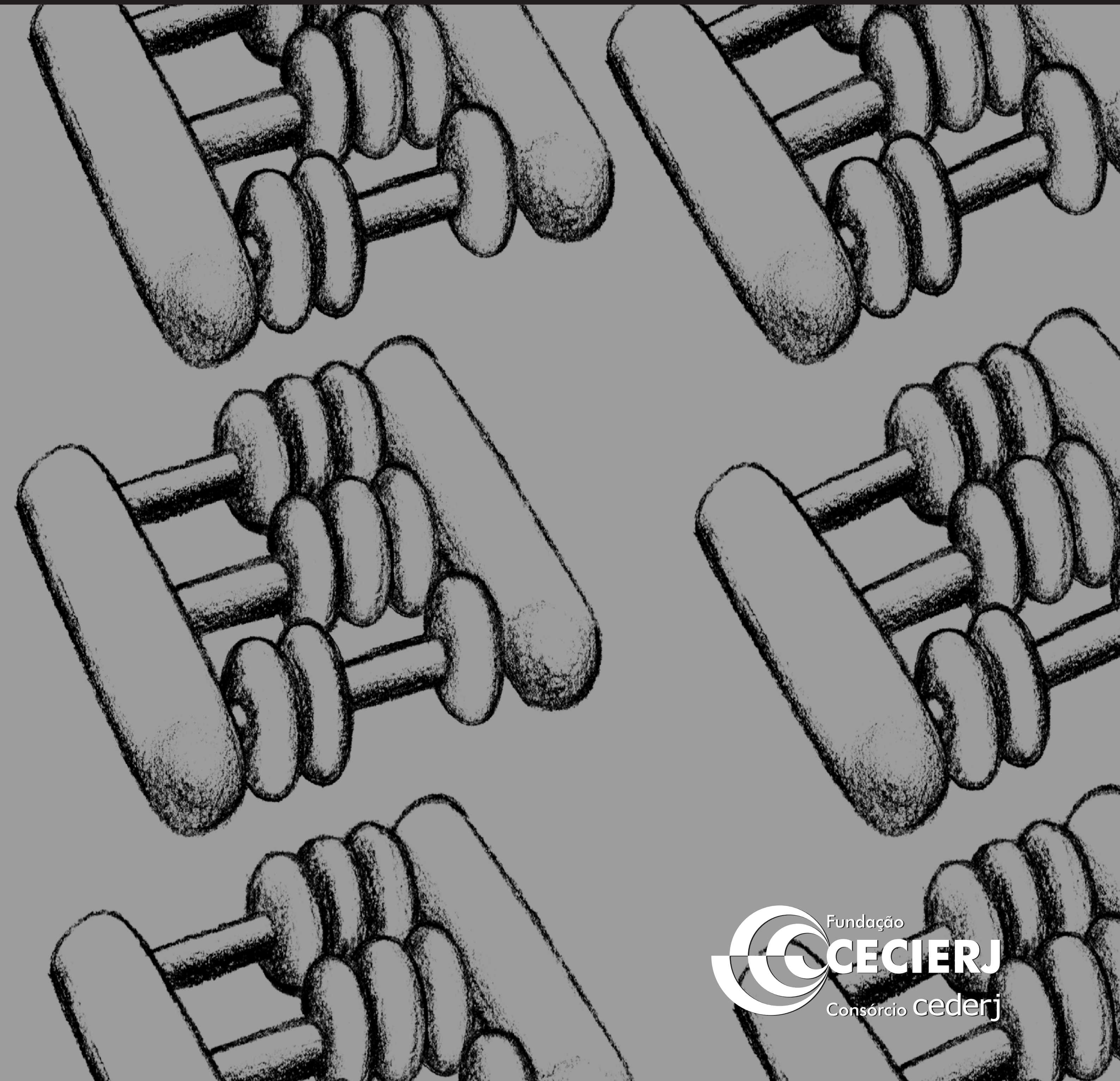
Mario Olivero

Caderno de Coordenação da Disciplina
Pré-cálculo



Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Caderno de Coordenação da Disciplina Pré-cálculo

Volume único | Mario Olivero

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

FUNDAÇÃO SANTA CABRINI
Provedora de acesso à Cidadania

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Presidente
Masako Oya Masuda

Vice-presidente
Mirian Crapez

Coordenação do Curso de Matemática
UFF - Regina Moreth
UNIRIO - Luiz Pedro San Gil Jutuca

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Mario Olivero

Departamento de Produção

EDITORA
Tereza Queiroz

REVISÃO TIPOGRÁFICA
Equipe CEDERJ

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO
Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Marcelo Freitas

CAPA
Eduardo Bordoni
Fábio Muniz

PRODUÇÃO GRÁFICA
Patricia Seabra

O48c

Olivero, Mario.
Caderno de coordenação da disciplina pré-cálculo. V. único / Mario Olivero. – Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.
186p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 978-85-7648-366-3

1. Pré-cálculo. I. Título.

CDD: 515.15

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

2010/1

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

Caderno de Coordenação da Disciplina Pré-cálculo

Volume único

SUMÁRIO

Semana 01 - Boas vindas!

Queridos alunas e alunos de Pré-Cálculo! Sabem qual é a paisagem da figura? É uma vista da praia de Piratininga, Niterói, onde essas notas foram escritas. Espero que vocês encontrem em cada pedacinho delas um pouco do ar salgado daqui, da tranqüilidade que este lugar me transmite.

Para que serve o Pré-Cálculo?

O principal papel do Pré-Cálculo é prepará-lo para cursar uma importante cadeia de disciplinas: Cálculo I, II, III e IV, Equações Diferenciais e Análise Matemática.

A experiência a ser adquirida nesta disciplina lhe dará a desenvoltura necessária para lidar com os conteúdos associados às funções reais, matéria básica para o Cálculo I. Ao terminar deste termo você estará preparado para efetuar as principais operações com funções, habilidade tão necessária no Cálculo I. Além disso, você terá tido uma boa experiência com um grande número de exemplos de funções, tais como as trigonométricas, as exponenciais e logarítmicas, facilitando a construção dos novos conteúdos e a assimilação das novas idéias que serão introduzidas nas disciplinas posteriores.

O Pré-Cálculo e o Ensino a Distância

Além de construir uma sólida base de conhecimentos matemáticos, você também adquirirá hábitos e atitudes que lhe permitirão aproveitar plenamente as vantagens do Ensino a Distância.

Você sabia que Ensino a Distância também é chamado de *distance learning*, em inglês? Podemos traduzir essa expressão como *aprendendo a distância*. Não é interessante, essa perspectiva? Ela enfatiza o compromisso de todas as partes envolvidas no processo.

As enormes vantagens que essa modalidade de ensino oferece já são muito conhecidas e tenho certeza que seu compromisso com o curso é grande. No entanto, é importante salientar algumas daquelas características tão necessárias para se ter sucesso nessa forma de aprendizagem.

Como ter sucesso no Ensino a Distância – Algumas sugestões

É preciso ter consciência de que fazer uma licenciatura de Matemática a distância é uma tarefa difícil, especialmente se levarmos em conta a boa qualidade do ensino que praticamos. Para ter sucesso nessa empreitada é fundamental que você disponha de muita determinação e esteja disposto a fazer certos sacrifícios.

Entre outras coisas pode-se mencionar a importância de se ter força de vontade, auto-disciplina e dedicação. Organização também é muito importante. Lembre-se de que essas características podem e devem ser cultivadas. Pensando nisso, escrevermos uma lista de sugestões que poderão ser úteis:

(a) É preciso ter uma agenda semanal de trabalho que lhe garanta <u>tempo de qualidade</u> para dedicar-se à disciplina.

(b) A presença nas <u>seções de tutoria</u> e a formação de <u>grupos de estudo</u> são ferramentas poderosas que você dispõe para progredir no curso. Não deixe de usufruir dessas instâncias. Isso enriquecerá sua vida acadêmica e o ajudará a fortalecer amizades que durarão por toda a vida.

(c) A Tutoria a Distância tem um papel importante a cumprir no seu programa de estudos. Ela lhe dará uma maior agilidade para debelar dúvidas e é um privilégio acessível apenas aos alunos da EAD. Lembre-se do velho guerreiro: "Quem não se comunica, se *estrumbica*".

(d) O material didático disponibilizado lhe dará um caminho seguro para a construção do seu conhecimento. O trabalho semanal com os EPs e a posterior análise dos correspondentes gabaritos o ajudarão a ficar em dia com os estudos. Esse trabalho lhe permitirá traçar um mapa do curso, pelo qual você precisa navegar. Ele lhe indicará os temas semanais que você precisa estudar, determinará os exercícios típicos que você não deve deixar de fazer, marcando um ritmo de estudo e progresso que você deve tentar manter.

Sugiro fortemente que o seu estudo intercale as leituras das aulas com o dos EPs. As aulas apresentam o conteúdo da disciplina de uma forma agradável e com exemplos, além de exercícios sugeridos. Os EPs trarão comentários adicionais e mais algumas novidades, além de apresentar diretamente a perspectiva do coordenador da disciplina.

Quero deixar claro que o uso de outros textos didáticos é fortemente encorajado. A capacidade de buscar materiais didáticos alternativos é necessária para a sua formação. Mas, não deixe de exercer (e desenvolver) senso crítico. Nem tudo que reluz é ouro!

Comentários gerais sobre o conteúdo das aulas

Antes de apresentar os exercícios sugeridos para esta primeira semana, vamos comentar alguns aspectos do conteúdo das duas primeiras aulas.

Do que tratam as duas primeiras aulas?

Essas duas aulas tratam de números. Números naturais e racionais. Poderíamos até dizer que são esses os objetos mais básicos na Matemática. Na verdade, para muitas pessoas, esses são os principais objetos matemáticos com que elas lidam. Mas, Matemática é muito vasta. Em algumas línguas, como inglês, diz-se Matemáticas. Numa primeira impressão, você poderia se perguntar: o que eu ainda tenho a aprender sobre os números? Podemos somá-los, multiplicá-los, resolver problemas simples com eles, e o que mais?

Você ficaria surpreso se soubesse que os números, mesmo se considerarmos apenas os números naturais, reservam mistérios quase insondáveis?

Aqui estão algumas observações que poderão, se não apresentar novidades, pelo menos colocar certas coisas em uma nova perspectiva.

Quando nos referimos a números, na mais primitiva acepção da palavra, queremos dizer *números naturais*. Denotamos

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots\}.$$

Esses são os números como os antigos matemáticos gregos consideravam. Note que não incluímos o zero. Pode ser uma surpresa mas, na verdade, o zero como número e como dígito custou muito a se firmar na Matemática.

Apresentamos a seguir três endereços na internet que trazem artigos sobre a História do Zero. O terceiro é em inglês, mas é o melhor deles.

http://www.somatematica.com.br/historia/zero.php

http://pt.wikipedia.org/wiki/Zero

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Zero.html

Por que representamos os inteiros pela letra $\mathbb{Z}$?

Os números, por si só, representam o lado analítico (ou, por assim dizer, algébrico) da Matemática. Quando usamos uma reta para representar os números, como é feito na Aula 1, temos uma oportunidade de percebe-los sob um ponto de vista geométrico.

Aqui estamos diante de uma coisa importante. O conteúdo matemático pode ser visto sob diferentes perspectivas, algumas mais naturais para cada um de nós, outras, nem tanto. Aqui estamos observando os números por uma perspectiva geométrica. Essa representação geométrica dos números pode nos servir como uma excelente motivação para introduzir os números negativos, aqueles que estão posicionados a esquerda do zero (o marco inicial) e dispostos simetricamente aos naturais. Assim, temos os números inteiros, denotados

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}.$$

Você sabe por que usamos a letra $\mathbb{Z}$ para representar os inteiros, e não algo como $\mathbb{I}$?

Bem, como você deve saber, a Teoria de Conjuntos foi criada por Georg Cantor, que falava alemão, e números, em alemão, se diz Zahlen.

O que torna os inteiros tão interessantes?

A propósito, no material didático você encontrou a informação que o conjunto dos números naturais, assim como o conjunto dos inteiros são conjuntos infinitos. Você sabe caracterizar conjunto infinito? Ou seja, dado um certo conjunto, como podemos determinar se ele é ou não infinito? Ganha um doce quem responder corretamente!

Mas, voltemos aos números, no sentido dos antigos gregos, os números naturais. Eis aqui uma questão que não quer calar:

> O que torna os números naturais tão interessantes? Dado a sua simplicidade, o que mais poderia ser dito a respeito deles além de que podemos somá-los e multiplicá-los?

A resposta deve vir de bate-pronto: *os primos*!!

Você sabia que alguns dos problemas matemáticos mais difíceis atualmente são questões que envolvem números primos? Eles estão presentes no resultado mais famoso da aritmética.

O Teorema Fundamental da Aritmética

O fato mais interessante sobre os números naturais que todos deveriam saber é que, do ponto de vista da multiplicação, todos os números podem ser montados a partir de peças básicas, os números primos, como um infinito brinquedo *lego*. Assim, $6 = 2 \times 3$, $30 = 2 \times 3 \times 5$, $121\ 11^2$ e $47 = 47$, pois 47 é, ele próprio, um número primo.

Esse resultado matemático era conhecido pelos antigos gregos (você sabe o que é o crivo de Eratóstenes?) mas só foi rigorosamente demonstrado bem posteriormente, por Gauss, um dos maiores matemáticos de todos os tempos. O nome *científico* desse fato é Teorema Fundamental da Aritmética.

Teorema Fundamental da Aritmética *Todo número inteiro $n > 1$ pode ser escrito de forma única como um produto de números primos:*

$$n \ = \ p_1 p_2 p_2 \dots p_k,$$

tais que $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_k$.

Aprender a reconhecer os primeiros números primos assim como aprender a decompor números (relativamente pequenos) em fatores primos é o caminho certo para ganhar alguma intimidade com os números, esses que são um dos primeiros representantes da matemática com que tomamos contato, assim como as formas geométricas fundamentais, ainda na infância...

Dois velhos conhecidos ...

Através da decomposição em fatores primos podemos chegar a dois importantes conceitos associados a dois números dados, digamos a e b: o *mínimo múltiplo comum*, $\mathrm{mmc}(a, b)$, e o *maior divisor comum*, $\mathrm{mdc}(a, b)$.

Para que servem esses números?

Deve haver uma boa resposta para essa pergunta, uma vez que nos ensinam a determiná-los desde os primeiros passos na escola... Bem, eles servem para efetuar certas operações de maneira ótima!

Começamos com o $\mathrm{mdc}(a, b)$. Ele é o número que devemos *fatorar* para tornar a fração $\dfrac{a}{b}$ numa fração irredutível.

Por exemplo, $\mathrm{mdc}(28, 42) = 14$. Assim, $\dfrac{28}{42} = \dfrac{2 \times 14}{3 \times 14} = \dfrac{2}{3}$.

Ele também pode ser útil em certas situações algébricas, como

$$28\,x + 42\,y = 0 \iff 2\,x + 3\,y = 0.$$

Por que você não tenta descobrir uma outra utilidade para p mdc?

Agora, mmc(a, b), o mínimo múltiplo comum. Ele serve para efetuarmos somas de frações do tipo

$$\frac{p}{a} + \frac{q}{b}.$$

O mmc(a, b) é o menor (e, portanto, o melhor) denominador que permite efetuar esta soma. É claro, estamos supondo que as frações a serem somadas já são irredutíveis.

Por exemplo, mmc$(28, 42) = 84$. Assim,

$$\frac{13}{28} + \frac{11}{42} \;=\; \frac{3 \times 13 + 2 \times 11}{84} \;=\; \frac{61}{84}.$$

Como calculá-los?

Se sabemos a decomposição em fatores primos (que existe e é única, segundo o Teorema Fundamental da Aritmética) dos números a e b, é muito fácil: para o mmc basta tomar os fatores primos que comaprecem em pelo menos um dos dois números (levando em conta a maior potência, caso ele compareça tanto em a como em b); para o mdc basta tomar os primos que aparecem simultaneamente nos dois números (levando em conta a menor potência, caso ele compareça tanto em a como em b). Veja dois exemplos na tabela a seguir.

a	b	mdc(a, b)	mmc(a, b)
$6 = 2 \times 3$	$15 = 3 \times 5$	3	$2 \times 3 \times 5 = 30$
$1050 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7$	$280 = 2^3 \times 5 \times 7$	$70 = 2 \times 5 \times 7$	$4200 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7$

Como os antigos matemáticos faziam?

Os antigos gregos já conheciam algoritmos para calcular o mdc e o mmc de pares de números. A idéia do algoritmo se baseia no seguinte fato:

Se r é o resto quando a é dividido por b, então mdc(a, b) = mdc(b, r).

Assim, usando divisões sucessivas, chegamos ao mdc. Veja, por exemplo, como calculamos o maior divisor comum de 72 e 30.

Num diagrama de três linhas, colocamos os números 72 e 30 na linha do meio. Ao alto de 30 colocamos a parte inteira do divisão (Algoritmo de Euclides) de 72 por 30 e sob o 72 colocamos o resto desta divisão.

	2	
72	30	
12		

No segundo passo, colocamos o resto da primeira divisão ao lado do 30 e repetimos a operação:

	2	2	
72	30	12	
12	6		

Como todo algoritmo, basta prosseguir repetindo os passos até ...

	2	2	2
72	30	12	6
12	6	0	

O que aconteceu de diferente nessa etapa do algoritmo? Você notou que o resto desta vez é igual a zero. Bom, isso indica que chegamos ao fim do processo e o número obtido nesta etapa, 6, é o mdc: $\text{mdc}(72, 30) = 6$. Realmente, $72 = 2^3 \times 3^2$ e $30 = 2 \times 3 \times 5$ e, portanto, $\text{mdc}(72, 30) = 2 \times 3$.

