,666...$, $\frac{1}{1.75} \cong 0,57$ e $\frac{1}{2} = 0,5$. Dessa forma, calculando as áreas obtemos:

$$A_1 = \frac{0,5x0,8}{2} = 0,2$$

$$A_2 \cong \frac{0,5x0,7}{2} = 0,175$$

$$A_3 \cong \frac{0,5x0,57}{2} = 0,143$$

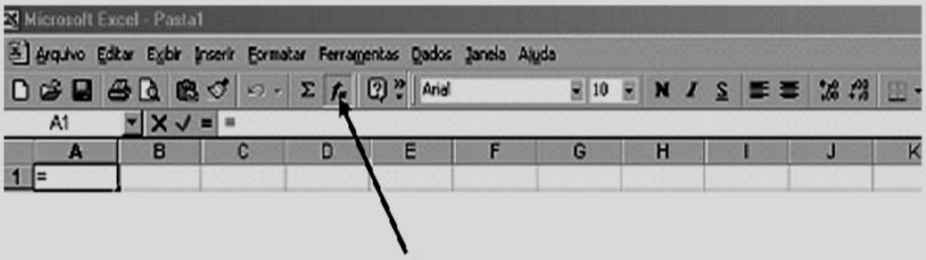
$$A_4 \cong \frac{0,5x0,5}{2} = 0,125$$

Portanto, $\ln 2 \cong A_1 + A_2 + A_2 + A_2 \cong 0,2 + 0,175 + 0,143 + 0,125 = 0,643$. Se verificarmos o valor aproximado de ln 2 no Excel, encontramos o número 0,693147180559945, pois esse programa trabalha com 15 casas decimais. Veja que o erro acontece na segunda casa decimal, e é de 0,05.

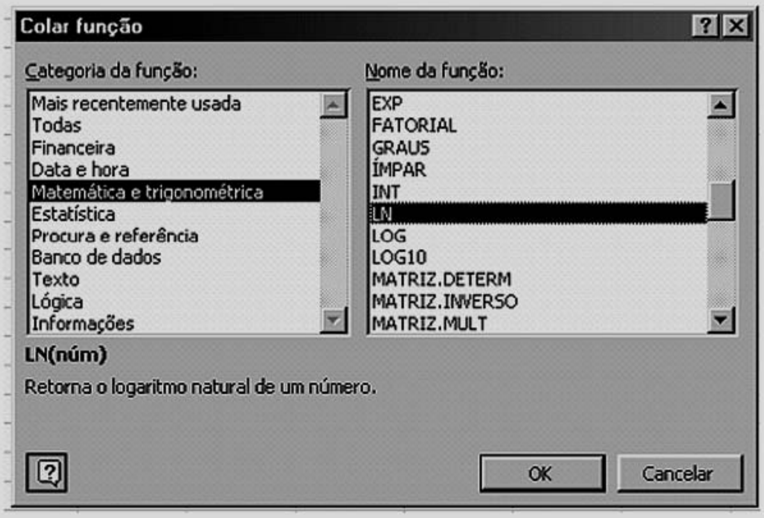
!

Veja como, utilizando o Excel, você pode determinar valores aproximados para os logaritmos.

• Abra o programa Excel. No alto da tela, você verá vários ícones e comandos. Clique em *fx* , conforme mostra a seta da ilustração a seguir.



• Na tela a seguir, você clicará em categoria da função *Matemática* e *Trigonométrica* (coluna à esquerda) e em nome da função (coluna à direita), que pode ser *LN*, *LOG* ou *LOG10*, dependendo do que você precise. O *LN* calcula o logaritmo natural de um número n; já o LOG determina o logaritmo na base desejada, e o *LOG10* calcula o logaritmo decimal.



ATIVIDADE

5. Agora, encontre uma aproximação melhor para ln 2, dividindo o intervalo em oito partes iguais.

COMENTÁRIO

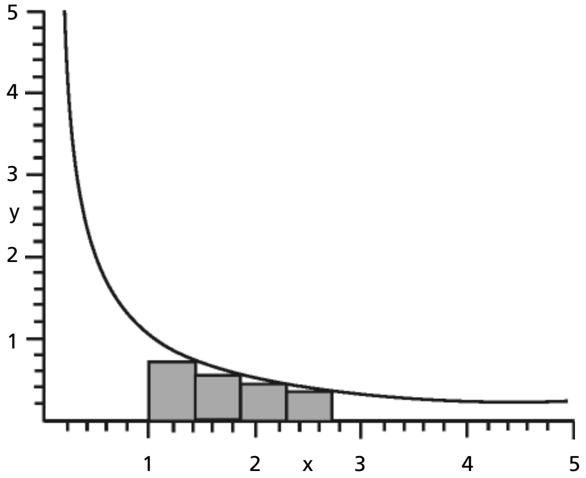
O fato interessante dessa abordagem do logaritmo é que não há necessidade de se falar em expoentes irracionais, o que acontece quando definimos o logaritmo por meio da função exponencial.

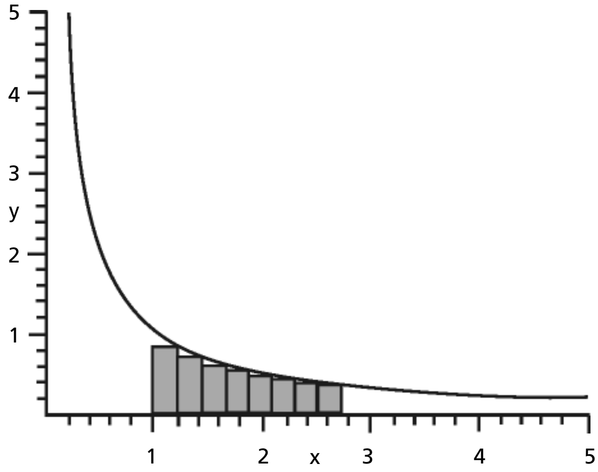
O NÚMERO e

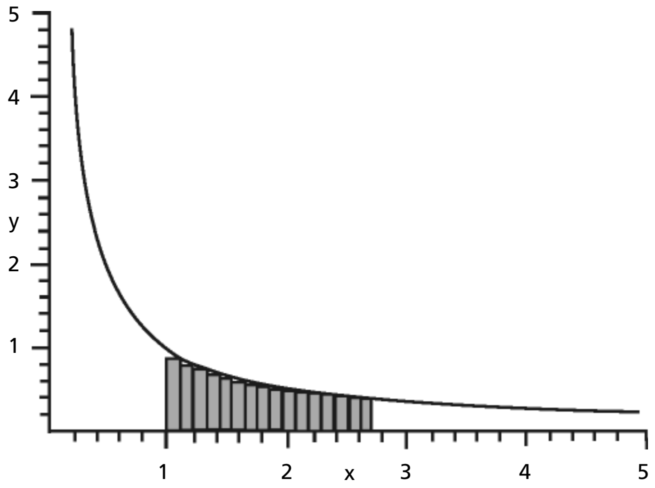
Como você viu na Aula 24, nesta abordagem, o número *e* é definido como aquele número que torna a área de H_1^a igual a 1.

Vamos apresentar uma aproximação para o número *e*, usando a hipérbole. Para isso, utilizaremos 3 gráficos:

- **Gráfico I:** dividindo o intervalo [1,e] em 4 partes iguais.
- **Gráfico II:** dividindo o intervalo [1,e] em 8 partes iguais.
- **Gráfico III:** dividindo o intervalo [1,e] em 16 partes iguais.







Obteremos como aproximações para a área, em cada caso, os seguintes valores:

Gráfico I: área $H_1^e \cong A_4 = 0,8772688698$.

Gráfico II: área $H_1^e \cong A_8 = 0,9354219910$.

Gráfico III: área $H_1^e \cong A_{16} = 0,9668874057$.

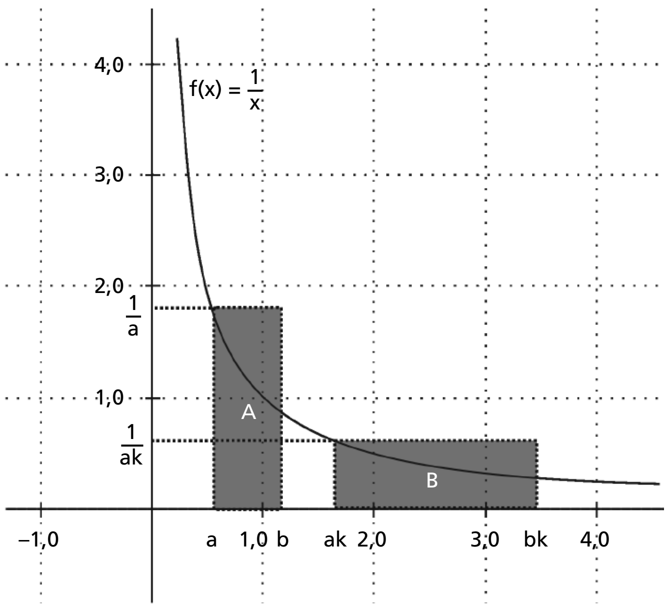
Observe que esses valores estão se aproximando de 1. Como chegamos ao valor 1? Para isso, é preciso fazer o número de retângulos tender ao infinito, e para efetuar tal cálculo, é necessário utilizar a integral.

Dessa forma, temos: $\int^{e} \frac{1}{2} dx = 1$.

COMO FICAM AS PROPRIEDADES?

Para provarmos as propriedades, é necessário conhecermos um resultado importante sobre áreas de retângulos sob o gráfico dessa hipérbole.

Observe a figura a seguir, onde estão destacados dois retângulos, o primeiro de base b-a e o segundo de base kb-ka. Mostraremos que essas duas áreas são iguais.



Observe que no retângulo **A** sua base é b–a e sua altura é $f(a) = \frac{1}{a}$, portanto, sua área é dada por $\frac{1}{a}(b - a)$; já no retângulo **B**, a base mede bk–ak e a altura mede $f(ka) = \frac{1}{ka}$. Neste caso, a área fica $\frac{1}{ka}(kb - ka)$ $= \frac{1}{ka}.k(b - a) = \frac{1}{a}(b - a)$, que é a área do retângulo **A**.

Com esse fato, podemos afirmar que "*A área limitada superiormente pela hipérbole* $y = \frac{1}{x}$, *inferiormente pelo eixo x e lateralmente pelas retas x = a e x = b é igual à área limitada superiormente pela hipérbole y =* $\frac{1}{x}$, *inferiormente pelo eixo x e lateralmente pelas retas x = ak e x= kb, onde 0 < a < b e k >0.*", já que para encontrarmos essas áreas utilizamos infinitos retângulos. Utilizando a notação, temos que $H_a^b = H_{ak}^{bk}$.

ATIVIDADE

6. Demonstre a propriedade ln(a.b) = ln a + ln b.
Não se esqueça de que ln (ab) = H_1^{ab}, ln a = H_1^a e ln b = H_1^b.

RESPOSTA COMENTADA

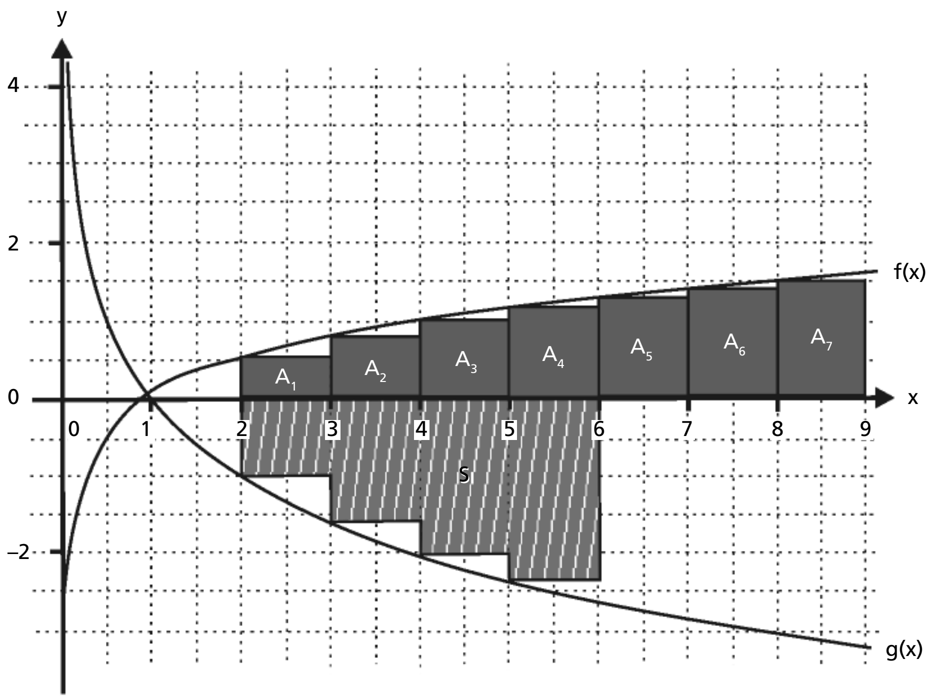
Utilizando essa mesma estratégia, mostramos que:
$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$
Se você desejar, pesquise em livros de cálculo como se prova que ln $(a_b) = b.\ln a$. Usando esse fato, isto é, que ln $(a^b) = b.\ln a$, concluímos que $\ln e^x = x.\ln e = x.1 = x$. Isso significa que $f(x) = \ln x$ é a função inversa de $g(x) = e^x$, já que $f(g(x)) = \ln e^x = 1$.

!

Para saber como funciona a mudança de base nessa abordagem, vá ao *site* http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/precalculo/LOG1.HTM. Além da mudança de base, você encontrará alguns problemas interessantes.

ATIVIDADE FINAL

Observe o gráfico das funções reais $f(x) = \log_4 x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, representadas na figura. Determine o maior **n** $\in \mathbb{N}$, tal que a soma $A_1 + A_2 + A_3 ... A_n$ não exceda o valor absoluto da área **S**.



CONCLUSÃO

É importante trazer para os alunos essas aplicações práticas de um mesmo modelo matemático. E você, futuro professor, deve conhecê-las e não ter medo em aplicá-las. Isso lhe trará mais conhecimento e mais confiança no domínio do assunto.

Outro fator de importância desse estudo, é a forma pela qual você pode definir logaritmo. Você viu duas maneiras completamente diferentes de desenvolver um mesmo conceito: uma mais algébrica e outra com um enfoque mais geométrico.

Esta aula, além de revisar um importante tópico do Ensino Médio, fez você revisar as aplicações da integral no estudo das áreas. Aproveite esta oportunidade para treinar suas habilidades nas integrais.

RESUMO

É necessário apresentar para os alunos algumas aplicações de várias áreas do uso do logaritmo. Veja como esse importante conceito modela vários problemas diferentes: cores, decibéis, crescimento populacional, intensidade, dentre outros.
É importante você observar que o estudo dos logaritmos não se reduz a construir gráficos e resolver equações logarítmicas, como é comum acontecer no Ensino Médio. O conhecimento de logaritmos está relacionado a conceitos importantes na Matemática, tais como funções, seqüências e áreas. A visualização geométrica contribui significativamente no desenvolvimento do pensamento matemático, por isso optamos por apresentar o logaritmo por meio da área da hipérbole.
Você trabalhou com duas definições diferentes: na Aula 24, por meio de função inversa e nesta aula, através de áreas. Compare as definições, discuta-as com outros professores e colegas e forme uma opinião sobre elas.

AUTO-AVALIAÇÃO

Durante a aula, você viu algumas aplicações do logaritmo na Física, na Química, na Informática, dentre outras áreas. Procure perceber na realização das Atividades 2, 3 e 4 a importância do logaritmo para essas diferentes áreas do conhecimento.

É importante que você perceba que a compreensão de logaritmo através da área da hipérbole é uma característica do conhecimento matemático, e permite a possibilidade da construção do mesmo conceito por caminhos diferentes e com absoluta coerência.

Procure pensar em outras aplicações do logaritmo e não deixe de visitar os sites sugeridos. Dê uma atenção especial à Atividade Final, pois ela trabalha com a idéia de área formada a partir de retângulos que têm um dos vértices na função logarítmica. Discuta suas dúvidas com o tutor e troque idéias com seus colegas.

INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você trabalhará questões envolvendo Álgebra com Geometria e Geometria com Álgebra. Divirta-se.

RESPOSTAS

Atividade 1

x	log x	log (log x)	log (log (log x))
10^3	3	0,48	– 0,32
10^{10}	10	1	0
10^{30}	30	1,5	0,2
10^{100}	100	2	0,3
10^{300}	300	2,5	0,4
$10^{1.000}$	1.000	3	0,5
$10^{1.000.000}$	1.000.000	6	0,8

Atividade 2

Limiar da Audição Humana

$$I = 10 \,.\, \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$10 \,.\, \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 0 \Rightarrow \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 0$$

$$\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10^0 \Rightarrow \left(\frac{I}{I_0}\right) = 1 \Rightarrow I_{AH} = I_0.$$

Limiar Sussurro Médio

$$10 \,.\, \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 20 \Rightarrow \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10^2 \Rightarrow I_{SM} = 10^2\, I_0.$$

Limiar Conversa Normal

$10 \,.\, \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 65 \Rightarrow \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 6{,}5 \Rightarrow$

$\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10^{6,5} \Rightarrow I_{CN} = 10^{6,5}\, I_0.$

Limiar da dor

$10 \,.\, \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 120 \Rightarrow \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 12 \Rightarrow$

$\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10^{12} \Rightarrow I_{LD} = 10^{12}\, I_0.$

Temos:

Limiar Sussurro $\Rightarrow I_{SM} = 10^2 I_0$ e

Limiar Dor $\Rightarrow I_{LD} = 10^{12} I_0$

Assim $I_{LD} = 10^{12} I_0 = 10^{10} \times 10^2 I_0 = 10^{10} I_{SM}$

Resposta: C (10^{10})

Atividade 3

a. Como $2^y = x$, temos que $y = \log_2 x$.

b. $2^{10} = 1024$, $2^{20} = 1.048.576$, $2^{30} = 1.073.741.824$, logo $2^{32} = 4.294.967.296$.

Resposta: 32.

Atividade 4

$110 = 100 \,.\, e^{\,k.1} \rightarrow e^{\,k.} = 1{,}1 \rightarrow k = \ln(1{,}1) \cong 0{,}095$

$P = 2000.e^{0,095.5,5} \cong 2000.1{,}69 = 3380.$

Atividade 5

Dividindo em 8 partes iguais o intervalo a base será 0,125.

As imagens dos $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1{,}125}} \cong 0{,}89$, $\frac{1}{1{,}25} = 0{,}8$, $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1{,}375}} \cong 0{,}73$, $\frac{1}{15} \cong 0{,}67$, $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1{,}675}} \cong 0{,}6$, $\frac{1}{1{,}75}$ $\cong 0{,}57$, $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1{,}875}} \cong 0{,}53$ e $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

$A_1 \cong \frac{0{,}25 \times 0{,}89}{2} = 0{,}11125$, $A_2 = \frac{0{,}25 \times 0{,}8}{2} = 0{,}1$, $A_3 \cong \frac{0{,}25 \times 0{,}73}{2} = 0{,}09125$,

$A_4 \cong \frac{0{,}25 \times 0{,}67}{2} = 0{,}08375$, $A_5 \cong \frac{0{,}25 \times 0{,}6}{2} = 0{,}075$, $A_6 \cong \frac{0{,}25 \times 0{,}57}{2} = 0{,}07125$,

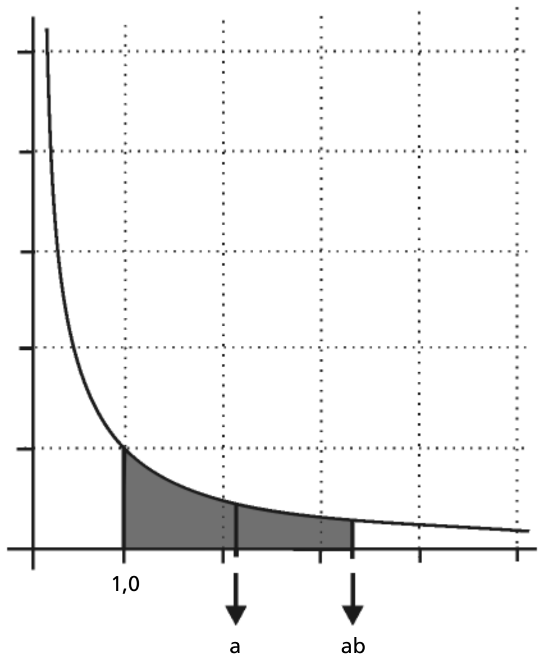
$A_7 \cong \frac{0{,}25 \times 0{,}53}{2} = 0{,}06625$ e $A_8 = \frac{0{,}25 \times 0{,}5}{2} = 0{,}0625$.

$\ln 2 \cong A_1 + A_2 + A_2 + A_2$

$\ln 2 \cong 0{,}11125 + 0{,}1 + 0{,}09125 + 0{,}08375 + 0{,}075 + 0{,}07125 + 0{,}06625 + 0{,}0625 =$ $0{,}66125$.

Atividade 6

Precisamos mostrar que $H_1^{ab} = H_1^{a} + H_1^{b}$. Agora, veja o gráfico a seguir, onde supomos a < ab.



Observe que a área sombreada de 1 à ab é igual a soma das áreas de 1 à a e de a à ab, isto é, $H_1^{ab} = H_1^{a} + H_a^{ab}$. Do resultado anterior, temos que $H_a^{ab} = H_1^{b}$, onde k = a. Portanto, $H_1^{ab} = H_1^{a} + H_1^{b}$, ou, ln (ab) = ln a + ln b.

Atividade Final

6.

Sites Recomendados

CONCEITO de ácido e base. Disponível em: <http://www.escolavesper.com.br/acidos_e_bases.htm>. Acesso em: 06 maio 2005.

FUNÇÕES Logarítmicas e Exponenciais. Disponível em: <http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/precalculo/LOG1.HTM>. Acesso em: 06 maio 2005.

MATEMÁTICA com prazer. *A matemática da música*. Disponível em: <http://www.geocities.com/matematicacomprazer/logaritmomusica.html>. Acesso em: 06 maio 2005

Álgebra com Geometria ou Geometria com Álgebra: entre e confira

AULA 26

Meta da aula

Ressaltar a importância da Álgebra Geométrica no desenvolvimento do pensamento matemático.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Reconhecer a importância da Álgebra Geométrica na aprendizagem.
- Conhecer episódios históricos relacionados ao desenvolvimento da Álgebra Geométrica.
- Desenvolver e analisar atividades que explorem Álgebra e Geometria.

Pré-requisitos

Para o desenvolvimento desta aula, é necessário que você tenha à mão papel e tesoura. A leitura do Boletim 42 do Gepem e do livro de Otto Bekken (1994) é recomendada. Relembrar os produtos notáveis também é sugerido.

INTRODUÇÃO

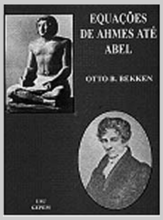
> **!** Como você viu na Aula 7, o Boletim 42 do Gepem (www.gepem.ufrrj.br) apresenta várias contribuições para a Educação Algébrica em sala de aula.

Depois da época de decadência da cultura helênica e do desaparecimento do último grande centro cultural, Alexandria, o saber dos gregos foi lentamente se reconstruindo a partir de traduções anteriormente feitas em torno de obras de Aristóteles, Hipócrates e Euclides. Obras históricas ressaltam, em linhas gerais, que Euclides converteu a Álgebra em Geometria e que Descartes tornou a Geometria algébrica.

> **!** Com o desaparecimento de Alexandria, monges sírios foram os responsáveis pela recopilação dos manuscritos salvos do desastre. Em 762 d.C., o califa Almansur fixou sua corte em Bagdá. Durante um longo tempo, esta cidade converteu-se no principal centro de produção científica e realizou uma reconstrução considerável do saber dos gregos antigos. Por sua localização geográfica privilegiada, Bagdá usufruiu das correntes do pensamento científico procedentes da Índia, assim como do saber dispersado da cultura helênica.

Consideramos que falar sobre Geometria Algébrica (ou Álgebra Geométrica) significa estudar minuciosamente momentos importantes da história das civilizações e, conseqüentemente, da Matemática, o que não será possível em apenas uma aula. No entanto, lançaremos mão de alguns episódios que o possibilite refletir e compreender a temática, inserindo perspectivas curriculares atuais.

> **!** Para um aprofundamento histórico relativo à Álgebra Geométrica e outras temáticas, sugerimos duas obras:



BEKKEN, Otto. *Equações de Ahmes até Abel*. Rio de Janeiro: GEPEM, 1994.

BAUMGART, John. *História da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1992.

O livro *Equações de Ahmes até Abel* é uma publicação do Gepem (www.gepem.ufrrj.br). Informe-se e adquira-o.

Segundo Bekken (1994), não há indícios de que a Álgebra de Braghmagupta e Bhaskara fosse conhecida na Europa antes do século XIX. De acordo com o autor, devemos agradecer aos **ESTUDIOSOS ÁRABES** pelo renascimento do pensamento matemático na Europa.

Os árabes, apoiando-se nas obras de Euclides, fizeram com que a Álgebra se desenvolvesse com base nas demonstrações algébricas.

IDENTIDADE ALGÉBRICA: OS GREGOS ANTIGOS E OS PITAGÓRICOS

Conforme Eves (1997), os gregos antigos,

> imbuídos da idéia de representação de um número por meio de um comprimento e carecendo completamente de qualquer notação algébrica adequada, idearam processos algébricos engenhosos para efetuar operações algébricas (p. 107).

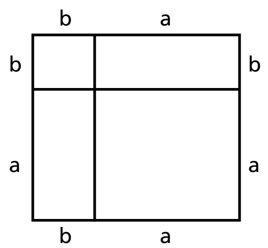
Sabemos que é atribuída aos pitagóricos parte considerável dessa Álgebra Geométrica, conforme se pode encontrar em vários dos primeiros livros dos *Elementos* de Euclides.

Segundo Eves (1997, p.107), o Livro II dos Elementos contém várias proposições que são identidades algébricas envolvidas numa terminologia geométrica.

Por exemplo, a Proposição 4 do Livro II estabelece geometricamente que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

O enunciado de Euclides (*apud Eves*, 1997, p.107) para essa proposição é o seguinte: "Dividindo-se uma reta em duas partes, o quadrado sobre a reta toda é igual à soma dos quadrados sobre as partes juntamente com o dobro do retângulo contido pelas partes."

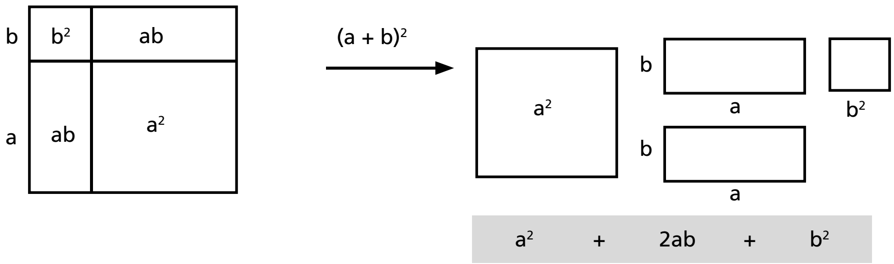
Vejamos, a seguir, a ilustração para essa proposição:



!

Você pensou em apresentar esta proposição aos seus alunos de 8ª série para perceber como eles a entendem e a representam? Não seria uma proposta interessante, curiosa e desafiadora?

Você deve ter percebido que a proposição anterior, desenvolvimento do quadrado de uma soma (a + b)2 , pode ser geometricamente ilustrada da seguinte maneira:



Os pitagóricos desenvolviam as Proposições com uma estratégia de decomposição. Compor e decompor figuras são procedimentos importantes no desenvolvimento do pensamento matemático.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

1. Desenvolva o quadrado da soma $(a + b)^2$

COMENTÁRIO

Explorar, numericamente, com papel quadriculado, o quadrado de somas e diferenças. Por exemplo, construir no papel quadriculado um quadrado de lado 7 e decompô-lo de diferentes maneiras, orientando-se pelo desenvolvimento algébrico e geométrico anterior. É importante que os mesmos saibam potência e áreas. Quem sabe pode ser uma boa situação para também explorar estes conceitos, se ainda não tiverem sido abordados.

! Embora os produtos notáveis apareçam no currículo da 7ª série, a exploração numérica desta situação pode ser feita com alunos de 5ª e 6ª séries.

! Na Aula 16, você trabalhou com produtos notáveis. Nesta aula, além de resgatar suas representações algébricas e geométricas, você poderá conhecer alguns fatos históricos relacionados ao desenvolvimento dos mesmos.

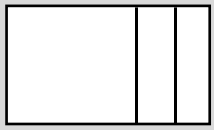
Vejamos, a seguir, outras proposições contidas nos Elementos e suas conexões algébricas e geométricas.

! As conexões entre Álgebra e Geometria no Livro II dos Elementos foram elaboradas pelos árabes Abu Kamil, Thabit ben Qurra e Omar Khayyan.

ATIVIDADES

1. Na tabela seguinte, você verá as quatro primeiras proposições do Livro II dos Elementos de Euclides e sua representação geométrica e simbólica (algébrica). Complete-a.

Tabela 26.1: Entendendo proposições euclidianas

Proposição (Livro II dos Elementos	**Representação geométrica**	**Representação simbólica atual**
1. Quando se têm duas linhas retas, e uma delas se divide em um número qualquer de segmentos, o retângulo determinado pelas duas linhas retas é igual aos retângulos determinados pela linha reta não dividida e por cada um dos segmentos.		
2. Se uma linha reta for dividida ao acaso em dois segmentos e pensando em dois retângulos cujos lados são a reta e cada um dos segmentos, respectivamente, esses dois retângulos juntos igualarão o quadrado que tem por lado a linha reta.		a (a+b) + b (a+ b)
3. Se uma linha reta for dividida ao acaso em dois segmentos e formarmos um retângulo que tem por lados a reta e um dos segmentos, esse retângulo será igual ao quadrado que esse segmento formaria consigo mesmo e ao retângulo que formaria com o outro segmento.		
4. Dividindo-se uma reta em duas partes, o quadrado sobre a reta toda é igual à soma dos quadrados sobre as partes juntamente com o dobro do retângulo contido pelas partes.		

COMENTÁRIO

Você percebeu que a última linha da tabela contém a Proposição 4, trabalhada anteriormente.

2. Desenvolva, algébrica e geometricamente, o quadrado de uma diferença.

COMENTÁRIO

Construa um quadrado de lado (a + b) e decomponha-o em retângulos de lados a e a-b.

Ao continuar a leitura, você deve ter se perguntado: "E o desenvolvimento do cubo de uma soma e de uma diferença?". Não se preocupe, mais adiante apresentaremos o assunto.

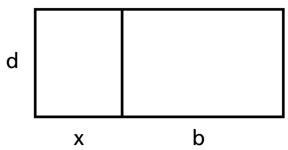
QUANDO GEOMETRIA E ÁLGEBRA CAMINHAM JUNTAS: OUTROS EXEMPLOS QUE ENCONTRAMOS NOS CURRÍCULOS E LIVROS ATUAIS

Segundo Gomes (2003), a Geometria cria situações para aprendizagem da Álgebra e esta cria situações para o aprendizado da Geometria. A autora ressalta que na exploração de figuras geométricas, sejam elas planas ou espaciais, uma forma de expressar relações é obtida por meio da Álgebra. Vejamos!

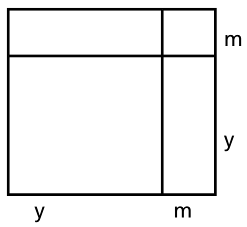
Identidades algébricas e outras relações com formas planas

A exploração do conceito de área em certas figuras planas e o estudo de decomposições e comparações permite-nos deduzir notações algébricas. Por exemplo, veja como a área de cada um dos retângulos seguintes pode ser expressa literalmente.

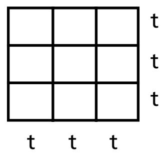
$d \cdot (x + b) = dx + db$



$(m + y)(m + y) = (m + y)^2$



$3t \times 3t = (3t)^2$



!

Lembre-se de que o desenvolvimento da notação algébrica ao longo da História deu-se em três estágios: o retórico (ou verbal, 1600 a.C), o sincopado (ou simbólico-numérico, no qual eram usadas abreviações de palavras, 1600-1800) e o simbólico (depois de 1800).

Enquanto o estudo de relações em figuras geométricas pode remeter conjuntamente a um trabalho algébrico, existem situações em que, para o estudo de equações, utilizamos conceitos geométricos para resolvê-las. Tal fato teve sua importância na história. Vejamos!

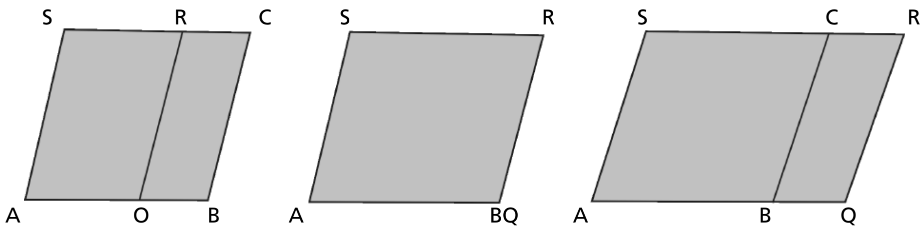
Identidade algébrica e resolução geométrica de equações quadráticas

Segundo Eves (1997), os gregos, em sua Álgebra Geométrica, utilizavam dois métodos principais para resolver certas equações simples: o método das proporções e o da aplicação de áreas.

> **Método das proporções**
> Este método permite a construção de um segmento de reta x dado por a : b = c : x ou por a : x = x : b. Neste caso, b e c são segmentos de reta dados. Conforme você deve ter visto, este método fornece soluções geométricas das equações $ax=bc$ e $x^2=ab$.

Vejamos um exemplo do método da aplicação de áreas utilizado pelos gregos antigos.

Observe a ilustração a seguir: um segmento de reta AB e um paralelogramo AQRS cujo lado AQ está contido na semi-reta AB.



Se Q não coincide com B, considere C de modo que QBCR seja um paralelogramo. Quando Q está em A e B, diz-se que o paralelogramo AQRS está aplicado ao segmento AB, e que falta QBCR para completar o paralelogramo maior. Quando Q coincide com B, diz-se que o paralelogramo AQRS está aplicado ao segmento AB. Quando Q está no prolongamento de AB, diz-se que o paralelogramo AQRS está aplicado ao segmento AB, excedendo-o no paralelogramo QBCR.

ATIVIDADE

3. A proposição 28 do Livro VI dos *Elementos* resolve a construção: aplicar a um dado segmento de reta AB um paralelogramo AQRS de área igual a uma dada figura retilínea F e ficando AQUÉM por um paralelogramo QBCR semelhante a um paralelogramo dado, não excedendo a área F a do paralelogramo descrito sobre a metade de AB e semelhante à deficiência QBCR. Considere o caso particular em que o paralelogramo dado é um quadrado. Denominando o comprimento de AB por *a*, a base AQ do paralelogramo aplicado (que é um retângulo) por x e o lado de um quadrado F, de área igual à do retângulo aplicado, por *b*, encontre a notação algébrica que expressa a área do paralelogramo.

Aquém

Esta palavra está sendo usada para indicar uma quantidade insuficiente.

COMENTÁRIO

Oriente-se pela ilustração apresentada anteriormente. A descrição textual da proposição é mais complicada do que o processo de representação algébrica.