Pratique o algoritmo calculando $\text{mdc}(450, 105)$.

Agora, um algoritmo para o cálculo do mmc. Ele lembra bastante o conhecido algoritmo de decomposição em fatores primos. A diferença é que efetuamos a decomposição dos dois números simultaneamente. Veja, na prática, o cálculo de $\text{mmc}(132, 124)$.

132	126	2
66	63	2
33	63	3
11	21	3
11	7	7
11	1	11
1	1	

$$\text{mmc}(132, 126) = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11 = 2772$$

Você pode usar essa técnica para calcular o mmc de mais do que dois números. Só para ter certeza, você não gostaria de calcular mmc$(297, 140, 90)$?

Os números nossos de cada dia . . .

O que mais há, nesta primeira semana? Bem, os números racionais, aqueles que permêiam o nosso dia-a-dia. Eles nos bastam para as nossas tarefas diária. Você, por acaso, já ouviu alguém pedir $\sqrt{2}$ metros de casimira? Ou ainda, $2\,\pi$ quilos de queijo? Realmente, os números racionais são os que usamos na *prática*, como se diz. Devemos tratá-los bem e conhecê-los o melhor que pudermos. Eles são encontrados, essencialmente, em duas formas: a tradicional $\dfrac{p}{q}$ e a representação decimal, que pode ser, ou finita, ou periódica.

Nas duas aulas do módulo, damos ênfase à interpretação geométrica dos números. Isso parece pouco mas é muito importante. Em Matemática, sempre que podemos interpretar temas sob diferentes pontos de vista, aprofundamos nosso conhecimento sobre eles.

Por exemplo, podemos interpretar o módulo ou valor absoluto de um número, algo que pode ser definido em termos numéricos, do ponto de vista geométrico. Veja, quando usamos o símbolo

$$|x|$$

estamos, na verdade, abreviando uma frase, por assim dizer, bipartida. Isso é,

$$|x| \;=\; \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0; \\ -x, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Assim, se encontrássemos um marciano, que não tem nenhuma noção de geometria (façamos de conta que tal ser existisse), mas que entendesse de números racionais, ele seria capaz de entender que $|-3|$ é 3, pois $-3 < 0$ e $-(-3) = 3$. No entanto, é muito útil interpretar $|x|$ como a distância de x até 0. É claro que estamos pressupondo a identificação dos números com pontos da reta. Mas, afinal, isso você já leu na aula. Sob essa perspectiva, é claro que $|-3| = 3$, uma vez que -3 se encontra a 3 unidades de distância de 0.

Mas, voltaremos a esse tema mais uma vez.

Exercícios da Semana

É tarefa do coordenador da disciplina escolher exercícios. Essa tarefa não é fácil. Os exercícios não devem ser muito simples, pois nesse caso você não lhes dará valor e achará que não precisa gastar muito tempo com a disciplina. Convenhamos, você é uma pessoa com muitos afazeres. Por outro lado, se forem muito difíceis você poderá achar que não está apto para avançar com sucesso. Como você já sabe, Matemática sempre pode ser complicada. Além disso, eles não podem ser massantes, pois Matemática, Matemática nunca é chata. Matemática é muito interessante! Mas, há, também, a questão do gosto. De qualquer forma, tentemos!

---

1) Quais dos seguintes números são inteiros?

a) $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}$ b) $\left(\dfrac{1}{121}\right)^{-1/2}$ c) $\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}$ d) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{60}$

---

2) Resolva as seguintes equações:

a) $x^2-3x=10$ b) $2y^2+9=9y$ c) $\dfrac{4-r}{r^2-2}=1$ d) $\dfrac{2}{3-a}=a$

---

3) Resolva as equações a seguir na variável indicada.

a) $\dfrac{K}{2-r}=x$, em r; b) $\dfrac{1-P}{2-a}=P$, em P; c) $\dfrac{K}{2-t}=\dfrac{1}{1-K}$, em t.

---

4) Considere os números naturais em cujas representações decimais se usa apenas um algarismo, assim como o 11, o 333 ou 777777. Quais desses números são divisíveis por 9?

---

5) (O problema do cadê) Para quais algarismos k e d o número $k6d3$ é divisível por 11?

---

6) Use o algoritmo que determina o $\text{mdc}(a,b)$ para determinar a fração irredutível equivalente à fração $\dfrac{13068}{15246}$.

---

7) Por que é difícil decompor o número 97343 em fatores primos?

---

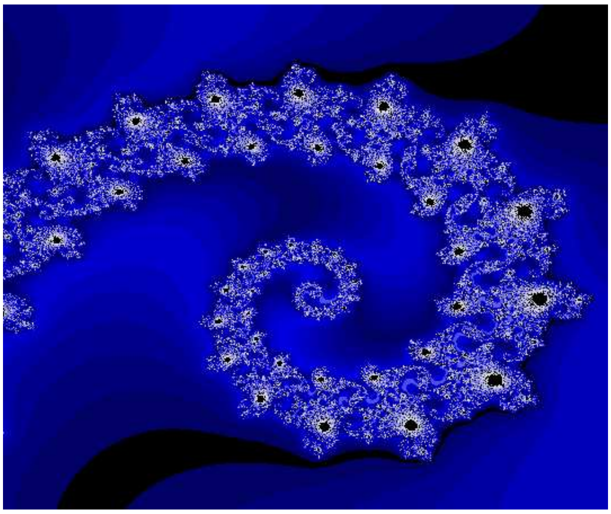
8) Determine quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras, justificando a sua resposta.

- Em cada seqüência (sucessiva) de 5 números inteiros há dois que são divisíveis por 3.
- $\text{mdc}(a,b)=1 \iff \text{mmc}(a,b)=a\times b$.
- Se um número n é divisível por 858, então n é divisível por 11.

---

9) Uma certa pessoa tem R$ 1.314, 47 em uma conta bancária e pretende fazer uma retirada de modo que, na próxima sexta-feira, quando o CPMF incidir sobre o valor retirado, a conta ficará com saldo zero. De quanto deve ser esta retirada?

Semana 02 - Como vão as coisas?



Esta imagem não foi feita por um telescópio espacial da NASA. Ela foi gerada por um computador. Você já ouviu falar em fractais?

Quanto é “muito”??

Esta semana você deverá estudar as diferenças entre dois tipos de números reais: os racionais e os irracionais. De uma certa forma, nosso acesso aos números irracionais é feita por meio dos racionais.

Para distinguir entre esses dois tipos de números reais é preciso lançar mão do conceito infinitude. Você precisa entender o quanto a importância que o infinito tem na Matemática.

Mapa de Navegação

Apesar de ainda estarmos no início do semestre, é importante manter os olhos no nosso *mapa de navegação*.

Panorama geral: no Pré-Cálculo estudaremos os números (reais) e as funções (reais, de uma variável real). Além disso, estaremos dando uma forte orientação geométrica a esses temas.

Na primeira semana lidamos com os números naturais, inteiros e, depois, racionais.

Você deve lembrar-se de que os racionais são aqueles números da forma $\dfrac{p}{q}$, com p e q inteiros, $q \neq 0$. Além disso, todos esses números podem ser representados na forma decimal. Lembre-se de que um número racional pode ser representado nessa forma de maneira finita, como $\dfrac{64}{5} = 1.28$ ou $\dfrac{25}{99} = 0.252525252525\cdots = 0.\overline{25}$.

É fundamental saber transitar de uma representação para a outra.

Esta semana você acrescentará os chamados *números irracionais*. Você verá na aula 3 que a necessidade de usar os números para medir objetos (como a diagonal de um quadrado de lado 1 ou a circunferência de um disco de raio 1, por exemplo) apontou para a necessidade de outros números, diferentes dos racionais. De uma certa forma, os irracionais são aqueles números que *complementam* os racionais, preenchendo assim a reta real *toda*.

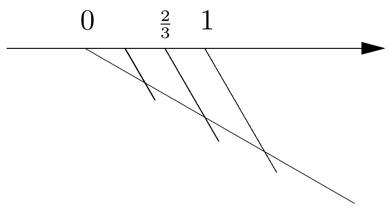
A aula 4 lida com a representação decimal dos números reais, incluindo agora os números irracionais.

Muito bem, muitas coisas para estudar!

Comentários gerais sobre o conteúdo das aulas

Esta semana você está as voltas com as aulas 3 e 4, que tratam dos números irracionais e da representação decimal dos números reais. Lembrem-se de que queremos dar um enfoque geométrico a esses temas.

Uma perspectiva geométrica para os números racionais é dada pela noção de proporção. Por exemplo, para marcar $\frac{2}{3}$ na reta, podemos usar a construção geométrica conhecida do ensino fundamental:



Os primeiros números não racionais com que os matemáticos se depararam foram $\sqrt{2}$ e π (ou 2π). O primeiro é a medida da diagonal de um quadrado de lado com comprimento 1 e o segundo é a metade (ou toda a) circunferência de um círculo de raio 1. Detectar que esses dois números não são da forma $\dfrac{p}{q}$, para p e q inteiros, com $q \neq 0$, não é tarefa fácil. Lembre-se de que a representação decimal, que usamos sem dar-nos conta de sua importância, não havia sido introduzida pelos árabes e pelos povos da Índia.

Nessa aulas você verá argumentos que provam que, se n não é um número quadrado, $\sqrt{n}$ não é racional e que a soma de um racional com um número não racional não é racional, além de outras coisas como essas.

O matemático da antiguidade que mais compreendeu o número π foi Arquimedes, um dos maiores gênios que a humanidade conheceu. Você sabia que há uma revista da série Gênios da Ciência, da *Scientific Amercan - Brazil* (ela aqui de novo...) dedicada a ele? Veja, Arquimedes provou que

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$

Realmente, em representação decimal aproximada temos: $3.140845070 < 3.141592654 < 3.142857143$.

Falando em representação decimal, você sabe distinguir um número racional de um não racional pela sua representação decimal? Isso é muito bonito. Os racionais tem representação decimal finita ou periódica. É importante saber transitar de um tipo de representação para a outra. Isso é, passar de $\frac{1}{3}$ para $0.3333\cdots = 0.\bar{3}$ e vice-versa. Veja o final da aula 4.

Boa semana de estudos!!

Atividades da Semana

Desenvolver uma espécie de *olho clínico* na Matemática é muito importante. Uma boa maneira de fazer isso consiste em trabalhar com exercícios do tipo falso ou verdadeiro. Devemos decidir (primeiro) se a afirmação é ou não verdadeira e (segundo) demonstrá-la caso seja verdadeira ou exibir um contra-exemplo caso contrário. Sempre que possível praticaremos esse saudável exercício.

---

1) Quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras, justificando sua resposta.

1) $\dfrac{17}{51} < \dfrac{171}{501}$

2) $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16}$

3) Se $y > 0$, então $\sqrt{y^2} = y$.

4) $\sqrt{49} = \pm 7$

5) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 \in \mathbb{Z}$

6) $\sqrt{7+2\sqrt{6}} > 1 + \sqrt{6}$

2) Calcule $q \in \mathbb{Z}$ tal que $q - 1 < \dfrac{-127}{31} < q$.

---

3) Determine os inteiros n ($n \in Z$) tais que $\dfrac{n+1}{n+\frac{2}{3}} \leq \dfrac{7}{9}$.

---

4) Calcule o número de elementos do conjunto $C = \left\{ n \in \mathbb{Z} \; ; \; \dfrac{-17}{3} < n < \dfrac{5321}{123} \right\}$.

---

5) Uma certa pessoa tem R$ 11,65 em moedas de 5, 10, 25 e 50 centavos. Sabe-se que o número de moedas de 5 centavos é o dobro do número de moedas de 10 centavos, que há três moedas de 25 centavos a mais do que o de moedas de 10 centavos e, além disso, que há uma moeda de 10 centavos a mais do que as moedas de 50 centavos. Quantas moedas de 5, 10, 25 e 50 centavos a pessoa possui?

---

6) Considere a seguinte brincadeira:

1) Pense em um número.
2) Adicione 2.
3) Multiplique por 3.
4) Adicione 9.
5) Multiplique por 2.
6) Divida por 6.
7) Subtraia o número com que você começou.
8) O resultado é 5.

E aí, funcionou? Como você explica essa aparente mágica?

Exercícios *para cansar o braço*

a) Calcule, racionalize e simplifique, expressando suas respostas com expoentes positivos. Suponha que todas as letras representam apenas números positivos.

1) $169^{-1/2}$
2) $\sqrt[3]{-1331}$
3) $(125)^{-2/3}$
4) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-2}$
5) $\sqrt{\sqrt[3]{343}}$
6) $\sqrt{25+144}$
7) $\sqrt{25} + \sqrt{144}$
8) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{1/3} + \left(\dfrac{1}{27}\right)^{-1/3}$
9) $\sqrt{2} + \sqrt{18}$
10) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{12}$

11) $\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 10\sqrt{3} - 2\sqrt{12}$

12) $5\sqrt{75x^2} - 2\sqrt{12x^2}$

13) $\dfrac{24}{3x^2}$

14) $\dfrac{8}{\sqrt[3]{2}}$

15) $(a^{-4}b^{-8})^{3/4}$

16) $\dfrac{a^2b^{-1/2}c^{1/3}}{a^{-3}b^{1/2}c^{2/3}}$

17) $\frac{1}{3}(x^3+2)^{-2/3} \cdot 3x^2$

18) $\frac{2}{3}(x^3-6x^2)(2x-12)$

19) $\sqrt[3]{\dfrac{32}{x^2}} - \dfrac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x^3}}$

20) $\dfrac{\sqrt{72a^3}}{3b} - \dfrac{a\sqrt{50a}}{2b} + \dfrac{12a^2}{b\sqrt{2a}}$

b) Simplifique efetuando as operações indicadas.

1) $(2x+1)(2x-1)$

2) $(-2x+3)(x+7)$

3) $(\frac{1}{2}x+4)(x-8)$

4) $(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})$

5) $(\frac{1}{10}x - \frac{1}{100})(x+\frac{1}{10})$

6) $(x^2+x+9)(x^2-3x-4)$

7) $(y-1)(y^3+y^2+y+1)$

8) $(x^{1/3}-2)(x^{2/3}+2x^{1/3}+4)$

9) $(x^{2k}+1)(x^{2k}-1)$

10) $(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$

c) Racionalize o denominador e simplifique.

1) $\dfrac{12}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

2) $\dfrac{20}{3-\sqrt{2}}$

3) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

4) $\dfrac{1}{\sqrt{4+h}+2}$

d) Fatore

1) $x^5 - 32$

2) $3y^4 - 48$

3) $sx^2 + 15 - 5ax - 3x$

4) $9x^3 - 42x^2 + 49x$

5) $x^2 - 10x + 24$

6) $25x^2 - 144y^2$

7) $x^3 + 64$

8) $a^3x - b^3y + b^3x - a^3y$

9) $9x^2 + 6x + 1$

10) $24a^2 + 25ab + 6b^2$

Semana 03 - Reais Números

Você está se tornando um expert em *anatomia* dos números reais. Veja, a primeira coisa a lembrar-se é de que fazemos uma identificação entre os números reais e os pontos da reta. Isto é, há uma bijeção entre esses dois objetos matemáticos, o conjunto dos números reais e o conjunto dos pontos da reta real. E devemos transitar de um meio para o outro com fluência.

Por exemplo, em algumas semanas estaremos estudando as funções de uma variável real. Ou seja, definidas no conjunto dos números reais. Muito bem, falaremos dessas funções como aquelas definidas na reta real.

Isso é uma questão de perspectiva: os números são a visão algébrica-analítica enquanto a reta é a versão geométrica. Mas, nada de se preocupar muito com isso.

Voltando aos números, começamos com os naturais (que têm entre eles os primos), os inteiros e passamos aos racionais, os números nossos do dia-a-dia. Esses são os números (por assim dizer) visíveis ao homem-comum (incluindo a gente, quando fazemos compras, lemos uma receita de bolo, medimos a porção de um remédio).

Na versão *oficial*, esses números são da forma $\frac{p}{q}$, com p e $q \in Z$, $q \neq 0$, as frações. Essas podem ser vistas geometricamente via proporções. No popular, esses números tem representação decimal (uma grande aquisição da humanidade , que usamos sem dar-nos muita conta disso) finita ou periódica. Por exemplo, $1,25$ e $2,676767676\cdots = 2,\overline{67}$.

É muito importante saber *transitar* de uma forma para a outra.

Muito bem, nesse estágio temos uma boa parte dos números reais:

$$\text{Naturais} \quad \subset \quad \text{Inteiros} \quad \subset \quad \text{Racionais}$$

Você aprenderá em detalhes no futuro que, na verdade, essa não é a maior parte dos números reais. Há os irracionais. Esses são os números cuja representação decimal é *infinita* e sem padrão de repetição. Por exemplo, você pode buscar na internet a melhor aproximação conhecida de π. No entanto, por acurada que seja essa aproximação, sempre haverá aproximações melhores.

É preciso saber distinguir aqueles irracionais mais comuns, como $\sqrt{17}$, $\sqrt[3]{10}$, $1+\sqrt{3}$ ou $\dfrac{2\pi}{3}$.

Mas, não se deixe enganar, você já deve saber que o número $(\sqrt{3}+2)^2+(\sqrt{3_2})^2$, apesar de sua aparência, é racional.

O que mais há para saber?

O conjunto dos números reais é munido de uma conjunto de propriedades a que chamamos *boa ordem.* Isto quer dizer, em termos científicos, que dados dois números reais a e b quaisquer,

1. (Reflexiva) $a \leq a$;
2. (Anti-simétrica) $(a \leq b \text{ e } b \leq a) \implies a = b$;
3. (Transitiva) $(a \leq b \text{ e } b \leq c) \implies a \leq c$;
4. (Tricotomia) uma das afirmações é verdadeira: $a > b$, $a < b$ ou $a = b$.

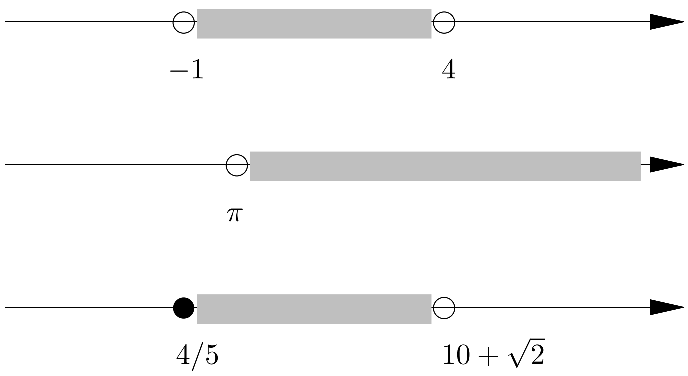
A última dessas propriedades nos diz que, dados dois números reais quaisquer, sempre podemos compará-los e concluir qual deles é maior do que o outro, a menos de que eles sejam iguais.

Nós estamos tão habituados a essas propriedades que mal nos damos conta delas. Além do mais, a representação dos reais como os pontos de uma reta, uma vez estabelecido o sentido (digamos que a reta é horizontal e o sentido positivo é da esquerda para a direita, uma vez que a maior parte de nós, seres humanos, é destra) torna essa boa ordem evidente. Mas, deixemos essa coisa assim, você voltará a ouvir esse assunto posteriormente, em outras disciplinas, e vamos ao que interessa nesse momento.

Devido a boa ordem dos números reais, podemos lidar com uma família muito importante de sub-conjuntos da reta (ou dos números, como quiser), os intervalos. Esses vêm em várias formas – abertos, fechados, aberto em um extremo e fechado no outro, finito ou infinito. Aqui estão alguns exemplos:

$$
\begin{aligned}
(-1,\, 4) &= \{\, x \in \mathbb{R}\,;\, -1 \leq x \leq 4 \,\};\\
(\pi,\, +\infty) &= \{\, x \in \mathbb{R}\,;\, \pi < x \,\};\\
[4/5,\, 10+\sqrt{2}\,) &= \{\, x \in \mathbb{R}\,;\, 4/5 \leq x < 10+\sqrt{2}\,\}.
\end{aligned}
$$

Geometricamente os representamos assim:



A bola cheia indica que o extremo representado por ela pertence ao intervalo enquanto que a bola vazia indica que o extremo representado não pertence ao intervalo.

Esses subconjuntos da reta, os intervalos, assim como as uniões deles, serão parte de nossa lida diária por um bom tempo. Eles serão as respostas das inequações, os domínios das funções, as regiões onde o comportamento de certas funções é assim ou assado e assim por diante. Essa semana começaremos nossa caminhada no mundo das inequações.

Mais alguma coisa?

Finalmente, uma coisa importante a observar a respeito da anatomia dos números reais é a maneira como os números, racionais e irracionais, estão dispostos na reta. Apesar de haver *mais* números irracionais do que racionais, esses são distribuídos na reta de forma *densa*. Isso é, tão próximo quanto quisermos de um dado número irracional há um número racional. Essa é a razão de podermos, na prática, lidar apenas com as aproximações racionais. Veja, na tabela a seguir, algumas aproximações do número π:

3.141592654
3.14159265358979
3.141592653589793238462643
3.1415926535897932384626433832795029

Mantenha distância!

Na seção anterior usamos a frase *tão próximo quanto quisermos*. Essa frase é muito usada em Matemática. Para que ela faça sentido precisamos que o ambiente em consideração (no nosso caso, a reta real ou o conjunto dos números reais) seja munido de uma *distância*. Ela é dada pelo módulo ou valor absoluto.

Acho que está bom, vamos parar por aqui e seguir para os exercícios da semana!

Atividades da Semana

---

1) Coloque em ordem crescente os números a seguir:

$$1+\sqrt{3}, \qquad \pi, \quad \frac{40}{13}, \qquad 1-\sqrt{3}, \qquad \sqrt{13}.$$

---

2) Quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras, justificando sua resposta.

1. Entre dois números racionais sempre há um irracional;
2. O produto de números irracionais é um número irracional;
3. $\forall b \in \mathbb{R}, \quad |-|b|| = b$;
4. $\forall a,\ b \in \mathbb{R},\ ||a|-|b|| \geq |a|-|b|$.

---

3) Determine um número irracional entre os números $\dfrac{17}{13}$ e $1,32$.

---

4) Uma certa substância radioativa decai a uma taxa de 50% a cada hora. Num determinado instante há 320g da substância. Quanto restará da substância após 8 horas? Após quantas horas restará menos do que 1 grama da substância?

---

5) Escreva o número $12,34\overline{272}$ como uma fração irredutível e determine a representação decimal do número $\dfrac{21}{17}$.

Se você possui uma calculadora, não deixe de usá-la, a menos que você não queira. Se você não tem uma calculadora (científica, com senos e cossenos e raízes), não deixe de comprar uma, a menos que você realmente não queira.

Exercícios *para cansar o braço*

Resolva as equações a seguir:

a) $|x-1| = 3$

b) $|2x-5| = 0$

c) $\left|\dfrac{1}{1-x}\right| = 2$

d) $\dfrac{x}{|x|} = -1$

Resolva as inequações a seguir:

a) $|x-3| \leq 1$

b) $|4-x| < 2$

c) $|x+2| \geq 4$

d) $|3x-6| < 9$

Fatore:

1) $-7x+49$

2) $5xy+25y^2+10y^5$

3) x^2-36

4) $4x^2-121$

5) $(a+2)^2-25b^2$

6) x^3-27

7) $8a^3-\dfrac{1}{125}$

8) $3x^2-48k^4$

9) $2hx^2-8h^3$

10) $4x^2+12xy+9y^2$

11) $10x^2-39x+14$

12) a^6-2a^3+1

13) $12x^2y-22xy^2-60y^3$

Simplifique as expressões a seguir reduzindo-as aos menores termos.

1) $\dfrac{4b^2-4ab}{3a^2-3ab}$

2) $\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-x-2}$

3) $\dfrac{x^2-4}{x^4-16}$

4) $\dfrac{x+y}{x-y} \cdot \dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}$

Combine e simplifique as expressões a seguir:

1) $\dfrac{2}{3x^2} - \dfrac{1}{2x}$

2) $\dfrac{7}{x-2} + \dfrac{3}{x+2}$

3) $\dfrac{5}{(x-1)(x+2)} - \dfrac{8}{4-x^2}$

4) $\dfrac{1-4x}{2x+5} + \dfrac{8x^2-16x}{4x^2-25} - \dfrac{1}{2x-5}$

Resolva as inequações a seguir:

1) $x - 3 \ < \ 2x + 5$

2) $\dfrac{1}{x-3} \leq 0$

3) $\dfrac{x}{2x-5} < 0$

4) $\dfrac{x+3}{4-x} \geq 0$

Semana 04 - Um lugar ao Sol!

Você sabe que lugar e esse?

Comentários sobre as aulas

O tema da aula 7, módulo ou valor absoluto, já foi comentado nos documentos anteriores. No entanto, há dois conceitos que merecem algum destaque. São as noções de subconjuntos discretos e subconjuntos densos da reta (ou dos números reais, dependendo do ponto de vista).

Aqui, a Matemática imita a vida. Veja, um subconjunto da reta é um subconjunto discreto se cada um de seus elementos pode ser isolado dos outros por um intervalo. É como se cada elemento fosse um Robson Crusoé, isolado em sua pequena ilha, o intervalo. Por exemplo, todo subconjunto finito da reta é discreto.

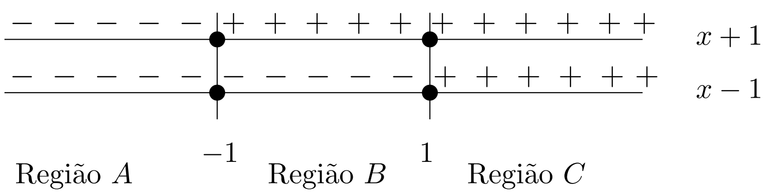
De uma certa forma, os subconjuntos densos estão no outro lado desse espectro. Para que um subconjunto da reta seja denso é necessário que todo e qualquer intervalo contenha algum de seus elementos. É como se seus elementos estivessem por toda a parte da reta. Os dois subconjuntos densos da reta com os quais temos lidado até agora são o conjunto dos números racionais e o seu complementar, o conjunto dos números irracionais. Você encontrará a demonstração de que esses dois subconjuntos da reta são densos na aula (demonstração do teorema 7.1). É muito proveitoso que você leia e tente entender essas argumentações, mas queremos reforçar que você não será cobrado sobre essas demonstrações. Nessa etapa de seu curso, esperamos que você conheça esses fatos matemáticos, entenda como eles se encadeiam, consiga usá-los para deduzir outros resultados e faça esforços para compreender suas demonstrações.

Ainda na aula 7, é muito proveitoso fazer uma leitura do exemplo 7.6, onde a inequação $|x+1| < |x-1|$ é resolvida.

Veja, você deve entender que a expressão $|x|$ é uma compactificação de uma frase matemática longa. Ou seja, cada vez que escrevemos "$|x|$", na verdade, queremos dizer "x, se $x \geq 0$, ou $-x$, se $x < 0$".

Assim, a inequação $|x+1| < |x-1|$ pode estar representando a inequação $x+1 < x-1$, a inequação $x+1 < -(x-1)$ ou, ainda, $-(x+1) < -(x-1)$, dependendo do caso. Tudo o que devemos decidir é qual inequação devemos resolver, em diferentes trechos da reta.

Segundo esse ponto de vista, devemos considerar que a expressão $x+1$ é positiva ou igual a zero no intervalo $[-1, +\infty)$ e é negativa no seu complementar, o intervalo $(-\infty, -1)$. Analogamente, $x-1$ é positiva ou igual a zero em $[1, +\infty)$ e negativa em $(-\infty, 1)$. Assim, as duas raízes, 1 e -1, das expressões, dividem a reta em três regiões. Em cada uma dessas regiões a inequação assume uma forma. A solução de cada caso só é solução da inequação original naquela região específica.



Região A: ambas as expressões assumem valores negativos;
Região B: $x+1$ assume valores positivos e $x-1$ assume valores negativos;
Região C: ambas as expressões assumem valores positivos.

Região A	$(-\infty, -1)$	$\|x+1\| < \|x-1\|$	$-(x+1) < -(x-1)$
Região B	$[-1, 1)$	$\|x+1\| < \|x-1\|$	$x+1 < -(x-1)$
Região C	$[1, +\infty)$	$\|x+1\| < \|x-1\|$	$x+1 < x-1$

Ou seja, precisamos de muita organização e paciência. No futuro consideraremos este tipo de problema por um outro ângulo.

A aula 8 apresenta o nosso principal teatro de operações: o plano cartesiano.

René Descartes (1596 – 1650) foi um homem extraordinário. Ele é conhecido por ter cunhado a frase – Penso, logo existo – e por ter escrito um livro – *Discurso sobre o Método para Bem Conduzir a Razão e Buscar Verdade Através da Ciência*. Este livro é um marco na história da Filosofia e teve uma enorme influência também na Matemática. Num apêndice Descartes introduziu uma idéia simples mas que nunca havia sido cogitada anteriormente: munir o plano de um sistema de coordenadas.

Ao fazer isto ele estendeu uma ponte unindo dois universos, a Álgebra e a Geometria, criando assim uma arquitetura que nunca mais parou de crescer. Com esse novo contexto, equações como $y = x^2 - 2x - 4$, que existiam apenas no contexto algébrico, passaram a *representar* curvas no plano. Por outro lado, subconjuntos do plano, tais como parábolas, hipérboles, círculos, retas e tantas outras, passaram a ser *vistos* algebricamente por meio de equações.

Nada mais justo do que o nome: plano *cartesiano*.

A aula 8 trata de dois tipos de coordenadas: as cartesianas e as polares. As cartesianas são mais comuns, com os dois eixos, Ox e Oy. As polares, são menos conhecidas mas são especialmente convenientes, dependendo da circunstância. Os dois sistemas permitem que localizemos pontos no plano. Seja a partir de um par de eixos (no caso cartesiano), seja a partir de um polo e uma semi-reta, no caso polar. Se a sua cidade é formada por ruas que se cortam ortogonalmente, criando um padrão típico norte-sul, leste-oeste, o carteiro gostará de ler os endereços na forma cartesiana. Mas, se seu trabalho é observar a tela de um radar de um submarino, daqueles de filmes de guerra, que vão bip, bip, bip, girando aquela linha verde, a localização será dada pela distância até o pólo mais um informação sobre o ângulo... Bem, acho que você já pegou a idéia. Agora, aos problemas!

Atividades da Semana

---

1) Quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras, justificando sua resposta.

1. A união de dois subconjuntos densos da reta é um subconjunto denso;

2. A união de dois subconjuntos discretos da reta é um conjunto discreto;

3. Se $A \subset \mathbb{R}$ é um subconjunto discreto, então $A \cap [a, b]$ é um subconjunto discreto na reta;

4. Se $A \subset \mathbb{R}$ é um subconjunto denso, então $A \cap [a,b]$ é um subconjunto denso da reta;

Observação: Essa questão não é difícil mas pode conter armadilhas. Manuseie com cuidado.

---

2) Determine o conjunto solução das equações e inequações a seguir.

a) $\left|x - \dfrac{2}{3}\right| = 4$;

b) $|x+2| = \sqrt{2}$;

c) $|x - \pi| < \dfrac{\pi}{2}$;

d) $|2x - 3| < |4 - x|$.

---

3) Represente graficamente cada um dos seguintes subconjuntos do plano:

a) $A = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ |x| \leq 2\,\}$;

b) $B = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ |y| \leq 3\,\}$;

c) $C = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ -1 \leq x \leq 2,\ \ -2 \leq y \leq 3\,\}$;

d) $D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ |x| = 1,\ \ 0 \leq y \leq 2\,\}$;

---

4) Determine as coordenadas polares dos pontos a seguir e represente-o no plano.

$A = (1,1)$; $B = (-2,2)$; $C = (1, -\sqrt{3})$.

---

5) Recomponha o(s) quadrado(s) em cada um dos casos a seguir.

1) $x^2 + 6x + 10$

2) $x^2 - 4x + 2$

3) $z^2 - 8z + 17$

4) $x^2 - x + 2$

5) $x^2 + x - \frac{5}{4}$

6) $x^2 + 8x + y^2 - 4y + 19$

7) $x^2 + 2x - y^2 - 6y - 12$

8) $x^2 - 3x + \frac{5}{2}$

Semana 05 - Com quantas retas se faz uma canoa?

Quinta semana? Sexta semana? Não importa, agora o semestre está definitivamente começado e você já deve estar às voltas com a AD01! Você já estabeleceu uma rotina de trabalho? Como estão as outras disciplinas? Se você está achando que o Pré-Cálculo é moleza e está estudando pouco, caia na real!!

Brincadeirinha, tenho certeza que você leva a sério seus compromissos e espero que esteja gostando do curso e aprendendo coisas novas.

Nesta semana você deverá focar a sua atenção num tema muito importante. O tema da semana é ... tadãammm – equações de retas!!!

Você deverá terminar a semana sabendo TUDO a respeito de equações de retas: forma geral, retas verticais, retas horizontais, paralelas, coeficientes angulares, coeficientes lineares e tudo o mais!

Como você deve estar esperando, equações de retas não é nenhum bicho papão da Matemática e, portanto, é bom aproveitar para aprender tudo super bem.

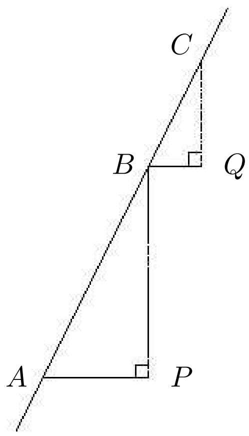
Você já deve ter uma idéia da coisa: uma equação do tipo $ax + by + c = 0$ (com $a^2 + b^2 \neq 0$) determina um subconjunto de pontos do plano – o conjunto de todos os pontos de coordenadas (x, y) que (é claro) satisfazem a equação.

Assim, você precisa saber transitar entre esses dois mundos: dada a equação você deve ser capaz de esboçar o gráfico ou pelo menos, saber se a reta está inclinada assim ou assado, qual é a sua intersecção com os eixos de coordenadas, coisas assim. Essa é a parte da descida da ladeira, a parte fácil. Menos fácil é a mão inversa. Isto é, a partir das informações geométricas a respeito da reta, construir a sua equação. Há várias situações e você precisa aprender todas.

Veja, como já dizia Euclides, há mais ou menos 2300 anos, para determinar uma reta precisamos de *duas informações.* Pode ser dois pontos que pertencem a reta ou um ponto mais a inclinação...

Finalmente, gostaria de chamar a atenção de vocês para uma coisa a respeito de retas e de suas equações. Note que no universo da Álgebra, as equações do tipo $ax + by + c = 0$ são as mais simples possíveis com duas variáveis. Elas são as equações lineares. Pois esse conjunto de objetos algébricos simples correspondem no universo da Geometria, via a ponte estabelecida entre eles pela introdução de sistemas de coordenadas, às retas, exatamente os objetos mais simples, sem contar com os pontos, é claro...