A proposição 29 do Livro VI resolve a construção. Aplicar a um dado segmento de reta AB um paralelogramo AQRS de área igual a uma figura retilínea F e excedendo por um paralelogramo QBCR semelhante a um paralelogramo dado. Considere o caso particular em que o paralelogramo dado é um quadrado. Denotando o comprimento de AB por *a*, a base AQ do paralelogramo aplicado (que é um retângulo) por x, e o lado de um quadrado F, de área igual à do retângulo aplicado, por *b*, encontre a notação algébrica que expressa a área do paralelogramo.

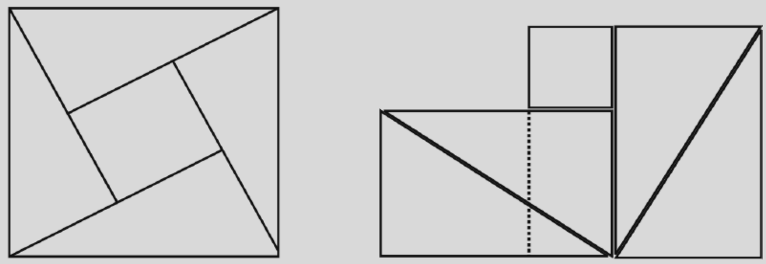
COMENTÁRIO

Você deve ter percebido que as proposições 28 e 29 fornecem soluções geométricas das equações quadráticas $x^2 - ax + b^2 = 0$ *e* $x^2 - ax - b^2 = 0$*. O entendimento do enunciado desta atividade não é simples. Para facilitar a execução da atividade, os desenhos são essenciais.*

Bhaskara (1114-1185)

Foi o mais importante matemático indiano do século 12 por ter preenchido lacunas deixadas por seus antecessores. Por exemplo, foi o primeiro matemático a considerar que a divisão por zero é infinita. Suas obras mais conhecidas, o *Lilavati* (nome de sua filha) e *Vija-Ganita* tratam de equações lineares e quadráticas, mensuração, progressões aritméticas e geométricas, radicais, ternos pitagóricos e outros assuntos, todos de grande interesse para os matemáticos indianos. A demonstração do Teorema de Pitágoras que você estudou na disciplina de Geometria Básica também é atribuída a Bhaskara.

Nas Aulas 16 e 17 de Instrumentação do Ensino de Geometria, você conheceu diferentes explorações do do Teorema de Pitágoras. Especificamente, na Aula 16, você estudou a demonstração de BHASKARA, por decomposição, do teorema. Lembra da ilustração seguinte?



ATIVIDADE COMPLEMENTAR 2

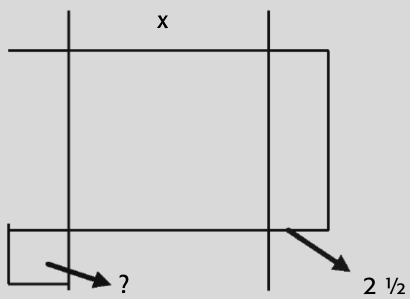
Utilizando a ilustração anterior e denominando c (hipotenusa), *a* e *b* (catetos), mostre que $a^2 = b^2 + c^2$

! Você viu em Instrumentação do Ensino de Geometria que existem várias demonstrações e a exploração destas demonstrações para o Teorema de Pitágoras. Em muitas delas, as identidades algébricas estão presentes.

Vejamos como al-Khwarizmi justifica a resolução de uma equação do tipo $ax^2 + bx = c$.

ATIVIDADE

4. Justificar geometricamente a resolução da equação $x^2 + 10x = 39$. Inicie construindo um quadrado de lado x e complete-o com retângulos de lado 2 ½ e x. Veja!



O primeiro matemático aritmético de destaque foi Muhammad ibn Musá al- Khwarizmi, que, após uma viagem à Índia, retornou a Bagdá e escreveu um famoso tratado de álgebra. Nesse livro, encontramos a maneira de resolver os seis tipos de equação do 2° grau: $ax^2 = bx$ (quadrados igual a raízes), $ax^2 = c$ (quadrados igual a números), $bx = c$ (raízes igual a números), $ax^2 + bx = c$ (quadrados mais raízes igual a números), $ax^2 + c = bx$ (quadrados mais números igual a raízes), $bx + c = ax^2$ (raízes mais números igual a quadrados).

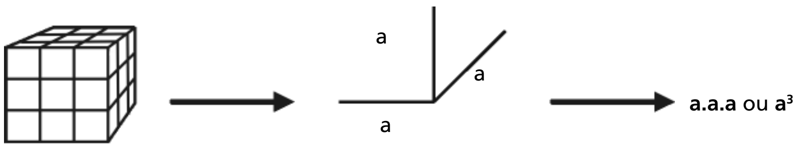
Continue a construção e encontre a área dos quadrados (?) que faltam para completar o quadrado maior. Encontre a relação entre o comprimento (2 ½) dos retângulos e o coeficiente de x. Agora, determine a soma das áreas e encontre o valor de x.

COMENTÁRIO

É importante você ter percebido como a representação geométrica ajuda no entendimento da atividade. Para os outros tipos de equações de segundo grau são utilizadas construções geométricas diferentes.

Identidades algébricas e outras relações com formas espaciais

No cálculo do volume de paralelepípedos em função da medida das arestas também podemos encontrar identidades algébricas.



ATIVIDADE

5. Construir um material manipulativo (com madeira, isopor, dobradura ou planificação de paralelepípedos etc.) que possibilite explicar o desenvolvimento do cubo de uma soma, ou seja, $(a + b)^3$. Confira o modelo no Módulo Prático.

Sugestão: Oriente-se pela ilustração seguinte.

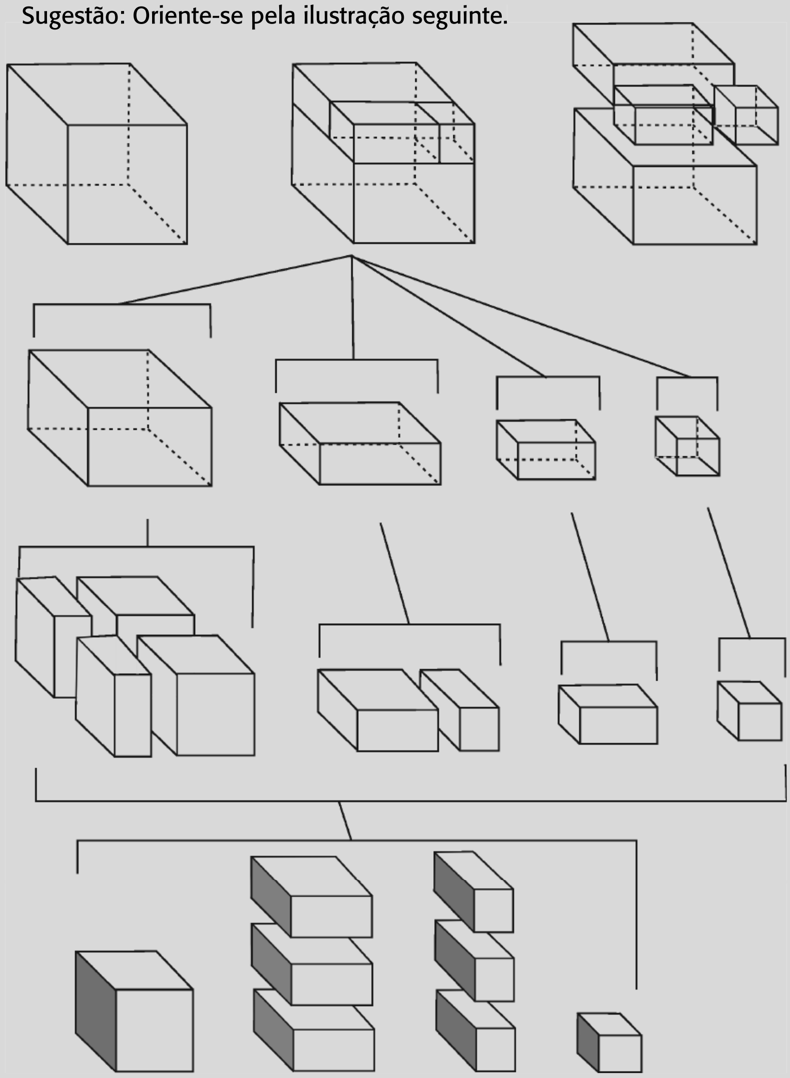


Figura 26.1: Montagem de material em madeira para concretizar o cubo de uma soma.

COMENTÁRIO

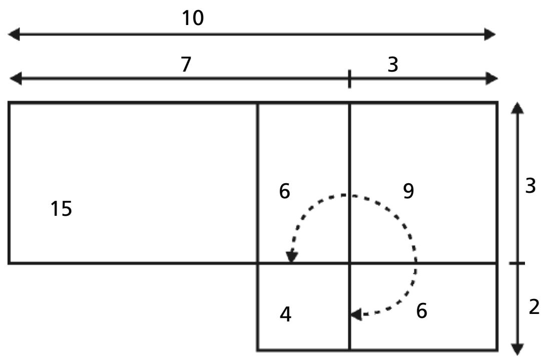
Elaborar este material é importante para compreender geometricamente o desenvolvimento do cubo de uma soma. Quando concluir a construção do material apresente-a ao tutor.

RESUMO

O desenvolvimento da Álgebra Geométrica teve a contribuição de diferentes culturas. A Álgebra grega, conforme formulada pelos pitagóricos (540 a.C) e por Euclides (300 a.C), era geométrica. A relação entre Álgebra e Geometria deve ser explorada em atividades variadas e em diferentes momentos do processo de escolarização e desenvolvimento do pensamento matemático.

ATIVIDADE FINAL

Segundo Bekken (1994), nos textos de Al-Khwarizmi (825 d.C), aproximadamente 1.100 anos depois de Euclides, encontramos soluções de equações relacionando métodos algébricos e geométricos. Nesta atividade, você praticará esta interconexão. Encontre x e y quando $xy = 21$ e $x + y = 10$. Resolva algebricamente e justifique geometricamente, com o auxílio da ilustração seguinte.



Para finalizar, nas Aulas 14 e 15, você estudou aspectos conceituais relativos às equações. Releia-as e identifique novas relações acrescidas com a leitura da Aula 25. Oriente-se pela tabela a seguir para realizar sua análise.

Tabela 26.2: Conclusão da atividade final.

Aula	Objetivo(s)	Conceitos-chave	Estratégias didático-metodológicas utilizadas	Aprendi que...
14				
15				
25				

AUTO-AVALIAÇÃO

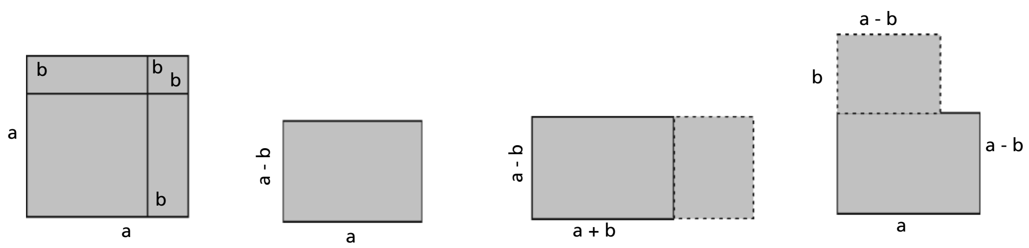
Se você conseguiu compreender aspectos históricos relacionados à Álgebra e à Geometria, aplicando-os à resolução das atividades, você alcançou um dos objetivos da aula. Da mesma forma, se refletiu sobre a importância da conexão entre notação algébrica e representação geométrica, especificamente no entendimento de identidades algébricas, e pensou em alternativas didáticas para minimizar suas dificuldades encontradas pelos alunos neste entendimento, você cumpriu totalmente nosso propósito nesta aula. Parabéns!

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

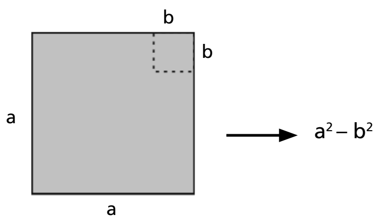
Na próxima aula, você revisará o estudo de polinômios.

RESPOSTAS

Atividade 2



(a+b) (a– b) = a.(a – b) + b.(a – b)



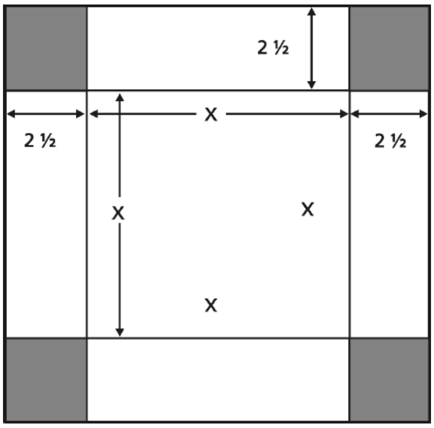
Atividade 3

$x\,(a–x) = b^2$ ou $x^2 – ax + b^2 = 0$.

$x\,(x–a) = b^2$ ou $x^2 – ax – b^2 = 0$.

Atividade 4

A ilustração final é:



A área dos quadrados que faltam para completar o quadrado maior é 6 ¼.

A relação entre o comprimento dos retângulos e o coeficiente de x é 1/4.

A soma das áreas é $x^2 + 4.\ 2\frac{1}{2}\,x + 4.\ 6\frac{1}{4} = x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$.

A medida do lado x é 3.

Álgebra! Por que tantos erros?

AULA 27

Meta da aula

Instrumentalizar o ensino da Álgebra utilizando o erro como um recurso de aprendizagem.

objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- reconhecer diferentes tipos de erro na aprendizagem de Álgebra.
- reconhecer e analisar uma representação algébrica.
- determinar a forma algébrica apropriada para responder a questões particulares.

Pré-requisitos

Você deve saber realizar operações algébricas, seja com uso de números ou letras. Releia a Aula 7, pois alguns assuntos abordados lá serão retomados nesta aula.

INTRODUÇÃO

Nesta aula, voltaremos nosso olhar para os erros comuns em Álgebra. Esses erros podem ser cometidos com muita freqüência por seus futuros alunos.

Acreditamos que os erros não devem ser escondidos, como acontece na maioria das vezes. Somos ensinados a apagá-los, a riscá-los, a deixá-los de lado. Aqui queremos defender a posição oposta. Erros são importantes, devem ser valorizados, pois expressam como o aluno pensa, são uma produção do aluno. Que tal ver os erros como aliados para uma aprendizagem significativa?

Quando falamos em Álgebra, é bom lembrar que na Aula 7 apresentamos uma importante discussão sobre como estamos entendemos o que seja Álgebra, Pensamento Algébrico e Sentido (ou senso) Numérico. Vamos retomar um pouco essa discussão para depois nos determos ao que estamos chamando de erros em Álgebra.

AMPLIANDO NOSSA DISCUSSÃO SOBRE A ÁLGEBRA

A Álgebra se apresenta de diferentes maneiras nos três níveis de ensino (Fundamental, Médio e Superior). No Ensino Fundamental, em particular, o PCN usa o termo "pensamento algébrico" para se referir aos conceitos que devem ser desenvolvidos com os alunos nesse nível de ensino.

Mas não podemos nos esquecer de que a Álgebra é também um ramo da Matemática voltado para as estruturas, como, por exemplo, grupos, grupos abelianos, anéis e corpos. O avanço da escrita algébrica, em particular o uso de letras, para representar enunciados, axiomas e teoremas e para modelar problemas, é um dos grandes responsáveis pelo avanço da tecnologia.

Ainda hoje, nos currículos de Ensino Fundamental e Médio, o estudo das estruturas algébricas se faz presente nos diferentes conteúdos. No 3º ciclo (7ª série) do Ensino Fundamental, em alguns casos com maior ênfases em outros com menor, os alunos vêem pela primeira vez a Matemática "através de letras". Nesse momento, a Matemática se apresenta por meio de uma forte presença de manipulações simbólicas.

Queremos defender a idéia de que esse aprendizado é necessário, porém deve ser feito com ênfase no significado, e não como um conjunto de "regras" e "macetes".

Por exemplo, nesta disciplina, nas Aulas 16, 21 e 26, usamos conceitos geométricos para atribuir significado a manipulações algébricas.

Esse é um dos caminhos para minimizar erros freqüentes em Álgebra. Um outro ponto que julgamos relevante é abordar o "sentido do símbolo" (ARCAVI, 1996). Essa abordagem surge como uma reflexão para a Álgebra similar ao **senso numérico**, que tem sido objeto de estudo de diferentes pesquisadores, na área de Aritmética.

"Senso numérico" pode ser descrito como uma sensibilidade "não algorítmica" em relação aos números; uma compreensão profunda de sua natureza e da natureza das operações, uma necessidade de examinar a razoabilidade dos resultados; uma sensibilidade para as ordens de magnitude e a liberdade de reinventar modos de operar com números diferentes da repetição mecânica daquilo que está sendo ensinado e memorizado". (Arcavi, 1996)

Num paralelo a essa idéia de "senso numérico", ARCAVI (1996) desenvolve o conceito de "sentido do símbolo", que aponta as seguintes etapas nas quais o aluno precisa desenvolver as seguintes habilidades:

> (habilidade de explorar – correr os olhos sobre uma expressão algébrica para fazer estimativas brutas dos padrões que emergirão numa representação numérica ou gráfica...)
> (habilidade de fazer comparações conscientes das ordens de magnitude para funções com leis do tipo n, n^2, n^3, ...)
> (habilidade de explorar rapidamente um tabela de valores de uma função ou um gráfico ou de interpretar verbalmente condições expressas, de identificar a forma adequada de uma lei algébrica que expresse determinado padrão...)
> (habilidade de inspecionar operações algébricas e prever a forma do resultado ou, como na estimativa aritmética, de inspecionar o resultado e julgar a possibilidade de que tenha sido executada corretamente..)
> (habilidade de determinar qual entre as várias formas equivalentes pode ser apropriada para responder questões particulares. (ARCAVI, 1996, p. ?)

A partir dessas etapas, uma pergunta possível é saber como na prática pedagógica podemos estar contribuindo para que o aluno desenvolva essas habilidades.

ATIVIDADE

1. Encontre o valor de x que seja solução para a equação linear a seguir. Faça as manipulações algébricas de pelo menos duas formas diferentes.
$3\ (x - 5) + 15 = 5x - x$

Dependendo do caminho seguido, você poderia chegar, num determinado momento, à seguinte equação:

$3x + 5 = 4x$

Em vez de continuar procedendo com as manipulações, um aluno observou o seguinte: como temos uma igualdade, e no primeiro membro da equação tenho 3x, para obter 4x, basta somar com 1x, mas esse 1x corresponde à quantidade que já está presente na equação, ou seja, 5. Logo, pode-se concluir que $x = 5$.

!

O professor deve estimular por meio de atividades o hábito dos alunos de, em vez de mergulharem em manipulações algébricas, desenvolverem habilidades de leitura dos símbolos.

ATIVIDADE

2. Resolva a equação a seguir:

$$\frac{3x + 5}{6x + 10} = 2$$

COMENTÁRIO

Antes de mergulhar na manipulação, que tal inspecionar a equação proposta?

Observe que a equação que se encontra no numerador é a metade da equação que se encontra no denominador. Como temos do lado direito da igualdade 2, isso significa que esta equação não tem solução. Mas se você for adiante e "mergulhar" na manipulação, encontrará o valor para $x = -\frac{5}{3}$. Como é possível encontrar um valor para x se, em nossa avaliação, essa equação não tem solução? Se você substituir esse valor na equação dada, verificará que esse valor anula o denominador, o que mostra que o único valor encontrado não satisfaz as condições desejadas.

ATIVIDADE

3. O que você pode dizer sobre os números resultantes da diferença entre a terceira potência de um número inteiro e o próprio número, ou seja, $n^3 - n$?

COMENTÁRIO

Experimente uma manipulação inicial e depois leia o que os símbolos "querem" dizer.

Diferentes pesquisas em Educação Matemática detectam um grande número de alunos que erram ao modelar a solução de um problema clássico. Veja que interessante!

O problema é o seguinte: "Escreva usando as variáveis E e P representando a seguinte sentença: existem seis vezes mais estudantes do que professores nesta universidade."

As pesquisas de Clement (1982), retiradas de ARCAVI (1996), apontam que mais de 30% de um grupo de alunos do curso de Engenharia erraram a questão. O erro típico foi 6E = P. Outros pesquisadores confirmaram esse resultado. Esse fato foi explicado pelos pesquisadores, que atribuem o resultado à prática comum dos professores de Matemática, que ensinam os alunos a "traduzirem", termo a termo, a linguagem corrente em linguagem matemática. Assim, os professores deixam de lado a interpretação da questão proposta para verificar se a modelagem foi correta.

ERROS COMUNS DA ÁLGEBRA

Um professor de Matemática com alguma experiência nos Ensinos Fundamental e Médio sabe que mesmo depois de alguns anos de escolaridade alguns erros são cometidos por alunos com grande freqüência. Uma pesquisa realizada por MARQUIS (1994) apresenta uma proposta de confronto com o erro, ou seja, são apresentados aos alunos uma série de igualdades onde todas estão erradas, e a tarefa do aluno é identificar esses erros.

A seguir, apresentamos uma lista inspirada no artigo de MARQUIS (1994).

ATIVIDADE

4. Todas as afirmações são falsas. Corrija cada uma delas tornando todas verdadeiras.

a. $|-5| = -5$.

b. $5^2.5^3 = 25^5$.

c. $r^2.s^5 = (rs)^7$.

d. $a + b - 3(c + d) = a + b - 3c + d$.

e. $\frac{x}{4} - \frac{(6 - y)}{2} = \frac{x - 12 - 2y}{4}$.

f. $3x + 4y = 7xy$.

g. $3a^{-1} = \frac{1}{3a}$.

h. $\sqrt{t^2 + a^2} = t + a$.

i. $\frac{r + s}{t + s} = \frac{r}{t}$.

j. $\frac{1}{a - b} = \frac{-1}{a + b}$.

l. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$.

m. $y\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{ay}{by}$.

n. $\frac{ax + ay}{a + az} = \frac{x + y}{z}$.

o. $\sqrt{-a}\,\sqrt{-b} = \sqrt{ab}$.

p. Se $2(2 - t) < 12$ então $t < -4$.

q. $\frac{1}{1 - \frac{x}{y}} = \frac{y}{1 - x}$.

r. $a^2.a^5 = a^{10}$.

s. $(3a)^4 = 3a^4$.

t. $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a - b}{ab}$.

u. $(a + 4)^2 = a^2 + 16$.

v. $\frac{x}{4} - \frac{6 - y}{4} = \frac{x - 6 - y}{4}$.

x. $(b^2)^5 = b^7$.

Continue acompanhando a aula, pois nela discutiremos sobre alguns dos erros aqui apresentados.

Vamos, a seguir, levantar algumas conjecturas que podem explicar os erros dos alunos.

Conjectura 1 – Afirmações que são válidas para as operações com números nem sempre valem para as operações simbólicas.

Uma discussão importante é o fato de alguns conhecimentos aritméticos serem generalizados pelos alunos, ou seja, os alunos acreditam que, como aquilo funciona para a Aritmética, também funcionará para Álgebra.

Assim, por exemplo, em Aritmética, os sinais de + (adição) e = (igual) indicam ações, enquanto, em Álgebra, não necessariamente isso acontecerá. Isso está relacionado com a propriedade de fechamento em um dado conjunto.

Um erro comum cometido pelos alunos é quando é proposto que façam 3a + 4b =, e eles respondem, de forma errada, 7ab. Em Aritmética, o sinal de mais indica que tenho de juntar ou adicionar duas quantidades e encontrar um terceiro valor. Quando trabalhamos com a representação simbólica, o sinal de igual deve ser visto como um indicador de equivalência, e não como um símbolo que representa "escreva a resposta".

É tarefa do professor desmistificar as verdades oriundas da Aritmética, como entender que o sinal de igual é unidirecional.

Em Aritmética, usamos a justaposição em alguns casos para significar adição, por exemplo, 2 ½ = 2 + ½. Isso pode refletir na Álgebra.

Por exemplo, quando temos 7y e y = 3, o aluno interpreta que isso significa 73, quando, na verdade, a justaposição em Álgebra significa multiplicação, ou seja, $7y = 7.3 = 21$.

Conjectura 2 – Afirmações que são válidas para determinado conjunto numérico nem sempre são válidas para outro conjunto numérico.

A Matemática escolar aborda os conjuntos numéricos e suas estruturas pela via da ampliação gradativa. Inicialmente, a criança sistematiza a idéia de número, trabalha as quatro operações fundamentais em $\mathbb{N}$. Ao final do 2° ciclo, tem um primeiro contato com os racionais positivos. Retoma esses dois conjuntos na 5ª série, enfatizando suas propriedades e operações, e daí para frente conhece os inteiros ($\mathbb{Z}$), os racionais ($\mathbb{Q}$), os reais ($\mathbb{R}$) e, ao final do Ensino Médio, os números complexos ($\mathbb{C}$).

A forma de se apresentar os conjuntos numéricos a partir das limitações do anterior e da necessidade de aumentar o conjunto, além de definir novos números, torna necessário que se faça todo um trabalho de recontextualização e ressignificação de algumas idéias que, pelo fato de serem válidas num determinado conjunto, não significa que serão válidas num outro conjunto que contém o anterior. A seguir, vamos exemplificar alguns casos:

Veja alguns exemplos:

- A noção de sucessor, tão importante em $\mathbb{N}$, não pode ser estendida nos racionais;
- No conjunto N e no conjunto $\mathbb{Z}$, entre dois números nem sempre existe outro elemento, já nos conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sempre existem infinitos. É a noção de densidade que faz com que o entendimento dos conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sejam mais demorados.
- Nos naturais, a multiplicação de dois números sempre aumenta, isto é, dados n e m naturais, $nm > n$ e $nm > m$, fato que não acontece nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Isto causa muitos erros nas inequações quando, por exemplo, ao resolver a inequação $-2x > 4$ em $\mathbb{R}$, muitos alunos respondem $x > -2$, quando na verdade a solução é $x < -2$.
- Nos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, vale a relação de ordem entre os elementos, já no conjunto $\mathbb{C}$, tal relação não acontece.

Quando ampliamos os conjuntos numéricos, precisamos estar atentos aos erros que costumam aparecer, principalmente para avaliar se este erro não é decorrente de alguma propriedade que era válida no conjunto anterior e no atual conjunto não é.

No exemplo da Atividade 1, item (o) $\sqrt{-a}\sqrt{-b} = \sqrt{ab}$, aparentemente, parece não haver algum problema. Por que esta igualdade é falsa?

Se fosse verdadeira, e usando o fato de que x.x = x^2, teríamos:

$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1.$

Isto que gera um absurdo. Onde está a falha? No exemplo, $2.3 = \sqrt{4}\,.\,\sqrt{9} = \sqrt{36} = 6$. Temos uma verdade? A questão, que talvez não seja bem tratada pelos professores ou passe despercebida pelos alunos, é que $\sqrt{a}\,.\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ só é válida em $\mathbb{R}$ e, para isso, a e b devem ser positivos, pois, em $\mathbb{R}$, não existe raiz quadrada de número negativo.

Portanto, a propriedade só é valida no conjunto $\mathbb{R}$.

Isso gera uma certa confusão, pois, como pode o conjunto que contém as raízes quadradas de números negativos, o conjunto $\mathbb{C}$, não aceitar certas propriedades do conjunto $\mathbb{R}$?

A questão é que, ao ampliarmos os conjuntos numéricos, os horizontes de aplicação com esses números aumentam, mas, por outro lado, algumas propriedades tornam-se restritas, pois o conceito do novo número é ampliado.

!

Idéias que são verdadeiras em domínios menores podem ser enganosas, errôneas e até mesmo inúteis quando aplicadas em novos domínios. É importante discutir as propriedades conhecidas quando ampliamos um conjunto numérico, já que muitas se mantêm, e outras passam a não ter mais significados.

Outro fato de grande importância é a idéia errada que alguns alunos têm sobre a raiz quadrada de um número real positivo. Muitos alunos afirmam que $\sqrt{4} = \pm 2$ em $\mathbb{R}$. Esse fato é válido no conjunto $\mathbb{C}$, onde determinar a raiz quadrada de um número complexo z ($\sqrt{z} = w$) é resolver a equação binomial $w^2 = z$.

Em R, define-se raiz quadrada de um número positivo como um outro número positivo que, elevado ao quadrado, dá o resultado que está dentro do radical.

Resumindo:

Em $\mathbb{R}$, $\sqrt{z}$ é w, onde $w \geq 0$ e $w^2 = z$.

Em $\mathbb{C}$, $\sqrt{z}$ é a solução da equação $w^2 = z$, que, no caso, sempre são duas.

ATIVIDADE

5. Observe as soluções das equações e inequações a seguir, nos conjuntos numéricos indicados, e diga se estão corretas ou não. Explique sua resposta.

(a) $2x^2 - 3 = 5$, em $\mathbb{R}$	$S = \{ 2 \}$.
(b) $2x^2 - 3 = 5$ em $\mathbb{C}$	$S = \{ 2, -2\}$.
(c) $5 - x > 4$, em $\mathbb{R}$	S: $1 > x$.
(d) $x^2 > 4$ em $\mathbb{N}$	S: $x > 2$, onde x é natural.
(e) $x^2 > 4$, em $\mathbb{R}$	S: $x > 2$, onde x é real.

Conjectura 3 – Os alunos aplicam o modelo da proporcionalidade em funções não-lineares.

Um caso muito comum de erro no estudo das funções, no Ensino Médio e no Ensino Superior, é aplicar o modelo de linearidade em funções não-lineares. Em termos matemáticos, é aplicar a propriedade $f(x + y) = f(x) + f(y)$, sem qualquer cuidado!

Esta propriedade, nas funções reais, é válida somente na função linear, dada pela lei $f(x) = ax$, que é o modelo matemático para proporcionalidade. A noção de proporcionalidade é provavelmente a idéia mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios. Isto não significa que seja uma justificativa para tal uso sem qualquer investigação por parte dos alunos. Pode ser também pela facilidade e rapidez de aplicação de tal propriedade.

Veja o que acontece com a função $f(x) = \sqrt{x}$.

Aplicando a propriedade $f(x + y) = f(x) + f(y)$, temos:

$f(x + y) = \sqrt{x + y}$ e $f(x) + f(y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Para $x = 9$ e $y = 4$, temos: $\sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$ e $\sqrt{9} + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5$.

Esta propriedade não é válida para esta função, pois você viu, por meio de um exemplo, que $\sqrt{13} \neq 5$.

O mesmo acontece com a função quadrática $f(x) = x^2$.

Veja: $f(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ e $f(x) + f(y) = x^2 + y^2$.

Ao observar a forma geral, você já percebeu que os resultados não são iguais, mas como é freqüente os alunos usarem equivocadamente $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, vamos pegar um exemplo para $x = 2$ e $y = 3$. Observe que $(2+3)^2 = 5^2 = 25$ e $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$.

Uma estratégia para minimizar esses erros é confrontá-los com os mesmos e utilizar valores numéricos para encontrar contra-exemplos. É importante que o professor, ao perceber esses erros, atue de forma efetiva, pois é comum os alunos carregarem alguns desses erros durante sua vida escolar.

ATIVIDADE

6. Aplique a propriedade $f(x + y) = f(x) + f(y)$ nas funções a seguir e verifique sua validade para os valores numéricos dados para x e y.

(a) $f(x) = \text{sen } x$ $\qquad x = y = \frac{\pi}{2}$.

(b) $f(x) = \log x$ $\qquad x = 2$ e $y = 8$.

(c) $f(x) = |x|$ $\qquad x = -5$ e $y = 5$.

Conjectura 4 - As operações com frações não funcionam da mesma forma que as operações com números naturais.

Muitos erros são cometidos por alunos nas operações com números. A adição de frações é um bom exemplo disso. Freqüentemente, vemos os alunos fazendo a adição:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}.$$

Nesse caso, o aluno não vê cada uma das frações representando um número. Eles consideram que o numerador e o denominador são dois números naturais independentes.

Um fato que reforça essa idéia é que isso acontece na multiplicação de frações, ou seja, multiplicamos os numeradores e os denominadores. Por exemplo: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Esses erros persistem, pois há falta de construção de significado das operações com frações. Geralmente, é enfatizado o uso de regras, e os alunos também têm a tendência de generalizar as regras mais fáceis.

ATIVIDADE FINAL

Responda às perguntas.

a. Se p lápis custam c centavos, quantos lápis se podem comprar com r reais?

b. Dado que $2^x = 8^{y+1}$ e $9^y = 3^{x-9}$, ache o valor de x + y.

CONCLUSÃO

Não é tarefa fácil mergulhar nos erros dos alunos e transformá-los num aliado para a aprendizagem. As práticas pedagógicas, de maneira geral, baseiam-se nos acertos dos alunos, o que, sem dúvida, é mais simples. Mas se seu objetivo é transformar e interferir de maneira significativa na formação do seu aluno, aguce a sensibilidade, questione, ouça e discuta sobre os erros. Levante suas conjecturas a respeito do erros de seus alunos e invista em soluções criativas.

RESUMO

Para que ocorra o aprendizado no ensino da álgebra nos Ensinos Fundamental e Médio, é necessário trabalhar em uma perspectiva de construção de significado. O excesso de manipulação puramente técnica faz com que os alunos cometam muitos erros com freqüência.

De acordo com a conjectura 1, alguns erros algébricos ocorrem porque o aluno generaliza situações válidas na Aritmética, na Álgebra. Já na conjectura 2, temos a discussão das diferentes características dos conjuntos numéricos e os equívocos que a não-compreensão dessas diferenças podem proporcionar.

A conjectura 3 traz uma importante discussão: a necessidade de trabalhar modelos não-lineares, que não abordam a proporcionalidade, enquanto na conjectura 4 discutimos as operações com números naturais e frações.

Essas quatro conjecturas categorizam os erros comuns de álgebra no Ensino Fundamental e Médio e dão condições para reflexão sobre as dificuldades com a manipulação algébrica.

AUTO-AVALIAÇÃO

Nesta aula, discutimos sobre um assunto muito presente nas salas de aulas. É muito comum os professores de Matemática ficarem "chocados" com os erros de álgebra do aluno, como, por exemplo, $\frac{1}{5} + \frac{4}{7} = \frac{5}{12}$ ou $\frac{2 + x}{2 + y} = \frac{x}{y}$. Defendemos a idéia de que muito desses erros ocorrem pela falta de significado com que são trabalhados.

Os erros da álgebra devem ser um assunto de reflexão a você, futuro professor de Matemática, que em breve estará vivenciando essas dificuldades com seus alunos. Fique bem atento, na Atividade 4, aos erros que são cometidos. Você teve dificuldade de identificar algum deles? Se teve, discuta com seu tutor. É interessante que você perceba também que a apropriação de algumas técnicas não ocorre de um momento para outro, elas devem ser amadurecidas.

Dê uma atenção especial às Atividades 5 e 6. A Atividade 5 chama a atenção para a resolução de equações em diferentes conjuntos numéricos, fato pouco explorado no ensino. Já na Atividade 6, discutimos em que modelos aplicamos a propriedade $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

RESPOSTAS

Atividade 3

$n^3 - n = n\ (n^2 - 1) = n\ (n + 1)\ (n - 1)$.