Você sabe o que é que está por trás desse fenômeno? O que faz todo essa arquitetura funcionar? Pois bem, a resposta está na noção de proporção. O que caracteriza estarem três pontos alinhados? Resposta: estão alinhados se, e somente se, as suas coordenadas guardam certas proporções. Veja o desenho a seguir:



Os dois triângulos retângulos são semelhantes e, portanto seus catetos guardam a mesma proporção:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{QC}}.$$

No universo algébrico, se (x, y), (a, b) e (c, d) são três ponto "alinhados", isto é, pertencentes à mesma reta, suas coordenadas são, por assim dizer, proporcionais. Usamos isso mais uma propriedade dos determinantes de matrizes para obter um objeto tipicamente algébrico: uma equação. Veja, o determinante a seguir.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Por que deve ser igual a zero? Ora, todo mundo sabe que, se duas linhas ou duas colunas de um determinante são proporcionais, ele é igual a zero.

Veja um exemplo numérico. Queremos achar a equação da reta que contém os pontos (0, 1) e (2, 5). Usamos o determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

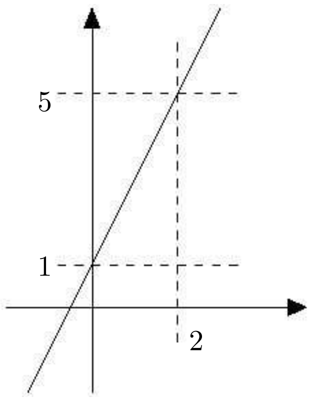
Agora, cada um use a sua maneira preferida de calcular o determinante. Por exemplo, repetindo as duas primeiras linhas e multiplicando as diagonais, com sinal negativo nas secundárias:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x + 0 + 2y - 2 - 5x - 0 = 2y - 4x - 2 = 0.$$

Podemos escrever a resposta como

$$\boxed{y = 2x + 1}$$

Veja o gráfico na figura a seguir.



Note que o coeficiente angular é positivo. Além disso, o cateto vertical tem o dobro do tamanho do cateto horizontal: o coeficiente angular é igual a 2. Mais ainda, a intersecção da reta com o eixo Oy ocorre na altura (positiva) 1, que é o coeficiente linear da reta.

Ao trabalho!

Atividades da Semana

1) Calcule o coeficiente angular, caso exista, da reta determinada pelos pontos dados.

a) $(3, 4)$; $(2, -5)$
b) $(4, 3)$; $(-5, 2)$
c) $(-2, 4)$; $(-2, 17)$
d) $(5, -3)$; $(15, -3)$
e) $(-9, 0)$; $(-3, 12)$
f) $(2, -\frac{3}{4})$; $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

2) Esboce o gráfico da reta de coeficiente angular m e que contém o ponto dado.

a) $m = -1$; $(2, 3)$
b) $m = \frac{3}{4}$; $(0, 2)$
c) $m = 2$; $(1, 1)$
d) $m = -\frac{1}{3}$; $(-2, 3)$
e) $m = 0$; $(3, 1)$
f) $m = -2$; $(0, 4)$

3) Esboce cada uma das retas com coeficiente angular dado a seguir e tais que o ponto $(3, -1)$ é comum a todas elas.

$m = -2$; $m = -1$ $m = 0$, $m = 2$, $m = 4$

4) Determine a equação da reta determinada pelos pontos dados.

a) $(1, 2)$; $(0, -2)$
b) $(1, 1)$; $(3, -2)$
c) $(1, 4)$; $(-1, 3)$
d) $(1, 0)$; $(1, 3)$
e) $(3, 0)$; $(6, 0)$
f) $(1, -2)$; $(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$

Exercícios para cansar o braço

Matemática, como toda outra atividade humana, tem o seu lado técnico, que exige habilidades. É coisa do ofício. Assim como um bom carpinteiro que tem prazer em serrar uma madeira ou pregar um prego com destreza, assim nós, profissionais da Matemática, devemos ser capazes de executar certas manobras com elegância e precisão. Isso exige treino, dedicação.

Nesta série você deverá reescrever a expressão algébrica de forma que o termo linear fique, por assim dizer, escondido... Veja um exemplo: $x^2+6x+10 = x^2+2\times3\times x+9+1 = (x+3)^2+1$.

Note que o número 10 foi escrito como a soma de 9 com 1.

Tente o mesmo na lista a seguir:

a) $x^2 - 2x + 4$
b) $z^2 - 8z + 8$
c) $t^2 - 2at + 3a^2$
d) $y^2 - 2\sqrt{2}\,y - 1$
e) $4a^2 - 4a + 4$
f) $x^4 - 4x^2 - y^2 - 2y + 3$
g) $x^2 - x - y^2 - 3y - 5$
h) $z^2 + t^2 - 4z + 6t + 1$

Semana 06 - Ora direis ouvir parábolas!

Você sabe que curva é essa?

Esta semana você começará a lidar com as cônicas, curvas que têm um papel muito importante nos conteúdos de Pré-Cálculo e nos Cálculos, de forma geral...

Comentários sobre o conteúdo das aulas

A esta altura do curso, espera-se que você saiba:

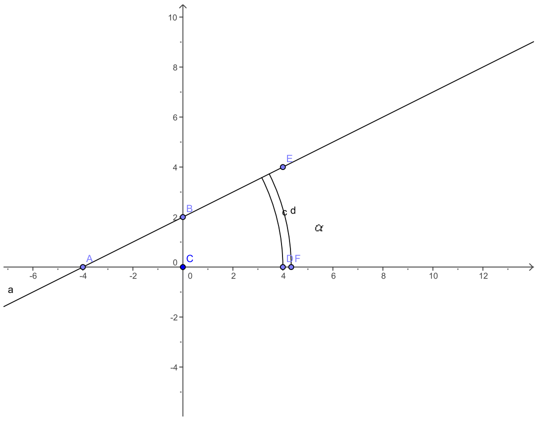
(1) Equações do tipo $ax + by + c = 0$, com $a^2 + b^2 \neq 0$, definem retas no plano;

(2) As equações da forma $x = c$ definem retas verticais e equações da forma $y = d$ definem retas horizontais;

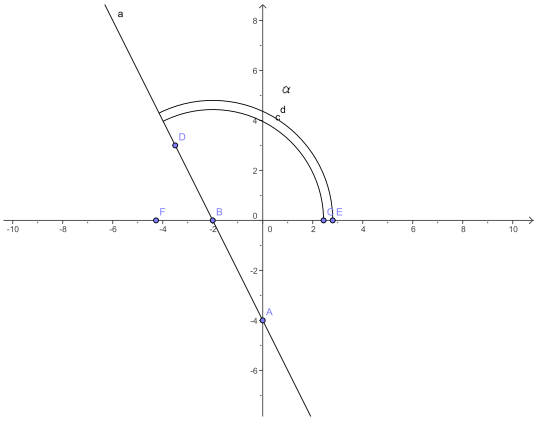
(3) Se $b \neq 0$, então a equação $ax + by + c = 0$ pode ser reescrita como

$$y = m\,x + t;$$

(4) Os números m e t têm interpretação geométrica como coeficiente angular (que determina a inclinação da reta) e coeficiente linear (que determina a altura que a reta corta o eixo Oy).



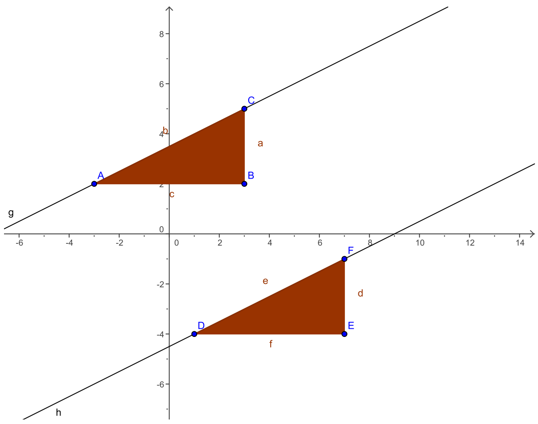
$$y = \frac{1}{2}\,x + 1$$



$$y = -2\,x - 2$$

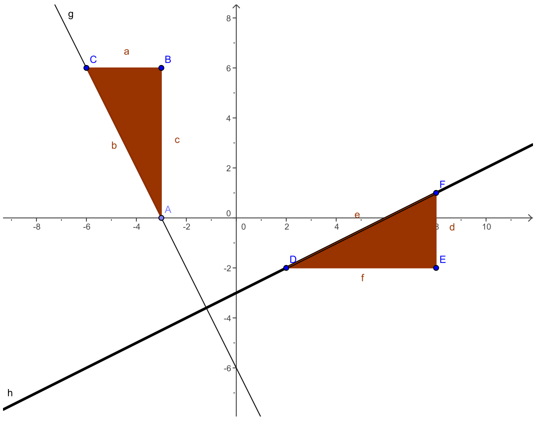
Conseqüências

(1) As retas $y = m\,x + t_1$ e $y = m\,x + t_2$ são paralelas.



Retas Paralelas

(2) As retas $y = m\,x + t_1$ e $y = -\dfrac{1}{m}\,x + t_2$ são perpendiculares.

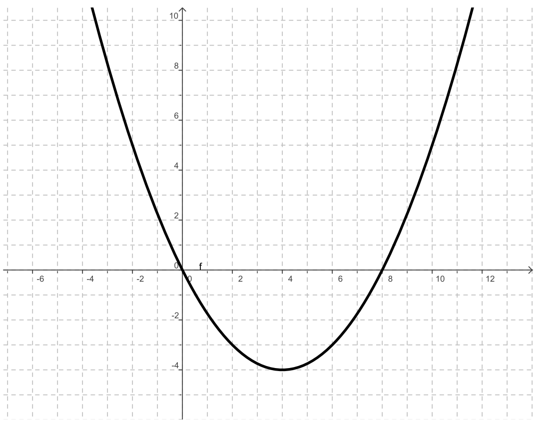


Perpendiculares

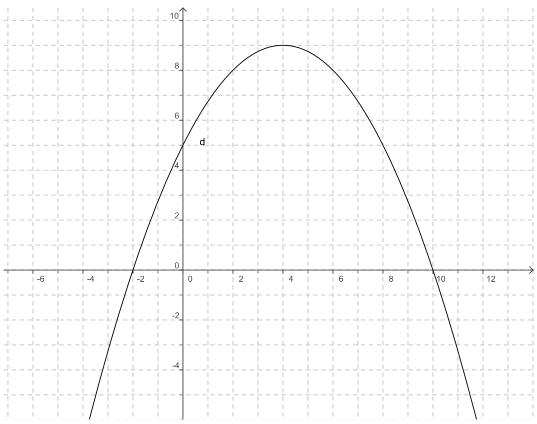
$$\operatorname{tg}\alpha = m; \quad \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{m}$$

Aula 12

Você aprenderá que $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, uma das equações de grau 2 a duas variáveis, define uma parábola cujo eixo de simetria é uma reta vertical. O sinal da constante a determina se a parábola é côncava para cima ou côncava para baixo.



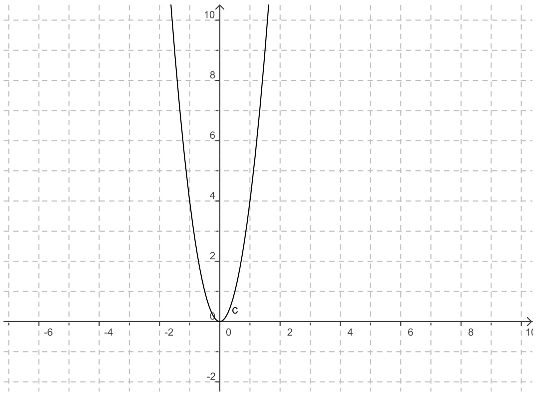
$a > 0$



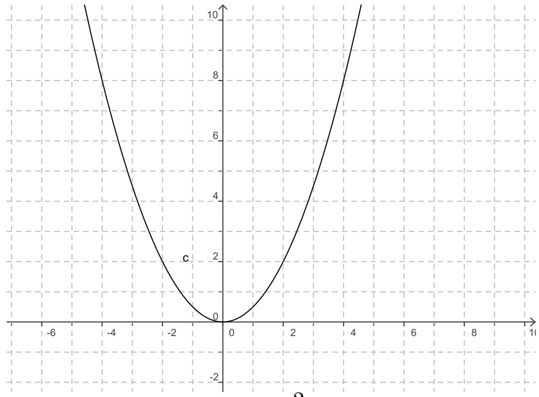
$a < 0$

Como usar a álgebra?

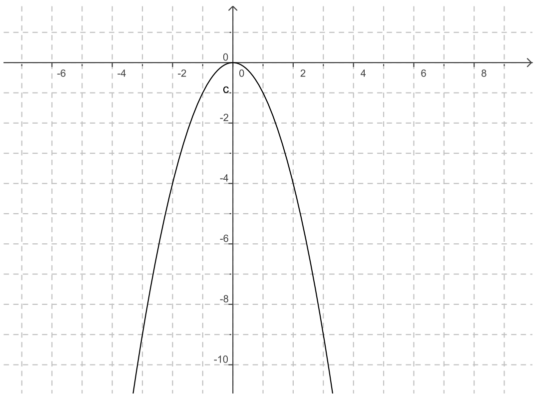
Como para esboçar a parábola correspondente a uma equação dada? Você já sabe que a equação $y = a\,x^2$ define uma parábola que tem vértice na origem e tem o eixo de coordenadas Oy, cuja equação é $x = 0$, como eixo de simetria. Veja alguns exemplos:



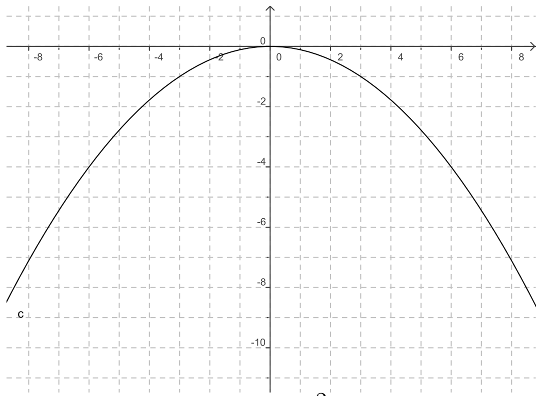
$y = 4x^2$



$y = \dfrac{x^2}{2}$



$y = -x^2$



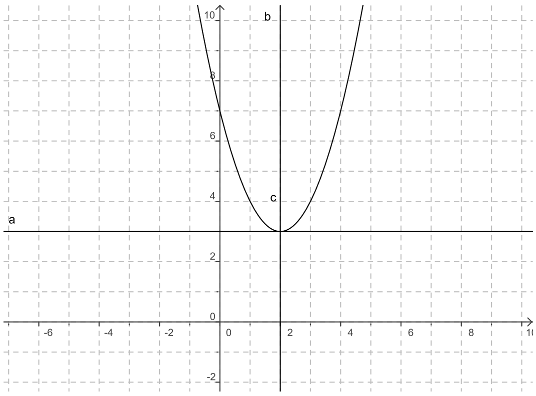
$y = -\dfrac{x^2}{9}$

Usando a recomposição de quadrados, podemos escrever qualquer equação $y = ax^2 + bx + c$ na forma $y - y_0 = a\,(x - x_0)^2$. Essa parábola terá vértice em (x_0, y_0) e eixo de simetria $x = x_0$. Em outras palavras, é uma *translação* de uma parábola como as que estão representadas anteriormente, levando a origem $(0, 0)$ para o ponto (x_0, y_0). Veja dois exemplos a seguir.

Comecemos com o exemplo $y = x^2 - 4x + 7$. Primeiro, aplicamos a álgebra:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 7 \\ y &= x^2 - 4x + 4 - 4 + 7 \\ y &= (x-2)^2 + 3 \\ y - 3 &= (x-2)^2 \end{aligned}$$

Esta parábola é uma translação da parábola definida por $y = x^2$. Essa translação é de três unidades para cima e duas unidades para a direita, levando a origem para o ponto (2, 3).

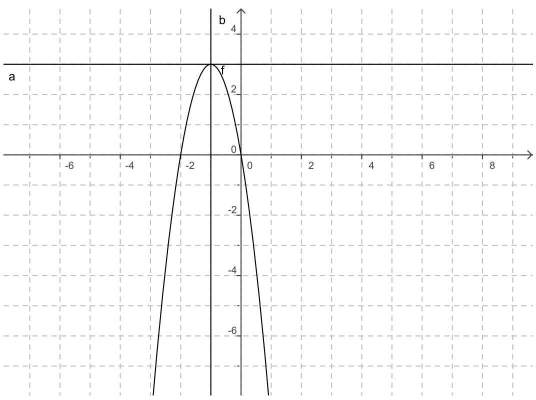


$$y = x^2 - 4x + 7 \quad \text{ou} \quad y - 3 = (x-2)^2$$

Veja, agora, o exemplo $y = -3x(x+2)$. Aplicando a reconstrução do quadrado:

$$\begin{aligned}
y &= -3(x^2 + 2x) \\
y &= -3(x^2 + 2x + 1 \ - 1) \\
y &= -3\big((x+1)^2 - 1\big) \\
y &= -3(x+1)^2 + 3 \\
y - 3 &= -3(x+1)^2
\end{aligned}$$

Esta parábola é uma translação da parábola definida por $y = -3x^2$. Essa translação é de três unidades para cima e uma unidade para a esquerda, levando $(0,0)$ para o ponto $(-1,\,3)$.



$$y = -3x^2 - 6x \quad \text{ou} \quad y - 3 = -3\,(x+1)^2$$

Você terá oportunidade de praticar este tipo de situação... Agora, ao trabalho!

1) Determine a equação da reta que é paralela a reta r e contém o ponto A.