Alterando a ordem dos fatores, temos $(n - 1)\ n\ (n + 1)$; com isso, podemos dizer que $n^3 - n$ representa o produto de três números inteiros e consecutivos.

Atividade 4

a. 5.

b. 5^5.

c. r^2s^5.

d. $a + b - 3c - 3d$.

e. $\dfrac{x - 12 + 2y}{4}$.

f. $3x + 4y$.

g. $\dfrac{3}{a}$.

h. $\sqrt{t^2 + a^2}$.

i. $\dfrac{r + s}{t + s}$.

j. $\dfrac{-1}{b - a}$.

l. $\dfrac{a + c}{bd}$.

m. $\dfrac{ay}{b}$.

n. $\dfrac{x + y}{1 + z}$.

o. $i\sqrt{a}\ .\ i\sqrt{b} = -1\sqrt{ab}$.

p. $t > -4$.

q. $\dfrac{y}{y - x}$

r. a^7.

s. $81a^4$.

t. $\dfrac{a^2 + b^2}{ab}$.

u. $a^2 + 8a + 16$.

v. $\dfrac{x - 6 + y}{4}$.

x. b^{10}.

Atividade 5

(a) Errada, são duas soluções, 2 e –2, pois $2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

(b) Correta, solução em (a).

(c) Correta, pois $5 - x > 4 \rightarrow 5 - 4 > x \rightarrow 1 > x$ ou $x < 1$.

(d) Correta, pois se um número natural ao quadrado é maior que 4, esse número só pode ser maior que 2.

(e) Errada, pois podemos ter como solução também números menores que –2, pois seus quadrados também serão maiores que 4.

Atividade 6

(a) $f(x+y) = \text{sen}(x+y)$ e $f(x) + f(y) = \text{sen } x + \text{sen } y$

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{sen } \frac{\pi}{2} + \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2.$

Portanto, esta propriedade não é válida para a função seno.

(b) $f(x + y) = \log (x + y)$ e $f(x) + f(y) = \log x + \log y$

$\log(2+8) = \log 10 = 1$ e $\log 2 + \log 8 \cong 0{,}301 + 0{,} 903 = 1{,}204$

Portanto, esta propriedade não é válida para a função logarítmica.

(c) $f(x + y) = |x + y|$ e $f(x) + f(y) = |x| + |y|$.

$|5 + (-5)| = |0| = 0$ e $|5| + |-5| = 5 + 5 = 10$.

Portanto, esta propriedade não é válida para a função modular.

Atividade Final

a. $\frac{100rp}{c}$.

b. $x + y = 27$.

AULA 28

Vamos enrolar!

Meta da aula

Instrumentalizar o ensino de trigonometria.

objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Discutir sobre abordagens da trigonometria.
- Trabalhar problemas que envolvem distâncias inacessíveis.
- Discutir outros enfoques da trigonometria.

Pré-requisitos

Para o desenvolvimento desta aula, é necessário que você saiba trigonometria no triângulo e no círculo.

INTRODUÇÃO

Nesta aula, vamos discutir alguns aspectos do ensino da trigonometria, assunto de relevância no ensino, mas quais os motivos que levam a isso?

Um dos aspectos de importância do ensino da trigonometria é o que se chama "resolver triângulos". Através da semelhança de triângulos, é possível definir as razões trigonométricas. Essas razões aliadas ao teorema de Pitágoras, Lei dos Senos e Lei dos Cossenos nos dão as ferramentas necessárias para calcular outras medidas se conhecemos ao menos três delas. Muitos problemas do dia-a-dia, como cálculo estimado de áreas de regiões muito grandes e cálculo de distâncias chamadas inacessíveis, são resolvidos com essas ferramentas.

Com a definição de uma unidade de medida de arcos e a "criação" do círculo de raio 1, temos a extensão da trigonometria para todos os números reais, que passa a ter outros contextos de aplicação.

Ainda na Matemática do Ensino Médio, aplicamos esse enfoque nos números complexos.

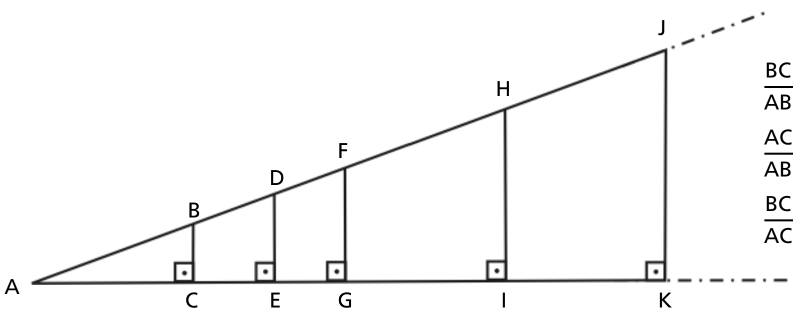
Nesta aula, vamos discutir esses dois enfoques, a trigonometria do triângulo e a do círculo, destacando aspectos relevantes no ensino de Trigonometria.

> **!**
>
> Lembre-se de acessar a disciplina na Plataforma Cederj. Lá você encontrará diferentes animações e recursos que auxiliarão sua aprendizagem na aula.

UM CONCEITO MUITO IMPORTANTE EM TRIGONOMETRIA: SEMELHANÇA

No estudo de semelhança de triângulos, utiliza-se a idéia de razão entre lados correspondentes, e essa razão está relacionada com o ângulo formado pelos lados.

Em particular, podemos considerar uma "coleção infinita" de triângulos retângulos semelhantes. Veja:



$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{FG}{AF} = \frac{HI}{AH} = \frac{JK}{AJ} = \ldots$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AF} = \frac{AI}{AH} = \frac{AK}{AJ} = \ldots$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{FG}{AG} = \frac{HI}{AI} = \frac{JK}{AK} = \ldots$$

Essa coleção nos permite definir as razões trigonométricas assim:

$$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{FG}{AF} = \frac{HI}{AH} = \frac{JK}{AJ} = \ldots = \frac{\text{Cateto oposto ao ângulo }\hat{A}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\hat{A} = \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AF} = \frac{AI}{AH} = \frac{AK}{AJ} = \ldots = \frac{\text{Cateto adjacente ao ângulo }\hat{A}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg}\,\hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{FG}{AG} = \frac{HI}{AI} = \frac{JK}{AK} = \ldots = \frac{\text{Cateto oposto ao ângulo }\hat{A}}{\text{Cateto adjacente ao ângulo }\hat{A}}$$

A trigonometria proporciona relacionar medida de ângulos com medida de lados, inicialmente em um triângulo retângulo e, posteriormente, em um triângulo qualquer por meio da Lei dos senos e da Lei dos cossenos.

Talvez estejamos tão acostumados a usar as razões trigonométricas que não analisamos a relevância dessa idéia inicialmente simples. Com triângulos pequenos podemos construir uma tabela de valores de senos e cossenos e usar esses valores com triângulos maiores.

Essa abordagem trigonométrica é utilizada até hoje para medir distâncias inacessíveis. Quando falamos de uma distância inacessível, referimo-nos a situações nas quais não temos instrumentos com capacidade de realizar a medição. Por exemplo, conhecer a distância da Terra ao Sol, calcular a altura de uma montanha, saber a distância de um navio a determinada praia...

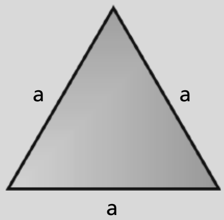
!

É importante que o professor chame a atenção para o fato de que os valores do seno, cosseno e tangente não dependem do lado do triângulo. Para tal, podem-se propor atividades com a manipulação da calculadora. Quando trabalhamos com triângulos cuja medida do lado é genérica, também devemos aproveitar a oportunidade de reforçar essa idéia.

ATIVIDADE

1. Considere um triângulo eqüilátero de lado a.

Deduza a partir dele os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30º e 60º.

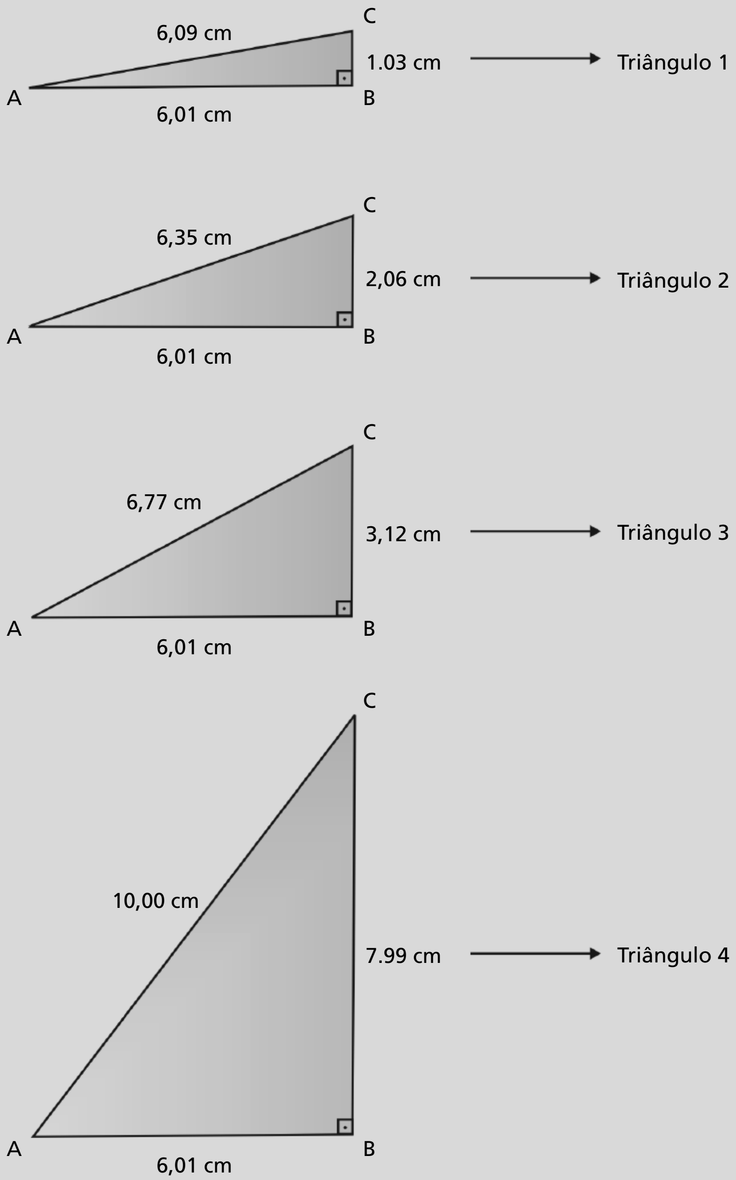


!

Os valores do seno, cosseno e tangente de 30º, 60º e 45º podem ser deduzidos a partir de um triângulo eqüilátero (ângulo de 30º e 60º, como você viu na Atividade 1) e de um quadrado (no caso do ângulo de 45º). Entretanto, o professor deve propor atividades com outros ângulos onde seja necessário consultar uma tábua ou uma calculadora.

ATIVIDADE

2. Considere os quatro triângulos retângulos onde as medidas dos lados estão com aproximação de uma casa decimal. Nestes, o cateto AB está fixo, e o ângulo Â e, conseqüentemente, as medidas da hipotenusa e do cateto BC estão variando.



a. Complete a tabela:

Triângulo	sen Â	cos Â
1		
2		
3		
4		

b. À medida que variamos o ângulo Â, entre 0º e 90º, o que ocorre com as medidas do seno e do cosseno?

c. A partir desses triângulos, é possível observar a variação da tangente para ângulos entre 0º e 90º?

!

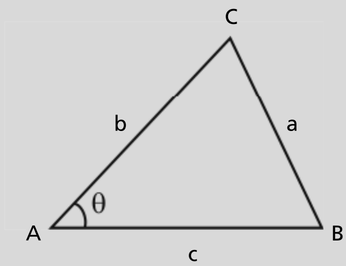
Atividades como esta podem ser realizadas com alunos já na 8ª série, onde são apresentadas as razões trigonométricas. Em softwares de geometria dinâmica, como o Cabri Geomètré II ou o Tabulae (feito por uma equipe da UFRJ), essas atividades são favorecidas pelo movimento do triângulo, possibilitando a observação da variação dessas razões.

ATIVIDADES

3. Após um exercício, um aluno faz a seguinte pergunta:
"Fessor, o seno de Â deu 2,3, tá certo?"
Você, como professor, o que responderia a esse aluno?

____
____
____
____
____

4. Você conhece a fórmula de área para um triângulo qualquer quando conhecemos dois de seus lados e o ângulo entre estes?

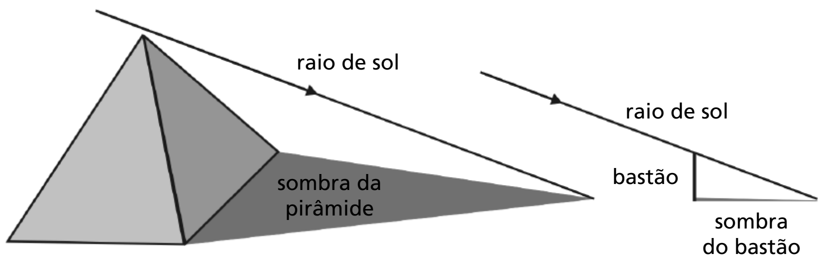


Podemos calcular a área do triângulo por meio da fórmula $\text{Área}_{\Delta} = \dfrac{bc\,\text{sen}\,\theta}{2}$
Mostre a validade da fórmula.

____
____
____
____
____
____
____

CÁLCULO DE DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS: O QUE PRECISAMOS?

A trigonometria é usada há séculos.Tales de Mileto, em viagem ao Egito, obteve a altura de uma pirâmide, usando a idéia de que, nos triângulos semelhantes, a razão entre as dimensões correspondentes é a mesma, e depende somente dos ângulos formados.



Para resolver problemas como esses, de ordem prática, e envolvendo medidas que não podemos medir, a trigonometria se desenvolveu e teve aplicações na navegação, na astronomia, na cartografia, dentre outros.

!

As medidas que não podemos medir ou a que não temos acesso são chamadas de medidas inacessíveis.

Quando tratamos de medidas inacessíveis, alguns instrumentos de medida são, ou eram, freqüentemente usados como o **TEODOLITO**, o **SEXTANTE** e a **BALESTILHA.**

TEODOLITO

Instrumento óptico para medir com precisão ângulos horizontais e ângulos verticais, muito usado em trabalhos topográficos e geodésicos.

SEXTANTE

Instrumento óptico constituído de dois espelhos e uma luneta astronômica presos a um setor circular de 60° (1/6 do círculo) destinado a medir a altura de um astro acima do horizonte.

BALESTILHA

Instrumento, constituído de duas hastes cruzadas, usado pelos antigos navegadores para observar a altura dos astros.

Fonte: *Dicionário Aurélio eletrônico*.

Vamos falar um pouco mais do teodolito. É um instrumento que pode medir ângulos com precisão, tanto horizontalmente como verticalmente. Ele é basicamente uma luneta que pode ser apoiada num tripé. Há séculos ele é usado, mas os teodolitos atuais fazem uso, evidentemente, de uma tecnologia muito mais avançada que os de antigamente. Há teodolitos eletrônicos que conseguem medir ângulos com extraordinária precisão.

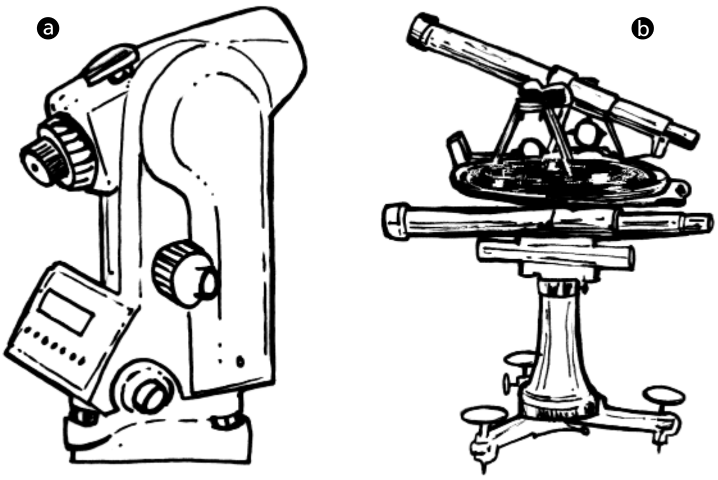
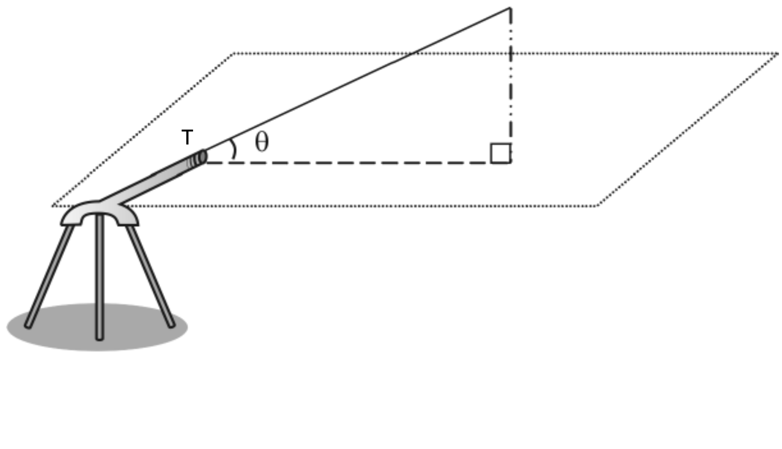


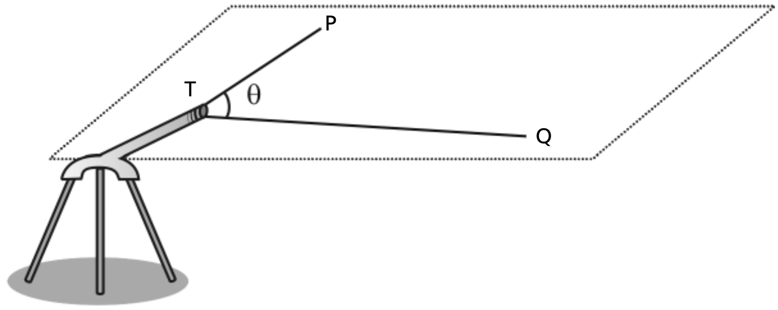
Figura 28.1: Teodolito eletrônico (a) e teodolito antigo (b).

Mas como funciona?

Se o teodolito aponta para um ponto P situado a uma altura qualquer de um plano horizontal, consegue determinar com precisão o ângulo θ que o segmento de reta $\overline{TP}$ faz com esse plano (θ'). De posse desse ângulo e de uma medida que é conhecida (geralmente no plano horizontal), pode-se, por exemplo, calcular a que altura desse plano está o ponto P.



Também é possível obter ângulos no plano horizontal. Se tivermos dois pontos de referência, P e Q, localizados no plano horizontal, o teodolito nos fornece o ângulo θ entre os segmentos $\overline{TP}$ e $\overline{PQ}$.

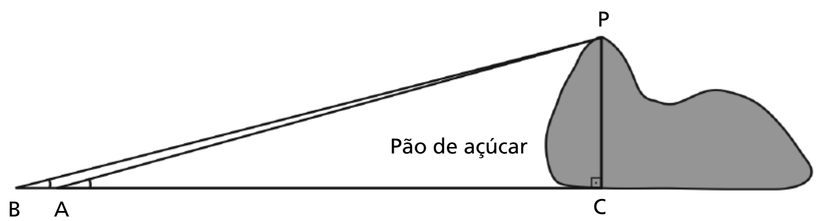


!

Você pode construir um teodolito com os alunos usando dois canudos. Para medir a altura do prédio do colégio, por exemplo, através do furo de um dos canudos devemos visualizar a base do prédio e no furo do outro o topo do prédio. Outro aluno mede o ângulo com a ajuda de um transferidor. O processo não é muito preciso, mas materializa a idéia do cálculo de medidas inacessíveis.

Veja um exemplo: valendo-se do fato de que o Aterro do Flamengo pode ser considerado plano, um grupo de alunos de Licenciatura em Matemática resolveu medir a altura do Pão de Açúcar. Foram para o Aterro com um teodolito e uma trena. Mediram o ângulo de visão em um determinado ponto e encontraram 15°. Afastaram-se 110m e fizeram nova medição, encontrando dessa vez um ângulo de 14°.

Com esses dados, calcularam a altura do morro. Veja como isso pode feito: na figura temos $\overline{AB}$ = 110m, P e $P\hat{A}C = 15°$ e $P\hat{B}C = 14°$.



$$\text{tg } 15° = \frac{\overline{PC}}{\overline{AC}} = 0{,}268$$

$$\text{tg } 14° = \frac{\overline{PC}}{\overline{AC} + 110} = 0{,}249$$

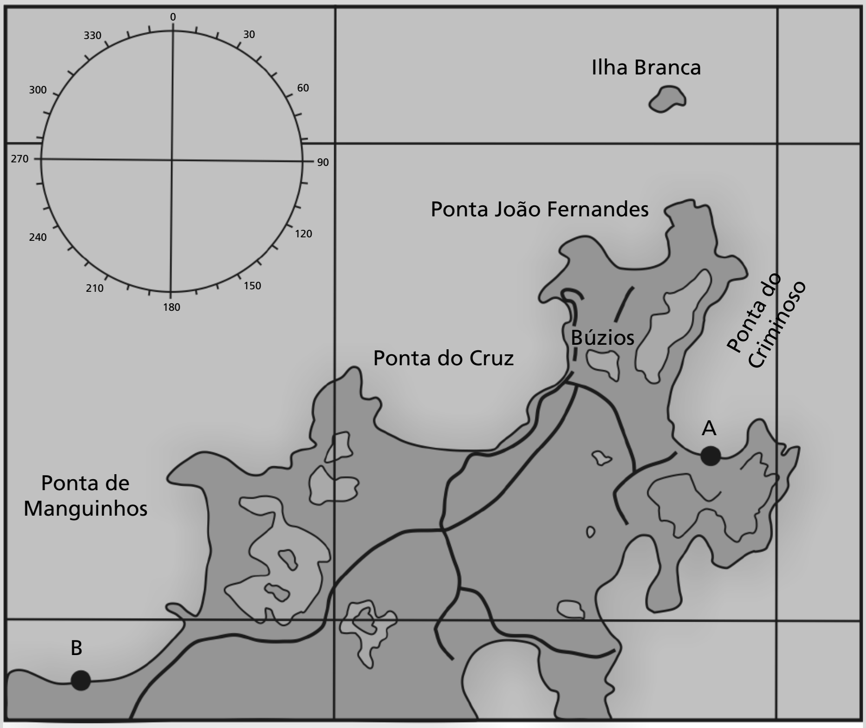
$$0{,}268\ \overline{AC} = 0{,}249\ \overline{AC} + 27{,}390 \Rightarrow \overline{AC} = \frac{27{,}390}{0{,}019} = 1441{,}579$$

$\overline{PC} = 0{,}268\ \overline{AC} = 0{,}268 \cdot 1441{,}579 = 386{,}343,$

ou seja, pela medição dos alunos, o Pão de Açúcar mede aproximadamente 386,5m. Será esse um resultado razoável? Pesquise a altura do morro e compare!

ATIVIDADE

5. Um navegante solitário deseja sair em uma noite escura do ponto A e chegar ao ponto B da carta náutica da figura ainda à noite. A velocidade de seu barco é de 12km/h e possui, além desta carta, um relógio e uma bússola. Sabendo que nesta carta 1km = 2c, faça o planejamento de uma rota (poligonal) que ele possa seguir.



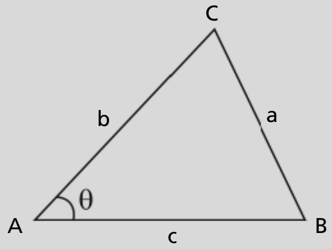
COMENTÁRIO

Esse é mais um exemplo de atividade que reforça o sentido prático do estudo de ângulos. Ela envolve semelhança, conceito fundamental no estudo de trigonometria. Além disso, é uma atividade "aberta", tem muitas estratégias de soluções diferentes e proporciona a discussão para além da resposta.

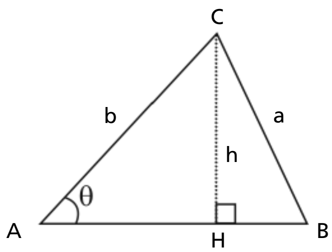
LEI DOS COSSENOS E DOS SENOS

Se você conhecer o ângulo entre dois lados de um triângulo e a medida de dois dos seus lados, a Lei dos Cossenos torna-se uma importante ferramenta na resolução de problemas. Vale relembrá-la.

Lei dos Cossenos
"Em qualquer triângulo ABC, com lados $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e $\overline{AB} = c$, é válida a relação $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\theta$, onde θ é o ângulo formado pelos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$."



Para verificar a Lei dos Cossenos, vamos considerar um triângulo acutângulo ABC, com lados $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e $\overline{AB} = c$. Quando traçamos a altura h, dividimos o triângulo ABC em dois triângulos retângulos ACH e BCH. Vamos aplicar o Teorema de Pitágoras a cada um deles, chamando $\overline{AH} = x$ e $\overline{HB} = c - x$:



$ACH \rightarrow b^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - x^2$

$BCH \rightarrow a^2 = h^2 + (c - x)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - (c - x)^2$,

então,

$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2 \Rightarrow b^2 - x^2 = a^2 - (c^2 - 2cx + x^2)$

$\Rightarrow b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 + 2cx$

$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$

Mas, $\cos\theta = \dfrac{x}{b} \Rightarrow x = b\cos\theta$,

Logo, $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\theta$, que é chamada Lei dos Cossenos.

Observe que o raciocínio feito foi para ângulos agudos, mas o ângulo pode ser obtuso também. Assim, se a Lei dos Cossenos for trabalhada antes do ciclo trigonométrico, será necessário definir cos $(180° - \theta) = -\cos\theta$.
Estabelecemos as relações dos cossenos de ângulos agudos com obtusos tendo, por exemplo, cos 120° = –cos 60°, cos 135° = –cos 45° e
cos 148° = –cos 32°.
Mais tarde, no ciclo trigonométrico, você irá entender por que essa definição foi feita assim.
E o ângulo de 90°?
Considerando que $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$ para $\theta = 90°$, temos:
$\Rightarrow \cos(180° - 90°) = -\cos 90°$
$\Rightarrow \cos 90° = -\cos 90°$
$\Rightarrow 2\cos 90° = 0$
$\Rightarrow \cos 90° = 0$.
Isso que faz o maior sentido, não?! Aplicando a lei dos cossenos para $\theta = 90°$, teremos $a^2 = b^2 + c^2$, ou seja, voltamos ao teorema de Pitágoras, que é o resultado usado para triângulos retângulos.

UMA APLICAÇÃO DAS LEIS DO SENO E DO COSSENO

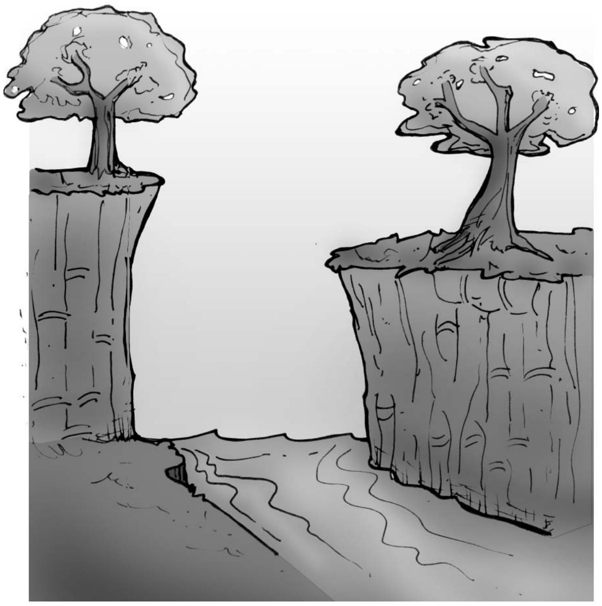
Um engenheiro deseja construir uma ponte ligando duas **BARRANCEIRAS.** Ele precisa saber a distância entre elas, porém, não tem como fazer essa medição diretamente. Dispondo de um teodolito, ele mede o ângulo determinado por uma palmeira (onde ele está) e dois **INGÁS**, um em cada ribanceira. Ele encontra 30°. Em seguida, ele caminha 100m até um dos ingás e mede o ângulo determinado pela palmeira e o outro ingá, encontrando 105°. Qual deverá ser o tamanho da ponte, se ela for colocada exatamente entre os ingás?

INGÁ

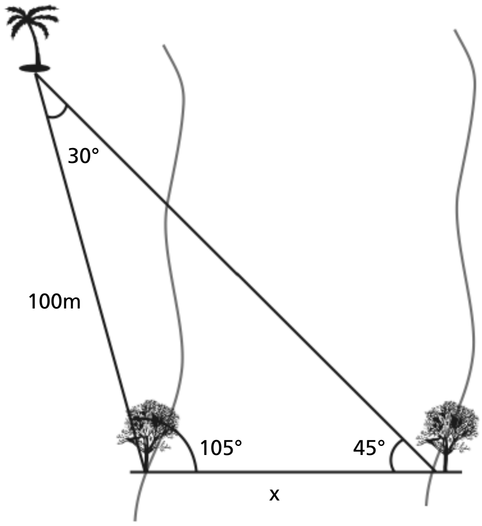
Gênero de árvores e arbustos da família das leguminosas, de folhas penadas, flores densas, brancas ou vermelhas, dotadas de longos estames, e frutos capsulares, que se caracterizam por terem sementes embebidas numa massa carnosa, não raro comestível; ocorrem em todo o Brasil.

BARRANCEIRA

Margem elevada de um rio ou de um lago. Despenhadeiro, precipício. Penedia alta à margem de um rio.



A situação-problema pode ser interpretada por meio do triângulo a seguir.



Observe que o problema nos fornece as medidas de dois ângulos e a medida de um lado. Na verdade, temos as medidas dos três ângulos do triângulo, porque se o primeiro mede 30° e o segundo 105°, o terceiro só poderá medir 45°. Contudo, o que queremos é descobrir a medida de um dos outros lados.

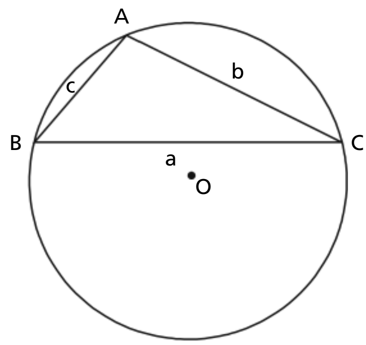
É possível resolver esta situação aplicando diretamente a Lei dos Cossenos?

Como só temos a medida de um dos lados, precisaríamos aplicar a Lei dos Cossenos mais de uma vez no triângulo e resolver o sistema formado por essas equações. É bastante trabalhoso, e a equação final não é nada agradável!

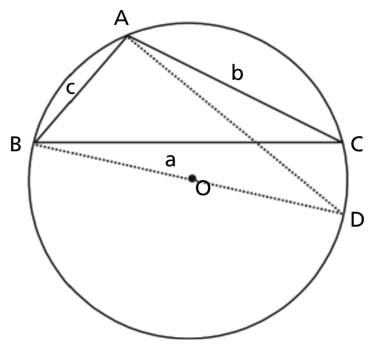
Precisamos, então, de uma nova ferramenta que solucione mais facilmente a situação: a Lei dos Senos.

!

A Lei dos Senos!
Em qualquer triângulo ABC, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos e a razão de proporcionalidade é o diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo ABC.
Em outras palavras, sendo $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, temos:
$\frac{a}{\text{sen }\hat{A}}, \frac{b}{\text{sen }\hat{B}}, \frac{c}{\text{sen }\hat{C}} = 2r$, onde o r é o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC.



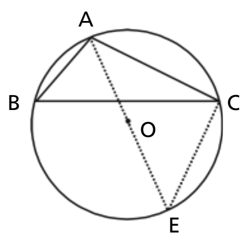
Observe o triângulo auxiliar BAD: um dos seus lados é o diâmetro do círculo, e o ângulo $\hat{A}$ é reto.



Do triângulo retângulo BAD, temos: $\text{sen } \hat{D} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{c}{2r}$. O ângulo $\hat{C}$ tem a mesma medida do ângulo $\hat{D}$, pois os dois medem a metade do arco AB.

Concluímos, então, que $\text{sen } \hat{C} = \dfrac{c}{2r}$ ou que $2r = \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}}$.(I)

Da mesma forma, verificamos que:



sen $\hat{E} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \dfrac{b}{2r}$, no triângulo retângulo auxiliar AEC.

O ângulo $\hat{B}$ tem a mesma medida do ângulo $\hat{E}$, pois os dois medem a metade do arco AC.

Então, sen $\hat{B} = \dfrac{b}{2r} \Rightarrow 2r = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}}$ (II).

Podemos verificar, também, que sen $\hat{A} = \dfrac{a}{2r} \Rightarrow 2r = \dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}}$ (III).

Igualando I, II e III, temos $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}}, \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}}, \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2r$.

!

Da mesma forma que na Lei dos cossenos, para abordar a Lei dos senos antes do ciclo trigonométrico, precisamos definir sen (180° – θ) = sen θ.
Assim, para ângulos obtusos, temos, por exemplo, sen 120° = sen 60°, sen 135° = sen 45° e sen 148° = sen 32°.

Voltando ao problema da construção da ponte, temos:

$$\frac{x}{\text{sen } 30°} = \frac{100}{\text{sen } 45°} \Rightarrow x = \frac{100 \,.\, \text{sen } 30°}{\text{sen } 45°} \Rightarrow x = \frac{100 \,.\, \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{50}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{100}{\sqrt{2}} = 50\sqrt{2}.$$

Fazendo $\sqrt{2} \cong 1{,}4$, temos que a distância procurada é de aproximadamente 70m.

ATIVIDADE

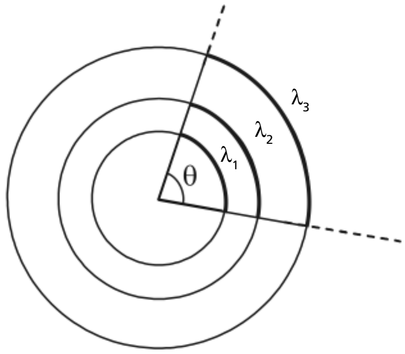
6. Deseja-se determinar a distância entre dois pontos, A e B, entre os quais há um lago. Não era possível atravessar o lago e fazer a medida diretamente, e como havia instrumentos à disposição para medir ângulos e distâncias, propôs-se a seguinte solução: marca-se um ponto C, a 50m de A, e determina-se que $A\hat{C}B = 44°$ e $C\hat{A}B = 102°$.
Calcule a distância AB com a ajuda de uma calculadora científica.

O RADIANO E A FUNÇÃO DE EULER

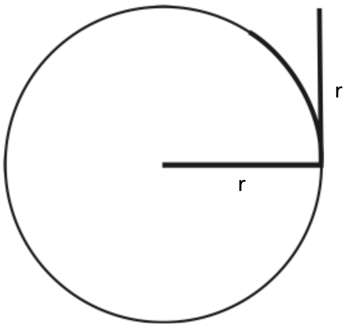
O radiano é uma unidade de medida que pode ser considerada uma espécie de marco para a trigonometria, pois permite ampliar a trigonometria aos números reais.