1. $r: \; y = 2x - 3; \qquad A: \; (3, 0)$
2. $r: \; 2x - 3y + 2 = 0; \qquad A: \; (1, -2)$
3. $r: \; y = \dfrac{-2}{3}x + \dfrac{4}{3}; \qquad A: \; (0, -3)$
4. r contém $(2, 5)$ e $(-1, 3)$; $\qquad A: \; (1, -\frac{2}{3})$

---

2) Determine a equação da reta que é perpendicular à reta r e que contém o ponto A:

1. $r: y = -x + 4; \qquad A: \; (-3, 1)$
2. $r: 2x - 3y + 5 = 0; \qquad A: \; (-2, 2)$
3. $r: y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}; \qquad A: (0, -4)$
4. r contém os pontos $(-1, 3)$ e $(0, -2)$; $\qquad A: (-2, 1)$

---

3) Determine a equação da reta paralela à reta $y + x = 4$ e contém o ponto comum às retas $y = x$ e $y = 4$.

---

4) Determine a equação da reta perpendicular à reta $y = 4 - 2x$ e que contém o ponto comum às retas $y + x = 2$ e $2x - y = 1$.

---

5) Escreva as equações a seguir na forma $y - y_0 = a\,(x - x_0)^2$ e esboce os gráficos das correspondentes parábolas.

1) $y = x^2 - 6x + 5$

2) $y = 8 - x^2 - 2x$

3) $y = x^2 - 3x + 3$

4) $y = -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 2$

5) $y = 2x^2 - 12x + 10$

6) $y = -3x^2 - 6x$

---

6) Determine as constante a, b e c tais que a parábola $y = ax^2 + bx + c$ contenha os pontos $(6, 6)$, $(2, -2)$ e $(0, 0)$.

Semana 07 - Elipses! Hipérboles!

Você acha que é possível obter uma hipérbole usando uma lanterna? Como isso se explica??

Qual é a boa da semana?

Matemática tem tudo haver com problemas...

É melhor explicar essa frase. Uma das coisas que mais entusiasma um matemático é um bom problema. Há muita literatura sobre o assunto e as Olimpíadas Matemáticas, tão em moda, dão uma idéia disso. Alguns problemas são tão interessantes que chegam a ganhar nome. Vocês sabem qual é o problema dos Coelhos de Fibonacci?

Eu estava olhando um livro de problemas com um título muito atraente: *Problemas for Mathematicians, Young and Old*, escrito por Paul Halmos. Halmos é um matemático que dedica muito de sua energia para o ensino da Matemática. Ele ficou conhecido por escrever um livro sobre lógica que pode ser encontrado em português, chamado *Teoria Ingênua dos Conjuntos*.

Muito bem, voltando ao que eu estava falando, gostei muito do seguinte problema:

Quando um cirurgião opera, ele precisa proteger seu paciente de sofrer infecções e, ao mesmo tempo, proteger-se. Para isso ele usa luvas cirúrgicas esterilizadas.

Um cirurgião precisa operar três pacientes e, devido a uma terrível emergência, só dispõe de dois pares de luvas cirúrgicas esterilizadas. Será possível efetuar essa façanha sem contaminar nenhum dos pacientes e sem contaminar a si próprio?

Ganha um doce quem descobrir a resposta...

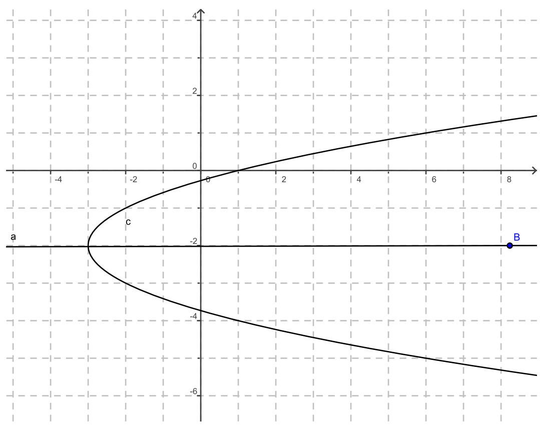
Comentários sobre os conteúdos das aulas - Elipses e Hipérboles

No semana anterior nós falamos de um tipo especial de equação do segundo grau com duas variáveis. Tratamos das equações da forma

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c.}$$

Essas equações definem tipos muito especiais de parábolas: aquelas que têm eixo de simetria vertical. Essas parábolas são de particular interesse no nosso curso pois correspondem aos gráficos das chamadas funções polinomiais de grau dois.

Seria interessante também observar que, se invertermos os papéis das duas variáveis, x e y, obtemos as parábolas cujos eixos de simetrias são horizontais. Por exemplo, a equação $x + 3 = (y + 2)^2$ que pode ser escrita como $x = y^2 + 4y + 1$ corresponde ao gráfico a seguir.



$$x = y^2 + 4y + 1 \quad \text{ou} \quad x + 3 = (y + 2)^2$$

Note que a reta horizontal $y = -2$ é o eixo de simetria da parábola, cujo vértice ocorre no ponto $(-3, -2)$. Veja novamente a equação:

$$x - (-3) \;=\; (y - (-2))^2.$$

Mas, esta semana devemos voltar nossas atenções para equações onde os termos quadrados aparecem nas duas variáveis, x e y.

Novamente, não consideraremos a situação mais geral possível de equações do segundo grau a duas variáveis, uma vez que não consideraremos equações que tenham o que chama-se *termo cruzado*: xy. Essas equações serão propriamente tratadas posteriormente, em outras disciplinas.

Assim, estaremos interessados na fórmula

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0,}$$

com $A^2 + B^2 \neq 0$, já que os casos parabólicos foram tratados anteriormente.

Você deve ser capaz de identificar a curva que essa equação define. Note, há possibilidade da equação definir o conjunto vazio. Sim, por exemplo, a equação

$$x^2 + y^2 = -1$$

não define curva alguma (pelo menos não no plano real $\mathbb{R}^2$).

Fora esse tipo de situação, há duas possibilidades:

1. O caso elíptico, se o produto $A \times B$ é positivo. As constantes A e B têm o mesmo sinal.

   Esse caso inclui as circunferências (nesses casos, $A = B$).

2. O caso hiperbólico, se o produto $A \times B$ for negativo. Neste caso, as constantes A e B têm sinais contrários.

Nos dois casos, você pode reescrever a equação em alguma das formas a seguir.

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1} \qquad \boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}$$

$$\boxed{-\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}$$

Em todos os casos, o centro da curva é o ponto (x_0, y_0). Veja o texto sobre translações na aula 12 ou mudanças de coordenadas.

No primeiro caso trata-se de uma elipse (ou circunferência no caso $a = b$. Os outros dois casos são hipérboles. A posição do sinal negativo indicará se os dois ramos das hipérboles são "horizontais" ou "verticais".

veja alguns exemplos:

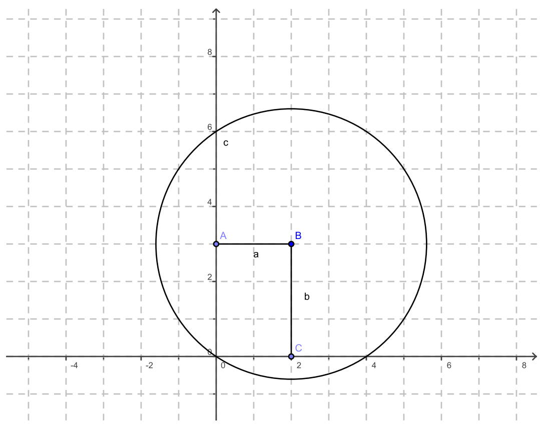
Exemplo 1: Identificar a cônica determinada pela equação $x^2 - 4x + y^2 - 6y = 0$ e esboçá-la.

Solução:

Recompondo os quadrados, temos:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 6y &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 \;+\; y^2 - 6y + 9 - 4 - 9 &= 0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 &= 13. \end{aligned}$$

Assim, a curva é a circunferência de raio $\sqrt{13}$ e centro no ponto $(2, 3)$. Em particular, $(0, 0)$ pertence a esta circunferência, como pode ser visto diretamente da equação $x^2 - 4x + y^2 - 6y = 0$.



$x^2 - 4x + y^2 - 6y = 0$ ou $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$

Exemplo 2: Identificar a cônica determinada pela equação $49x^2 + 294x + 16y^2 - 64y = 279$ e esboçá-la.

Solução:

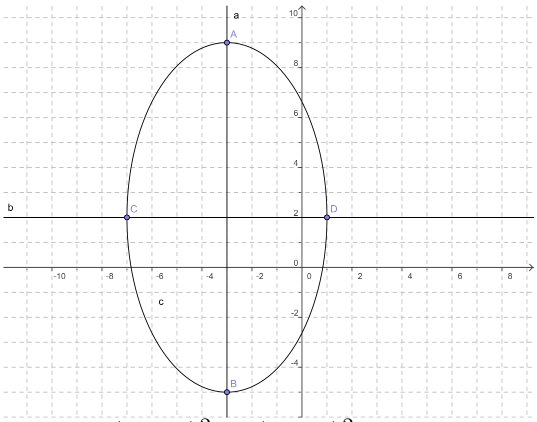
A equação parece ter um cara de poucos amigos mas, veja que $49 \times 16 = 784$. Assim, começamos escrevendo-a na forma

$$\frac{x^2}{16} + \frac{3x}{8} + \frac{y^2}{49} - \frac{4y}{49} + \;=\; \frac{279}{784}.$$

Agora, recompor os quadrados:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{16}+\frac{3x}{8}+\frac{y^2}{49}-\frac{4y}{49} &= \frac{279}{784}\\
\frac{x^2+6x}{16}+\frac{y^2-4y}{49} &= \frac{279}{784}\\
\frac{x^2+6x+9}{16}-\frac{9}{16}+\frac{y^2-4y+4}{49}-\frac{4}{49} &= \frac{279}{784}\\
\frac{x^2+6x+9}{16}+\frac{y^2-4y+4}{49} &= \frac{279}{784}+\frac{9}{16}+\frac{4}{49}\\
\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{49} &= 1.
\end{aligned}$$

A curva é uma elipse de braço menor $(= 4)$ na direção x e de braço maior $(= 7)$ na direção y, com centro no ponto $(-3, 2)$.



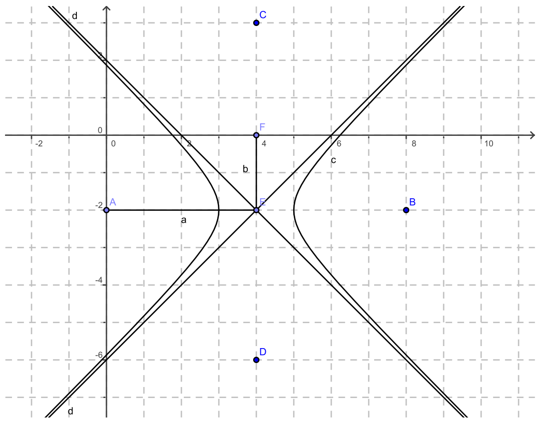
$$\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{49}=1$$

Exemplo 3: Identificar a cônica determinada pela equação $x^2-8x-y^2-4y = -11$ e esboçá-la.
Solução:

Aos quadrados:

$$\begin{aligned}
x^2-8x-y^2-4y &= -11\\
x^2-8x+16-y^2-4y-4 &= -11+16-4\\
x^2-8x+16-(y^2+4y+4) &= 1\\
(x-4)^2-(y+2)^2 &= 1
\end{aligned}$$

A curva é uma hipérbole com centro no ponto $(4, -2)$ e cujas assíntotas são as retas $x-4 = \pm(y+2)$.



$(x-4)^2-(y+2)^2=1$

Note que no esboço, além da hipérbole, desenhamos também as assíntotas (par de retas ortogonais, neste caso).

Exemplo 4: Identificar a cônica determinada pela equação $4x^2+24x-9y^2-72y=72$ e esboçá-la.

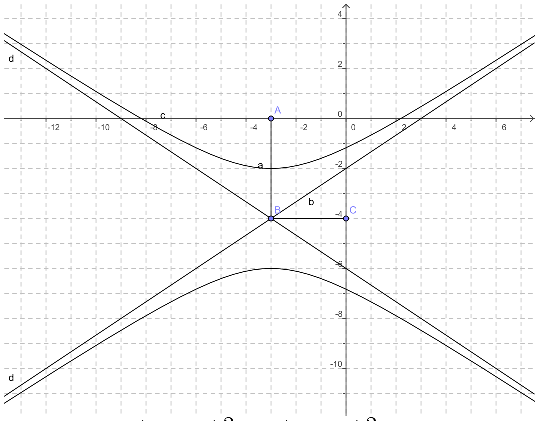
Solução:

Quadrados:

$$\begin{aligned}
4x^2+24x-9y^2-72y &= 72\\
4(x^2+6x)-9(y^2+8y) &= 72\\
4(x^2+6x+9)-36 \ -9(y^2+8y+16)+144 &= 1\\
4(x+3)^2-9(y+4)^2 &= 72-108\\
4(x+3)^2-9(y+4)^2 &= -36\\
\frac{-(x+3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{4} &= 1
\end{aligned}$$

Na última passagem, multiplicamos toda a equação por $-\frac{1}{36}$.

A curva é uma hipérbole com centro no ponto $(-3,-4)$ e cujas assíntotas são as retas $\dfrac{x+3}{3}=\pm\dfrac{y+4}{2}$. Para descobrir isso, basta substituir 1 por 0 na equação da hipérbole e resolvê-la.



$$\frac{-(x+3)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{4} = 1$$

Compare a posição dos sinais positivos e negativos nas equações das hipérboles e compare os seus esboços.

Agora é com você: ao trabalho!!!!

Atividades da Semana

Seção Nostalgia

---

1) Quais dos números a seguir são racionais?

a) $\dfrac{2-\pi}{3\,\pi}$;

b) $0,1715715715715715\ldots$;

c) $(1+\sqrt{2})^4$;

d) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}-\sqrt{80}}$;

e) $\sqrt{14641}$;

f) $0,1010010001000010000010000001\ldots$

---

2) Resolva a inequação a seguir.

$$\frac{x-1}{5x-2x^2+3} \leq 0$$

---

3) Resolva as equações a seguir.

a) $|2-x| = 7$;

b) $|x-1| - 4 = 5 - |x+3|$;

c) $2x^2 - 7x - 13 = 3x + 15$;

d) $\sqrt{2^x} = 64$;

---

4) Determine as equações das retas determinadas pelas condições a seguir.

1. Contém os pontos $(-1,\, 1)$ e $(-4,\, -2)$;

2. Tem coeficiente angular positivo, contém o ponto $(2,\, -1)$ e corta o eixo Oy a duas unidades de distância da origem;

3. Contém o ponto $(-1, 0)$ e é perpendicular à reta $2x - 3y + 5 = 0$.

---

5) Qual é o menor inteiro n tal que $n\sqrt{2} > \sqrt{19}$?

Seção novidades

---

6) Identifique cada uma das curvas determinadas pelas equações a seguir e esboce-as.

1) $y = x^2 - 3x - 4$
2) $y = 4x - 2x^2 - 3$
3) $x = y^2 - 2y - 1$
4) $x = -y^2 - 4y$
5) $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$
6) $x^2 + 9y^2 - 4x - 18y + 4 = 0$
7) $4x^2 + y^2 - 4y = 56$
8) $x^2 - y^2 - 2x - 2y = 1$
9) $y^2 - x^2 - 6x - 4y = 6$
10) $x^2 - 4y^2 + 4x = 0$

7) Uma bólido desloca-se numa trajetória cujo formato é uma parábola, partindo de seu vértice, o ponto $(1,\, -1)$, na direção noroeste. (Estamos considerando que o eixo Oy está na direção Sul-Norte e Ox na direção Oeste-Leste.) Sabe-se que o eixo de simetria da trajetória é uma reta na direção Sul-Norte e que a velocidade do bólido na direção Ox é constante 1 unidade por segundo. Após 1 segundo da partida, ele se encontra na posição $(2,\, 0)$. Determine a posição do bólido 3 segundos após a partida.

---

8) Um construtor de pistas de circuito fechado foi requisitado para construir uma pista no formato elíptico. Essa pista deve ocupar a maior área de um retngulo de 3 por 1 km.

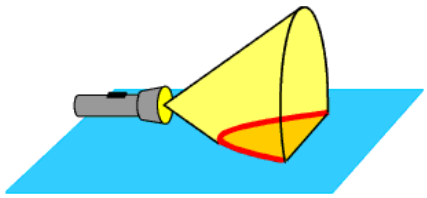
O construtor imaginou um sistema de coordenadas cuja origem ocupa (digamos) o canto inferior da esquerda e calculou a equação da elipse que determina a parte externa da pista. Qual equação ele encontrou?

Uma árvore ocupa a posição $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$. Sem levar em consideração questões de segurança, será necessário cortar a árvore para construir a pista ou não?

---

9) Determine a equação da hipérbole que contém o ponto (0, 1), cujas assíntotas têm coeficientes angulares $1/2$ e $-1/2$ e cujo centro é o ponto $(2, 1)$.

Ah! Estava me esquecendo ... Sim, teoricamente podemos obter uma hipérbole usando uma lanterna.



Semana 08 - Preparação para a AP01

Queridos alunos e alunas de Pré-Cálculo!

A minha expectativa é que a esta altura, você já fez o *dever de casa*, estudando as aulas indicadas para a prova e fazendo as atividades propostas.

Quero deixar aqui algumas observações sobre o momento que a disciplina está vivendo.

A aproximação da prova coloca uma dose extra de *stress* no sistema, evidenciando seus pontos fracos e é, portanto, um bom momento para aprender.

A educação a distância, mais do que todas as outras modalidades de ensino, depende da comunicação. Aqui, mais ainda do que em qualquer outra circunstância, vale a lapidar frase:

> "Quem tem boca, vai a Roma!"