Num mesmo ângulo central θ, existem vários arcos de medidas diferentes, dependendo do raio da circunferência. Quanto maior for o raio, maior será a medida do arco correspondente.

Veja:



Os ângulos centrais são medidos em graus. A unidade "grau" é a que você tem usado até agora. Mas o que é a unidade "radiano"? O arco de um radiano (1 rad) é o arco cujo comprimento é igual ao raio do círculo.



Quantos radianos há num círculo? Isso equivale a perguntar quantas vezes o raio do círculo cabe no seu contorno.

Como o comprimento da circunferência vale $2\pi R$, basta dividir essa medida pelo valor do raio, ou seja, $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$. Assim, o raio cabe 2π vezes no contorno do círculo, isto é, aproximadamente 6,28 vezes.

Uma circunferência tem 2π radianos. Você também sabe que o ângulo descrito por um círculo é 360º. Pode-se, então, estabelecer uma correspondência entre a medida de um ângulo de graus para radianos e vice-versa. Basta utilizar o conceito de proporcionalidade.

!

Compreender o radiano é muito importante para que o aluno entenda a trigonometria no ciclo trigonométrico. É importante também destacar que a medida do ângulo em radianos independe do arco da circunferência considerada.

A partir do século XIV, na Europa, a noção de função começa a ser desenvolvida por meio do estudo de fenômenos. A Matemática afirma-se como uma ferramenta necessária para dar suporte a outras ciências, como a Física.

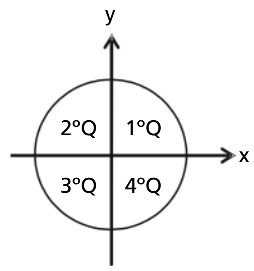
!

Provavelmente, o primeiro trabalho impresso de Trigonometria foi publicado na Inglaterra, antes de 1485. Chamava-se *Tabula Directionu*, de Regiomontanus. Em outra obra, Joachim Rhaeticus definiu as seis funções trigonométricas como funções do ângulo, em vez de funções do arco, que foram subentendidas como razões, pela primeira vez. As denominações do seno, cosseno e cossecante eram, respectivamente, *exceto perpendiculum*, *basis* e *hypotenusa*.

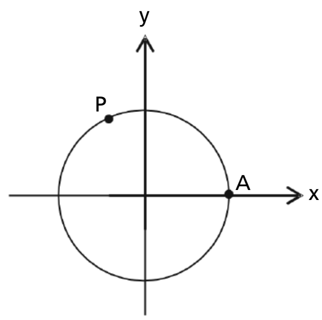
Euler foi o matemático que adotou a medida do círculo como unidade e ampliou ou o conceito de função aplicada a um ângulo para função aplicada a número real. Para isso, vamos considerar o ciclo trigonométrico.

Considere, no $\mathbb{R}^2$, um sistema de coordenadas cartesianas, o plano X0Y. O círculo de centro na origem desse sistema de coordenadas e raio unitário é chamado de "círculo trigonométrico" ou "ciclo trigonométrico". Os eixos x e y dividem o círculo em quatro partes iguais, uma em cada quadrante.

Imagine um ponto percorrendo o contorno desse círculo. A posição dele na circunferência será determinada a partir do ponto A (1, 0), que é denominado "origem dos arcos orientados".

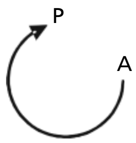


Observe o ponto P, cuja posição está bem determinada na figura.



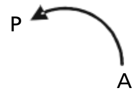
Ele “andou” sobre a circunferência e “parou” no lugar indicado. Veja bem, ele pode ter descrito o arco AP de duas formas:

a) assim:



(sentido horário)

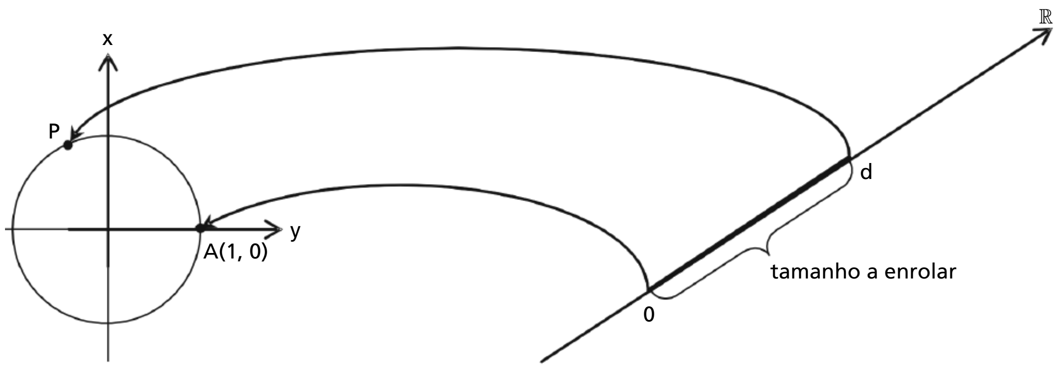
b) ou assim:



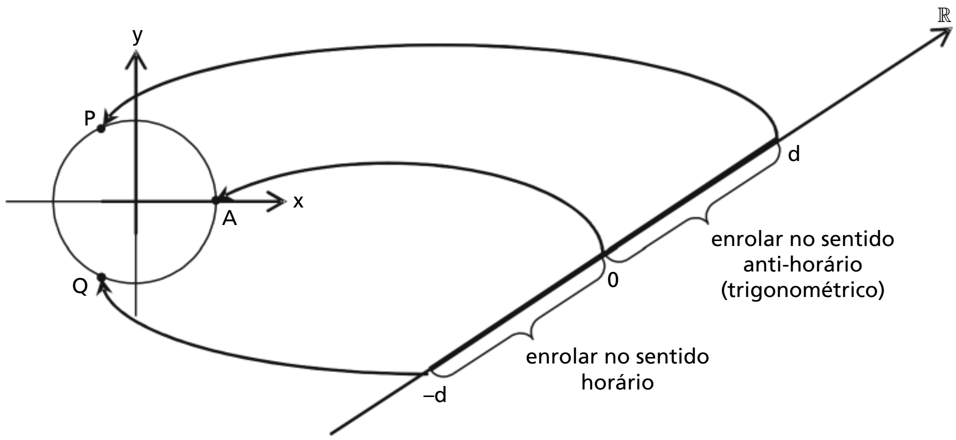
(sentido anti-horário)

As distâncias percorridas nos dois casos são diferentes. Bem, então só precisamos descobrir qual dos dois caminhos foi feito. Dois caminhos?!! E se ele tivesse dado umas três ou quatro voltas na circunferência antes de parar no ponto indicado? Ou cinco? Ou seis? E essas voltas, foram no sentido horário ou anti-horário?

Para saber ao certo qual a distância percorrida, vamos imaginar um eixo de números reais. Cada número real marcado sobre esse eixo é identificado com a distância percorrida pelo ponto na circunferência. É como se pudéssemos “enrolar” uma reta graduada no círculo, fazendo coincidir a origem do eixo com o ponto A.



O “tamanho” enrolado no exemplo corresponde a um número positivo ($d > 0$), como você pode ver pela orientação do eixo. Nesse caso, o ponto P foi localizado enrolando-se a reta no sentido anti-horário, que é chamado sentido trigonométrico, uma convenção adotada. Sempre que o número real associado ao tamanho enrolado for positivo, a reta é enrolada no sentido anti-horário (trigonométrico). Se o número real associado ao tamanho enrolado for negativo, enrola-se a reta no sentido horário, também chamado de sentido trigonométrico negativo.



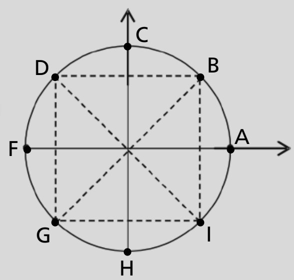
A idéia matemática envolvida neste processo de localização de um número real no círculo trigonométrico é a idéia de função. Criamos, então, uma função E, que chamamos "enrolar". Ela associa a cada número real (ou seja, a cada ponto da reta graduada) um ponto na circunferência do ciclo trigonométrico.

> **!**
> A função "enrolar" é também chamada de função de Euler.

Assim, $E(0) = A$, porque nada enrolar significa não sair do lugar, ou seja, ficar no ponto A. Como o raio do ciclo trigonométrico é igual a 1, o comprimento do círculo é $2\pi \,.\, R = 2\pi \,.\, 1 = 2\pi$. Então, $E(2\pi) = A$.

ATIVIDADE

7. Considerando os pontos A, B, C, D, F, G, H e I, na figura, determine as imagens da função "enrolar" E.



a. Determine o valor de:

$E(\pi) =$

$E(2\pi) =$

$E(\pi/2) =$

$E(3\pi/2) =$

$E(\pi/4) =$

$E(3\pi/4) =$

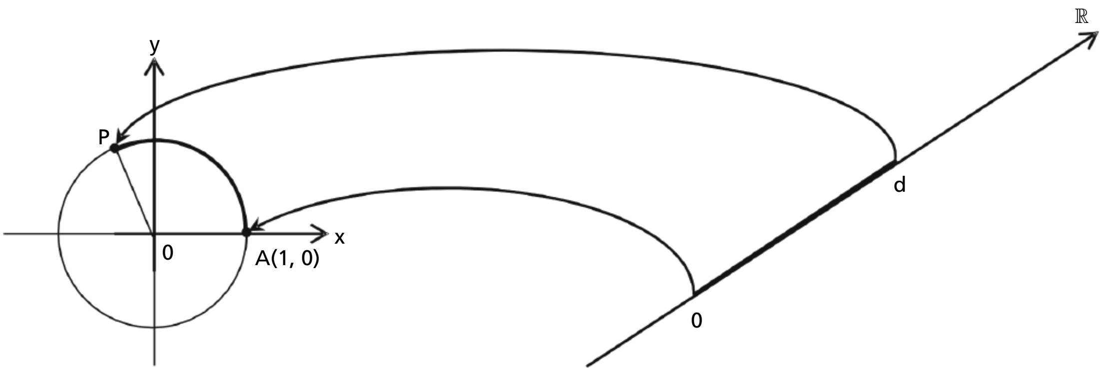
$E(7\pi/4) =$

$E(3\pi) =$
$E(5\pi) =$
$E(-\pi) =$
$E(-\pi/2) =$
$E(-5\pi/4) =$
$E(-3\pi) =$
$E(-4\pi) =$
$E(11\pi/4) =$
$E(-3\pi/4) =$
$E(-9\pi/4) =$
$E(-12\pi) =$
$E(13\pi/4) =$
$E(5\pi/4) =$
$E(-1001\pi) =$
$E(-10\pi) =$

b. Quando as imagens são iguais, qual a relação entre os valores no domínio da função?

c. A função "enrolar" é bijetora?

Como dissemos antes, a função "enrolar" E, cujo procedimento é "enrolar" números reais no ciclo trigonométrico, permite também associar a cada número real um ângulo central ou um arco.



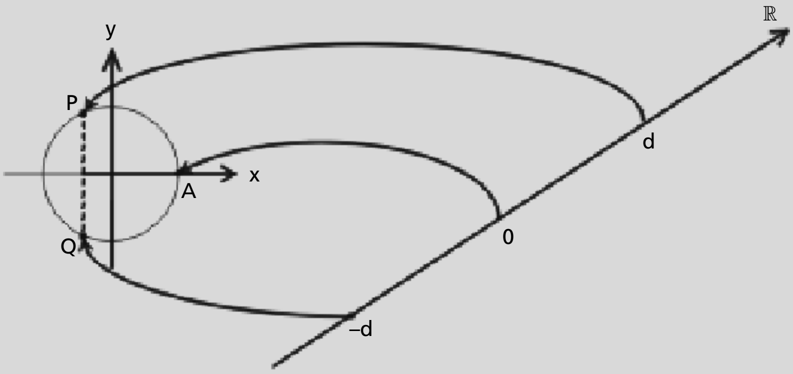
Como vemos, o número real d é associado no ciclo trigonométrico ao ponto P = E(d), determinando, de modo único, o arco AP ou o ângulo central AÔP. A medida do arco AP é igual à medida do ângulo AÔP, em radianos, pois o raio do círculo trigonométrico vale 1. Essa medida do arco AP, que é positiva e menor que uma volta na circunferência, é chamada de "menor determinação".

Dizemos que as coordenadas do ponto P = E(d) são $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, onde θ = AÔP.
De um modo geral, temos a definição de seno e cosseno de um número real d: dado um número real d, define-se (cos d, sen d) = E(d).

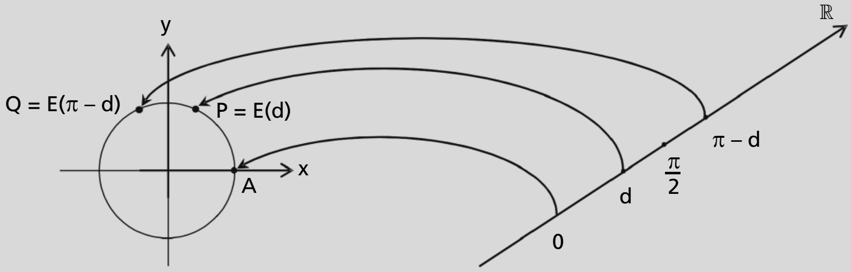
Esta definição é completamente compatível com as definições anteriores de seno e cosseno, determinadas no triângulo retângulo: $\text{sen}\ \theta = \dfrac{\text{cateto oposto a }\theta}{\text{hipotenusa}}$ e $\cos\theta = \dfrac{\text{cateto adjacente a }\theta}{\text{hipotenusa}}$.

ATIVIDADE

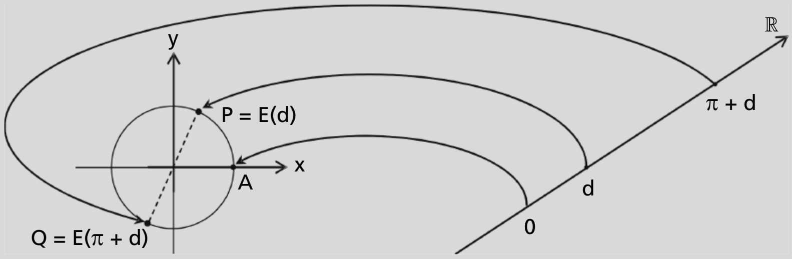
8.a. Observe os números reais d e –d. Eles são simétricos em relação ao eixo dos cossenos. Que relação que existe entre sen(d) e sen(–d)?
E do cos (d) e cos (–d)?



8.b. Os números reais d e π – d têm, como ponto médio na reta graduada, o número $m = \dfrac{d + (\pi - d)}{2} = \dfrac{\pi}{2}$. Que relação existe entre sen (d) e sen (π – d)?
E entre cos (d) e cos (π – d)?



8.c. Considere os números reais d e π + d. Como o raio do círculo trigonométrico mede 1, a medida da semicircunferência vale π, portanto, E(d) e E(π + d) são simétricos em relação ao centro do círculo, isto é, à origem dos eixos cartesianos. Que relação existe entre sen (d) e sen (π - d)? E entre cos (d) e cos (π - d)?

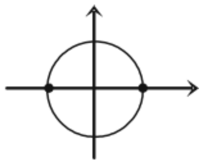


COMENTÁRIO

Observe o item b. Na Lei dos Cossenos, assumimos como definição que cos (π – d) = –cos d. Na trigonometria do ciclo trigonométrico isso é uma propriedade.

Para resolver equações trigonométricas que envolvem seno e cosseno, usamos as simetrias vistas na Atividade 8, além de considerar a não injetividade da função E quando o universo é dos números reais.

Por exemplo, para resolver a equação sen x = 0, pensamos nos pontos onde a ordenada vale 0.



Se o domínio considerado é o conjunto dos reais tais que [0, 2π], as soluções procuradas são x = 0 ou x = π. Entretanto, se considerarmos como universo todo o conjunto dos reais, teremos:

$$\underbrace{x = 0 + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi}_{x = k\pi}.$$

As soluções obtidas quando você usou o intervalo [0, 2π[são soluções particulares das equações. As obtidas quando usou $x \in \mathbb{R}$. e levou em consideração números côngruos são chamadas soluções gerais.

OUTRAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Além do seno e do cosseno, existem a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante. Essas quatro últimas podem ser definidas a partir do seno e do cosseno.

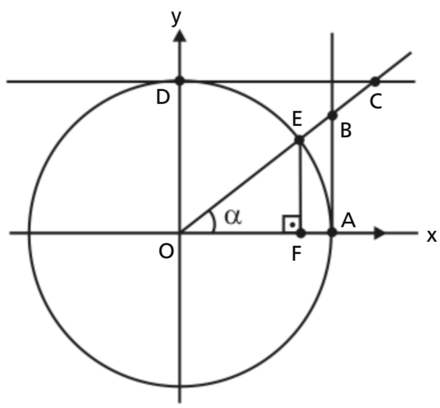
!

A tangente, que você já conhece das relações trigonométricas no triângulo retângulo, é a relação entre o seno e o cosseno, e é representada por tg x = $\frac{\text{sen } x}{\cos x}$ ou tan x = $\frac{\text{sen } x}{\cos x}$.

A cotangente é a relação entre o cosseno e o seno, e é representada por cotg x = $\frac{\cos x}{\text{sen } x}$ ou cot x = $\frac{\cos x}{\text{sen } x}$. Podemos observar que a cotangente é o inverso da tangente, ou seja, cotg x = $\frac{1}{\text{tg } x}$.

A secante é o inverso do cosseno, e representada por sec x = $\frac{1}{\cos x}$. A cossecante é o inverso do seno, e representada por cossec x = $\frac{1}{\text{sen } x}$ ou csc x = $\frac{1}{\text{sen } x}$.

Vamos fazer uma análise dessas razões trigonométricas no ciclo trigonométrico:



Os triângulos OEF, OAB e OCD são semelhantes, o que nos permite escrever:

(1) $\frac{\overline{OF}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}$.

(2) $\frac{\overline{EF}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}$.

(3) $\frac{\overline{EF}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{CD}}$.

Sabemos que: $\overline{OA} = \overline{OD} = \overline{OE} = 1$, $\overline{EF} = \text{sen }\alpha$ e $\overline{OF} = \cos\alpha$.

De (3), usamos $\frac{\overline{EF}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$, ou seja, $\frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\overline{AB}}{1} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg }\alpha$;

ainda de (3), podemos usar $\frac{\overline{EF}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{CD}}$, ou seja, $\frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\overline{CD}} \Rightarrow$

$\overline{CD} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen }\alpha} = \text{cotg }\alpha$.

De (1), usamos $\dfrac{\overline{OF}}{\overline{OE}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$, ou seja, $\dfrac{\cos\alpha}{1} = \dfrac{1}{\overline{OB}} \Rightarrow \overline{OB} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ = cossec α.

Resumindo:

$\text{tg}\ \alpha = \overline{AB}$ $\quad$ $\text{cotg}\ \alpha = \overline{CD}$ $\quad$ $\sec\alpha = \overline{OB}$ $\quad$ e $\quad$ $\text{cossec}\ \alpha = \overline{OC}$.

E há mais um detalhe: para obter essas relações, usamos α no primeiro quadrante. Se usássemos outro quadrante, obteríamos relações similares.

ATIVIDADE

9. As funções seno e cosseno são funções de domínio real. No entanto, todas as outras quatro funções reais têm problemas de restrição no domínio! Identifique esses valores problemáticos e escreva o domínio das funções:

a. f(x) = tg x.
b. f(x) = cotg x.
c. f(x) = sec x.
d. f(x) = cossec x.

!

Nesta aula, não abordamos os gráficos das funções trigonométricas, mas se você precisar saber um pouco mais sobre eles, primeiro consulte o *site* www.cabri.com.br/ensino/trigonometria.asp. Esta página mostra um programa do Cabri, que efetua de forma dinâmica cálculos de seno e cosseno. A seguir, vá ao programa gráfico *Winplot* que trabalhamos na Aula 17, faça alguns gráficos de funções trigonométricas e investigue-os.

DESENVOLVENDO AS EXPRESSÕES SEN(A + B), SEN(A – B), COS (A + B) E COS (A – B)

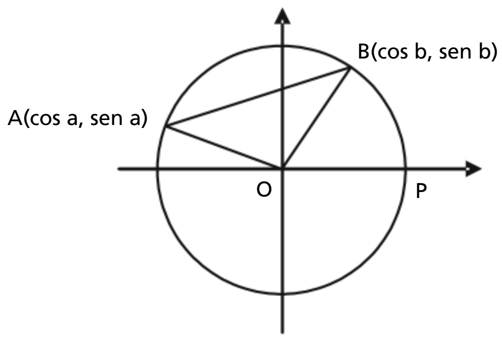
Como nas funções lineares vale o resultado f(x+y) = f(x) + f(y), há uma tendência dos alunos de utilizarem este resultado em qualquer função sem um questionamento a *priori*.

É fácil ver que sen (a+b) não é sen a + sen b. Faça $a = \dfrac{\pi}{4}$ e $b = \dfrac{\pi}{4}$: $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\,\dfrac{\pi}{2} = 1$ e $\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4} + \text{sen}\,\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Afinal, as funções seno e cosseno não são funções lineares. Lembra-se de que funções lineares são da função f(x) = Kx, onde K é não-nulo?

Então, que resultado que pode ser utilizado? Vamos mostrar cos(a-b) e, a partir dessa demonstração, todas as outras serão mostradas facilmente.

Para demonstrarmos esses resultados, será fundamental aplicar da Lei dos Cossenos. Utilizaremos essa lei somente para cos(a – b). As outras demonstrações serão obtidas a partir desta e utilizando outros resultados da trigonometria. Preste atenção nessas demonstrações, pois é uma importante forma de você trabalhar os resultados numa mesma expressão.

Considere dois arcos trigonométricos, PA, de medida *a* e PB, de medida *b*, com a > b, representados na figura. Podemos concluir que o arco BA tem medida a – b.



Usando a lei dos cossenos no triângulo OAB, escrevemos:
$\overline{AB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OA}^2 - 2 \, . \, \overline{OB} \, . \, \overline{OA} \, . \cos(a - b)$. Calculando as medidas dos lados do triângulo, obtemos: $\overline{AB} = d(A, B) = (\cos a - \cos b)^2 + (\text{sen } a - \text{sen } b)^2$ e $\overline{OB} = \overline{OA} = 1$. A equação fica, então, $(\cos a - \cos b)^2 + (\text{sen } a - \text{sen } b)^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \, . \, 1 \, . \, 1 \, . \cos(a - b)$.
Desenvolvendo-a, temos:
$\cos^2 a - 2 \, . \cos a \, . \cos b + \cos^2 b + \text{sen}^2 a - 2 \, . \, \text{sen } a \, . \, \text{sen } b + \text{sen}^2 b = 2 - 2\cos(a - b)$.
Lembrando que $\cos^2 a + \text{sen}^2 a = \cos^2 b + \text{sen}^2 b = 1$, a equação fica:
$1 - 2 \, . \cos a \, . \cos b + 1 - 2 \, . \, \text{sen } a \, . \, \text{sen } b = 2 - 2\cos(a - b)$, ou melhor, $2\cos(a - b) = 2 \, . \cos a \, . \cos b + 2 \, . \, \text{sen } a \, . \, \text{sen } b$.
Dessa forma, chegamos a fórmula do cosseno da diferença de dois arcos, *a* e *b*:

$$\boxed{\cos(a - b) = \cos a \, . \cos b + \text{sen } a \, . \, \text{sen } b}$$

Veja, por exemplo, o que podemos mostrar com esse resultado.

Como $\cos(90° - x) = \cos 90° . \cos x + \text{sen } 90° \, . \, \text{sen } x$ e $\cos 90° = 0$ e $\text{sen } 90° = 1$, temos que $\cos(90° - x) = 0 \, . \cos x + 1 \times \text{sen } x = \text{sen } x$. Essa relação $\cos(90° - x) = \text{sen } x$ é muito importante para facilitar e simplificar cálculos na trigonometria.

ATIVIDADES

10. Utilizando o resultado de cos(a – b), faça o que se pede:
(a) Determine cos 15°.
(b) Obtenha cos(–b) e sen(–b).
(c) Escreva a fórmula para cos (a + b).

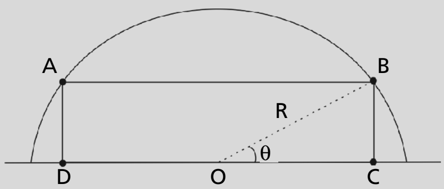
COMENTÁRIO

Agora, que sabemos cos(a – b) e cos (a + b), este último pela Atividade 10, vamos obter o seno da soma de dois arcos e o seno da diferença de dois arcos. São eles:
sen(a + b) e sen(a – b).
Como cos (90° – x) = sen x, temos:
sen(a + b) = cos(90° – (a + b)) = cos((90° – a) – b).
Utilizando o resultado de cos(a – b), chegamos em:
sen (a + b) = cos (90° – a) . cos b + sen (90° – a) . sen b =
sen a . cos b + cos a . sen b.
Você acabou de obter mais uma fórmula!

$$\boxed{\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a}$$

Para obter o seno da diferença entre dois arcos, sen(a – b), basta utilizar que sen(a + b) = sen a . cos b + sen b . cos a, cos(–b) = cosb e sen(–b) = – sen b.
Dessa forma: sen(a – b) = sen (a + (–b)) = sen a . cos (–b) + cos a . sen (–b) = sen a . cos b + cos a . (–sen b) =
Assim, sen(a – b) = sen a . cos b – sen b . cos a.
Usando as fórmulas da soma, cos(a + b) e sen(a + b), é possível obter o seno e o cosseno do arco duplo, ou seja, sen 2a e cos 2a.
sen 2a = sen(a + a) = sen a . cos a + sen a . cos a = 2 . sen a . sen b
e
cos 2a = cos(a + a) = cos a . cos a – sen a . sen a = cos^2 *a – sen*^{2} *a.*
Temos, então, sen 2a = 2 . sen a . cos b e cos 2a = cos^2 *a – sen*^{2} *a.*

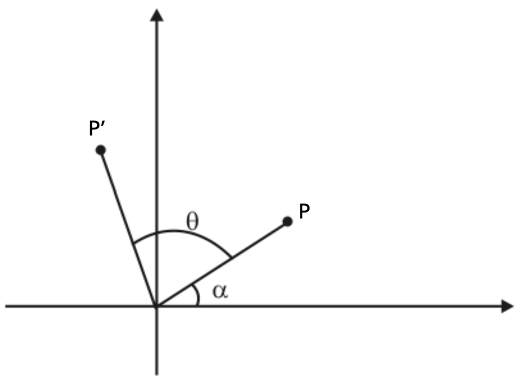
11. (UFRJ) Na figura dada, temos um semi-círculo de raio R e centro O. O ângulo entre o raio OB e o lado CD é θ.



a. Calcule os lados do retângulo ABCD em função de R e de θ.
b. Mostre que a área do retângulo ABCD é máxima para θ. = 45°.

UMA APLICAÇÃO IMPORTANTE: ROTAÇÕES

Uma aplicação desses resultados que pode ser trabalhada no Ensino Médio é na matriz rotação. Se desejarmos fazer uma rotação num ponto P, de centro na origem e ângulo de θ no sentido anti-horário, qual será as coordenadas de P', isto é, do ponto transformado?



Sem perda de generalidade, suponhamos que P e P' estão distantes uma unidade da origem. Dessa forma, as coordenadas de P e P' são:

P = (cos α, sen α)

P' = (cos (α+θ), sen (α+θ)).

Que matriz transformará o ponto P no ponto P'? Como estamos transformando pontos do plano em pontos do plano, esta matriz é de ordem 2 e atende à:

$$T \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \text{sen}\,\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \text{sen}\,(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \text{sen}\,\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \text{sen}\,(\alpha+\theta) \end{pmatrix}.$$

Portanto, temos um sistema de equações:

a. cos α + **b**. sen α = cos(α+θ) e **c**. cos α + **b**. sen α = sen(α+θ).

Usando os resultados de cos(α+θ) e sen(α+θ), temos:

a. cos α + **b**. sen α = cos α .cos θ – sen α . sen θ e

c. cos α + **b**. sen α = sen θ . cos α + sen α . cos θ.

Para as igualdades que aconteceram, concluímos que:

a = cos θ.

b = –sen θ.

c = sen θ.

d = cos θ.

Assim, a matriz de rotação para um ângulo θ qualquer é dada por:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Observe que não chegaríamos à matriz rotação se não soubéssemos os resultados de cos $(\alpha + \theta)$ e sen $(\alpha + \theta)$. Uma outra importante aplicação desses resultados, você verá na Aula 29, na multiplicação de números complexos.

ATIVIDADE FINAL

Você sabe que as funções seno e cosseno são periódicas. Se você caminhar com passos iguais, com um giz na mão riscando o quadro-negro, subindo e descendo de forma harmônica você encontrará uma senóide. As funções trigonométricas modelam muitos fenômenos naturais.

Um aluno lhe pergunta: "Essa função se aplica aonde"?.

Responda à pergunta de seu aluno pesquisando três contextos em que a trigonometria aparece. Entregue ao tutor.

CONCLUSÃO

A Trigonometria abrange uma parte muito grande e importante da Matemática do Ensino Fundamental e Médio. Por isso não foi possível abordar todos os tópicos desse assunto, e priorizamos o trabalho com distâncias inacessíveis, trabalhando com triângulos quaisquer, cálculos de áreas, determinação de seno e cosseno de qualquer número real por meio da função de Euler e estudo das simetrias e das relações trigonométricas que causam mais dificuldades.

O uso de mapas pode ser uma importante ferramenta, pois desperta a curiosidade e a criatividade na solução dos problemas.

Pesquise mais sobre esse assunto, você vai descobrir um mundo impressionante de aplicações da Trigonometria em outras áreas do conhecimento e na própria Matemática, pois podemos utilizá-la nos cálculos de áreas e perímetros, no estudo de números complexos, nas rotações, nas funções, enfim, não faltam motivos para trabalhar a Trigonometria de forma contextualizada.

RESUMO

O estudo da trigonometria utiliza importantes conceitos da Matemática, tais como semelhança, ângulos, radiano, número real, função, dentre outros.
A trigonometria é importante nos cálculos de distâncias inacessíveis, por isso a necessidade de trabalharmos em triângulos que não são retângulos, e, nesse caso, é fundamental apresentar a Lei dos Cossenos e a Lei dos Senos.
Buscar exemplos práticos nesse momento valoriza bastante as aulas. Esses exemplos podem ser pesquisados na internet, nos livros de História da Matemática e nos livros didáticos. A procura de bons exemplos e boas aplicações deve ser uma constante para o professor de Matemática.
A função de Euler, ou "enrolar", é de fundamental importância para o estudo da trigonometria no círculo. No Ensino Médio, de um modo geral, essa função não é vista, mas entendemos que não há motivos para isso, pelo contrário, é mais uma forma de aprofundarmos os conceitos de função e de número real.

AUTO-AVALIAÇÃO

Durante a aula, você conheceu importantes aplicações da Trigonometria no cálculo de distâncias (reveja a Atividade 5); em problemas de investigação de resultados da trigonometria (Atividades 2 e 3); no conceito de função (Atividades 7 e 9) e nas simetrias (Atividades 8).

É relevante você entender que a abordagem feita na definição do seno e do cosseno de um número real requer cuidados quanto ao entendimento do aluno sobre número real, pois os números reais não são bem trabalhados no Ensino Fundamental e Médio. Essa é, então, uma boa oportunidade de aprofundar mais os números reais.

Todas as atividades devem ser bem trabalhadas e entendidas, pois abordam diferentes conceitos desse assunto tão amplo, a Trigonometria, que tem início no final do Ensino Fundamental, com a trigonometria nos triângulos, é retomado no Ensino Médio, com a Trigonometria no Círculo e as funções trigonométricas e volta a ser utilizado ao final do Ensino Médio, no estudo de números complexos.

Se for possível, faça anotações importantes desta aula, contendo os resultados e as estratégias de ensino.

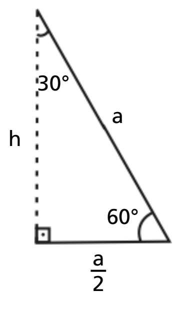
INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você vai ver uma abordagem geométrica no estudo de números complexos.

RESPOSTAS

Atividade 1

Traçando a altura h, construímos o triângulo retângulo cujos catetos medem h, $\frac{a}{2}$ e a hipotenusa, a. Neste triângulo, a medida do ângulo oposto ao cateto de medida $\frac{a}{2}$ é 30° e a do oposto ao cateto de medida h é 60°.



Aplicando Pitágoras, encontramos $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Assim,

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} = \cos 60°, \qquad \text{sen } 60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°,$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{e} \qquad \text{tg } 60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}\,.$$

Atividade 2

a. Complete a tabela:

Triângulo	sen Â	cos Â
1	0,1691	0,9869
2	0,3244	0,9937
3	0,4609	0,4609
4	0,799	0,601

b. Para 0º < med (Â) < 90º, à medida que a inclinação aumenta, o cosseno diminui e o seno aumenta.

c. Não. Quando Â é tal que 0º < med (Â) < 90º, a tangente aumenta entre 0º e 45º e diminui entre 0º e 45º. Para analisar essa situação, é necessária uma pesquisa de um número maior de casos.

Atividade 3

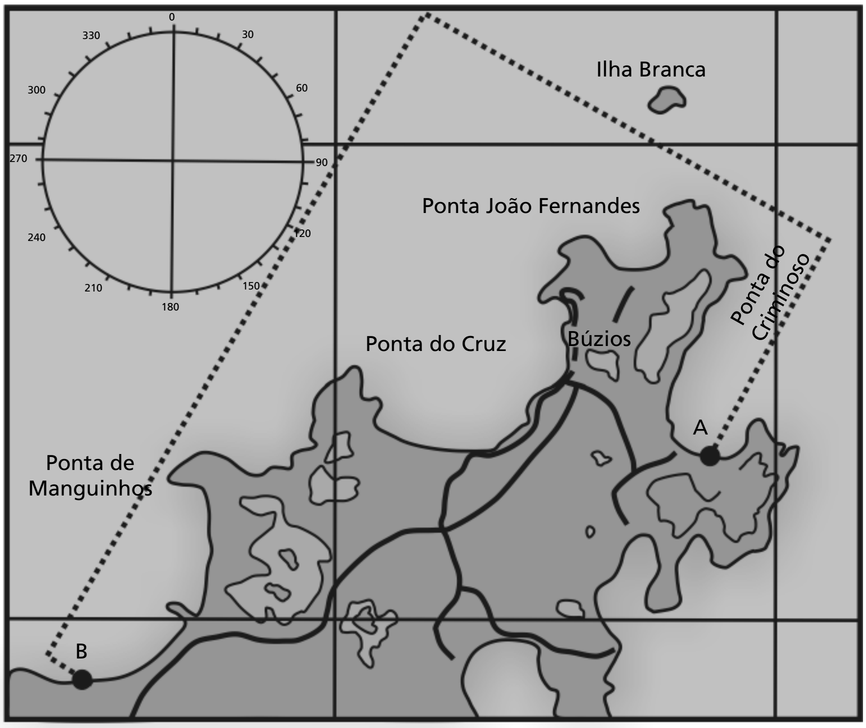
É importante que o professor aproveite para sinalizar aos alunos que as razões seno e o cosseno não podem ser maiores que 1. Na trigonometria do triângulo, essas razões são definidas como (medida do cateto)/(medida da hipotenusa). Como a hipotenusa sempre será maior que os catetos, essas razões sempre serão menores que 1.

Atividade 4

$\text{Área}_{\Delta} = \frac{ch}{2}$, onde h é a altura relativa ao vértice C. Podemos escrever h = bsen θ, e assim obtemos a fórmula.

Atividade 5

A seguir temos um exemplo de planejamento que o navegante pode seguir.



No mapa, saindo do ponto A, o navegante segue o planejamento:

– rota 30° e anda 3,3cm.

– rota 300 – 6,4cm.

– rota 240 – 10,1cm.

– rota 120 – 0,8cm.

Como cada 2cm no mapa corresponde a 1km no real, temos:

– rota 30 – 1,65km.

– rota 300 – 3,4km.

– rota 240 – 5,05km.

– rota 120 – 0,4km

Como o barco percorre 12km em 1 hora, o navegador deve seguir:

– 0,1375h ou 8,25 min na rota 30;

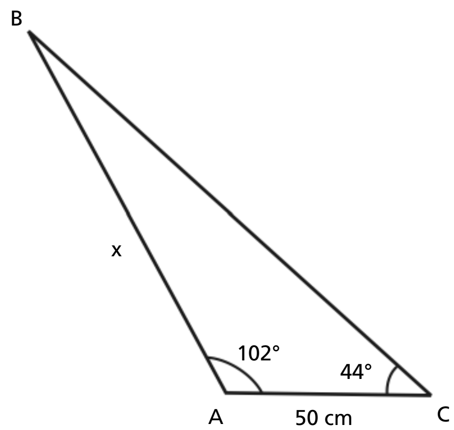
– 0,2833h ou aproximadamente 17 min na rota 300;

– 0,4208h ou aproximadamente 25,25 min na rota 240;

– 0,0333h ou aproximadamente 2 min na rota 120.

Atividade 6

Observe o problema modelado no triângulo:



$$\frac{x}{\text{sen } 44°} = \frac{50}{\text{sen } 34°} = \frac{x}{0{,}6947} = \frac{50}{0{,}5592} \Rightarrow x \cong 62{,}12\text{m}.$$

Atividade 7

a.

$E(\pi) = F$	$E(2\pi) = A$	$E(\pi/2) = C$	$E(3\pi/2) = H$	$E(\pi/4) = B$
$E(3\pi/4) = D$	$E(7\pi/4) = I$	$E(3\pi) = F$	$E(5\pi) = F$	$E(-\pi) = F$
$E(-\pi/2) = H$	$E(-5\pi/4) = D$	$E(-3\pi) = F$	$E(-4\pi) = A$	$E(11\pi/4) = D$
$E(-3\pi/4) = G$	$E(-9\pi/4) = I$	$E(-12\pi) = A$	$E(13\pi/4) = G$	$E(5\pi/4) = G$
$E(-1001\pi) = F$	$E(-10\pi) =A$			

b. Observe que $E(d + k\times 2\pi) = E(d)$, para todo número inteiro k.

c. Não. Apesar de sobrejetora, a função não é injetora.

Atividade 8

a. Como $P = E(d) = (\cos d, \text{sen } d)$ e $Q = E(-d) = (\cos(-d), \text{sen }(-d))$, concluímos que: $\text{sen }(-d) = -\text{sen } d$ e $\cos(-d) = \cos d$.

b. Como $P = E(d) = (\cos d, \text{sen } d)$ e $Q = E(\pi - d) = (\cos(\pi - d), \text{sen }(\pi - d))$, conclui-se que $\cos(\pi - d) = -\cos d$ e $\text{sen }(\pi - d) = \text{sen } d$.

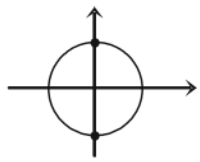
c. $P = E(d) = (\cos d, \text{sen } d)$ e $Q = E(\pi + d) = (\cos(\pi + d), \text{sen }(\pi + d))$.

Então, $\cos(\pi + d) = -\cos d$ e $\text{sen }(\pi + d) = -\text{sen } d$.

Atividade 9

a. Função tangente $f(x) = \text{tg } x$.

$\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} \Rightarrow \cos x \neq 0 \Rightarrow$,então, não pode ser assim:



, ou seja, $x \neq \dfrac{\pi}{2}$ e $x \neq \dfrac{3\pi}{2}$.

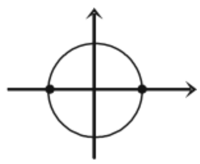
Como não estamos restritos ao intervalo $[0, 2\pi[$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi +$ e $x \neq \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

Podemos escrever de forma compactada esta restrição: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, pois as restrições que têm variação de meia volta (180º).

Portanto, o domínio de $f(x) = \text{tg } x$ é $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\}$.

b. Função cotangente $f(x) = \text{cotg } x$.

$\text{cotg } x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} \Rightarrow \text{sen } x \neq 0 \Rightarrow$,então, não pode ser assim:



, ou seja, $x \neq 0$ e $x \neq \pi$.

De um modo geral, $x \neq 2k\pi$ e $x \neq \pi + 2k\pi$. Podemos escrever, então, $x \neq k\pi$.

Assim, o domínio de $f(x) = \text{cotg } x$ é $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$.

c. Função secante f(x) = sec x.

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x \neq 0 \Rightarrow$ então, o domínio desta função é igual ao domínio da função tangente, ou seja, Dom f = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\}$.

d. Função cossecante f(x) = cossec x.

$\text{cossec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x} \Rightarrow \text{sen } x \neq 0 \Rightarrow$,então, o domínio desta função é igual ao domínio da função cotangente, ou seja, Dom f = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$.

Atividade 10

a. $\cos 15° = \cos (45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \text{sen } 45° \text{sen } 30° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} . \dfrac{\sqrt{3}}{2} . \dfrac{\sqrt{2}}{2} . \dfrac{1}{2}$
$= \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$.

b. Basta escrever $\cos (0° - b) = \cos 0° . \cos b + \text{sen } 0° . \text{sen } b = 1 . \cos b + 0 . \text{sen } b = \cos b$.

Da mesma forma, sen(–b) = sen b.

Você se lembra de que a função f(x) = cos x é uma função par e f(x) = sen x. é uma função ímpar?

c. Escrevemos cos(a + b) = cos(a – (–b)) = cos a . cos(–b) + sen a . sen(–b). Usando os resultados do item b, cos (–b) = cos b e sen (–b) = –sen b, temos:

cos (a + b) = cos a . cos b + sen a . (–sen b) = cos a . cos b – sen a . sen b

cos (a + b) = cos a . cos b – sen a . sen b.

Atividade 11

Da figura, podemos escrever: $\text{sen } \theta = \dfrac{BC}{R} \Rightarrow BC = R\text{sen } \theta$ e $\cos \theta = \dfrac{OC}{R} \Rightarrow OC = R\cos \theta$.

a. Os lados do retângulo medem AD = BC = R sen θ e AB = DC = 2R cos θ.

b. Como a área do retângulo é o produto da medida de seus lados, temos:

$A_{\text{retângulo}} = 2R \cos \theta . R \text{ sen } \theta = R^2 (2 . \text{sen } \theta . \cos \theta) = R^2 \text{ sen } 2\theta$.

Esta área será máxima quando sen $2\theta = 1$, ou seja, quando $2\theta = 90° \Rightarrow \theta = 45°$.

Atividade Final

Para ilustrar um contexto em que aparece a trigonometria, temos o som produzido pelas teclas de um telefone digital. A soma de dois tons é dado por $y = \text{sen } 2\pi LT$ e $y = \text{sen } 2\pi HT$, onde L é a freqüência baixa, H a alta, e T o tempo.

AULA 29

Conhecendo mais números... Agora um pouco mais complexos!

Meta da aula

Instrumentalizar o trabalho com os números complexos.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- Refletir sobre episódios da história dos números complexos.
- Discutir o ensino de números complexos numa abordagem geométrica.
- Relacionar as operações dos números complexos com as transformações no plano.
- Relacionar números complexos com problemas de geometria plana.

Pré-requisitos

Para o desenvolvimento desta aula, é necessário que você conheça o conjunto dos números complexos, conceitos básicos da trigonometria e algumas transformações no plano, que você viu na disciplina Pré-cálculo, Aulas 28 e 29.

INTRODUÇÃO

Nesta aula, vamos discutir o surgimento dos números complexos na história e alguns aspectos do seu ensino. Apresentaremos a construção desses números em uma abordagem geométrica, diferente da abordagem usual no Ensino Médio, que é a algébrica. Resolveremos, também, problemas geométricos por meio dos números complexos e suas operações e relacionaremos as operações desse conjunto com respectivas transformações no plano.

O conjunto dos números complexos possui lugar de destaque na 3ª série do Ensino Médio, pois seu conhecimento é fundamental para o estudo dos polinômios e das equações polinomiais (que também é assunto dessa série). É comum que os alunos tenham muitas dificuldades com os números complexos. Seus depoimentos sobre esse assunto, de um modo geral, giram em torno de: "Para que precisamos disso?" "Qual a sua aplicação?".

Ao final do Ensino Fundamental, ao resolver equações do 2º grau, os alunos acreditam que as equações que possuem o discriminante delta (Δ) negativo não têm solução, pois não existe raiz quadrada de um número negativo. Essa visão reflete, dentre outras coisas, a falta de cuidado no trabalho do professor na resolução de equações de 2º grau, que diz: "Essa equação não tem raiz", frase que pode ser substituída por "Essa equação não tem raiz *real*".

Quando esse mesmo aluno chega ao final do Ensino Médio e passa a resolver todas as equações do 2º grau, pois as raízes quadradas de números negativos passam a ter significado, parece que as soluções surgem do nada. Também fica a falsa impressão de que os números complexos surgem para resolver as equações do 2º grau. Historicamente, não foi assim que ocorreu o surgimento da idéia de número complexo.

É importante que o professor esclareça sempre para o aluno que o conjunto universo está sendo considerado.

!

Lembre-se de acessar a disciplina na plataforma Cederj. Lá você encontrará diferentes animações e recursos que auxiliarão sua aprendizagem na aula.

TUDO COMEÇOU NO SÉCULO XVI

Não foi para resolver equações do 2º grau que surgiram os números complexos, mas para resolver as equações de 3º grau, no caso em que estas possuem três raízes reais não-nulas. É este o primeiro contato com o mundo dos números complexos.

Em 1539, Scipione del Ferro apresentou uma forma de resolver uma equação do 3º grau ao matemático Tartaglia. Essa fórmula foi parar nas mãos de Ferrari, que a entregou a seu mestre, Cardano.

Cardano, após demonstrar a fórmula, publica-a como se fosse sua. Essa fórmula, conhecida e usada até hoje, corresponde à solução de uma equação de 3º grau do tipo

$x^3 + px = q$, é $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

Qualquer equação do 3º grau pode ser manipulada algebricamente, de forma a ser escrita como $x^3 + px = q$, e ser resolvida pela fórmula de Cardano.

Mas o que esse fato tem a ver com os números complexos?

É que Cardano tentou resolver a equação cúbica $x^3 = 4 + 15x$. Como ele sabia que 4 era uma das raízes dessa equação, percebeu que a fórmula de del Ferro-Tartaglia dava como resposta $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$!

Deparando-se com o termo $\sqrt{-121}$, ele não conseguiu ver como "destravar" o cálculo, de modo a fazer a regra chegar ao esperado $x = 4$. Cardano procurou inventar artifícios de cálculo que evitassem o uso de raízes quadradas de números negativos, mas conseguiu apenas pequenos resultados.

Em 1572, Bombelli resolveu esse impasse. Ele supôs que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ deveriam ser números do tipo $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$.

Assim, concluiu que $a = 2$ e $b = 1$, pois $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$ e $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121} \Rightarrow x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$.

Dessa forma, os números que viriam a ser chamados complexos podiam produzir raízes reais. As equações cúbicas estudadas por Cardano (1545) e Bombelli (1572) motivaram a utilização dos números complexos.

Observe que foi necessário trabalhar com os números complexos, "como se fossem números", para achar a solução real (positiva) $x = 4$ do problema.

Mais tarde, já no século XVIII, Abraham De Moivre introduziu métodos mais modernos na investigação das propriedades dos números complexos, e chegou às conhecidas "fórmulas de Moivre". Foi também neste século que Euler trabalhou na teoria dos números complexos. Em 1740, anunciou a Bernoulli a descoberta da fórmula $e^{+x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2\cos x$ e aprofundou outras idéias sobre os números complexos.

Aos poucos, foram surgindo várias tentativas de representação geométrica dos complexos. O Teorema Fundamental da Álgebra, que envolve números complexos, quando foi enunciado, não foi demonstrado. Um dos matemáticos que se interessou por este assunto foi Gauss, que publicou quatro demonstrações desse teorema.

Os números complexos, apesar de terem uma história recente, envolveram a pesquisa de vários matemáticos. Foram realizados vários trabalhos de investigação, e mesmo hoje em dia, sabe-se que ainda há muito o que descobrir e muitas questões em aberto para resolver!

Um agrimensor norueguês chamado Wessel (1798) e Argand, um matemático suíço (1806), foram aparentemente os primeiros a compreender que os complexos não têm nada de "irreal", são apenas pontos (ou vetores) do plano, que se somam por meio da composição de translações, e se multiplicam pela composição de rotações e dilatações. Wessel foi o primeiro a representar, geometricamente, os números complexos, estabelecendo uma correspondência bijetiva entre estes e os pontos do plano.

Gauss foi quem definiu como números da forma a + bi, onde a e b são números reais e $i^2 = -1$. Já Hamilton, os definiu como o conjunto dos pares ordenados (vetores) (a,b), onde a e b são números reais.

Todos esses matemáticos citados são considerados os criadores da teoria dos números complexos.

O fato de se trabalhar com os números complexos antes de compreendê-los como números, por meio da fórmula de Cardano, determinou o uso das raízes de números negativos antes de os negativos serem aceitos como números.

O significado geométrico dos números negativos surgiu com a representação geométrica dos complexos. Hankel (1867), trabalhando com a álgebra dos números complexos e as leis fundamentais da aritmética, supondo a permanência da propriedade distributiva a(b + c) = ab + ac, estabeleceu a regra da multiplicação (o produto de dois números inteiros negativos é sempre positivo), (–1) x (–1) = 1, da seguinte forma: –1 + 1 = –1 x (1 – 1) = –1 x 0 = 0. Assim, terminava a polêmica entre os que ainda não aceitavam e os que aceitavam os números negativos como números.

Os números complexos abriram caminho para que os matemáticos pudessem criar novas álgebras. Os algoritmos recursivos (iterativos ou recorrentes) no plano complexo criaram os fractais. Estas formas geométricas de dimensão fracionária servem como exemplo para descrever formas irregulares da superfície da terra e para modelar fenômenos, aparentemente imprevisíveis (teoria do caos), de várias naturezas. Os fractais permitem desenhar (ou modelar) coisas ou fenômenos da natureza numa tela de computador, utilizando a computação gráfica.

UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA

Acreditamos que é interessante para você, futuro professor de Matemática, conhecer essa forma de abordar os complexos, que é diferente da maneira apresentada na maioria dos livros didáticos.

Essa metodologia propicia aos alunos vivenciar o significado geométrico de um número complexo por meio da translação que ele define, e das operações adição e multiplicação: a adição como composição de translações e a multiplicação como composição de rotações e dilatações.

No contexto da multiplicação, a forma trigonométrica é amplamente utilizada. Aos poucos, apresentamos todas as propriedades de um corpo, enfatizando o elemento neutro da adição e o elemento neutro da multiplicação, facilitando a visualização do elemento simétrico e do elemento inverso. O número *i* surge naturalmente como um complexo unitário que define uma rotação de 90°, e a equação $i^2 = -1$ é entendida geometricamente. Mas só falamos dele depois de apresentar as operações adição e multiplicação.

Segundo Carneiro (2001), o número complexo apresentado na forma a + bi facilita o cálculo, mas ele questiona esse objetivo “calculador”. É que, nessa abordagem, perde-se a chance de apresentar os complexos como entes geométricos e essa oportunidade não é mais recuperada. O enfoque usual é demasiado algébrico e excessivamente formal, e não se aproveita o ensejo para aplicar os conhecimentos de números complexos à Geometria, como se fez desde Gauss. Ainda segundo o autor, na abordagem algébrica, o número *i*, numa espécie de golpe baixo, “cai do céu”, pois até então nenhum número elevado ao quadrado podia ser negativo.

A primeira diferença em relação à abordagem algébrica $z = a + bi$ acontece na definição do conjunto $\mathbb{C}$. Este é definido como o conjunto de todos os pares ordenados do plano, munido de duas operações, a adição e a subtração.

Mas o que é um número complexo?

O Conjunto dos números complexos pode ser definido por

$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Os números reais a e b são chamados, respectivamente, de parte real e parte imaginária do número complexo.

Representaremos os elementos de $\mathbb{C}$ num sistema ortogonal de eixos semelhante ao plano cartesiano chamado de plano complexo ou plano de Argand-Gauss. Os eixos horizontal e vertical serão chamados respectivamente de eixo real e eixo imaginário. Um número complexo z pode ser representado como um par ordenado, chamado de *Afixo* ou como um vetor. Veja:

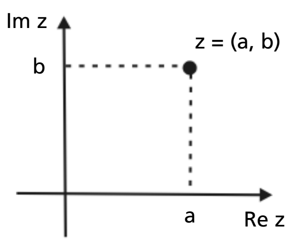


Figura 29.1: Afixo.

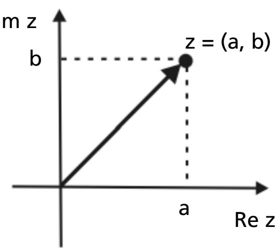


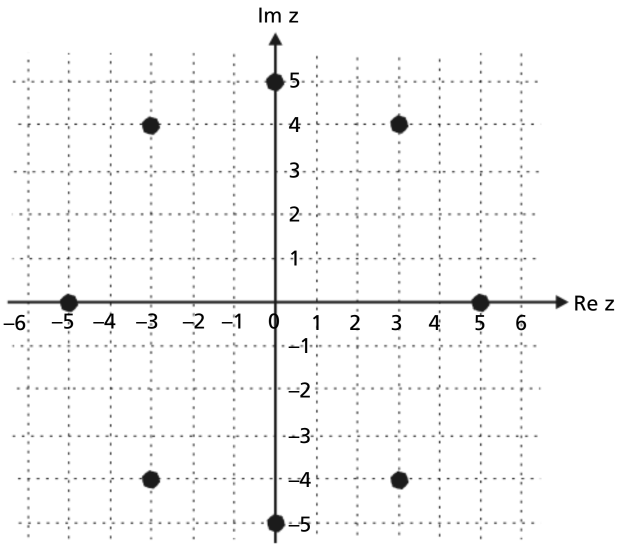
Figura 29.2: Vetor.

Cada número complexo (a, b) define um movimento de translação. Nas **Figuras 29.1** e **29.2**, temos o vetor z e este define o movimento de a unidades à direita e b unidades para cima.

A partir disso, podemos trabalhar o conceito de módulo de um complexo $|z|$, que é a distância do afixo à origem, ou o módulo do vetor Oz, onde z é um complexo qualquer.

Vamos representar os complexos a seguir.

$z_1 = (3, 4)$	$z_2 = (-3, 4)$	$z_3 = (3, -4)$	$z_4 = (-3, -4)$
$z_5 = (5, 0)$	$z_6 = (-5, 0)$	$z_7 = (0, 5)$	$z_8 = (0, -5)$



ATIVIDADE

1.a. Calcule o módulo desses oito números complexos.
1.b. Que propriedade comum eles têm?
1.c. Escreva todos os números complexos que possuem essa mesma propriedade.

OS COMPLEXOS E O XADREZ

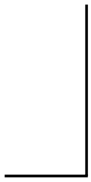
Vamos ver uma aplicação bem interessante. Você conhece no jogo de xadrez o movimento do cavalo? Ele faz um movimento em forma de L. Esses movimentos representam translações, por isso podemos representar todos os movimentos dessa peça por meio de números complexos. Veja:

2 para direita e 1 para cima → (2, 1) ou 2 + i

2 para direita e 1 para baixo → (2, –1) ou 2 – i

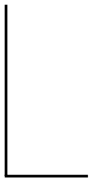
2 para esquerda e 1 para cima → (–2, 1) ou –2 + i

2 para esquerda e 1 para baixo → (–2, –1) ou –2 – i

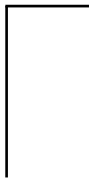


1 para direita e 2 para cima → (1, 2) ou 1 + 2i

1 para direita e 2 para baixo → (1, –2) ou 1 – 2i

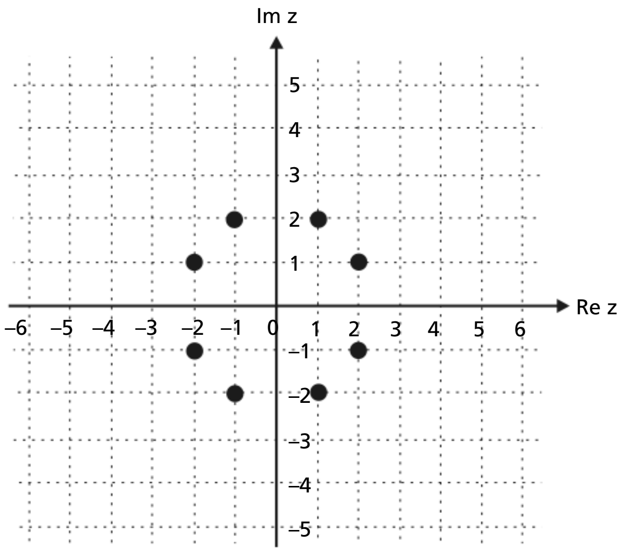


1 para esquerda e 2 para cima → (–1, 2) ou –1 + 2i



1 para esquerda e 2 para baixo → (–1, –2) ou –1 – 2i

Vamos representar todos esses complexos no plano complexo.



Observe que todos esses complexos possuem o mesmo módulo, todos distam $\sqrt{5}$ da origem. Confira!

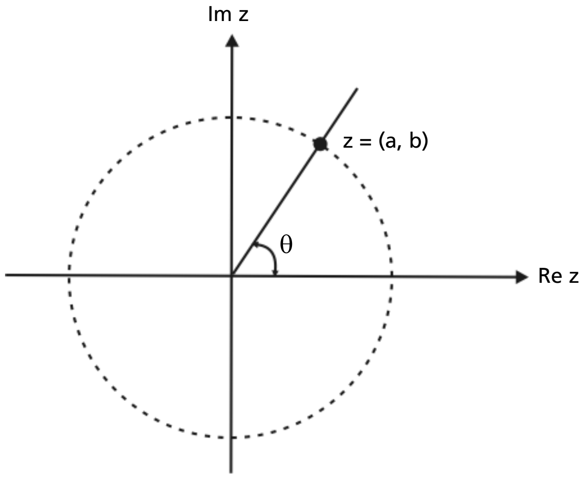
!

Se você gosta de desafios, o *site* www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm25/index1.htm possui o seguinte problema, com resolução:
"Num tabuleiro de xadrez de dimensão n^2 onde n é ímpar, pode um cavalo percorrer todas as casas uma só vez, e voltar à casa de partida?".

Uma outra maneira de escrever um complexo: a forma trigonométrica

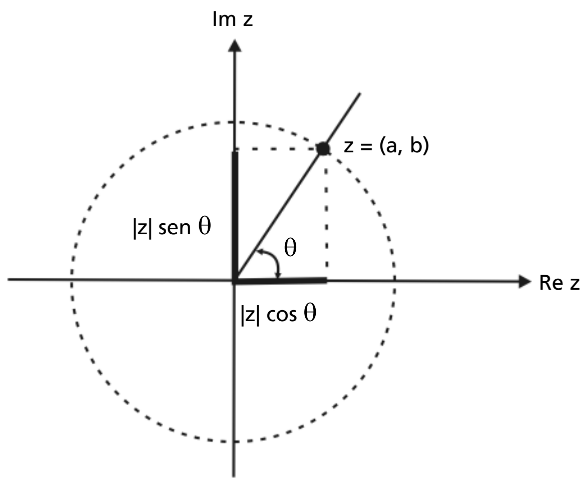
Quando falamos do complexo (a, b), estamos definindo-o através de suas coordenadas cartesianas ou retangulares. Existe uma outra forma de escrevê-lo, por meio do seu módulo (que define sua distância à origem) e do ângulo que o correspondente vetor de posição forma com o sentido positivo do eixo horizontal. Este ângulo é chamado argumento de z (Arg z).

Dessa forma, qualquer número complexo ficará bem determinado. Veja a seguir que a medida do raio do círculo é |z|, e que o ângulo que a semi-reta Oz forma com o sentido positivo do eixo real é θ = Arg(z).



A partir daí, e com um pouco de trigonometria, você pode concluir que a = |z|cos θ e b= |z|sen θ. Logo, z = (|z|cos θ, |z|sen θ) = |z|(cos θ, sen θ). Esta forma de escrever um complexo é denominada forma trigonométrica de z.

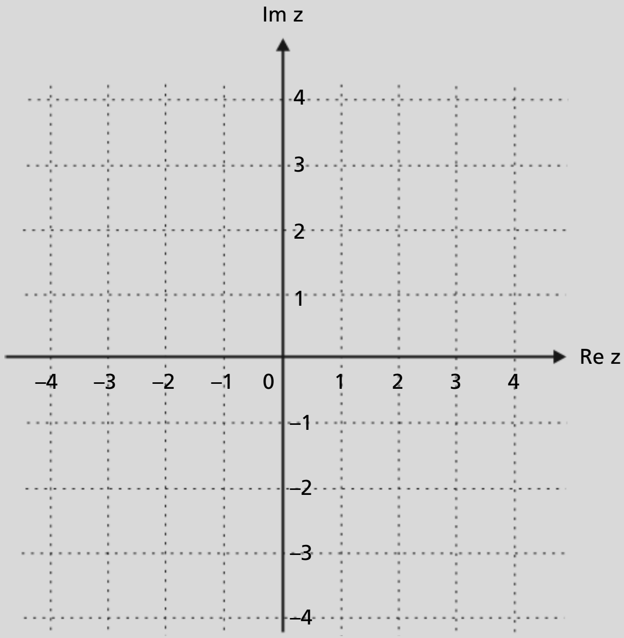
$$\boxed{z = |z|(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)}$$



ATIVIDADES

2. Localize os complexos e escreva-os na forma cartesiana.

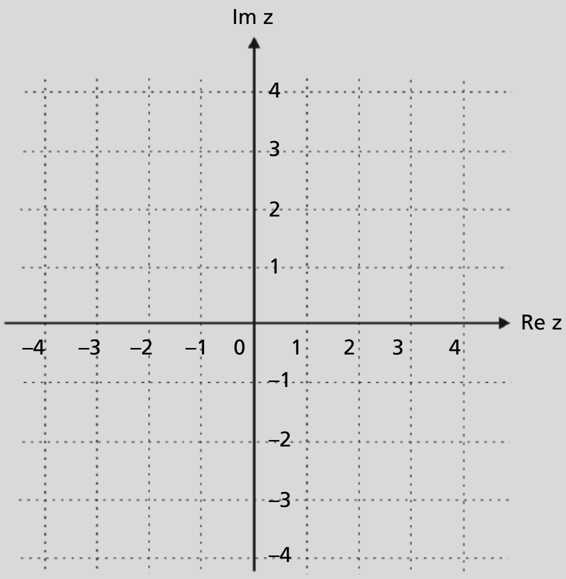
a. $|z| = 2$ e $\theta = 90°$ b. $|w| = 4$ e $\theta = 225°$

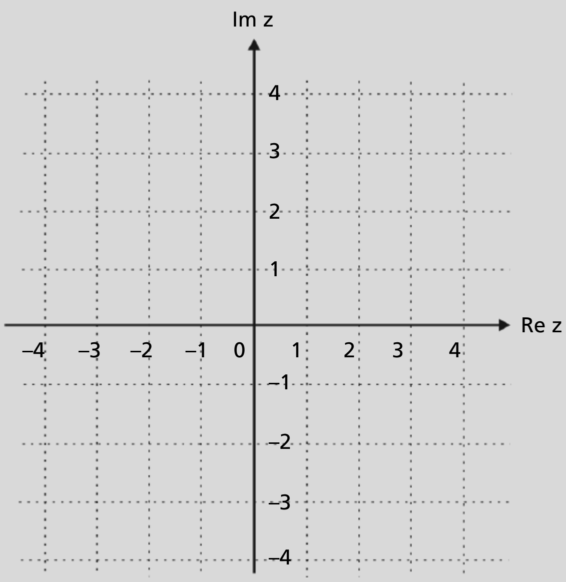


3. Localize a região do plano de Argand-Gauss onde se localizam os complexos.

a. $|z| = 3$ e $\frac{\pi}{3} < \theta < \pi$

b. $|z| < 3$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$





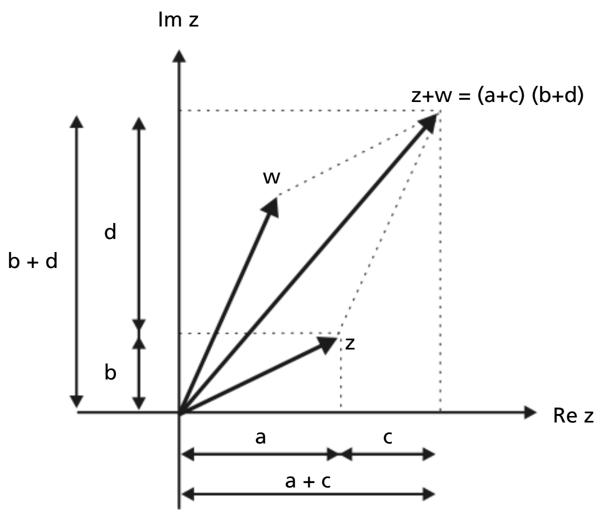
COMENTÁRIO

Repare, nas Atividades 2 e 3, que o módulo representa a distância à origem e o argumento está ligado ao movimento de rotação a partir do sentido positivo do eixo real.

A ADIÇÃO DE COMPLEXOS: COMPONDO TRANSLAÇÕES

A soma de números complexos é um caso particular da soma de vetores, pois os vetores em questão possuem origem no (0, 0) são os chamados vetores de posição.

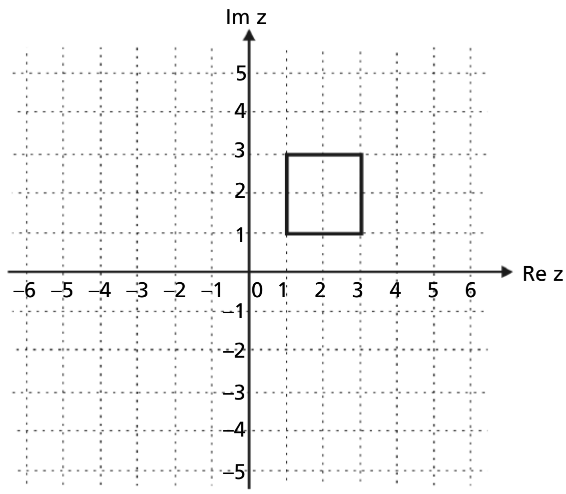
Somar complexos significa compor seus movimentos, as translações que os definem. Por exemplo, somar o complexo z = (a, b) com o complexo (3, –2) significa compor os movimentos horizontais, a + 3, e os verticais, b – 2. Isso nos dá o complexo (a + 3, b – 2). Veja a ilustração a seguir, que mostra a soma de dois complexos quaisquer. Pensando em vetores, basta usar a regra do paralelogramo.



Observando a soma de complexos que acabamos de mostrar, é fácil ver nesta figura que $|z| + |w| > |z + w|$.

A desigualdade que acabamos de verificar nesta figura é chamada desigualdade triangular, lembra-se dela? Na verdade, o resultado geral que relaciona $|z|$, $|w|$ e $|z + w|$ é $|z| + |w| \geq |z + w|$, pois no caso em que os complexos são múltiplos e estão no mesmo quadrante, temos a igualdade.

Observe o quadrado a seguir, de vértices A = (1, 1), B = (3, 1), C = (3, 3) e D = (1, 3). Vamos transladar esse quadrado cinco unidades para a esquerda e duas unidades para cima, mas para isso vamos utilizar números complexos.



Quais serão os novos vértices desse quadrado e como os obteremos usando complexos? A operação que compõe translações é a adição, então precisamos somar a todos os pontos do quadrado o número complexo que define a translação pedida.

Este número é z = (–5, 2), pois define um movimento de cinco unidades para a esquerda e duas unidades para cima.

Agora, basta transladarmos os vértices do quadrado. Para isso, vamos somar os complexos que representam esses vértices ao complexo (–5, 2).

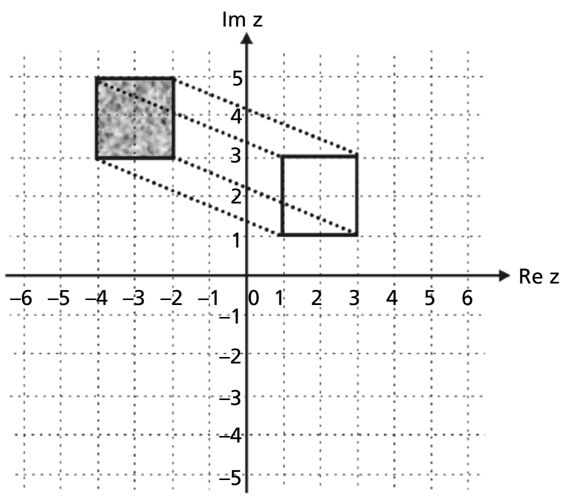
(1, 1) + (–5, 2) = (–4, 3) será o A'.

(3, 3) + (–5, 2) = (–2, 5) será o B'.

(3, 1) + (–5, 2) = (–2, 3) será o C'.

(1, 3) + (–5, 2) = (–4, 5) será o D'.

Veja o novo quadrado na ilustração a seguir.



HOMOTETIA

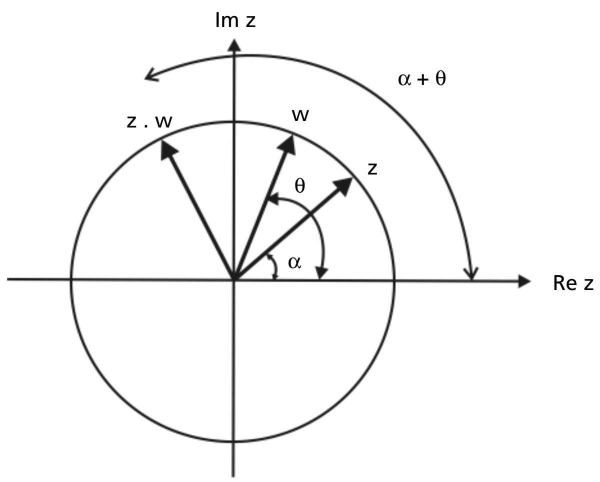
É uma transformação geométrica que preserva os ângulos das figuras. Por meio dela, você reduz ou amplia figuras.

Não vamos apresentar a multiplicação de complexos por um número real, essa operação é o mesmo que multiplicar vetores por um escalar, e geometricamente representa uma **HOMOTETIA.** Na multiplicação de complexos quaisquer, essa operação aparecerá.