A comunicação pode ser feita por vários canais e com diferentes pontos do sistema. Para você, aluno de PC, a comunicação imediata é com o tutor da disciplina, tutor coordenador e, posteriormente, autoridades administrativas do pólo.

Os EPs, editados a cada semana, levam a mensagem do coordenador da disciplina, apontando a sua perspectiva do conteúdo, partilhando a sua leitura do material didático, carregando a sua mensagem didático-pedagógica. Para que esse mecanismo ganhasse status de comunicação, estamos introduzindo a idéia das Atividades Eletrônicas, permitindo uma maior visibilidade dos alunos em relação ao coordenador.

Outro ponto crucial para se lembrar é que as tutorias presenciais não substituem as aulas. Eu sei que o modelo presencial exerce sobre todos nós uma impressão muito forte. Há quem acredite que a única maneira de *realmente* aprender alguma coisa é numa sala com um professor explicando. Não é fácil se despir de certos hábitos culturais, mas é preciso ganhar confiança e avançar. Tarefa para um semestre (ou dois): descobrir a melhor maneira de tirar bom proveito das tutorias...

Finalmente, gostaria de deixar claro que a coordenação desta disciplina se importa com o seu sucesso, se preocupa com você e busca todos os meios para lhe dar melhores condições de para progredir. Mas, acho próprio lembrar o famoso provérbio chinês:

"O mestre abre as portas, mas o aluno precisa entrar por si mesmo."

Agora, é com você!

1) Escreva o número racional $0.\overline{714285}$ na forma $\dfrac{p}{q}$, com $q \neq 0$.

---

2) Simplifique a expressão

$$\frac{\sqrt[3]{x} - 3}{x - 27}.$$

---

3) Racionalize $\dfrac{2}{\sqrt{3} - 1}$.

---

4) Determine as equações das retas paralela e perpendicular à reta de equação $2x + y = 4$ cuja interseção com o eixo Oy ocorre no ponto $(0, -2)$.

---

5) Identifique cada uma das curvas determinadas pelas equações a seguir e esboce-as.

1) $y^2 + x - 3y = 0$

2) $16x^2 + 32x + 9y^2 - 36y = 92$

3) $25x^2 - 200x - 16y^2 - 160y = 400$

Em busca da cônica perdida!

Aqui está um material extra de revisão sobre o tema das cônicas que tanto os atormenta, mas não devia...

Vamos fazer mais uma revisão de um tema que tem sido uma constante no rol das dificuldades da maioria: CÔNICAS....

Uma "cônica" é o conjunto dos pontos $(x,\, y)$ do plano que satisfazem a equação

$$a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f \;=\; 0,$$

para $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Neste momento estaremos considerando apenas as cônicas correspondentes às equações nas quais $b = 0$.

Veja alguns exemplos:

	a	b	c	d	e	f	Equação	Tipo
Fig. 1	1	0	1	0	0	-1	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	Circunferência
Fig. 2	1	0	0	0	1	-1	$x^2 + y - 1 = 0$	Parábola
Fig. 3	1	0	-1	0	0	-1	$x^2 - y^2 - 1 = 0$	Hipérbole
Fig. 4	9	0	4	0	0	-36	$9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$	Elipse

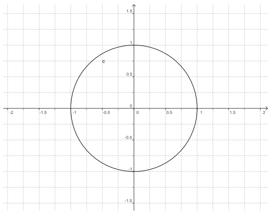


Fig. 1

$x^2 + y^2 = 1$

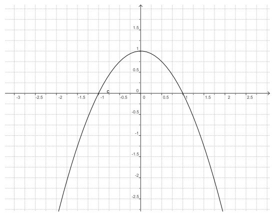


Fig. 2

$y = -x^2 + 1$

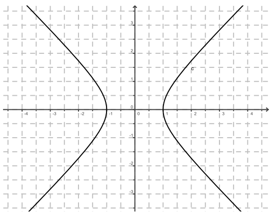


Fig. 3

$x^2 - y^2 = 1$

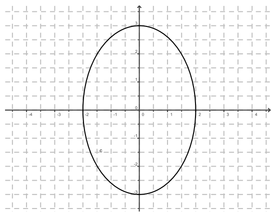


Fig. 4

$9x^2 + 4y^2 = 36$

Como identificar a cônica a partir da equação?

Primeiro passo: Você precisa se conscientizar de que isso é fácil!

Veja, quantos tipos de cônicas há?

Realmente, só há três tipos de curvas!!!

Curvas fechadas: Elipses (e circunferências, um tipo especial, na qual $a = c$)

Curvas abertas formadas por um único traço: parábolas

Curvas abertas formadas por dois traços simétricos: hipérboles

Portanto, precisamos identificar três tipos de equações. Tudo se concentra nos coeficientes a e c da equação

$$a\,x^2 + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f \;=\; 0,$$

uma vez que estamos considerando apenas as situações nas quais b, o coeficiente do termo xy, é nulo.

1) Se um dos coeficientes a ou c for igual a zero, a cônica é uma parábola – curva aberta de um só traço.

Se os dois coeficientes forem não nulos, há somente duas possibilidades:

2) Se um deles é positivo e o outro negativo (o produto ac é negativo), então a cônica é uma hipérbole – curva aberta com dois traços;

3) Se ambos são positivos ou ambos negativos (o produto ac é positivo), então a curva é fechada – elipse ou circunferência (a menos que a função não tenha solução ou tenha uma

única solução).

Resumindo, se soubermos que a equação $a\,x^2 + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f \ = \ 0$ é tal que a e c não são simultaneamente nulos e ela têm pelo menos duas soluções, então

$a \cdot c$	Tipo de Curva
Zero	Parábola
Positivo	Fechada (Elipse $a \neq c$ ou Circunferência $a = c$)
Negativo	Hipérbole

---

1) Usando o quadro acima, identifique o tipo de cônica correspondente à equação:

Equação	Tipo de Curva
$5x^2 - 13y^2 + 4x - 5y + 12 = 0$	
$x^2 + 12y^2 - 4x + 2y - 12 = 0$	
$x^2 + 3x + y - 4 = 0$	
$y^2 - 5x + 4y + 14 = 0$	

Equação	Tipo de Curva
$4x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 17 = 0$	
$4x^2 - 12y^2 + 20x + 5 = 0$	
$x^2 + 4y^2 + 2x + 12 = 0$	

Uma vez identificado o tipo de cônica, como esboçá-la?

Sabendo qual é o tipo de curva a esboçar, você se encontra em posição de vantagem. É preciso saber identificar os elementos que determinam precisamente cada uma das cônicas e aprender a "descobri-los" na equação. Estamos vivendo na interface da Álgebra e da Geometria. Façamos um resumo no caso em que a e c são não nulos.

Elipses

Para identificar uma elipse precisamos saber onde é o centro, dos comprimentos de seus braços e assim como as disposições dos mesmos em relação aos eixos, uma vez que não estamos considerando equações com termos do tipo $b\,xy$.

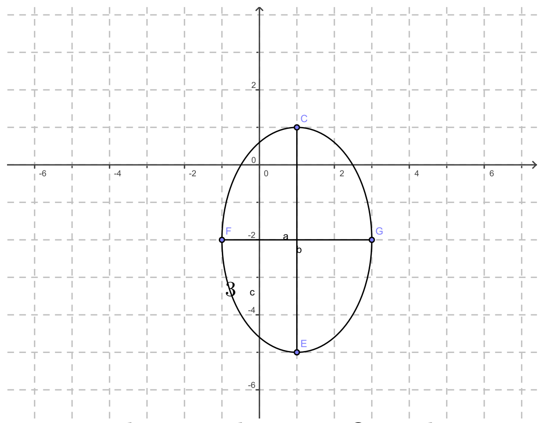
Podemos "ler"essas informações da equação, contanto que ela esteja na forma

$$\frac{(x-x_0)^2}{A^2}+\frac{(y-y_0)^2}{B^2}=1.$$

Essa elipse se tem centro no ponto $(x_0,\,y_0)$, o braço de comprimento A na direção paralela ao eixo Ox e o braço de comprimento B na direção paralela ao eixo Oy. (O que estamos chamando "braço" é a metade do diâmetro máximo da elipse, no caso do "braço maior" e é a metade do diâmetro mínimo, no caso do "braço menos").

Veja um exemplo:

$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1}$$



Elipse de centro em $(1,\,-2)$, braço menor 2 na direção do eixo Ox e braço maior 3 na direção do eixo Oy.

Hipérboles

No caso das hipérboles temos que identificar o centro, as assíntotas e os eixos de simetrias, assim como os pontos nos quais os ramos da hipérbole corta um dos eixos de simetria.

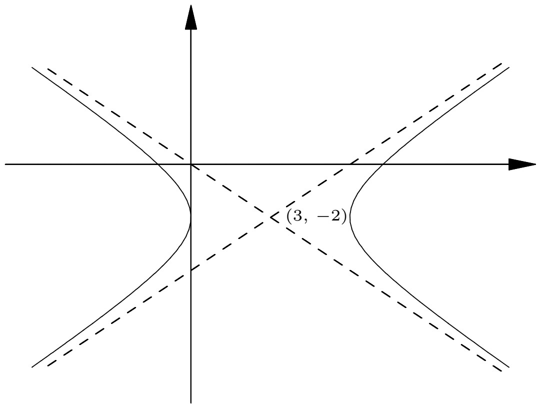
Podemos, novamente, "ler"essas informações da equação, contanto que ela esteja em uma das formas a seguir:

$$\frac{(x-x_0)^2}{A^2}-\frac{(y-y_0)^2}{B^2}=1 \quad \text{ou} \quad -\frac{(x-x_0)^2}{A^2}+\frac{(y-y_0)^2}{B^2}=1.$$

A hipérbole tem centro em $(x_0,\,y_0)$, as assíntotas são dadas pelas equações $(y-y_0)=\pm\,\frac{B}{A}\,(x-x_0)$ e ela cortará a reta $y=y_0$, paralela ao eixo Ox, nos pontos que estão a uma distância de A unidades do centro $(x_0,\, y_0)$, no primeiro caso, e reta $x = x_0$, paralela ao eixo Oy, nos pontos que estão a uma distância de B unidades do centro $(x_0,\, y_0)$, no segundo caso.

Veja um exemplo:

$$\boxed{\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1}$$



Hipérbole de centro em $(3, -2)$.

Tudo o que você deve fazer para dominar esse "know-how" passa por ser capaz de, dada uma equação na forma

$$a\,x^2 + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f \;=\; 0,$$

reescrevê-la na forma "canônica" da qual será fácil "ler" os elementos identificadores da cônica.

Reveja, também, o caso das parábolas.

---

2) Identifique e faça um esboço de cada uma das cônicas a seguir:

Equação	Tipo de Curva
$x^2 + 4y^2 = 4$	
$x^2 + 4y^2 - 4x = 0$	
$x^2 + 4y^2 - 8x = -12$	

Equação	Tipo de Curva
$x^2 - y^2 - 2x = 0$	
$x^2 - y^2 - 6x = -8$	
$x^2 - y^2 - 8x = -15$	

Semana 09 - Segundo Tempo

Queridos aluno ou aluna de Pré-Cálculo!

Passamos a primeira etapa do curso. Espero que seu esforço para dominar os conceitos apresentados tenha rendido bons frutos na AP1.

Mesmo que o resultado não seja o que você esperava, não desanime. Como disse o jogador de basebol e filósofo popular americano Babe Ruth:

O jogo só acaba quando termina!

Uma das armadilhas que você deve evitar é cair na boa vida por alguns dias, achando que, com a prova já passou, dá para dar uma *boa relaxada*...

Não precisa mais do que oito horas de sono bem dormidas para recuperar-se! Especialmente porque há muito trabalho por fazer.

Vamos aos comentários sobre os assuntos de estudo!

O que você NÃO pode deixar de saber sobre polinômios!!!

Polinômios estão para a Álgebra assim como os números estão para a Aritmética. Podemos somá-los, multiplicá-los e até dividi-los.

É preciso aprender a

Nomenclatura

Um polinômio (em uma variável x com coeficientes reais) é uma soma de *monômios*, termos da forma ax^r, onde $a \in \mathbb{R}$ é um número real e r um número natural ou zero.

Por exemplo, o polinômio

$$3x^3 - 4x^2 + \frac{2}{3}x - \pi$$

é formado pelos monômios $3x^3$, $-4x^2$, $\frac{2}{3}x$ e $-\pi$.

Realmente, é conveniente *ver* os números como casos especiais de polinômios.

Todo polinômio tem um grau, que é o maior expoente de algum monômio cujo coeficiente é não nulo.

No exemplo anterior, o grau é 3: $\text{grau}(3x^3 - 4x^2 + \frac{2}{3}x - \pi) = 3$.

Nessas condições, você deve ter notado que o polinômio 0 NÃO tem grau.

Igualdade de polinômios

Dois polinômios são iguais se os coeficientes dos monômios de mesmo grau são iguais.

Por exemplo, para que os polinômios $x^2 - 7x + 10$ e $(x-2)(x-a)$ sejam iguais, a constante a deve ser ...

Vejamos, $(x-2)(x-a) = x^2 - ax - 2x + 2a = x^2 - (2+a)zx + 2a$. Assim, para que a igualdade $x^2 - 7x + 10$ e $(x-2)(x-a)$ ocorra, é necessário que -7 seja igual a $-(2+a)$ e 10 seja igual a $2a$. Isso não nos dá muitas escolhas. Os polinômios $x^2 - 7x + 10$ e $(x-2)(x-a)$ são iguais se, e somente se, $a = 5$.

---

1) Determine os valores de a e de b para os quais a igualdade de polinômios

$$(bx-3)(x+a) \;=\; 2x^2 + 7x - 15$$

ocorra.

Operações com polinômios

Podemos operar com os polinômios, assim como podemos operar com números.

É fácil somar (assim como subtrair) e multiplicar e até dividir. Podemos usar algoritmos similares ao que usamos com números.

No entanto, é bom praticar, especialmente a divisão. Neste caso, chamo a atenção de você para a importante parte do conteúdo descrita no Módulo: o Algoritmo de Euclides, muito semelhante ao conhecido algoritmo para o dos números. Não deixe de ver essa parte com muito cuidado, na página 22.

Esse trecho está muito bem feito e é farto de exemplos.

---

2) Determine, usando a divisão euclidiana, o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ da divisão de $p(x)$ por $d(x)$:

a) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$ $\quad d(x) = x^2 - 4x + 1$
b) $p(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 14x - 15$ $\quad d(x) = x^2 + x - 3$

A relação da raiz α de um polinômio com o resto de sua divisão por $x - \alpha$

Aqui está um outro grande momento desse Módulo. Leia cuidadosamente as páginas 26 e 27, incluindo o Exemplo 17.

O resultado importante que está aí descrito diz que *o resto da divisão de $p(x)$ por $x - \alpha$ é $p(\alpha)$* e *$x - \alpha$ divide exatamente (com resto igual a zero) $p(x)$ se, e somente se, α é uma raiz de $p(x)$*

Não deixe de aprender a usar esse grande resultado.

---

3) Calcule o resto da divisão de $x^3 - 2x + 1$ por $x + 1$ sem efetuar a divisão!

---

4) Determine o valor de a tal que a divisão de $p(x) = x^5 + 3x + a$ por $d(x) = x - 2$ seja exata.

Dispositivo de Briot-Ruffini

A divisão de um polinômio $p(x)$ pelo binômio $x - \alpha$ é tão útil ao mesmo tempo que simples que é possível fazê-lo usando um algoritmo, denominado Dispositivo de Briott-Ruffini. Isso tudo é muito bem explicado e exemplificado nas páginas 35 a 43 e há muitos problemas propostos...

Semana 10 - O que é uma função?

Uma função é assim um *kit*, várias coisas juntas. Precisamos de dois conjuntos não vazios, A e B, um será o *domínio*, digamos A, o outro o *contradomínio*, o B, e uma terceira coisa – a lei de definição, que estabelece uma *relação* entre os elementos de A e B.

Em tempo, um relação entre um os conjuntos A e B é um subconjunto qualquer do *produto cartesiano* $A \times B$. Ou seja, uma relação entre A e B é uma coleção de *pares ordenados*, do tipo $(a,\, b)$, cuja primeira coordenada é elementos de A e a segunda coordenada é elemento de B. Como você está fazendo uma leitura ATENTA deste documento que está me dando trabalho escrever, deve ter notado que a palavra *ordem* está entrando nesta receita de maneira sutil. Ordem é importante, a relação *vai* de A para B, pares ordenados, essas coisas. Além disso, como é típico de matemáticos, deve ter observado que o retalho de frase "…que estabelece uma relação …" indica que nem toda relação é uma função. Realmente, para ser função precisamos da extra condição "CADA elemento de A está relacionado a um ÚNICO elemento de B".

Portanto, aí está, mais uma vez, a definição de função. A sua primeira tarefa será saber distinguir entre as relações aquelas que são funções. A segunda será usar todos os conhecimentos que adquirimos até agora para PRODUZIR exemplos de funções...

O que não pode deixar de ser visto nas aulas 31 e 32 (Material impresso)

Na página 13 é apresentada a definição de função. Leia este trecho com atenção. Para saber se você entendeu bem, tente resolver o exercício a seguir.

---

1) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^2 - 4$. Usando a notação apresentada no material didático, temos:

$$\boxed{\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2-4 \end{array}}$$

Indique o domínio desta função, seu contradomínio assim como sua lei de definição.

O gráfico desta função é dado pela figura a seguir. Determine a imagem desta função.

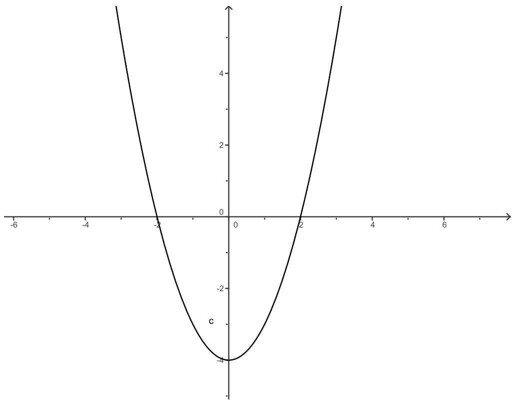


Gráfico da função $f(x) = x^2 - 4$.

Veja, também, a definição de Função real de variável real, na página 17. Essas são as funções que nos interessam principalmente.

Veja, também, na página 19, o conceito de gráfico de uma função. Esse tema deverá retornar na aula 32. Dê atenção especial ao exemplo 13, na página 26. Você verá como o importante tema das cônicas voltará a aparecer no contexto das funções.

---

2) Considere as três funções a seguir:

$$\boxed{\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x}{2}-2 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{rccl} g: & [-4,\, 8] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x}{2}-2 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{rccl} h: & [-4, +\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x}{2}-2 \end{array}}$$

Essas funções são iguais ou diferentes? O que elas têm em comum e o que as diferencia?

Faça um esboço de cada um de seus gráficos.

Dica: Lembre-se que a equação $y = \frac{x}{2} - 2$ determina uma reta que você sabe esboçar.

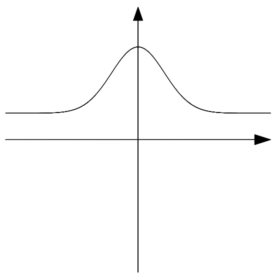
Aquele último detalhe que você não pode deixar de saber!!

A dica mais quente que você poderia encontrar nestas aulas, na minha opinião, é o Critério da vertical, que ensina como distinguir aquelas curvas do plano que são gráficos de funções reais de variável real daquelas que não são!! Fique atento ao domínio.

---

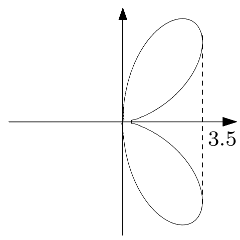
3) Indique qual de cada curva, considerada sobre o domínio indicado embaixo de cada uma delas, é o gráfico de uma função, justificando sua resposta com o critério da vertical.

a)



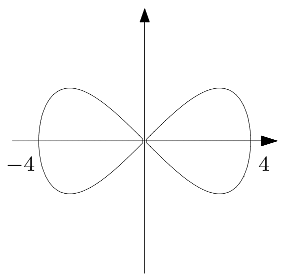
Domínio: $\mathbb{R}$

b)



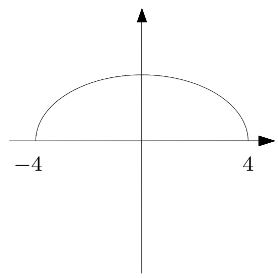
Domínio: $[0,\ 3.5]$

c)



Domínio: $[-4,\ 4]$

d)



Domínio: $[-4,\ 4]$

Semana 11 - Domínios, contradomínios e outras coisas

Esta semana você DEVE estar indo para as aulas 33 e 34. Nestas duas aulas há dois temas principais: domínios de funções (reais, de variável real) e como obter novas funções a partir de certas funções dadas: operações com funções.

Esses temas não são difíceis mas estão apresentados com bastante detalhes, sendo que você corre dois riscos: o primeiro é confundir o que é importante, fundamental, daquilo que pode esperar um pouco e que você conseguirá adquirir com o tempo. O segundo é o de achar que o assunto é por demais complicado: acreditem, não é.

Primeiro, a questão do domínio.

Você deve ter percebido do estudo do material didático e da leitura do EP anterior, que o tema domínio é importante. Veja, uma função só fica determinada se conhecermos o seu domínio. Se mudarmos o domínio de uma função, mesmo que seja por um único elemento, pronto, estamos lidando com OUTRA função.

Na página 36 do material impresso fica estabelecida a primeira importante regra: Quando apresentamos uma função real, de variável real por uma expressão sem mencionarmos EXPLICITAMENTE seu domínio, fica subentendido que este é o MAIOR subconjunto da reta onde a expressão assume valores reais. Além disso, o contradomínio está considerado o conjunto dos números reais.

Assim, quando dizemos: considere as funções $f(x) = \sqrt{x-5}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$, por exemplo, queremos dizer, considere as funções

$$\boxed{\begin{array}{llll} f: & [5, +\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x-5} \end{array}} \quad \text{e} \quad \boxed{\begin{array}{llll} g: & R - \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-2}. \end{array}}$$

Isto é, a equação $y = \sqrt{x-5}$ está bem definida, resultando números reais, sob a condição $x \geq 5$, e isso ocorre no intervalo $[5, +\infty)$. Já a expressão $y = \dfrac{1}{x-2}$ poderá ser calculada sempre que $x \neq 2$, o que ocorre em $\mathbb{R} - \{\,2\,\}$.

Assim, a função $f(x) = \sqrt{x-5}$ está sujeita à *restrição* $x - 5 \geq 0$, enquanto $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ está sujeita à *restrição* $x \neq 2$.

Primeira lição deste EP: Você deve ser capaz de, dada uma lei de definição de uma função, descobrir e escrever qual é a *restrição* a qual ela está submetida, se alguma houver, e determinar e expressar como união de intervalos o subconjunto que a tal restrição determina. Esse subconjunto da reta (ou dos números reais) é o domínio da função. Aqui estão dois exercícios para você praticar.

---

1) Determine os domínios das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x^2+3x-4}}$;

b) $g(x) = \dfrac{2-x}{2x^3+x^2-5x+2}$.

Em seguida, você aprende que é possível somar, subtrair, multiplicar funções reais de variável real. O resultado sempre é uma função real, mas é preciso estar de olho no domínio. A função resultante dessas operações estará definida na intersecção dos domínios das funções envolvidas nestas operações. Veja o Exemplo 25, na página 38.

2) Considere $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = \frac{1}{2x-1}$ e $h(x) = x^2 - 3x + 2$.

Determine o domínio das funções $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $r(x) = f(x) + g(x)$ e $s(x) = g(x) \cdot h(x)$, assim como as leis de definição das funções $r = f + g$ e $r = g \cdot h$.

Caso importante: gráfico da função $f + k$, onde $k \in \mathbb{R}$

Quando g é a soma de uma dada função f com a função constante k, os seus gráficos são muito parecidos. Um é uma translação vertical do outro. Assim, se $f(x) = x^2$, $g = f - 4$ é a função $g(x) = x^2 - 4$ e $h = f + 2$ é a função $h(x) = x^2 + 2$.

Os gráficos de g e h podem ser obtidos à partir do gráfico de f por meio de translações verticais, 4 unidades para baixo, no caso de g e 2 unidades para cima, no caso de h.

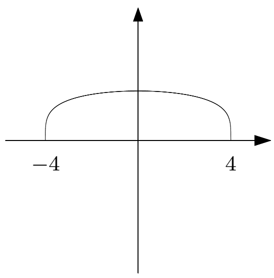
---

3) Esboce os gráficos das funções f, g e h, comparando-os. (Isto é, note como um pode ser obtido do outro por uma translação.) Aproveite a ocasião para lembrar-se das parábolas.

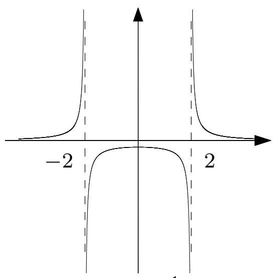
Mais coisas, agora da aula 34

Agora você lidará com funções do tipo $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ e $h(x) = \sqrt[n]{f(x)}$. O quadro da página 49, a primeira da aula 34 descreve como determinar os domínios de g e h. O maior cuidado deve ser tomado quando n é um número par.

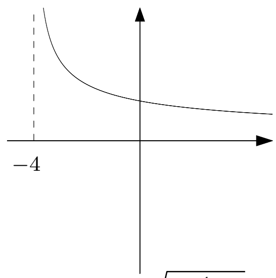
Veja, por exemplo, os domínios e os gráficos das seguintes funções:



$f(x) = \sqrt[4]{16 - x^2}$



$g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$



$h(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x+4}}$

A condição que estabelece o domínio de f é $16 - x^2 \geq 0$, pois estamos com um radical de expoente 4, número par. Esta inequação deve ser resolvida usando análise de sinais. Ela tem duas raízes: -4 e 4. Fora das raízes, mesmo sinal de a, entre as raízes, contrário sinal de a... a é o coeficiente líder, neste caso -1, que multiplica x^2. Assim, a solução é $\text{Dom}(f) = [-4,\, 4]$. Que pode ser visto claramente na figura. O gráfico é um arco sobre exatamente este intervalo. Às vezes, para salientar que estamos lidando com um intervalo fechado, colocamos duas bolinhas preenchidas nas extremidades do intervalo.

O domínio de g é determinado pela condição $x^2 - 4 \neq 0$, pois a expressão $x^2 - 4$ aparece no denominador. Este é fácil, o domínio é $\mathbb{R} - \{\,-2,\, 2\,\} = (-\infty,\, -2) \cup (2,\, +\infty)$. Os pontos -2 e 2 devem ser excluídos do domínio de g. No gráfico notamos isso devido às duas retas verticais tracejadas, que não intersectam o gráfico de g. Às vezes colocamos duas bolinhas vazias sobre esses pontos para salientar o fato de que eles não pertencem ao domínio da função.

O domínio de h é uma mistura dos casos anteriores. $x - 4$ deve ser diferente de zero, pois aparece no denominador, mas também deve ser positivo, devido à raiz quadrada. Assim, o domínio de h é o intervalo $(4,\, +\infty)$, definido pela condição $x - 4 > 0$.

Resumindo, temos:

$$\text{Dom}(f) = [-4,\, 4], \qquad \text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{\,-2,\, 2\,\} = (-\infty,\, -2) \cup (2,\, +\infty) \ \ e \ \ \text{Dom}(h) = (4,\, +\infty).$$

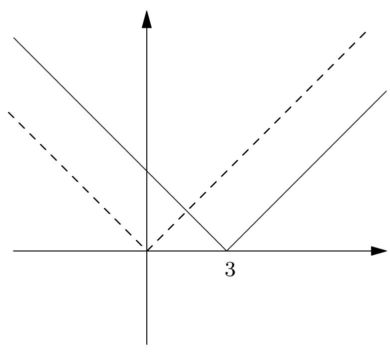
Atenção especial é dada à noção de funções racionais, que são aquelas da forma $h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde p e q são funções polinomiais. Essas funções são importantes e você terá bastante tempo para familiarizar-se com elas, inclusive no Cálculo I. Neste momento é importante saber reconhecer e desenhar o gráfico de algumas delas, como $f(x) = \frac{1}{x}$ e suas irmãs, do tipo $g(x) = \frac{1}{x-a}$, com a constante. Além delas, as translações verticais... Voltaremos a este tema em futuro próximo.

Aquilo que você não pode deixar de aprender ...

No final dessa aula é apresentado um tem muito útil: Deslocamento de gráficos na direção horizontal!

Esse tema faz parte de um rol de assuntos que estaremos estudado esses dias: como construir (ou obter) novas funções à partir de funções conhecidas. Assim, conhecendo a função módulo, $f(x) = |x|$, cujo gráfico é o V com bico na origem, podemos obter nova função de definição $g(x) = |x-3|$, por exemplo, ao substituirmos x por $x-3$. (Essa álgebra corresponde, geometricamente, à uma translação HORIZONTAL! O papel exercido pelo 0 na função f passa a ser exercido pelo 3 em g. Noe, $f(0) = 0$ e $g(3) = 0$. Assim, obtemos o gráfico de g fazendo um translação para a direita de três unidades do gráfico de f.

Veja os gráficos (de f aparece tracejado):



---

4) Esboce os gráficos das funções a seguir, obtidas do gráfico de $f(x) = |x|$ por meio de translações verticais e/ou horizontais, assim como eventuais simetrias em relação ao eixo Ox (gráfico de $-f$):

a) $g(x) = |x-2|$; b) $h(x) = |x+3|$; c) $j(x) = |x+3,5|$;
d) $k(x) = |x|-3$; e) $l(x) = |x|+2$; e) $m(x) = |x-2|-3$.

Para encerrar, uma seção nostalgia:

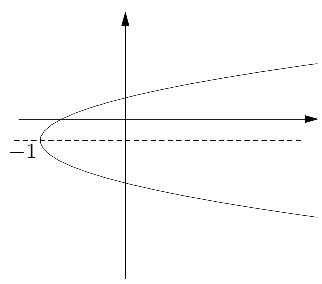
Gráficos de funções e cônicas (o retorno)

Você já percebeu que as funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, tem tudo haver com as parábolas. Além dessas, você deve, também, incorporar em seu repertório as funções do tipo $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = -\sqrt{x-3}$ e outras assim. Essas também estão relacionadas com as parábolas, mas aquelas cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo Ox. Assim, por exemplo, tomemos

$$f(x) = \sqrt{x+4}\ -1.$$

É claro que o domínio é determinado por $x+4 \geq 0$, que determina o intervalo $[-4, +\infty)$. Mas, e o gráfico? Bom, esse não é difícil, mas demanda trabalho. Vamos lá, primeiro o RASCUNHO:

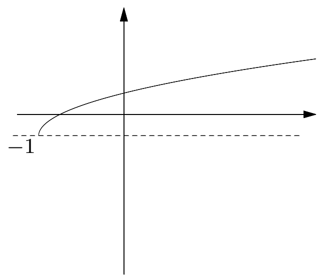
Começamos com a equação $y = \sqrt{x+4}\ -1$, que reescrevemos na forma $y+1 = \sqrt{x+4}$, que elevamos ao quadrado (assumindo que $x+4 \geq 0$) e obtemos $x = (y+1)^2 - 4$, a equação de uma parábola, cujo eixo de simetria é a reta $y = -1$ (informação obtida do pedaço $(y+1)^2$ na equação) e de vértice em $(-4, -1)$. Veja o esboço da parábola:



Pois bem, resta a pergunta: o que tem a função f a ver com a parábola? Realmente, a pergunta procede. É claro que o critério da vertical nos diz que a curva definida pela equação $x = (y+1)^2 - 4$ não é o gráfico de uma função.

Calma! Isso é só um rascunho. Note que os pares de pontos que satisfazem a equação $y = \sqrt{x+4}\ -1$ também satisfazem à equação $x = (y+1)^2 - 4$, mas não vice-versa. A vantagem desta última equação é que ela defina uma curva que é fácil (espero) de ser reconhecida: a parábola de eixo de simetria $y = -1$, vértice $(-4, -1)$ e tudo o mais.

A equação $y = \sqrt{x+4} \ - 1$ (que é a que nos interessa) é um dos *ramos* da parábola, no caso, o ramo superior. O outro ramo é definida pela equação $y = -\sqrt{x+4} \ - 1$. Assim o gráfico de $f(x) = \sqrt{x+4} \ - 1$, cujo domínio é $[-4, +\infty)$ é o ramo superior da parábola:



---

5) Esboce o gráfico da função $g(x) = -\sqrt{x+4} \ - 1$.

Semana 12 - O encontro das cônicas com as funções!

Lembre-se, estamos no processo de aprender a construir novas funções a partir de certas funções básicas – operações com funções. Até agora falamos de operações que lembram diretamente as operações com números, tais como soma e multiplicação.

Esta semana passaremos a lidar com uma operação completamente nova – exclusiva do universo das funções. Essa operação é a composição de funções. Esse assunto está exposto na aula 35. Veja a definição e as notações na página 64.

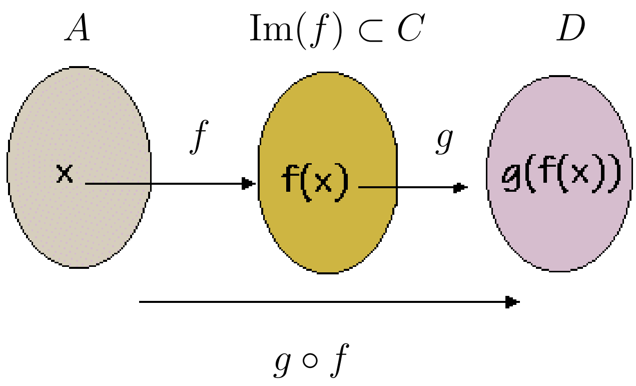
No que essa operação difere completamente das anteriores?

Dadas as funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : C \longrightarrow D$, para fazermos $g \circ f$ é necessário que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$.

Por que?

A resposta é a seguinte: como $g \circ f(x) = g(f(x))$, para realizarmos esta operação, é necessário que $f(x)$ seja um elemento do domínio de g, não é mesmo? Ora, os elementos da forma $f(x)$ são, precisamente, os elementos da imagem de f.

Veja, a composição de funções é uma operação realmente delicada. Note que escrevemos $g \circ f(x) = g(f(x))$, começando com g, pois escrevemos da esquerda para a direita. Na prática, a função que "atua" primeiro na variável x é a função f. Assim, se a condição $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$ é satisfeita, o domínio da composta $g \circ f$ é IGUAL ao domínio de f: $\mathrm{Dom}(g) \circ f = \mathrm{Dom}(f)$. Veja o diagrama:



Veja um exemplo.

Sejam f e g as funções descritas a seguir:

$$\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{rccc} g: & [\,0,+\infty\,) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}}$$

Para comparar com o que foi descrito anteriormente, note que $A = \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $C = \mathrm{Dom}(g) = [\,0, +\infty\,)$ e $D = \mathbb{R}$.

Apesar de B não estar contido no domínio da função g, podemos fazer a composição $g \circ f$, pois a condição $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$ é satisfeita, uma vez que

$$f(x) \;=\; x^2 + 1 \;\geq 1\; > 0,$$

qualquer que seja o valor de x.