Da forma que definimos o conjunto dos complexos, fica parecendo que o plano complexo e o plano cartesiano são iguais. É preciso deixar claro que, apesar de os elementos serem os mesmos, a estrutura algébrica desses conjuntos não é a mesma.
Quando trabalhamos com a Geometria Vetorial no R^2, fazemos uso da soma de vetores e da multiplicação destes por um número real; já com os complexos, fazemos uso da (mesma) soma de complexos (vetores) e multiplicação por um real, mas a multiplicação de complexos representa rotações seguidas de homotetia, o que não acontece com os vetores onde o produto definido é o produto interno ou produto escalar.

A MULTIPLICAÇÃO DE COMPLEXOS UNITÁRIOS: COMPONDO ROTAÇÕES

Já sabemos da trigonometria que os números complexos z = (cos α, sen α) e w = (cos θ, sen θ) possuem Módulo 1, por isso, são chamados de complexos unitários.



A multiplicação de z por w é definida por:

$$\boxed{z.w = (\cos(\alpha+\theta), \text{sen}(\alpha+\theta))}$$

Por exemplo, considere os complexos z = (cos 90°, sen 90°) e w = (cos 150°, sen 150°).

Temos que:

z.w = (cos (90° + 150°), sen (90° + 150°)) = (cos 240°, sen 240°).

z^2 = z.z = (cos (90° + 90°), sen (90° + 90°) = (cos 180°, sen 180°).

w^2 = w.w = (cos (150° + 150°), sen (150° + 150°)) = (cos 300°, sen 300°).

Vamos fazer uma rotação de 90° no sentido anti-horário numa figura usando a multiplicação de complexos.

Para isso, considere o losango de vértices A=(2, 1), B=(4, –2), C=(6, 1) e D=(4, 4). Cada vértice deve girar 90° no sentido anti-horário, então devemos multiplicar os complexos correspondentes a esses vértices pelo complexo z = (cos 90°, sen 90°). Vamos fazer as multiplicações, levando em conta que (cos 90°, sen 90°) é o complexo (0, 1).

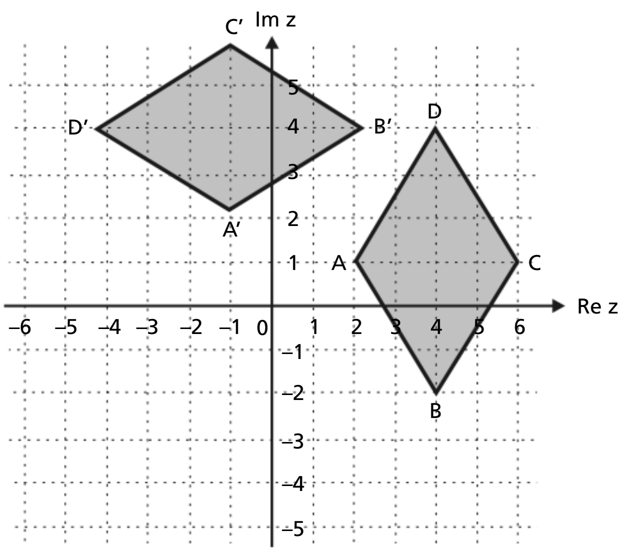
(2, 1) . (0, 1) = (0-1, 0+2) = (–1, 2) é o vértice A'.

(4, –2) . (0, 1) = (0+2, 0+4) = (2, 4) é o vértice B'.

(6, 1) . (0, 1) = (0–1, 0+6) = (–1, 6) é o vértice C'.

(4, 4) . (0, 1) = (0–4, 0+4) = (–4, 4) é o vértice D'.

Veja os dois losangos a seguir. Um fato de grande importância é que os losangos são congruentes. Isto acontece porque o complexo z = (0, 1) é unitário e, ao multiplicar outros complexos, não altera os seus módulos.



ATIVIDADE

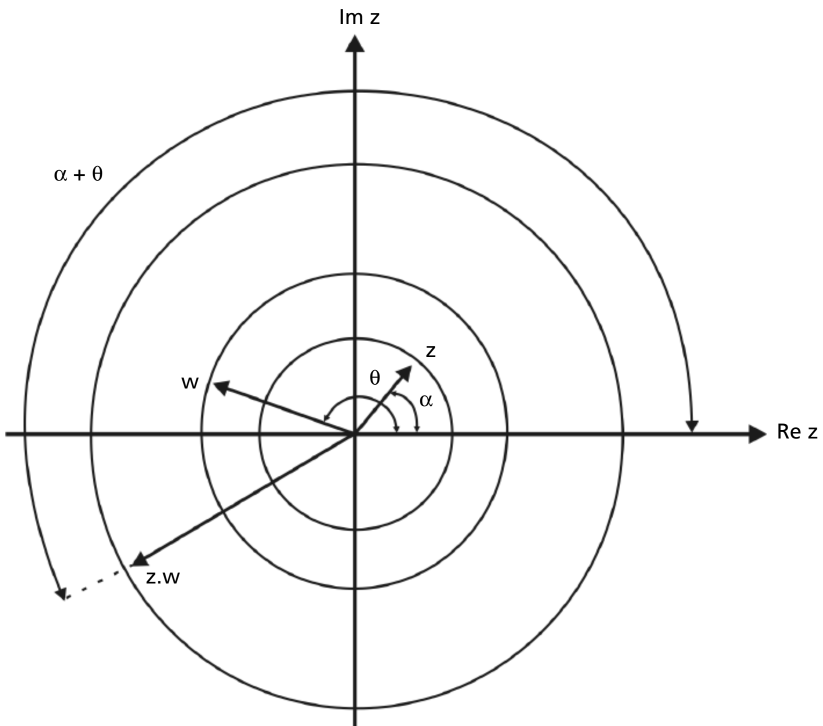
4. Faça uma rotação de 120° no sentido horário, no mesmo losango ABCD. Dê como resposta as coordenadas desse novo losango. Utilize complexos para isso.

Para isso, vamos multiplicar os complexos pelo complexo (cos -120°, sen -120°), que é igual ao complexo $\left(\cos\frac{4\pi}{3}, \text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

A MULTIPLICAÇÃO DE COMPLEXOS: COMPONDO ROTAÇÕES E DILATAÇÕES

Quando temos a multiplicação de dois complexos quaisquer, compomos suas rotações e suas dilatações. Dados $z = |z|(\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha)$ e $w = |w|(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$, a multiplicação do complexo z pelo complexo w é dada por:

$$\boxed{z.w = |z||w|(\cos(\alpha+\theta), \text{sen}\,(\alpha+\theta))}$$



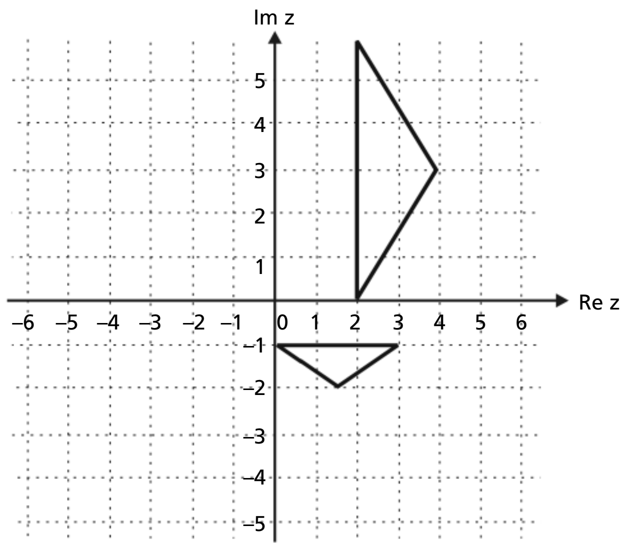
Observe o que acontece com o triângulo de vértices A=(0, –1), B=$\left(\frac{3}{2}, -2\right)$ e C=(3, –1), quando multiplicamos os números complexos associados aos seus vértices e multiplicamos pelo complexo 2(cos 90°, sen 90°) = (0, 2).

Vamos fazer as multiplicações:

(0, –1). (0, 2) = (2, 0).

$(\frac{3}{2}, -2)$. (0, 2) = (4, 3).

(3, –1). (0, 2) = (2, 6).



Percebeu o que aconteceu com o triângulo? Rotacionou 90° no sentido anti-horário e dobrou as medidas dos lados. Dizemos que ele sofreu uma rotação seguida de uma homotetia, a rotação de 90°, causada pelo argumento de z, e a homotetia de razão 2, causada pelo módulo de z, que é 2.

Se a multiplicação fosse feita pelo complexo w = 3(cos 60°, sen 60°), o triângulo iria girar 60° no sentido horário, seguida de uma homotetia de razão 3. Neste caso, os lados do triângulo iriam triplicar, e a área ficaria multiplicada por 9.

Quando multiplicamos por um complexo não-unitário, obtemos figuras semelhantes, mas não congruentes.

E COMO MULTIPLICAMOS NA FORMA CARTESIANA?

Basta aplicarmos no produto $z.w = |z||w|(\cos(\alpha + \theta), \operatorname{sen}(\alpha + \theta))$. os resultados da trigonometria, $\cos(\alpha + \theta)$ e $\operatorname{sen}(\alpha + \theta)$, visto na Aula 28, que chegaremos na multiplicação de complexos escrita na forma cartesiana. Veja:

$z.w = |z||w|(\cos(\alpha + \theta), \operatorname{sen}(\alpha + \theta))$.

$z.w = |z||w|(\cos\alpha \cos\theta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\alpha \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos\alpha)$.

$z.w = (|z||w|\cos\alpha \cos\theta - |z||w|\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta, |z||w|\operatorname{sen}\alpha \cos\theta + |z||w|\operatorname{sen}\theta \cos\alpha)$.

$z.w = (|z|\cos\alpha\, |w|\cos\theta - |z|\operatorname{sen}\alpha\, |w|\operatorname{sen}\theta, |z|\operatorname{sen}\alpha\, |w|\cos\theta + |z|\cos\alpha\, |w|\operatorname{sen}\theta)$.

Como

$a = |z|\cos\alpha$ e $b = |z|\operatorname{sen}\alpha$ são as coordenadas cartesianas de z e

$c = |w|\cos\theta$ e $d = |w|\operatorname{sen}\theta$ são as coordenadas cartesianas de w,

obtemos o produto z.w em função de suas coordenadas cartesianas.

$$z.w = (\underbrace{|z|\cos\alpha}_{a}\, \underbrace{|w|\cos\theta}_{c} - \underbrace{|z|\operatorname{sen}\alpha}_{b}\, \underbrace{|w|\operatorname{sen}\theta}_{d}, \underbrace{|z|\operatorname{sen}\alpha}_{b}\, \underbrace{|w|\cos\theta}_{c} + \underbrace{|z|\cos\alpha}_{a}\, \underbrace{|w|\operatorname{sen}\theta}_{d})$$

Logo, $\boxed{z.w = (ac - bd, bc + ad)}$

Agora é só utilizarmos a forma que mais convém. Veja, se fizermos $z=(2, -1)$ e $w=(-2, 2)$, como ficam os produtos z.w, z^2 e w^8?

$z.w = (2, -1).(-2, 2) = (-4+2, -8+4) = (-2,-4)$.

$z^2 = z.z = (2, -1).(2, -1) = (4-1, -2-2) = (3, -4)$.

$w^8 = w^4.w^4 = w^2.w^2.w^2.w^2$, vamos calcular w^2.

$w^2 = w.w = (-2, 2).(-2, 2) = (4-4, -4-4) = (0, -8)$. Agora vamos calcular w^4:

$w^4 = w^2.w^2 = (0, -8).(0, -8) = (64, 0)$. Finalmente,

$w^8 = w^4.w^4 = (64, 0).(64, 0) = (4096, 0)$.

Deu trabalho, não? Teria uma forma mais rápida? Vamos ver o que acontece se utilizarmos a forma trigonométrica.

O complexo $w = (-2,2)$ possui módulo $2\sqrt{2}$ e argumento $\frac{3\pi}{4}$, pois está localizado no 2° quadrante, e $w = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}, \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$, portanto:

$w^2 = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2}, \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$,

$w^4 = 64(\cos 3\pi, \operatorname{sen} 3\pi)$ e

$w^8 = 4096(\cos 6\pi, \operatorname{sen} 6\pi) = (4096, 0)$.

Para calcular potências de complexos, basta aplicarmos a multiplicação repetida e usarmos o que chamamos de 1ª fórmula de Moivre.

Como a multiplicação de complexos é uma composição de rotações e dilatações, a potência z^n é uma composição de repetidas rotações e dilatações.

Se $z = |z|(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$, temos

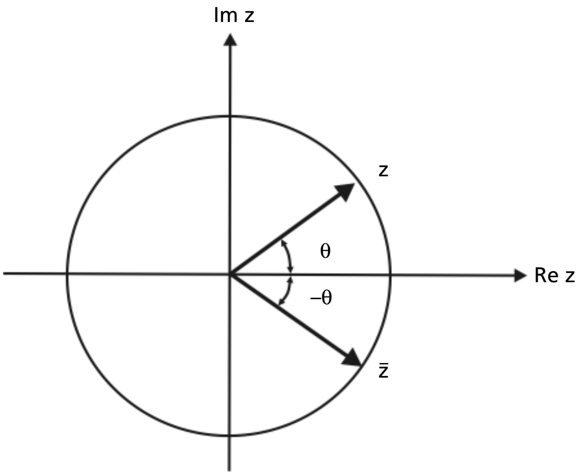
$z^n = z.z.z. \ldots .z = |z|(\cos\theta, \text{sen}\,\theta).|z|(\cos\theta, \text{sen}\,\theta).|z|(\cos\theta, \text{sen}\,\theta) \ldots |z|(\cos\theta, \text{sen}\,\theta) =$

$$= \underbrace{|z|.|z|.|z| \ldots |z|}_{\text{n vezes}} (\cos(\underbrace{\theta + \theta + \theta + \ldots + \theta}_{\text{n vezes}}), \text{sen}(\underbrace{\theta + \theta + \theta + \ldots + \theta}_{\text{n vezes}})) =$$

$=|z|^n.(\cos n\theta, \text{sen}\, n\theta)$.

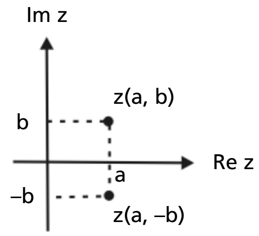
REFLEXÃO EM TORNO DO EIXO REAL: O CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Considere o complexo $z = |z|(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$. O conjugado de z é o complexo $\bar{z} = |z|(\cos(-\theta), \text{sen}(-\theta))$. Observe que o conjugado de um complexo z é obtido pela reflexão de z em relação ao eixo real.



Por exemplo, o conjugado do complexo $z = 5\left(\cos\frac{\pi}{5}, \text{sen}\,\frac{\pi}{5}\right)$ é o complexo $\bar{z} = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right), \text{sen}\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = 5\left(\cos\frac{9\pi}{5}, \text{sen}\,\frac{9\pi}{5}\right)$.

Agora, sendo $z = (a, b)$, a forma cartesiana de seu conjugado é $\bar{z} = (a, -b)$. O conjugado de $z = (2, 7)$ é o complexo $\bar{z} = (2, -7)$, e o conjugado de $z = (5, 0)$ é ele mesmo.



Observe com atenção!

$\bar{z}$ é simétrico de z em relação ao eixo real.

$\bar{z}$ possui o mesmo módulo de z.

$\bar{z}$ possui argumento igual ao oposto do argumento de z.

> Pensando nas transformações de figuras planas, se determinarmos os conjugados dos complexos associados aos vértices de um polígono, encontraremos um outro polígono congruente ao anterior, que sofreu uma reflexão em torno do eixo x.

COMO FICA A DIVISÃO DE DOIS COMPLEXOS?

Antes de estudarmos a divisão de complexos, precisamos saber, no conjunto $\mathbb{C}$, qual é o elemento neutro e qual é o elemento inverso.

Como vamos descobri-los? Primeiro, refletiremos sobre o elemento neutro. Vamos supor o elemento neutro escrito na forma trigonométrica, $|w|(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$.

Ele é o elemento que não altera o resultado da multiplicação, portanto, não altera nem o módulo, nem o argumento do complexo que está multiplicando. Concluímos, então, que seu argumento é $\theta = 0°$, e seu módulo é 1. O único número complexo com essas características é $1(\cos 0°, \text{sen}\,0°) = (1, 0)$.

Agora, vamos encontrar o elemento inverso de um complexo z não-nulo. O elemento inverso da multiplicação de complexos é o número que multiplicado por um complexo z resulta no elemento neutro. Chamaremos esse número de z^{-1}.

Vamos descobrir qual é a sua forma. Considere os complexos: $z = |z|(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$ e o seu elemento inverso $z^{-1} = |z^{-1}|(\cos\phi, \text{sen}\,\phi)$.

$z.z^{-1} = 1(\cos 0, \text{sen}\,0)$. Fazendo a multiplicação, obtemos:

$|z|.|z^{-1}|.(\cos(\theta + \phi), \text{sen}(\theta + \phi) = 1(\cos 0, \text{sen}\,0)$.

Dessa igualdade, conclui-se que $|z|.|z^{-1}| = 1 \Rightarrow |z^{-1}| = \dfrac{1}{|z|}$ e $\theta + \phi = 0 \Rightarrow$ $\phi = -\theta$. Assim, o elemento inverso de z é $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|}(\cos(-\theta), \text{sen}(-\theta))$. Sendo $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}, \text{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)$, o seu inverso é $z^{-1} = \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right), \text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$, ou melhor, $z^{-1} = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}, \text{sen}\dfrac{11\pi}{6}\right)$.

Se desejar encontrá-lo na forma cartesiana, basta resolver o sistema obtido pela multiplicação $(a, b)\times(x, y) = (1, 0)$. Desenvolvendo $(ax - by, ay + bx) = (1, 0)$, ou seja, $\begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases}$, e resolvendo-o, você chega em $x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$ e $y = -\dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

ATIVIDADE

5. Você observou que z^{-1} e $\bar{z}$ possuem o mesmo argumento? Podemos dizer, então, que $z^{-1} = k.\bar{z}$, onde k é um número real positivo. Mostre que $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|^2}\,.\,\bar{z}$ para todo complexo z não-nulo.

COMO SURGE O NÚMERO *i*: A FORMA ALGÉBRICA

Até agora, trabalhamos com os números complexos nas formas cartesiana e trigonométrica. Mas essas representações não são as únicas. A forma algébrica, que será apresentada a seguir, é de grande importância nas resoluções de equações polinomiais.

Para representar um complexo na forma algébrica, vamos investigar as características dos complexos que se encontram sobre os eixos real e imaginário.

Complexos situados no eixo real

Todo complexo situado no eixo real é da forma (a, 0), onde a é real. As operações de adição e multiplicação com os números da forma (a, 0) são:

$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$.

$(a, 0).(b, 0) = (ab - 0, 0 + 0) = (ab, 0)$.

Isso mostra que o conjunto $\{(a, 0) | a \in \mathbb{R}\}$ é fechado para essas operações, isto é, a soma e a multiplicação de números pertencentes ao eixo real estão também no eixo real.

O elemento neutro da adição, que é (0, 0), e o elemento neutro da multiplicação, que é (1, 0), também pertencem ao eixo real. O mesmo acontece com o elemento inverso aditivo (–a, 0) e o inverso multiplicativo $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$, para $a \neq 0$.

Esse subconjunto de $\mathbb{C}$, $\{(a, 0) | a \in \mathbb{R}\}$, é o *único* que se comporta exatamente como o conjunto $\mathbb{R}$. Esse fato nos permite, sempre que for conveniente, chamar os números da forma (a, 0) simplesmente de a, pois qualquer operação que se faça com eles, a parte imaginária sempre se manterá igual a zero.

E é dessa forma, por meio de um isomorfismo que existe entre $\mathbb{R}$ e o conjunto $\{(a, 0) | a \in \mathbb{R}\}$, que podemos cometer um abuso de linguagem e dizer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Esse é o motivo pelo qual chamamos o eixo horizontal de eixo real. Veja:

$(2, 0) + (3, 0) = (5, 0)$ é equivalente a $2 + 3 = 5$.

$(2, 0) . (3, 0) = (6, 0)$ é equivalente a $2 . 3 = 6$.

$(2, 0) . \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (1, 0)$ é equivalente a $2 . \frac{1}{2} = 1$.

Podemos dizer que o conjunto dos complexos é uma extensão dos reais? Mostramos que existe, no conjunto dos complexos, um subconjunto (eixo x) que "é uma cópia perfeita dos reais", isto é, os reais e os complexos da forma (a,0) são identificados por meio de uma função injetora e sobrejetora, que preserva as operações de adição e multiplicação de complexos (isomorfismo). Então, colocando "a cópia no lugar do original", podemos dizer, "por abuso de linguagem", que os complexos contêm os reais.

Complexos situados no eixo imaginário

Todo número complexo situado no eixo imaginário é da forma (0, b) e pode ser escrito como b.(0, 1). O complexo (0, 1) é unitário e, além disso, define uma rotação de 90° no sentido anti-horário, pois $(0, 1) = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \text{sen } \frac{\pi}{2}\right)$.

Esse número é de grande importância geométrica, pois está associado à idéia de perpendicularidade. Ele será chamado de *i*.

Observe que $i^2 = (0, 1) . (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0)$. Como i^2 pertence ao eixo real, podemos chamá-lo apenas de -1. Dessa forma, temos a equação $i^2 = -1$.

Assim, você acabou de ver que no conjunto dos números complexos existe um número que, elevado ao quadrado, resulta em -1, fato que não acontece no conjunto dos números reais!

Agora, repare que $z = (0, b) = b.(0, 1) = bi$, e que $z^2 = (-b^2, 0) = -b^2$. Como b é um número real, b^2 é positivo e, portanto, z^2 é negativo. Por exemplo:

• $(0, 2) . (0, 2) = (0 - 4, 0 + 0) = (-4, 0)$ ou utilizando o *i*, temos que $(2i)^2 = -4$.

• $(0, -2) . (0, -2) = (0 - 4, 0 + 0) = (-4, 0)$ ou $(-2i)^2 = -4$.

Com isso, afirmamos que no conjunto $\mathbb{C}$, $\sqrt{-4} = \begin{cases} 2i \\ -2i \end{cases}$.

Vamos escrever, então, um complexo (a, b) qualquer utilizando o *i*. Para isso, vamos escrevê-lo como uma soma de dois complexos, um situado sobre o eixo real e outro sobre o eixo imaginário: $(a, b) = (a, 0) + (0, b)$.

Como $(a, 0) = a$ e $(0, b) = bi$, temos que $(a, b) = a + bi$. Essa forma de representação é a chamada *forma algébrica* do complexo z.

Por exemplo:

$z_1 = (3, 5) = 3 + 5i$.

$z_2 = (1,-2) = 1 - 2i$.

$z_3 = (-3, 3) = -3 + 3i$.

Pensando na forma trigonométrica de z, que é $z = |z|(\cos \alpha, \text{sen } \alpha)$, podemos utilizar a mesma idéia e escrever $z = (|z|\cos \alpha, |z|\text{sen } \alpha) = |z|\cos \alpha + i|z|\text{sen } \alpha = |z|(\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha)$. Essa forma pode ser apresentada simplificadamente como $|z|\text{cis } \alpha$. Repare que escrevemos cis α, mas lemos "cis de α" como "cosseno de α mais i seno de α". Por exemplo, $z = (1, 1) = 1 + i = \sqrt{2} \text{ cis } \frac{\pi}{4}$.

ATIVIDADES

6. Resolva as equações no conjunto $\mathbb{C}$.

a. $x^2 + 25 = 0$.

b. $x^2 + 121 = 0$.

c. $x^2 + 2x + 2 = 0$.

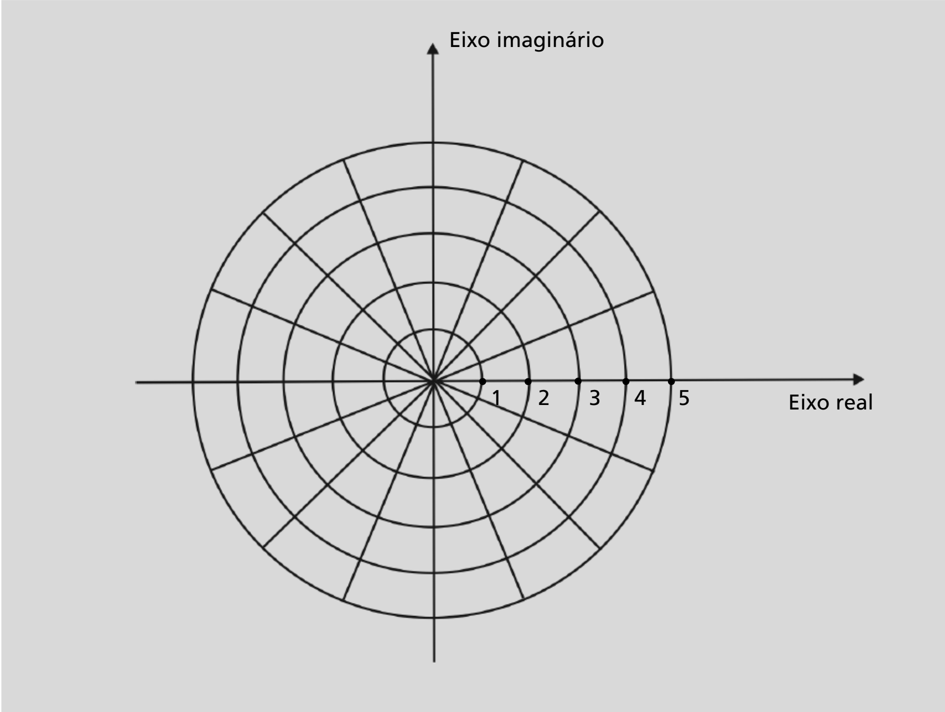
d. $x^4 - 16 = 0$.

7. Pratique um pouco: complete a tabela.

(a, b)	a + bi	$\lvert z\rvert(\cos\alpha, \text{sen}\ \alpha)$	$\lvert z\rvert \text{cis}\ \alpha$
(-3, 3)			
		$\frac{2}{5}(\cos\pi, \text{sen}\ \pi)$	
	$-4\sqrt{3} + 4i$		
			$5\ \text{cis}\ \frac{4\pi}{3}$

8.a. Dado o número complexo na forma trigonométrica $z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\ \text{sen}\ \frac{3\pi}{8}\right)$, escreva os números complexos $\bar{z}$, z^2 e $\frac{10}{z}$ na forma trigonométrica.

8.b. No plano complexo da figura a seguir, marque e identifique os números z, $\bar{z}$, z^2 e $\frac{10}{z}$ do item anterior. Nessa figura, os ângulos formados por dois raios consecutivos quaisquer têm a mesma medida.



AS EQUAÇÕES BINOMIAIS E OS POLÍGONOS REGULARES

Vamos, agora, resolver as equações binomiais, já ouviu falar delas? Na atividade, os itens a, b e d são equações binomiais. São todas as que podem ser escritas na forma de um binômio igualado a zero: $z^n + w = 0$. As soluções da equação binomial $z^n = w$ são chamadas raízes n-ésimas do complexo w, pois podemos escrevê-las da forma $z = \sqrt[n]{w}$.

Como resolver uma equação binomial? Algumas são mais simples de resolver, mas o que vamos fazer agora é utilizar o conjunto dos números complexos para resolver qualquer equação binomial. $z^n + w = 0$, onde z é a variável e $w \in C$.

Começaremos pela equação $z^3 + 8 = 0$, que é equivalente a determinar as raízes cúbicas de –8, pois podemos escrever $z^3 = -8 \Rightarrow z = \sqrt[3]{-8}$.

Escrevendo z e –8 na forma trigonométrica e substituindo na equação, temos:

$|z|^3(\cos 3\alpha, \text{sen } 3\alpha) = 8(\cos \pi, \text{sen } \pi)$.

$|z|^3 = 8 \Rightarrow |z| = 2 \rightarrow$ Daqui descobrimos que todas as raízes têm módulo 2.

$3\alpha = \pi + 2k\pi \rightarrow$ Expressão geral dos arcos côngruos com π.

$$\alpha = \frac{\pi + 2k\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$$

Fazendo k variar em z, obtemos as raízes:

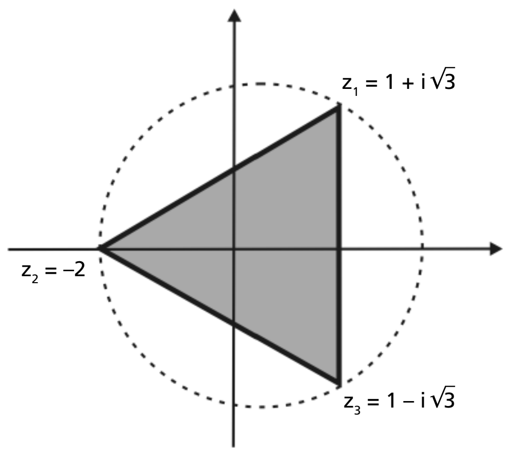
$k_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}, \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (1, \sqrt{3}) = 1 + i\sqrt{3}.$

$k_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi \Rightarrow z_2 = 2(\cos\pi, \text{sen}\,\pi) = 2(-1, 0) = (-2, 0) = -2.$

$k_3 = 2 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} \Rightarrow z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3}, \text{sen}\,\frac{5\pi}{3}, = 2\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (1, -\sqrt{3})\right.$
$= 1 - i\sqrt{3}.$

A partir de k = 2, as respostas começam a se repetir, pode tentar! Portanto, a equação possui três soluções distintas, isto é, as raízes cúbicas de –8 são os números complexos $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -2$ e $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$.

Representando as três raízes no plano complexo, obtemos um triângulo eqüilátero inscrito num círculo, cujo raio é módulo das três raízes. Confira na figura.



ATIVIDADE

9. Encontre as raízes quartas do número i, isto é, resolva a equação binômia $x^4 - i = 0$. Depois, represente-as no plano complexo e diga qual o polígono formado.

Quando calculamos as raízes quadradas de um complexo, elas são simétricas em relação à origem, ou seja, o ângulo entre elas é 180°. Já nas equações cúbicas, o ângulo formado entre elas é $120° = \frac{360°}{3}$, e nas raízes quartas, o ângulo entre elas é $90° = \frac{360°}{4}$.

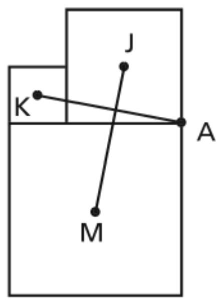
Qual seria o ângulo formado entre as raízes, se fossem raízes n-ésimas? Seria $\frac{2\pi}{n}$ rad.

Resumindo, nas equações binômias $z^n = w$ (com $w \neq 0$), sempre encontraremos n soluções que representam os n vértices de um polígono regular de n lados, inscrito no círculo com centro na origem e raio $\sqrt[n]{|w|}$. Os argumentos dessas n raízes são da forma $\alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, onde θ é o argumento de w e k = 0, 1, 2, 3,..., n–1.

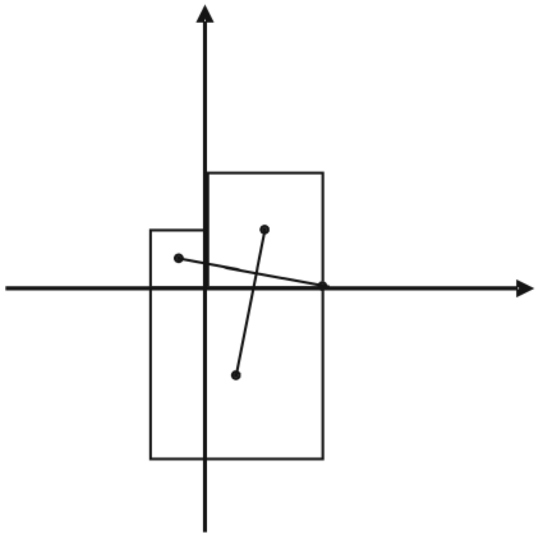
MAIS UM PROBLEMA...

Os números complexos, pelo fato de todas as suas operações estarem associadas a transformações no plano, permitem resolver certos problemas e demonstrar certas propriedades da geometria de forma mais simples do que por meio da geometria plana, trabalhando com os reais.

Vamos resolver o seguinte problema: K, J e M são os centros de três quadrados dispostos, como na figura a seguir. Mostre que os segmentos AK e MJ são congruentes e perpendiculares.



Para isso, vamos posicionar estrategicamente esta figura no plano complexo. Veja:



Suponhamos que o lado do quadrado menor mede a, e o lado do quadrado médio mede b. Dessa forma, o quadrado maior tem lado a+b.

Escreveremos, então, os números complexos que representam os complexos K, J, M e A.

$K = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ $\quad J = \left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$ $\quad M = \left(\frac{a+b}{2}, -\frac{a+b}{2}\right)$ $\quad A = (b, 0)$

Vamos mostrar que o complexo K–A é perpendicular ao complexo M–J.

$K-A = \left(-\frac{a}{2} - b, -\frac{a}{2}\right)$ e $M-J = (\frac{a+b}{2} - \frac{b}{2}, -\frac{a+b}{2} - \frac{b}{2}) = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} - b)$.

Vamos multiplicar (k–a) por i e verificar que o resultado é M–J.

$K-A \ . \ i = (-\frac{a}{2} - b, -\frac{a}{2}).(0, 1) = (0 + \frac{a}{2}, 0 - \frac{a}{2} - b) = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} - b)$ = M–J. Está verificado que o segmento AM é perpendicular a JM.

Para provar que são congruentes, precisamos mostrar que os módulos são iguais.

$|K-A| = |(-\frac{a}{2} - b, -\frac{a}{2})| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + ab + b^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + ab + b^2}$.

$|M-J| = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} - b)| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + ab + b^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + ab + b^2}$.

Está provado que $|K-A| = |M-J|$.

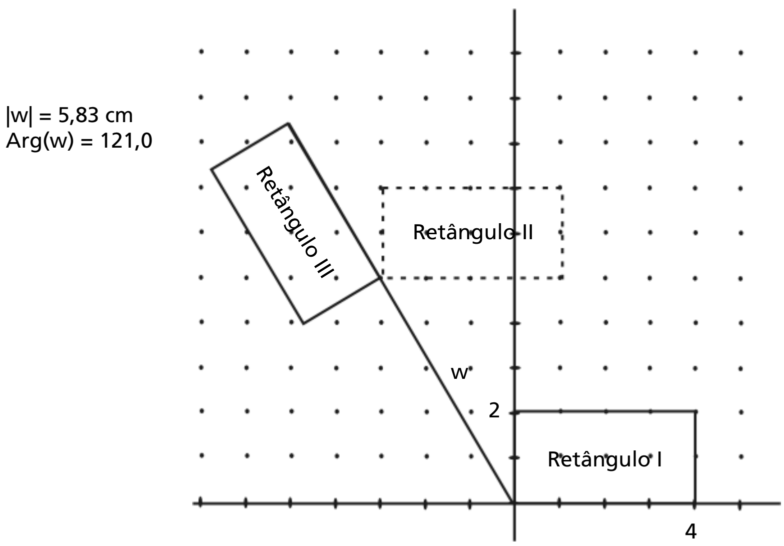
O site www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm25/index1.htm possui mais problemas parecidos com este, além de um desafio interessante sobre um tesouro enterrado por piratas. Visite-o e aprenda mais sobre os complexos.