Aqui está a função composta:

$$\boxed{\begin{array}{rccc} g\circ f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}}$$

Não é exatamente previsível como o gráfico da composta é obtido à partir dos gráficos das funções originais, a menos de casos especiais nos quais uma das funções envolvidas é muito simples.

A questão do gráfico da composta é tratada com bastante cuidado nas páginas 68 e seguintes da aula 35. Caso você encontre dificuldades em entender esta parte, não fique abatido nem perca tempo demais nisto, esse assunto virá com o tempo e maior amadurecimento. Não deixe de olhar a AE 11, no EP anterior...

De qualquer forma, no caso do exemplo anterior, você terá um boa surpresa. Qual será o gráfico da função composta $g \circ f$, definida em toda a reta real? Veja a equação:

$$y \;=\; f(x) \;=\; \sqrt{x^2+1}\,.$$

Para descobrir qual é o gráfico, vamos fazer um pouco de álgebra num rascunho:

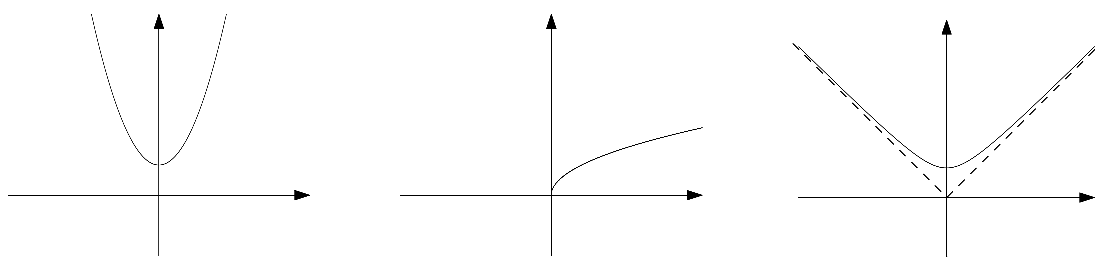
$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2+1} \\ y^2 &= x^2+1 \\ -\,x^2+y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Assim, podemos ver que as soluções da equação $y = \sqrt{x^2+1}$ também são soluções da equação $-x^2+y^2=1$, apesar da contra-positiva dessa afirmação não ser verdadeira. Mas, a informação que obtivemos é muito boa, pois a equação $-x^2+y^2=1$ define uma curva MUITO conhecida: uma hipérbole...

Realmente, se fizermos o percurso inverso, resolvendo a equação $-x^2+y^2=1$ na variável y, obtemos

$$\begin{aligned} -\,x^2+y^2 &= 1 \\ y^2 &= x^2+1 \\ y &= \pm\sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

e aí podemos observar o que está acontecendo. As equações $y=\sqrt{x^2+1}$ e $y=-\sqrt{x^2+1}$ definem os dois ramos da hipérbole. O gráfico da função $g\circ f$ é o ramo superior. Veja na figura a seguir os esboços das três funções, f, g e $f\circ g$:



$f(x)=x^2+1$ $\qquad$ $g(x)=\sqrt{x}$ $\qquad$ $g\circ f(x)=\sqrt{x^2+1}$

No casos em que a imagem de (f) não está contida no domínio de g, podemos usar o recurso de considerar f "restrita" apenas à parte do domínio relativa à qual sua imagem fique contida no domínio de g. É isso que está colocado na página 64 do módulo:

Se f e g são funções reais de variável real, então a composição $g \circ f : \text{Dom}(g \circ f) \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida apenas quando

$$\text{Dom}(g \circ f) \;=\; \{\, x \in \text{Dom}(f) \mid f(x) \in \text{Dom}(g)\,\} \neq \varnothing.$$

Veja o exemplo a seguir. Seja $f(x) = 4 - x$, definida em toda a reta real ($\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$) e $g(x) = -\sqrt{x}$ definida apenas no intervalo $[0, +\infty)$. Para determinarmos o domínio da composta $g \circ f$ (caso ele não seja vazio) usamos a expressão

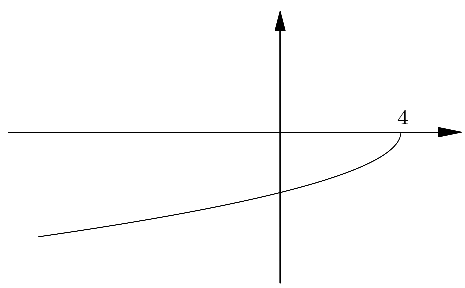
$$g \circ f(x) \;=\; g(f(x)) \;=\; -\sqrt{f(x)} \;=\; -\sqrt{4-x}$$

que está bem definida apenas se $4 - x \geq 0$. Assim, o domínio de $g \circ f$ é $(-\infty, 4]$.

Para descobrir qual é o gráfico de $g \circ f$ podemos tentar o truque usando no exemplo anterior:

$$\begin{aligned} y &= -\sqrt{4-x} \\ y^2 &= 4 - x \\ x + y^2 &= 4 \\ x &= -y^2 + 4 \end{aligned}$$

A equação $x = 4 - y^2$ define uma parábola de eixo de simetria vertical e, portanto, NÃO é o gráfico de uma função. Mas, o ramo inferior (neste caso, devido ao sinal de menos,) é o gráfico da composta.



---

1) Em cada caso a seguir, determine as leis de definição da função $g \circ f$, seu domínio e esboce o seu gráfico.

$f(x)$	$g(x)$
$f(x) = 1 - x^2$	$g(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = x + 6$	$g(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = x^2 + 4$	$g(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2}$

Mais coisas, agora da aula 36

A introdução da composição de funções nos permite um novo conceito, muito importante: a noção de função inversa.

Esse assunto não é difícil mas é delicado. A inversa de uma função faz o trabalho "inverso" da função original. Assim, a inversão de funções está para a composição assim como inverter números está para o produto. Essa é a motivação para a nomenclatura.

Ora, sabemos que todo número real (diferente de zero) é inversível. Isso é, o critério para inverter um número é verificar se esse número é não nulo. Fácil. Não é tão fácil assim quando queremos inverter funções. Mas, o critério há. A função deve ser bijetora.

Uma função é bijetora se for injetora e sobrejetora. Ser sobrejetora é simples, basta que consideremos sua imagem como contra-domínio. O problema todo é ser injetora. Lei cmo atenção a apresentação deste tema à partir da página 78, com a definição 11.

Como fazer, na prática, para "inverter" uma função f?

Podemos refrasear essa pergunta assim: dada a lei de definição $y = f(x)$ de uma certa função, como devemos proceder para determinar a lei de definição de sua inversa f^{-1}? Essa é uma questão de resposta simples. Basta "resolver"a equação $y = f(x)$, em x. Vamos a um exemplo.

Queremos determinar o domínio, a imagem e a inversa da função

$$f(x) \;=\; \frac{2x-3}{4-x}$$

Primeiro, $\mathrm{Dom}(f)$. A condição que determina o domínio de f é $4 - x \neq 0$. Assim, $\mathrm{Dom}(f) \;=\; \mathbb{R} - \{4\}$.

Agora, o cálculo da inversa. Vamos resolver a equação $y = \frac{2x-3}{4-x}$ em x. Vamos lá:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x-3}{4-x} \\ y(4-x) &= 2x-3 \\ 4y - xy - 2x &= -3 \\ -xy - 2x &= -4y - 3 \\ x(y+2) &= 4y+3 \\ x &= \frac{4y+3}{y+2} \end{aligned}$$

---

2) Todas as funções a seguir são inversíveis. Em cada caso, determine a função inversa, dando o domínio, o contra-domínio e a lei de definição.

a) $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2x-3 \end{array}}$

b) $\boxed{\begin{array}{rccc} g: & [-4, +\infty) & \longrightarrow & [-2, +\infty) \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x+4} - 2 \end{array}}$

c) $\boxed{\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} - \{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{-2\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{7-2x}{x-3} \end{array}}$

d) $\boxed{\begin{array}{rccc} j: & [3, 5] & \longrightarrow & [4, 8] \\ & x & \longmapsto & (x-3)^2 + 4 \end{array}}$

O que nos diz a geometria sobre os gráficos da função e de sua inversa?

É muito fácil identificar se uma função é inversível ou não pelo seu gráfico. Isso se deve ao fato de que as funções injetoras são aquelas cujos gráficos são intersectados uma única vez pelas retas horizontais. Assim, a função $f(x) = x^2$, definida na reta toda, não é inversível pois seu gráfico é uma parábola e as retas horizontais superiores ao eixo Ox cortam seu gráfico em dois pontos.

Já a função $g(x) = 2x + 4$, também definida em $\mathbb{R}$, cujo gráfico é uma reta, é intersectada uma única vez por cada uma das retas horizontais, é inversível.

Além disso, quando uma função é inversível, seu gráfico e o gráfico de sua função inversa são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes 1 e 3, a reta $y = x$.

Veja o exemplo a seguir, onde apresentamos os gráficos de f e de f^{-1} em figuras separadas e, depois, sobrepostos.

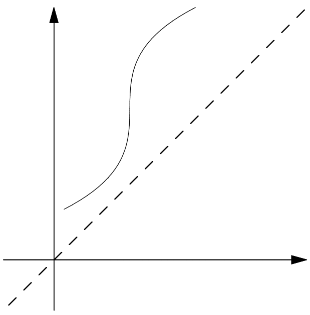


Gráfico de f

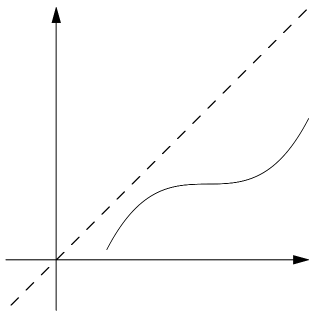
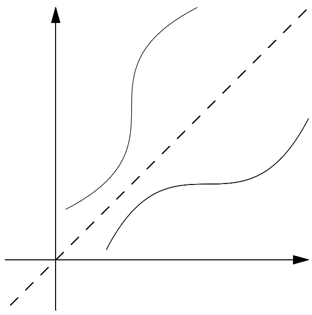


Gráfico de f^{-1}



Gráficos de f e f^{-1}

---

3) Identifique nos gráficos a seguir quais são os pares de funções com suas respectivas inversas.

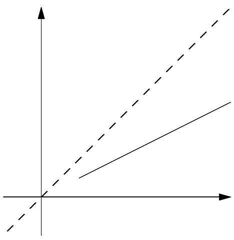


Gráfico de f

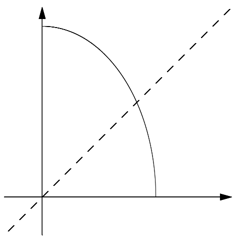


Gráfico de g

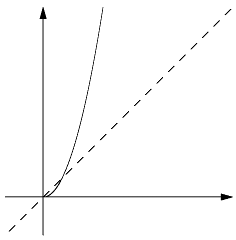


Gráfico de h

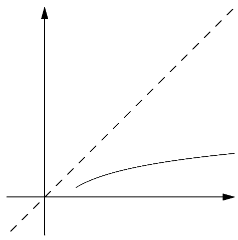


Gráfico de j

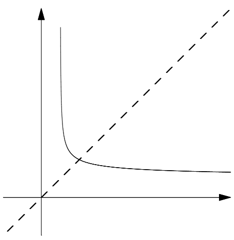


Gráfico de k

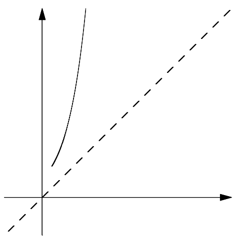


Gráfico de l

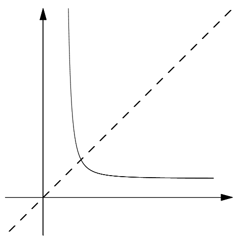


Gráfico de t

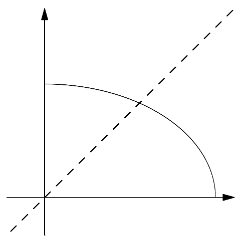


Gráfico de u

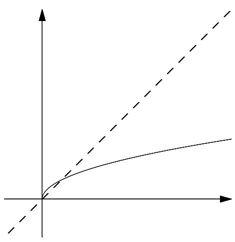


Gráfico de v

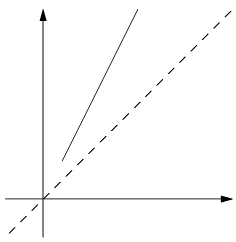


Gráfico de w

Semana 13 - Funções Trigonométricas!!

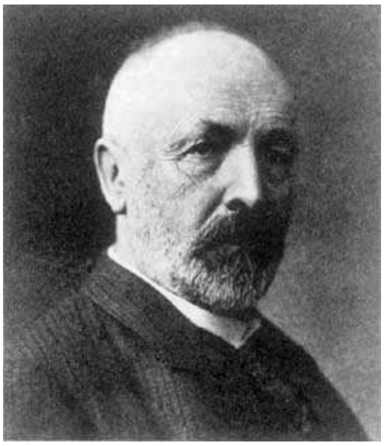
Esta semana você deve começar a estudar as funções trigonométricas, que são funções derivadas da trigonometria, ciência muito antiga ...

Neste EP você encontrará várias dicas e sugestões que poderão ser úteis na sua caminhada por estas veredas. Lembre-se que você não fará um estudo detalhado de trigonometria, mas aprenderá os pontos principais que permitirão o entendimento deste tema sob a perspectiva do Pré-Cálculo, que a perspectiva das funções.

A Atividade Eletrônica desta semana também trará um material que poderá ser útil nessa tarefa.

Boa semana!

Funções trigonométricas são muito antigas e desempenham papel de destaque na Matemática. Ninguém que estude Matemática pode se dar ao luxo de não gostar delas ou de não querer estudá-las. O grande Georg Cantor, quando teve suas idéias revolucionárias (calma, idéias matemáticas...), estava lidando com elas. Uma de suas primeiras publicações foi chamada *Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz*



Mas, antes de começarmos com as funções trigonométricas, vamos lembrar, rapidamente, o que está rolando nestes últimos dias no nosso curso.

Funções – domínios

Esse tema é importante. Veja a primeira questão da AD2, por exemplo.

Você deve saber determinar e expressar os domínios das funções (usando intervalos, por exemplo).

Como estão as suas habilidades? Experimente-as nesses casos (simples) a seguir:

1) Quais são os domínios das seguintes funções?

a) $f(x) = \dfrac{1}{11x - 12 - 2x^2}$; b) $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$;

c) $h(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$.

Gráficos de funções simples - 1a. parte

Você sabe esboçar o gráfico de uma função que pode ser obtido do gráfico de alguma função conhecida através de translações (horizontais ou verticais)?

O que acontece se trocarmos x por $-x$? Sabendo o gráfico de $y = f(x)$, como fica o gráfico de $y = -f(x)$ ou $y = f(-x)$?

Veja alguns exemplos:

2) Usando os gráficos das funções $y = |x|$, $y = \dfrac{1}{x}$ e $y = \sqrt{x}$, esboce os gráficos das funções a seguir:

a) $f(x) = |x+2| - 3$; b) $g(x) = \dfrac{1}{x-3} + 4$;

c) $h(x) = \sqrt{x-1} + 2$; d) $j(x) = \sqrt{-x}$;

e) $k(x) = \sqrt{4-x} + 2$ f) $l(x) = 4 - |x-3|$.

Gráficos de funções simples - 2a. parte

Há muitas funções cujos gráficos são *trechos* ou *ramos* de cônicas. Você precisa saber esboçá-los.

3) Esboce os gráficos das funções a seguir:

a) $f(x) = \sqrt{10x - x^2}$; b) $g(x) = -\dfrac{\sqrt{4x^2+36}}{3}$.

Funções pares e funções ímpares

Um tema que ainda não foi explorado nessas páginas mas é apresentado muito bem no material didático é a questão das funções pares e das funções ímpares.

Primeiro, essas funções só estão definidas em domínios simétricos. Um subconjunto A da reta é *simétrico* se, para cada $x \in A$, o seu simétrico, $-x$, também é elemento de A.

Por exemplo, se A é um conjunto simétrico e $3 \in A$, então sabemos que $-3 \in A$. Ou ainda, se $-\sqrt{5} \in A$, então $\sqrt{5} \in A$.

A terminologia *conjunto simétrico* é muito própria, pois se A é simétrico, seus elementos se dispõem em torno do zero de maneira simétrica. Veja alguns exemplos de subconjuntos simétricos da reta:

- $(-2,\, 2)$;
- $[-2\pi,\, 2\pi]$;
- $(-5,\, -3) \cup (-2,\, 2) \cup (3,\, 5)$;
- $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Há duas maneiras de identificar se uma função é par (respectivamente, ímpar).

Analiticamente

Podemos verificar se uma função é par (ou ímpar) diretamente da sua lei de definição (contando que já verificamos que seu domínio é simétrico). A função f, cujo domínio é o subconjunto simétrico A da reta, é uma *função par* se, $\forall x \in A$,

$$f(-x) = f(-x)$$

e é uma *função ímpar* se, $\forall x \in A$,

$$f(-x) = -\,f(x).$$

Assim, podemos dizer que $f(x) = \dfrac{x^4}{10} - x^2$, definida na reta toda (ela mesma um conjunto simétrico), pois

$$f(-x) \;=\; \frac{(-x)^4}{10} - (-x)^2 \;=\; \frac{x^4}{10} - x^2 \;=\; f(x)$$

ou que a função $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, definida no conjunto simétrico $[-1,\, 1]$ (por que?) é par pois

$$g(-x) \;=\; \sqrt{1-(-x)^2} \;=\; \sqrt{1-x^2} \;=\; g(x).$$

Já a função $h(x) = 3x - x^3$ é ímpar, pois