ATIVIDADE FINAL

Na figura a seguir, são representados três retângulos e o número complexo w = (–3,5), que possui módulo e argumentos indicados na figura. Esses valores são aproximados. Responda:

a. Que operação devemos fazer no retângulo I para obtermos o retângulo II? Que transformação foi aplicada?

b. Que transformações aplicamos no retângulo I para obtermos o retângulo III? Que operações no conjunto dos complexos fazem essa transformação?



CONCLUSÃO

Esta aula apresentou uma nova maneira de abordar os números complexos, dando maior destaque às interpretações geométricas das operações desse conjunto. Este é um assunto central no currículo do Ensino Médio, e é visto na 3ª série, por isso é importante que você o utilize também como um tópico onde se resgatam muitos conceitos importantes como distância, congruência, semelhança, polígonos, ângulos, dentre outros. Também é necessário resgatar a trigonometria, que tem papel de grande importância nas rotações.

O uso de problemas geométricos que possam ser resolvidos por números complexos é uma importante ferramenta, pois, além de estar aplicando o conteúdo, possibilita novas maneiras de se investigar uma situação-problema.

Pesquise mais sobre esse assunto, você vai descobrir novas aplicações interessantes para utilizar o conjunto dos números complexos.

RESUMO

O estudo dos números complexos faz uma importante conexão com vários tópicos da Matemática do Ensino Básico.
Todas as operações desse conjunto estão relacionadas às transformações no plano e possibilitam o uso de figuras planas para dar exemplos dessas operações.
Veja as Atividades 4, 8, 9 e Final, que integram complexos às transformações e figuras planas.
A aparição dos números complexos dentro da História da Matemática, com a resolução de equações do 3° grau, também é um importante recurso para a introdução do estudo das equações.

AUTO-AVALIAÇÃO

Durante a aula, você conheceu algumas possibilidades de contextualização dos números complexos, geométricas, trigonométricas e algébricas. Você já vivenciou algumas dessas abordagens durante o seu Ensino Médio? Registre os aspectos positivos e negativos do uso de complexos no currículo do Ensino Médio.

Busque pensar em outras atividades como a Atividade 9 e a Atividade Final, onde as figuras planas têm papel de destaque. Todas as atividades devem ser feitas, cada uma tem um objetivo e um contexto diferentes. Caso tenha dúvidas, troque idéias com seus colegas ou consulte o tutor.

INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você terá um panorama de todas as aulas vistas nesta disciplina, destacando os objetivos, os recursos, os conceitos trabalhados e falando um pouco de avaliação.

RESPOSTAS

Atividade 1

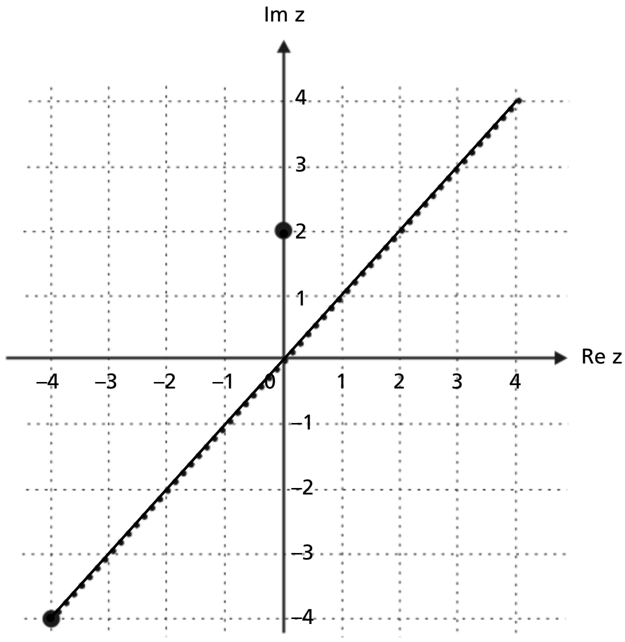
a. $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

b. A distância à origem é a mesma.

c. Todos os (x, y), onde x e y são reais que satisfazem a equação $\sqrt{x^2 + y^2} = 5$

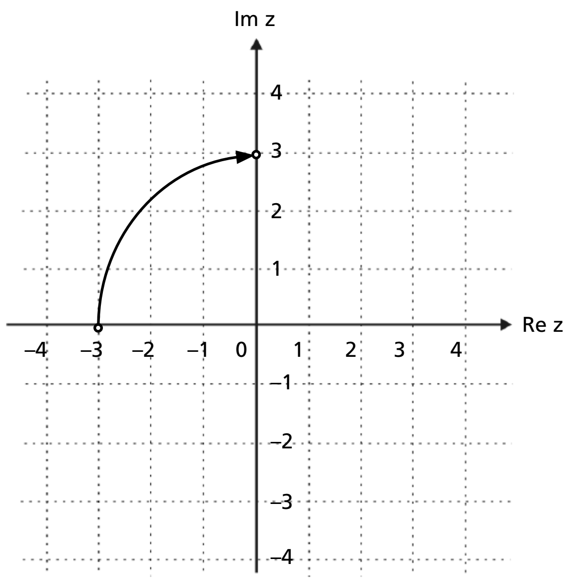
$\rightarrow x^2 + y^2 = 25$. Esta equação é de uma circunferência de centro na origem e raio 5.

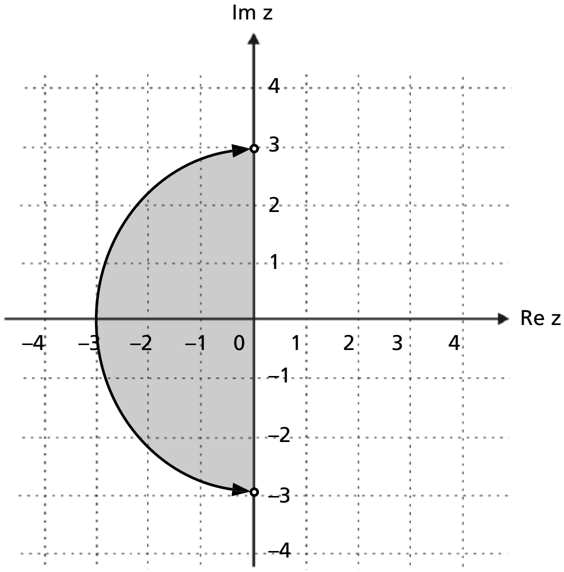
Atividade 2



z=(2, 0) e w=(–4, –4)

Atividade 3





Atividade 4

$(2, 1) \cdot \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-1+\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)$ é o vértice A''.

$(4, -2) \cdot \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-2-\sqrt{3}\ , 1-2\sqrt{3}\right)$ é o vértice B''.

$(6, 1) \cdot \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-3 - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - 3\sqrt{3}\right)$ é o vértice C''.

$(4, 4) \cdot \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-2+2\sqrt{3}, -2-2\sqrt{3}\right)$ é o vértice D''.

Atividade 5

Dê uma olhada na tabela:

complexo	módulo
z	$\lvert z\rvert$
$\bar{z}$	$\lvert\bar{z}\rvert = \lvert z\rvert$
z^{-1}	$\lvert z^{-1}\rvert = \frac{1}{z}$

Se $z^{-1} = k.\bar{z}$, e $k > 0$, pois z^{-1} e.$\bar{z}$ estão no mesmo quadrante, temos que $|z^{-1}| = |k\bar{z}| = k.|\bar{z}|$. Como z e $\bar{z}$ possuem o mesmo módulo, escrevemos: $|z^{-1}| = k.|z|$.

Utilizando na tabela o módulo do inverso de z, obtemos a equação $\frac{1}{|z|} = k.|z|$, o que implica $k = \frac{1}{|z|^2}$. Portanto, $z^{-1} = k.\bar{z} = \frac{1}{|z|^2}.\ z$.

Atividade 6

a. $x^2 = -25 \rightarrow x = 5i$ ou $x = -5i \rightarrow S = \{5i, -5i\}$.

b. $x^2 = -121 \rightarrow x = 11i$ ou $x = -11i \rightarrow S = \{11i, -11i\}$.

c. $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2i}{2} \rightarrow x = -1+i$ ou $x = -1 - i \rightarrow S = \{-1 + i, -1 - i\}$.

d. Chamando $y = x^2$, obtemos $y^2 - 16 = 0$, o que implica $y = 4$ ou $y = -4$.

Se $x^2 = 4$, então $x = 2$ ou $x = -2$.

Se $x^2 = -4$, então $x = 2i$ ou $x= -2i \rightarrow S = \{2, -2, 2i, -2i\}$.

Atividade 7

(a, b)	a + bi	|z|(cos α, sen α)	|z|cis α
(-3, 3)	$-3+3i$	$3\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4}, \text{sen } \frac{3\pi}{4}\right)$	$3\sqrt{2} \text{ cis } \frac{3\pi}{4}$
$\left(-\frac{2}{5}, 0\right)$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}(\cos \pi, \text{sen } \pi)$	$\frac{2}{5} \text{ cis } \pi$
$(-4\sqrt{3}, 4)$	$-4\sqrt{3} + 4i$	$8\left(\cos \frac{5\pi}{6}, \text{sen } \frac{5\pi}{6}\right)$	$8 \text{ cis } \frac{5\pi}{6}$
$\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$	$-\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\, i$	$5\left(\cos \frac{4\pi}{3}, \text{sen } \frac{4\pi}{3}\right)$	$5 \text{ cis } \frac{4\pi}{3}$

Atividade 8

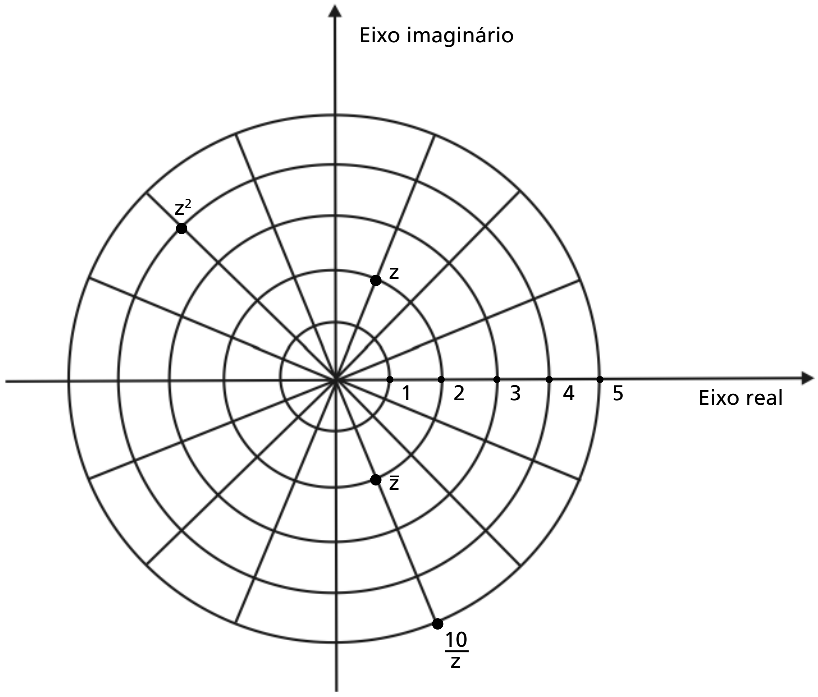
a. $z = 2\left(\cos \dfrac{3\pi}{8}, \text{sen } \dfrac{3\pi}{8}\right)$

$\bar{z} = 2\left(\cos \dfrac{-3\pi}{8}, \text{sen } \dfrac{-3\pi}{8}\right) = 2\left(\cos \dfrac{13\pi}{8}, \text{sen } \dfrac{13\pi}{8}\right)$

$z^2 = 4\left(\cos \dfrac{3\pi}{4}, \text{sen } \dfrac{3\pi}{4}\right)$

$\dfrac{10}{z} = \dfrac{10}{2 \text{ cis } \dfrac{3\pi}{8}} = 5\left(\cos \dfrac{13\pi}{8}, \text{sen } \dfrac{13\pi}{8}\right).$

b. As representações são:



Atividade 9

$x^4 - i = 0 \rightarrow z^4 = i \Rightarrow |z|4\ (\cos 4\alpha,\ \text{sen}\ 4\alpha) = 1.\left(\cos \frac{\pi}{2},\ \text{sen}\ \frac{\pi}{2}\right)$

$|z|^4 = 1 \Rightarrow |z| = 1$ e $4\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$.

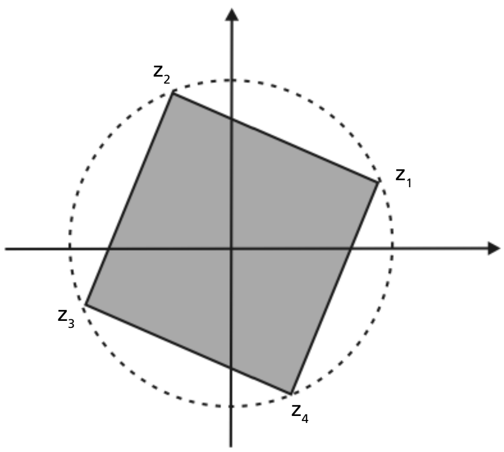
Fazendo k = 0, k = 1, k = 2 e k = 3, obtemos os argumentos:

$\alpha_1 = \frac{\pi}{8},\ \alpha_2 = \frac{5\pi}{8},\ \alpha_3 = \frac{9\pi}{8}$ e $\alpha_4 = \frac{13\pi}{8}$

Portanto, as raízes quartas de i são

z1 = cis $\frac{\pi}{8}$, z_2 = cis $\frac{5\pi}{8}$, z_3 = cis $\frac{9\pi}{8}$ e z_4 = cis $\frac{13\pi}{8}$

O polígono formado é um quadrado.



Atividade Final

a. Devemos somar a todos os pontos do retângulo I o complexo w = (–3, 5). Foi aplicada uma translação de 3 unidades para esquerda e 5 para cima.

b. Uma translação segundo o complexo (–3, 5), seguida de uma reflexão de 121° no sentido anti-horário. As operações são a adição, pelo complexo (–3, 5), e a multiplicação, pelo complexo (–3, 5).

AULA 30

Resumindo o nosso trabalho

Meta da aula

Avaliar formativamente o trabalho no módulo através de quadro-síntese.

objetivos

Esperamos que, após o estudo desta aula, você seja capaz de:

- Identificar pontos-chave em cada aula da disciplina.
- Auto-avaliar sua aprendizagem no módulo.
- Conhecer características de um portfólio.

Pré-requisitos

O pré-requisito fundamental desta aula é que você tenha desenvolvido cada atividade (obrigatória) proposta nas aulas anteriores. Conhecer e ter lido os Parâmetros Curriculares Nacionais (www.mec.gov.br) será um suporte importante. A leitura de Prática de Ensino 3 para Licenciaturas – Métodos e Técnicas de Avaliação também pode ser enriquecedora para seu aproveitamento nesta aula.

INTRODUÇÃO

Estamos chegando ao final do curso. Esperamos que você tenha aproveitado qualitativamente o que preparamos. Assim, o que faremos agora é resumir os pontos discutidos em cada aula, para que você possa enriquecer sua auto-avaliação final do trabalho no módulo.

Apesar de termos inserido, ao longo das aulas, os princípios dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental e Médio, nesta aula você poderá revisar um pouco mais alguns deles. Bom trabalho!

OBJETIVOS DA MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

Estamos de acordo com Bairral, Kindel e Oliveira (2000), quando afirmam que o trabalho em Matemática no currículo escolar deve:

- representar de diversas formas um mesmo conceito, buscando estabelecer conexões entre elas;
- desenvolver habilidades e procedimentos frente a resolução/aplicação de problemas;
- estimular o espírito de interesse e investigação na busca de conjecturas;
- utilizar diferentes tecnologias;
- perceber regularidades e generalizar;
- coletar, agrupar, analisar e representar dados;
- explorar e desenvolver formas de raciocínio e processos intuitivos, indutivos, dedutivos, analógicos e estimados;
- comunicar-se matematicamente;
- estimular o trabalho cooperativo/coletivo;
- desenvolver auto-estima e perseverança.

!

Você também poderá conhecer um pouco mais sobre a Educação Matemática atual e sobre a organização curricular no 1º e 2º ciclos lendo as Aulas 1 e 2 do Módulo Matemática na Educação 1 do Curso de Pedagogia.

Dos objetivos específicos para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, nesta disciplina, abordamos, prioritariamente, o pensamento algébrico e o sentido numérico.

Para você colocar um pouco mais em prática seu entendimento e sua auto-avaliação das atividades no módulo, elaboramos o quadro a seguir, em que sintetizamos os aspectos didático-conceituais que priorizamos em cada aula. Veja e relembre-os!

Quadro 30.1: Síntese das aulas.

Aula	Objetivo(s)	Tema(s) norteador(es)	Recursos e História	Avaliação
Meta: Apresentar características da matemática utilizada na rua e contrapô-la com a ensinada nas escolas.				
1	• Enumerar características da matemática da rua e da escola. • Dar exemplos sobre a importância do uso da simbologia matemática. • Diferenciar os aspectos que envolvem o uso de calculadora na sala de aula e na rua.	• Operações com números naturais e racionais. • Expressões • Equações do 1º grau. • Cálculo da área do círculo. • Cálculo mental. • Sinais, códigos e símbolos matemáticos.	• História em quadrinhos. • Calculadora. • Al-Khuarizmi e Diofanto.	• Realização e análise das atividades da aula.
Meta: Apresentar diferentes sistemas de numeração e ressaltar características do sistema decimal.				
2	• Diferenciar o sistema de numeração decimal dos demais sistemas de numeração. • Representar números em diferentes bases numéricas. • Utilizar a estrutura multiplicativa nos sistemas de numeração decimal e não-decimal.	• Sistema de numeração. • Operações. • Contagem e representação em diferentes bases (binária, octal, decimal, hexagesimal).	• Processos de contagem e simbologias usadas pelos diversos povos na Antigüidade (egípcios, gregos, romanos, indianos). • Palíndromos.	• Realização e análise das atividades da aula.
Meta: Aprofundar o ensino de bases numéricas, em particular da base 2.				
3	• Utilizar o material dourado e o material multibase no ensino de bases de numeração. • Aplicar a História da Matemática em sala de aula.	• Base 10 e base 2. • Uso da História da Matemática: ornamental e ponderativo.	• Forma egípcia de multiplicar.	• Realização de atividade, integrando sistema binário e História (egípcios).

Aula	Objetivo(s)	Tema(s) norteador(es)	Recursos e História	Avaliação
Meta: Instrumentalizar o ensino de números racionais.				
4	• Conceituar e definir número racional. • Distinguir e relacionar as diferentes formas de representação dos números racionais. • Identificar o conceito de número racional em diferentes contextos. • Conhecer possibilidades de trabalho com o material para as frações decimais.	• Número racional: conceituação, representações, ordenação comparação e localização na reta. • Medida (no discreto e no contínuo). • Frações equivalentes.	• História das frações. • Egípcios e babilônios-Paradidático. • Chapinhas para refrigerante.	• Análise situada de uma atividade que envolve diferentes representações dos números racionais.
5	• Revisar o conceito de número inteiro. • Utilizar diferentes situações para trabalhar as operações com números inteiros. • Construir significado para as operações que envolvem números inteiros.	• Números inteiros: conceituação, operações e representação na reta.	• Jogos: de tabuleiros, dos caracóis. • China, Diofanto, indianos, Stevin, Girard, Hankel, Celsius. • Mapa de fusos horários. • Paradidático.	• Realização e análise das atividades da aula.
Meta: Apresentar exemplos de números irracionais e algumas de suas propriedades.				
6	• Identificar os números irracionais. • Explorar situações que levem à descoberta das propriedades dos irracionais. • Justificar algumas propriedades dos conjuntos dos números irracionais. • Refletir sobre a importância de utilizar diferentes atividades em sala de aula.	• Número irracional: conceituação, representação, operações, localização na reta. • Operações em Q. • Congruência e semelhança de triângulos. • Teorema de Pitágoras. • Área do triângulo. • Ângulos internos de um pentágono regular. • Comensurabilidade.	• Pitágoras e a Escola Pitagórica. • Tales de Mileto. • Dedekind. • Espiral de Arquimedes. • Lambert. • Papel milimetrado, papel-manteiga e tachinha.	• Resposta a uma pergunta específica.
Meta: Analisar diferenças entre pensamento algébrico e sentido numérico.				
7	• Reconhecer e identificar características do pensamento algébrico. • Estabelecer diferenças entre sentido numérico e pensamento algébrico.	• Senso numérico e pensamento algébrico.	• Calculadora. • Paradidático. • Boletim Gepem. • Jogo: Hex.	• Análise das atividades da aula com um referencial teórico determinado.

Aula	Objetivo(s)	Tema(s) norteador(es)	Recursos e História	Avaliação
Meta: Instrumentalizar o trabalho com os Quadrados Mágicos.				
8	• Identificar um Quadrado Mágico (QM). • Utilizar os QMs como recursos para desenvolver os pensamento aritmético e algébrico. • Estudar regularidades numéricas nos QMs. • Construir significados numéricos.	• Conceituação e construção de QM. • QM de ordem 3 x 3.	• Dominó. • Chineses e indianos. • Emanuel Moscupolo. • Cornélio Agripa.	• Realização e análise das atividades da aula.
Meta: Instrumentalizar o trabalho com regularidades.				
9	• Conceituar padrão e regularidade. • Identificar e analisar regularidades em tarefas envolvendo: múltiplos, números pares e ímpares, números de Fibonacci, ternos pitagóricos e diagonais de polígonos convexos. • Refletir sobre o significado de atividade de investigação matemática. • Utilizar a calculadora em atividades para descoberta de regularidades. • Desenvolver diferentes atividades para trabalhar regularidades variadas.	• Padrão e regularidade: conceituação. • Múltiplos. • Quadrado de números pares e ímpares. • Seqüência de Fibonacci. • Ternos pitagóricos. • Razão áurea. • Atividade de investigação.	• Leonardo de Pisa. • Brahmagupta. • Hardy. • Calculadora. • Paradidático.	• Realização e análise das atividades da aula.
Meta: Instrumentalizar o ensino de seqüências.				
10	• Revisar a definição de regularidade. • Identificar e analisar regularidades em tarefas envolvendo os números notavéis (figurados). • Entender a diferença entre iteração e recursividade. • Utilizar diferentes atividades para trabalhar regularidades variadas.	• Padrão e regularidade: conceituação. • Números notáveis: triangulares, quadrados, pentagonais, hexagonais. • Indução matemática. • Seqüência e série.	• Carl Friedrich Gauss.	• Realização e análise das atividades da aula.

Aula	Objetivo(s)	Tema(s) norteador(es)	Recursos e História	Avaliação
Meta: Instrumentalizar o trabalho com as réguas de Cuisenaire.				
11	• Utilizar as réguas de Cuisenaire como recurso de aprendizagem. • Desenvolver atividades pautadas no pensamento combinatório a partir da 5ª série.	• Regularidades e relações numéricas. • Combinação. • Triângulo de Pascal. • Binômio de Newton.	• Emile Georges Cuisenaire. • Caleb Gategno. • Réguas de Cuisenaire.	• Análise situada de respostas de alunos a uma dada atividade com réguas de Cuisenaire.
Meta: Instrumentalizar o ensino de múltiplos e divisores.				
12	• Discutir o ensino de múltiplos e divisores. • Aplicar diferentes atividades para o ensino de múltiplos e divisores. • Utilizar o método investigativo nas formulações das atividades.	• Múltiplo e divisor: conceituação e propriedades. • Números primos. • Regras de divisibilidade. • Algoritmo de Euclides.	• Malha quadriculada. • Internet. • Eratóstenes.	• Realização e análise das atividades da aula.
Meta: Instrumentalizar o ensino de jogos.				
13	• Utilizar jogos com números em sala de aula. • Diferenciar tipos de jogos. • Produzir novos jogos a partir das sugestões aqui apresentadas.	• Números naturais. • Números inteiros. • Divisibilidade.	• Desafios lógicos. • Jogo da memória. • Dominós. • Numerologia. • Jogo do zigue-zague. • Jogo de varetas.	• Sugestão e análise de atividade envolvendo o conceito de divisibilidade com o jogo de varetas.
Meta: Instrumentalizar o trabalho com equações e inequações.				
14	• Utilizar *software* de construção de gráficos para resolver equações e inequações. • Relacionar o estudo de equações e inequações ao enfoque geométrico. • Aplicar diferentes formas de interpretação gráfica de equações e inequações. • Identificar graficamente as soluções de equações e inequações.	• Funções. • Representação gráfica de uma função. • Resolução e representação gráfica de equações e inequações. • Equações trigonométricas.	• *Software* • Graphmática.	• Realização e análise das atividades da aula.

<table>
<tr><th>Aula</th><th>Objetivo(s)</th><th>Tema(s) norteador(es)</th><th>Recursos e História</th><th>Avaliação</th></tr>
<tr><td colspan="5">Meta: Instrumentalizar o ensino de equação do 2º grau.</td></tr>
<tr><td>15</td><td>• Utilizar outras maneiras de resolver equação além da fórmula de Bhaskara.
• Aplicar a História da Matemática como recurso metodológico.</td><td>• Equação do 2º grau.
• Fórmula de Bhaskara.
• Método de completar quadrados.</td><td>• Bhaskara.
• Papiro de Kahun.
• Grécia.
• Al-Kowharizmi.</td><td>• Realização de atividade envolvendo soma e produto das raízes e o uso da fórmula de Bhaskara.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Meta: Instrumentalizar o trabalho com expressões algébricas.</td></tr>
<tr><td>16</td><td>• Relacionar o conceito de área de retângulo com os casos de multiplicação e fatoração de expressões.
• Discutir o estudo de fatoração nas expressões algébricas.
• Aplicar as expressões em diferentes contextos da Matemática.</td><td>• Conceito de área.
• Composição e decomposição de áreas.
• Fatoração de expressões algébricas.
• Produtos notáveis.</td><td>• Uso de quadrados e retângulos no plano e de paralelepípedos no espaço.</td><td>• Análise de uma questão de vestibular.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Meta: Instrumentalizar o trabalho com as curvas que representam gráficos de funções.</td></tr>
<tr><td>17</td><td>• Discutir o estudo das funções por meio de seus gráficos e equações.
• Analisar o estudo de derivada de diversas funções.
• Utilizar softwares para analisar o comportamento dos gráficos.
• Identificar extremos relativos, concavidades e pontos de inflexão.</td><td>• Conceito de função.
• Conceito de derivada.
• Construção de gráficos.
• Resolução de equações.</td><td>• Software gráfico
• Winplot.</td><td>• Realização e análise das atividades da aula, utilizando o Winplot e os resultados de derivada.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Meta: Instrumentalizar o ensino de progressões.</td></tr>
<tr><td>18</td><td>• Reconhecer uma seqüência como uma função de domínio discreto.
• Aplicar diferentes contextos no ensino de seqüências.
• Reconhecer e discutir as seqüências aritméticas e geométricas.</td><td>• Conceito de função.
• Progressões: conceituação e representação gráfica.
• Progressão aritmética e geométrica.
• Seqüência de Fibonacci.
• Triângulo de Pascal.
• Fractal.</td><td>• Fibonacci.
• Internet.</td><td>• Comparação das abordagens apresentadas com as vivenciadas pelo aluno, destacando aspectos positivos e negativos.</td></tr>
</table>

Aula	Objetivo(s)	Tema(s) norteador(es)	Recursos e História	Avaliação
Meta: Instrumentalizar o trabalho com as Torres de Hanói.				
19	• Utilizar as Torres de Hanói como recurso de aprendizagem. • Estudar regularidades. • Aplicar o conceito de função na análise de movimentos de peças das Torres de Hanói. • Refletir criticamente sobre a avaliação em Matemática.	• Indução finita.	• Jogo: Torre de Hanói. • Jogos na internet.	• Diários de campo.
Meta: Instrumentalizar o trabalho com as funções e as grandezas diretamente e inversamente proporcionais.				
20	• Analisar o estudo das grandezas direta e inversamente proporcionais. • Relacionar o conceito de proporcionalidade com o estudo de funções. • Identificar funções que apresentam proporcionalidade.	• Função linear e hiperbólica. • Proporcionalidade. • Grandezas diretas e inversas.	• Euler (V-A+F=2). • Newton (Lei da Gravitação).	• Revisão e registro de todos os resultados descobertos na aula.
Meta: Instrumentalizar o ensino de expressões algébricas.				
21	• Diferenciar uma expressão de uma equação. • Relacionar o conceito de área com expressões algébricas. • Aplicar jogos no ensino de expressões algébricas.	• Expressões algébricas. • Operações com expressões. • Conceito de área.	• Dominó com formas geométricas e expressões algébricas. • Jogos sobre operações algébricas. • Quebra-cabeça com formas geométricas.	• Elaboração de um dominó, utilizando as expressões e operações algébricas.
Meta: Instrumentalizar o ensino de análise combinatória.				
22	• Discutir sobre abordagens da análise combinatória. • Relacionar situações-problema aos problemas de contagem. • Diferenciar problemas de contagem.	• Princípio Fundamental da Contagem. • Arranjo, permutação e combinação. • Binômio de Newton. • Triângulo de Pascal.	• Uso de tabelas. • Uso de árvores.	• Realização das atividades da aula, utilizando estratégias diferentes.

Aula	Objetivo(s)	Tema(s) norteador(es)	Recursos e História	Avaliação
Meta: Instrumentalizar o ensino de jogos.				
23	• Diferenciar as idéias que envolvem o conceito de equação. • Dar exemplos de jogos com equações. • Utilizar a escrita como instrumento de reflexão sobre o jogo.	• Conceito de equação. • Equações equivalentes. • Expressões numéricas.	• Balanças.	• Elaboração de um jogo, envolvenvo conceitos algébricos.
Meta: Instrumentalizar o ensino de logaritmos.				
24	• Discutir sobre abordagens do ensino de logaritmos. • Refletir sobre episódios da história dos logaritmos. • Relacionar logaritmo a progressões.	• Logaritmo. • Conceito de função. • Função logarítmica. • Gráfico da exponencial e do logaritmo.	• Astronomia. • Copérnico. • Gerhard Mercator. • Galileu Galilei. • Kepler. • Jobst Bürgi. • Henry Briggs. • John Näpier. • Régua de cálculo. • Babilônios. • Leonhard Euler. • Calculadora científica. • Excel. • Tábua de logaritmos.	• Registro de aspectos positivos e negativos do uso de logaritmos, apresentando, neste processo, contextualizações na Matemática ou no cotidiano.
25	• Analisar o comportamento no infinito da função logarítmica. • Relacionar o modelo do logaritmo a alguns fenômenos. • Utilizar outra maneira de conceituar logaritmo.	• Logaritmo. • Conceito de função. • Função logarítmica.	• Calculadora científica. • Excel. • Contextualização: Física, Música, Crescimento populacional, Matemática (área da hipérbole), Química, Informática.	• Análise das atividades da aula, centrando interesse em aplicações e associações com outras áreas do conhecimento.
Meta: Refletir sobre a importância da Álgebra Geométrica no desenvolvimento do pensamento matemático.				
26	• Reconhecer a importância da Álgebra Geométrica na aprendizagem. • Conhecer episódios históricos relacionados ao desenvolvimento da Álgebra Geométrica. • Desenvolver e analisar atividades que explorem Álgebra e Geometria.	• Identidade e notação algébrica. • Representação geométrica. • Resolução gráfica de equações.	• Abu Kamil. • Thabit ben Qurra. • Omar Khayyan. • Euclides. • Pitágoras.	• Identificação e análise de aspectos conceituais relativos às equações nas Aulas 14, 15 e 26.

Aula	Objetivo(s)	Tema(s) norteador(es)	Recursos e História	Avaliação
Meta: Instrumentalizar o ensino da Álgebra utilizando o erro como um recurso de aprendizagem.				
27	• Reconhecer diferentes tipos de erro na aprendizagem de Álgebra. • Explorar uma representação algébrica. • Determinar a forma algébrica apropriada para responder a questões particulares.	• Notação algébrica. • Erros em Álgebra. • Equações-Operações.	• Confronto com o erro. • Resolução de problemas.	• Realização e análise das atividades da aula.
Meta: Instrumentalizar o ensino da Trigonometria.				
28	• Discutir sobre abordagens da trigonometria. • Trabalhar problemas que envolvem distâncias inacessíveis. • Discutir outros enfoques da trigonometria.	• Senos, cossenos e tangentes. • Grau e radiano. • Número real. • Conceito de função.	• Euler. • Calculadora científica. • Uso de mapas.	• Realização das atividades propostas e comparação com as abordagens de trigonometria apresentadas usualmente, destacando aspectos positivos e negativos.
Meta: Instrumentalizar o ensino de números complexos.				
29	• Refletir sobre episódios da história dos números complexos. • Discutir o ensino de números complexos numa abordagem geométrica. • Relacionar as operações dos números complexos com as transformações no plano. • Relacionar números complexos com problemas de geometria plana.	• Representação geométrica, trigonométrica e algébrica dos números complexos. • Módulo e argumento. • Transformações no plano: reflexão, translação, rotação e homotetia. • Resolução de equações.	• Scipione del Ferro. • Tartaglia. • Cardano. • Bombelli. • De Moivre. • Euler. • Gauss. • Wessel. • Argand.	• Realização das atividades da aula, utilizando a interpretação geométrica das operações do conjunto dos complexos.
Meta: Avaliar formativamente o trabalho no módulo através de quadro-síntese.				
30	• Identificar pontos-chave em cada aula da disciplina. • Auto-avaliar sua aprendizagem no módulo. • Conhecer características de um portfólio.	• Avaliação. • Conceito e elaboração de portfólio.	• Portfólio.	• Quadro-síntese • Início da elaboração de um portfólio.

!

A partir da leitura do quadro, você também poderia pensar em como seria um mapa conceitual do mesmo. Converse com o tutor e com seus colegas!

ATIVIDADE FINAL

Além da elaboração de quadros, tabelas, diários de campo, esquemas conceituais etc., o **PORTFÓLIO** é outro tipo de instrumento que favorece a seleção e ordenação das produções dos alunos ao longo de determinado trabalho.

Segundo **HERNANDEZ** (1998), do portfólio podem constar anotações, provas, recortes de jornais, de revistas, exercícios, trabalhos, fotos, pesquisas e tudo o mais que alunos e professores decidirem como informações importantes para evidenciar o processo de aprendizado discente.

Segundo **SHORES E GRACE** (2001), o portfólio propicia ao estudante pensar sobre as idéias e os conhecimentos que adquiriu fora da sala de aula, enriquecendo, assim, o aprendizado escolar. Vejamos os dez passos sugeridos pelas autoras no processo de elaboração de portfólios:

1. Estabelecer uma política de portfólio.
2. Coletar amostras de trabalhos.
3. Tirar fotografias.
4. Conduzir consultas nos diários de aprendizagem.
5. Conduzir entrevistas.
6. Realizar registros sistemáticos.
7. Realizar registros de casos.
8. Preparar relatórios narrativos.
9. Conduzir reuniões de análise de portfólio em três vias.
10. Utilizar portfólios em situações de transição.

Podemos elaborar portfólios de diferentes atividades: visitas a museus, passeios, aulas, trabalhos etc. Para isso, podemos escolher tanto os trabalhos mais importantes de cada atividade citada anteriormente como aqueles em que tivemos mais dificuldade. Ou seja, os de que mais gostamos ou aqueles de que menos gostamos.

PORTFÓLIO

Portfólio (porta-folhas) é um tipo de instrumento avaliativo que ilustra, mediante uma variedade de documentos, aspectos da aprendizagem de cada aluno.

HERNANDEZ

Fernando Hernandez é pesquisador da Universidade de Barcelona. No Brasil, tem publicado diferentes artigos relacionados ao trabalho com projetos. Dentre eles, o livro *Transgressão e mudança na educação*: os projetos de trabalho, da editora Artmed, 1998.

SHORES E GRACE

Elizabeth Shores e Cathy Grace são profissionais dos Estados Unidos que realizaram experiências variadas com portfólio. Tais contribuições podem ser encontradas em seu livro *Manual de Portfólio*, traduzido para o português e publicado, em 2001, pela editora Artmed.

> **!**
> O importante no portfólio é a reflexão que o estudante fará sobre sua aprendizagem, sejam as facilidades encontradas, sejam as dificuldades. Nesta autocrítica, o aprendizado também acontece.

É possível que você esteja se perguntando sobre os critérios que utilizaria para avaliar a aprendizagem matemática nos portfólios. Vejamos:

1. Organização e apresentação.
2. Critérios utilizados para a montagem.
3. Fontes de informação utilizadas e corretamente citadas.
4. Tipos de exemplos apresentados.
5. Análise crítica da problemática construída.
6. Autonomia e tipos de perguntas apresentadas e respondidas.
7. Perseverança.
8. Grau de prioridade e aprofundamento dos conteúdos curriculares.
9. Variedade de materiais exemplificadores.
10. Capacidade de síntese.
11. Correção lingüística.
12. Conclusões apresentadas.

Como foi dito anteriormente, podemos elaborar portfólios utilizando exemplos de diferentes atividades. Imagine que você queira fazer um portfólio contendo aulas desta disciplina. Que aspectos consideraria para selecionar um conjunto de aulas? Que ordem daria às mesmas? Que reformulações faria? Façamos, a título de exemplo, uma análise de duas de nossas aulas. Para facilitar, adiantamos um conjunto de critérios. Veja!

Tabela 30.1: Critérios para escolha de aulas (Passo 2).

	Aula ____	Aula ____	Comentários, observações etc.
Conceitos abordados			
Atividades interessantes			
Atividades que realizei individualmente			
Atividades que realizei com um colega			
Atividades em que precisei de ajuda do tutor			
Dificuldades de compreensão			
Experiências de aula que pude vivenciar			
Um recurso didático pensado ou elaborado por mim			
Leitura complementar que realizei			
O acesso à plataforma foi importante porque			
Informações que obtive da internet			
Integração curricular que pensei			
Outro critério...			

COMENTÁRIO

Esta foi uma pequena amostra de como proceder na montagem de um portfólio. Dos dez passos sugeridos por Shores e Grace (2991), você deve ter visto que as informações do quadro dão uma orientação do segundo passo. É importante perceber que elaborar portfólio constitui uma desafiadora atividade, e esperamos que esteja inspirado a continuar estudando sobre esta ferramenta avaliativa.

CONCLUSÃO

Avaliar deve ser um processo contínuo. Segundo Hernandez (1998), o portfólio é um dos instrumentos avaliativos que propiciam ao professor identificar avanços cognitivos de seus estudantes, bem como detectar problemas e dificuldades que persistem. Dentre os objetivos do portfólio, Aido (2003) destaca: elevar a auto-estima e desenvolver a autonomia, desenvolver o pensamento crítico-reflexivo, observar a capacidade de organização, conhecer melhor o aluno e acompanhar seu aprendizado.

Chegamos ao final do curso. Esperamos que você se sinta mais bem preparado e esteja mais motivado para inserir novas alternativas em suas aulas de Matemática. Lembre-se de que Álgebra, Aritmética, Geometria e outras áreas da Matemática, como, por exemplo, Estatística, devem caminhar juntas no currículo do Ensino Fundamental e Médio. Felicidades e muito sucesso profissional!

Ana Lúcia, Andreia, Marcelo e Rosana

RESUMO

O quadro-síntese é um tipo de instrumento que pode ser utilizado como forma de organização, estudo e avaliação em Matemática.

AUTO-AVALIAÇÃO

No início do seu trabalho, você leu no Guia da Disciplina os objetivos específicos que iríamos abordar. Ei-los, novamente, no quadro a seguir. Como auto-avaliação, propomos que os leia e identifique se alcançou ou não cada um. Faça os comentários que considerar necessários. Finalmente, se você preferir, pode inserir objetivos que considere importantes e que não foram inicialmente explicitados por nós.

!

É importante que você exemplifique o que aprendeu. Exemplificar pode ser uma atividade de uma aula específica, o comentário da mesma, um episódio histórico, elementos curriculares integradores. Enfim, algum elemento que dê informações sobre sua aprendizagem.

Quadro 30.2: Auto-avaliação da disciplina segundo seus objetivos gerais.

Objetivo	Sim	Não	Exemplo(s) de atividade(s) significativa(s)	Comentário(s)
Discutir aspectos teórico-metodológicos inerentes ao desenvolvimento do pensamento algébrico.				
Propor situações de aprendizagem que aprofundem aspectos conceituais relativos à Álgebra.				
Explorar diferenças entre pensamento algébrico e senso numérico.				
Incentivar a construção do laboratório pessoal de Álgebra.				
Utilizar a evolução histórica da Álgebra como recurso de ensino.				
Propiciar uma leitura crítica dos Parâmetros Curriculares Nacionais no que se refere ao ensino-aprendizagem de Álgebra.				
Desenvolver conteúdos algébricos que visem à integração entre os diferentes blocos de conteúdo propostos nos PCN.				
Utilizar a internet como ferramenta de ensino-aprendizagem.				
Outro...				
Outro...				

Referências

Aula 21

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais para ensino de matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

GIMENEZ, Joaquim. *Jogos com álgebra*, Espanha, 1996. Apostila de aula.

REVISTA NOVA ESCOLA. São Paulo, Abril, jun. 1995.

Aula 22

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília,DF: MEC/SEB, 2001. 144p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf.>. Acesso em: 28 abr. 2005.

LIMA, Elon Lages et al. *A matemática no ensino médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. (Coleção do professor de matemática, v. 2)

MORGADO, Augusto Cesar de Oliveira et al. *Análise combinatória e probabilidade*. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

Aula 23

ARCAVI, Abraham. *Álgebra, história e representação*. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1996. (Série reflexões em educação matemática, v.2)

MEIRA, Luciano. Significados e modelagem na atividade algébrica. *Boletim Gepem*, Rio de Janeiro, n. 42, p. 37-46, 2003.

BOYER, Carl. *História da matemática*. 9.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. 488 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília,DF: MEC/SEB, 2001. 144p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf.>. Acesso em: 28 abr. 2005.

LIMA, Elon Lages. *Análise real*. 2.ed. Rio de Janeiro: CNPq, 1993. (Coleção Matemática Universitária, v. 1)

______. *Logaritmos*. 2.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1996. (Coleção do Professor de Matemática)

______. *Meu professor de matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1998. (Coleção do professor de matemática)

______. *A matemática no ensino médio*. Rio de Janeiro: SBM, 1998. (Coleção do professor de matemática, v. 2)

MAOR, Eli. *The Story of a Number*. New Jersey: Princeton University, 1994.

MATSUBARA, Roberto; ZANIRATTO, Ariovaldo Antonio. *Matemática*: história, evolução e conscientização – 5ª a 8ª séries. Rio de Janeiro: IBEP, [19--]. (Coleção big mat, v. 7)

NETTO, Luiz. *Régua de cálculo de logarítmica*. Disponível em: <http://members.tripod.com/caraipora/aplicac_logarit.htm>. Acesso em: 28 abr. 2005.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1982. n. 1.

______. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1982. n. 2

______. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1983. n. 3

______. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1983. n. 4

______. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991. n. 19

______. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997. n. 31

______. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. n. 33

VAZ, Ana Lucia Vaz et al. *Funções II*. Rio de Janeiro, 2002.

Aula 25

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília,DF: MEC/SEB, 2001. 144p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf.>. Acesso em: 28 abr. 2005.

LIMA, Elon Lages et al. *A matemática no ensino médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. (Coleção do professor de matemática, v. 2)

MORGADO, Augusto Cesar de Oliveira et al. *Análise combinatória e probabilidade*. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

Aula 26

ARCAVI, Abraham. *Álgebra, história e representação*. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1996. (Série reflexões em educação matemática, v.2)

BAIRRAL, Marcelo A.; SILVA, Miguel Ângelo da. *Instrumentação do ensino de geometria*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2004.

BAUMGART, John. *História da álgebra*. Tradução Hygino H Domingues. São Paulo: Atual, 1992. (Coleção tópicos de história da matemática para uso em sala de aula).

BEKKEN, Otto. *Equações de Ahmes até Abel*. Tradução José Paulo Carneiro. Rio de Janeiro: GEPEM, 1994.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos*. Brasília,DF: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Médio*. Brasília,DF: MEC/SEF, 1999.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Traduzido por Hygino Domingues. 3.ed. Campinas,SP: Ed. da UNICAMP, 2002. 844p.

GEPEM. Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Disponível em: <www.gepem.ufrrj.br>. Acesso em: 04 março 2005.

GOMES, Maria da Conceição V. Álgebra, geometria e aritmética de mãos dadas no ensino fundamental. *Boletim Gepem*, Rio de Janeiro, n. 42, p. 47-60, 2003.

LINS, Romulo C.; GIMÉNEZ, Joaquin. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas,SP: Papirus, 1997.

MEIRA, Luciano. Significados e modelagem na atividade algébrica. *Boletim Gepem*, Rio de Janeiro, n. 42, p. 37-46, 2003.

PARADÍS, Jaume; MALET, Antoni. *Los orígenes del álgebra*: de los árabes al renacimiento. Barcelona: PPU, 1989.

Aula 27

ARCAVI, A. *Álgebra, história e representação*. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1996. (Série Reflexão em Educação Matemática).

COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. *Idéias da álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

LINS, Rômulo C.; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século xxi:* perspectivas em educação matemática. Campinas, SP: Papirus, 1997.

MEIRA, Luciano. Atividade algébrica e produção de significados em matemática: um estudo de caso. *In*: DIAS, Maria das Graças; SPINILLO, Alina G. (Eds.). *Tópicos em psicologia cognitiva*. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1996.

OLIVEIRA, Rosana. *Pensando algebricamente antes da 7ª série:* uma outra perspectiva nos processos de construção do conhecimento. Dissertação (Mestrado) - Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1997.

Aula 28

BRASIL. MEC. *Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais*. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília,DF: MEC, 2001. 144 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 21 jun. 2005.

BOYER, Carl. *História da matemática*. 9.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. 488 p.

CARMO, Manfredo Perdigão do; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar. *Trigonometria e números complexos*. Rio de Janeiro: SBM, 1992.

COSTA, Nielce M. Lobo da. A história da trigonometria. Disponível em: <www.paulofreire.org/histtrigon.pdf>. Acesso em: 02 maio 2005.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar. *A matemática no ensino médio*. Rio de Janeiro: SBM, 1998. v. 1.

MATEMÁTICA do ensino médio: temas e problemas. Cap.4: Aplicações da trigonometria. Disponívele em: <www.ensinomedio.impa.br/materiais/tep/cap4.pdf>. Acesso em: 08 maio 2005.

MATEMÁTICOS: aplicações práticas. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2003/icm11/napl.htm>. Acesso em: 10 maio 2005.

VAZ, Ana Lucia Vaz; BARBOSA, Andreia Carvalho Maciel; SOUZA, Ana Patricia Trajano de; ROBINSON, Marilia Nascimento. *Trigonometria*. Rio de Janeiro, 2004.

Aula 29

BARBOSA, Andreia. C.M.; NASCIMENTO, G.; ROBINSON, Marília N.; SILVA, Ana Lúcia V.; SOUZA, Ana Patrícia T. *Números complexos*. Rio de Janeiro: s.n, 2001.

BOYER, Carl. *História da matemática*. 9.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. 488 p.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Sá da Costa, 1958.

CARNEIRO, José Paulo Q. *Resolução de equações algébricas*. Rio de Janeiro: s.n, 2001.

MARTINS, Alda et al. Os números complexos. Disponível em: <www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm25/index1.htm>. Acesso em: 21 jun. 2005.

Aula 30

AIDO, J.P. Portfólios: uma luz na sombra da voz. *Educação e Matemática,* Lisboa, n. 74, p. 65-71, set./out. 2003.

HERNANDEZ, Fernando. *Transgressão e mudança na educação:* os projetos de trabalho. Porto Alegre: ARTMED, 1998.

OLIVEIRA, Eloiza da Silva Gomes; GAMA, Zacarias.Jaegger. *Prática de ensino 3 para* *licenciaturas:* métodos e técnicas de avaliação. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2005. v.1.

SANTOS, Vânia Maria. (Coord.) *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática:* métodos alternativos. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 1997.

SHORES, Elisabeth; GRACE, Cathy. *Manual de portfólio:* um passo a passo para o professor. Porto Alegre: ARTMED, 2001.

LEITURA COMPLEMENTAR

BAIRRAL, Marcelo A.; KINDEL, Dora S.; OLIVEIRA, Rosana de. *Uma propor-ação entre matemática e PCNs*. Rio de Janeiro: GEPEM, 2000.

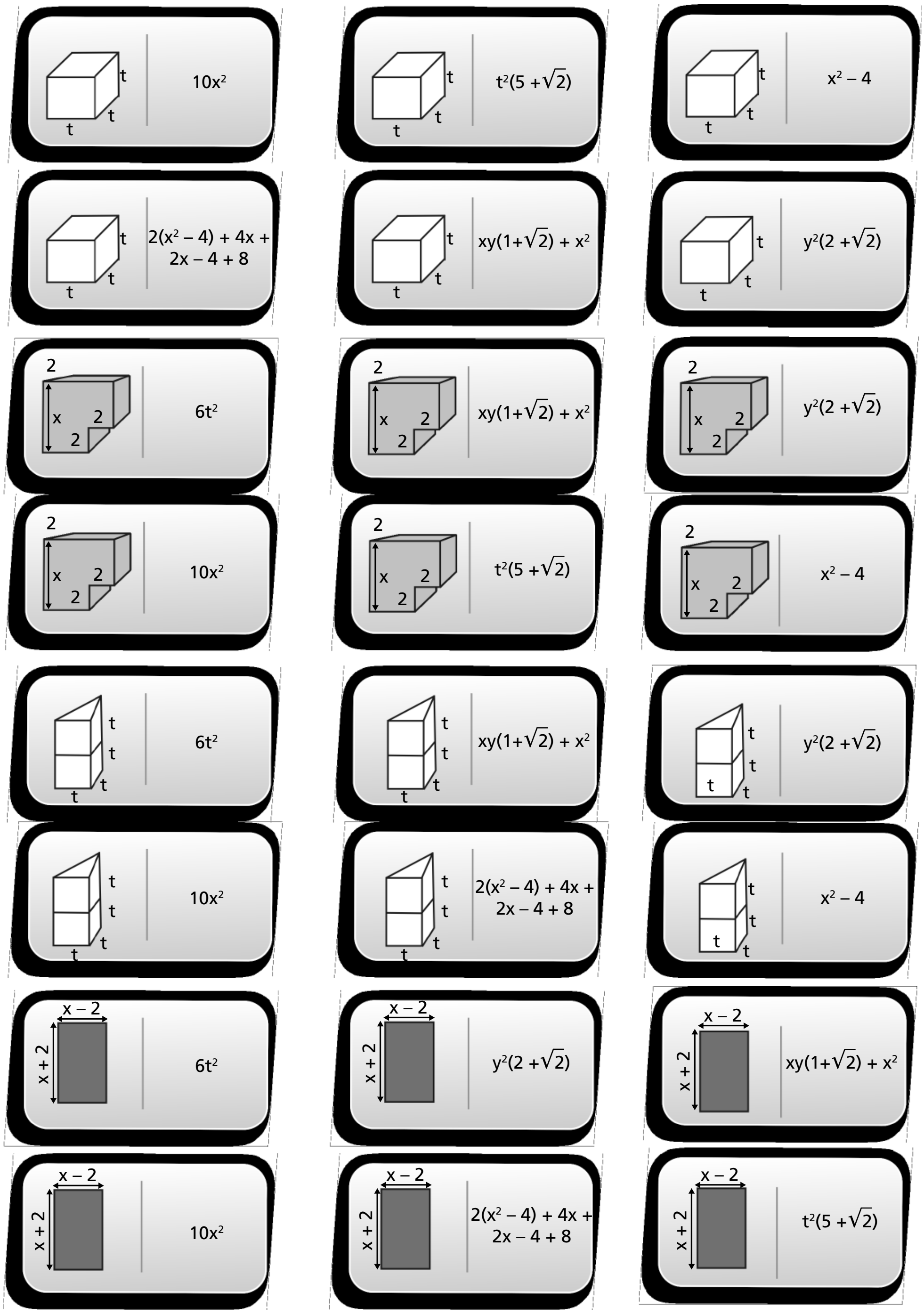
BRASIL. MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos*. Brasília, DF, 1997.

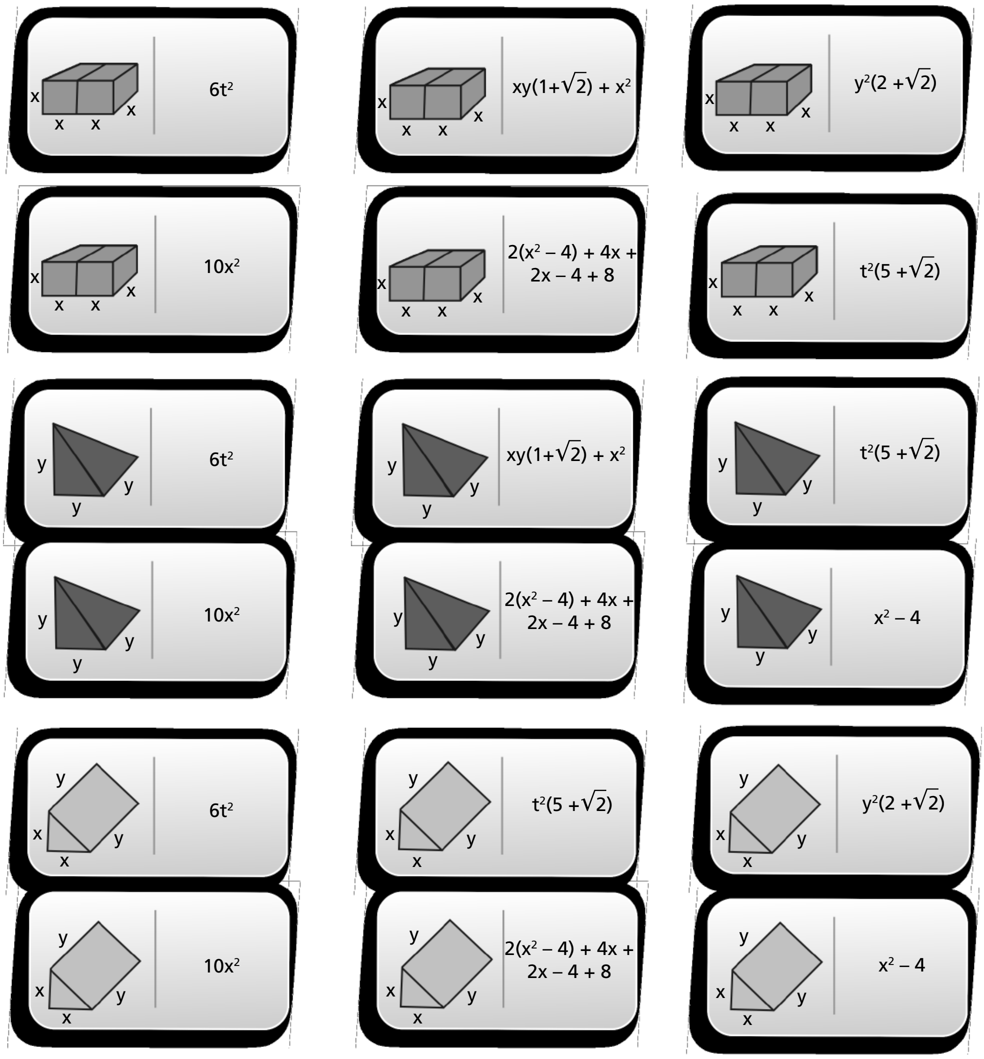
BRASIL. MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Médio*. Brasília, DF, 1999.

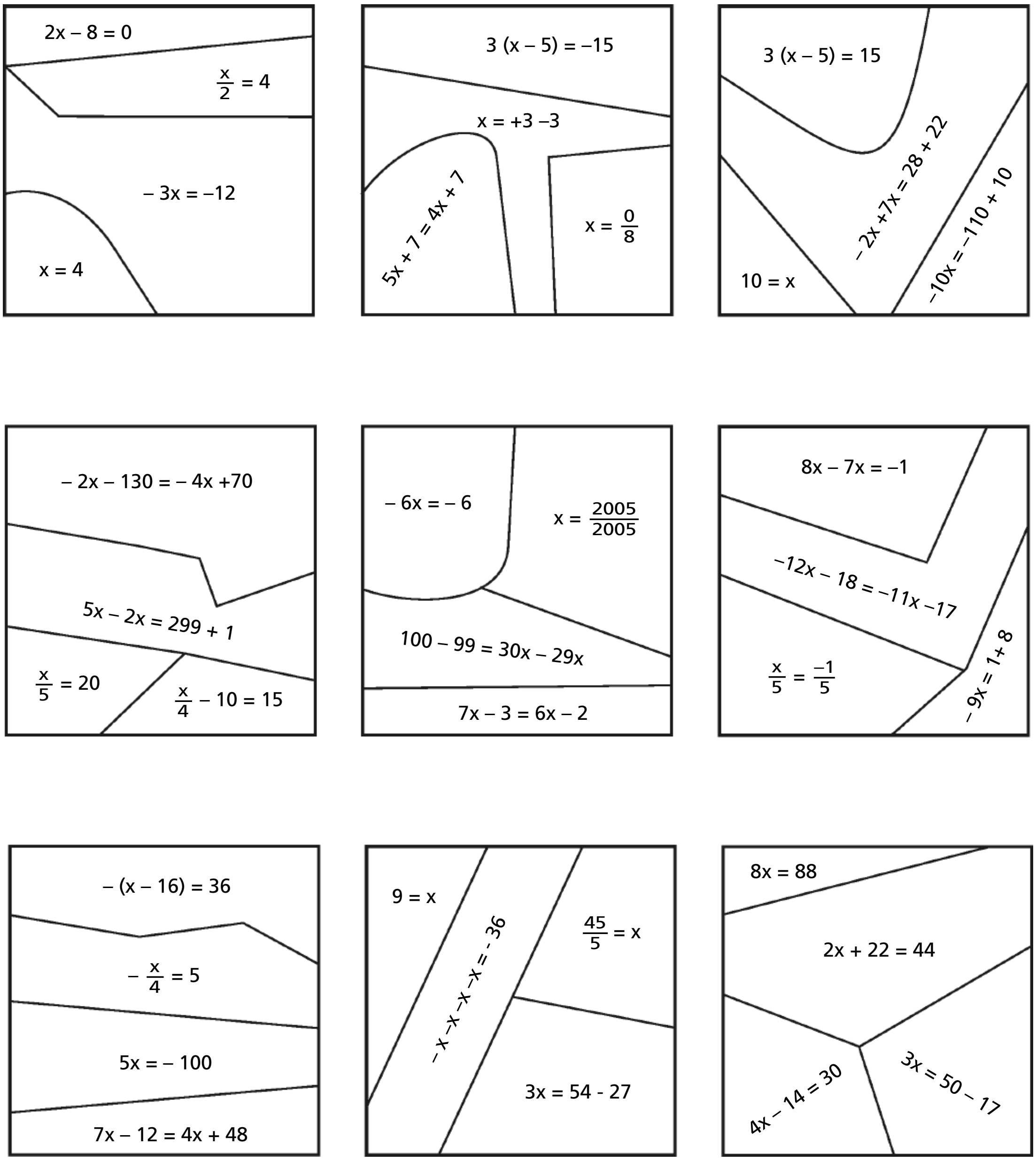
MAGNO, Beatriz; MANDARINO, Monica; JURKIEWICZ, Samuel. *Matemática na Educação 1*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2004.

Instrumentação do Ensino de Aritmética e Álgebra

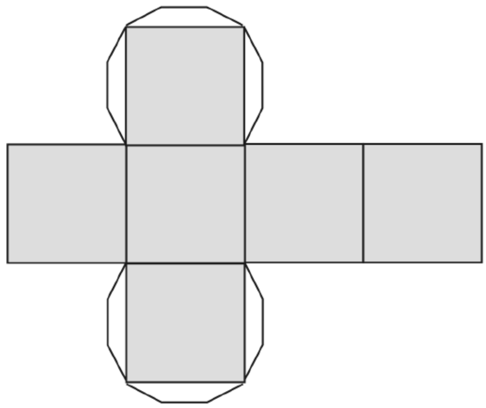
Módulo Prático

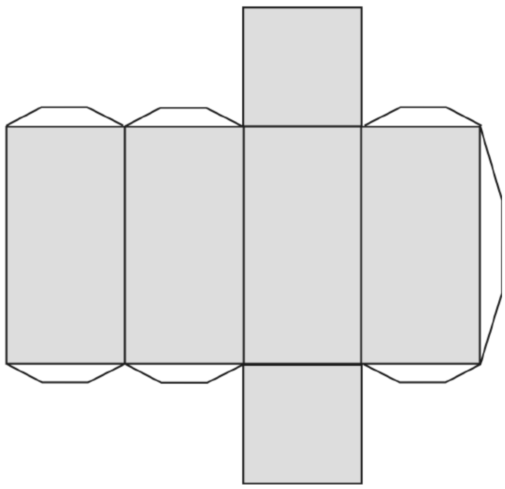

10x²
t²(5 +√2)
x² – 4
2(x² – 4) + 4x + 2x – 4 + 8
xy(1+√2) + x²
y²(2 +√2)
6t²
xy(1+√2) + x²
y²(2 +√2)
10x²
t²(5 +√2)
x² – 4
6t²
xy(1+√2) + x²
y²(2 +√2)
10x²
2(x² – 4) + 4x + 2x – 4 + 8
x² – 4
x – 2
x + 2
6t²
y²(2 +√2)
xy(1+√2) + x²
10x²
2(x² – 4) + 4x + 2x – 4 + 8
t²(5 +√2)

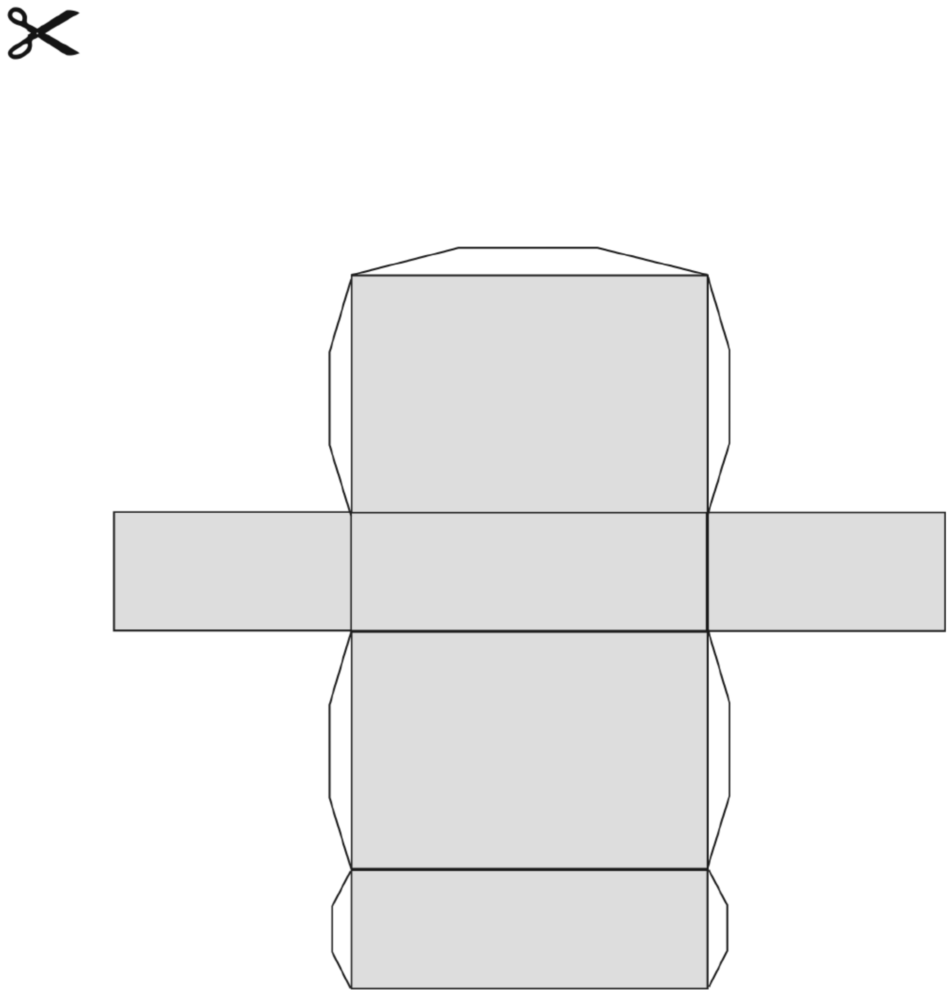

x x x x
6t²
x x x x
xy(1+√2) + x²
x x x x
y²(2 +√2)
x x x x
10x²
x x x x
2(x² – 4) + 4x +
2x – 4 + 8
x x x x
t²(5 +√2)
y y y
6t²
y y y
xy(1+√2) + x²
y y y
t²(5 +√2)
y y y
10x²
y y y
2(x² – 4) + 4x +
2x – 4 + 8
y y y
x² – 4
y x y x
6t²
y x y x
t²(5 +√2)
y x y x
y²(2 +√2)
y x y x
10x²
y x y x
2(x² – 4) + 4x +
2x – 4 + 8
y x y x
x² – 4

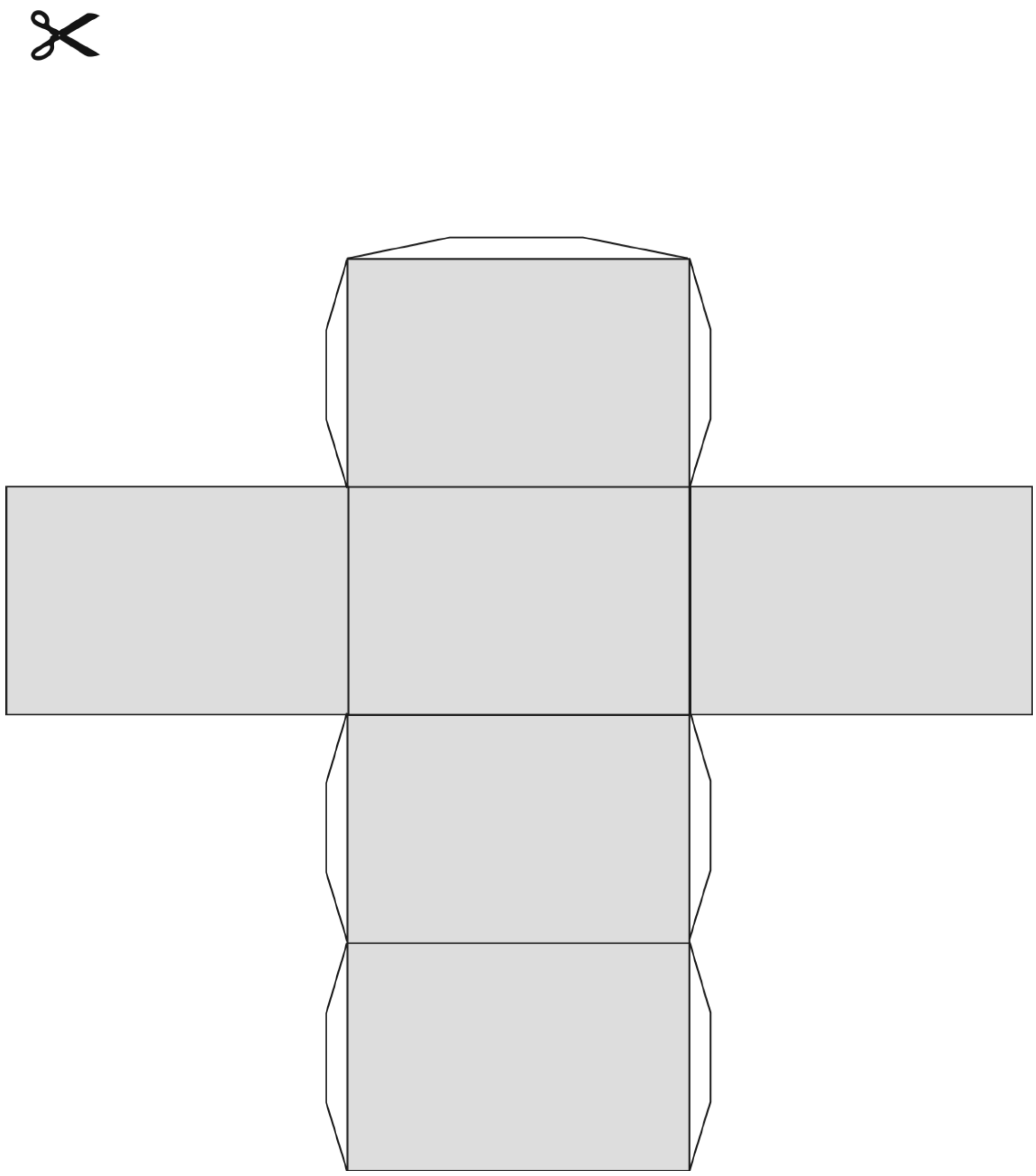

2x – 8 = 0
x/2 = 4
– 3x = –12
x = 4
3 (x – 5) = –15
x = +3 –3
5x + 7 = 4x + 7
x = 0/8
3 (x – 5) = 15
– 2x +7x = 28 + 22
–10x = –110 + 10
10 = x
– 2x – 130 = – 4x +70
5x – 2x = 299 + 1
x/5 = 20
x/4 – 10 = 15
– 6x = – 6
x = 2005/2005
100 – 99 = 30x – 29x
7x – 3 = 6x – 2
8x – 7x = –1
–12x – 18 = –11x –17
x/5 = –1/5
– 9x = 1+ 8
– (x – 16) = 36
– x/4 = 5
5x = – 100
7x – 12 = 4x + 48
9 = x
– x –x –x –x = - 36
45/5 = x
3x = 54 - 27
8x = 88
2x + 22 = 44
4x – 14 = 30
3x = 50 – 17

A $y = x^2 - 6x + 7$	B $y = x^2 - 2x - 3$	C $y = x^2$
D $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 4$	E $y = (x - 2)^2$	F $y = x^2 + 4x - 1$
G $y = 3x^2 + 12x + 11$	H $y = -2x^2 + 6x - 1$	I $y = (2 - x)(2 + x)$
J $y = 2x^2 - 4x - 3$	L $y = x^2 - 6x$	M $y = x^2 + 3$









ISBN 85-7648-164-2

9788576481645

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
UERJ

Universidade Federal Fluminense
uff

UNIVERSIDADE DO BRASIL

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

UNIRIO

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL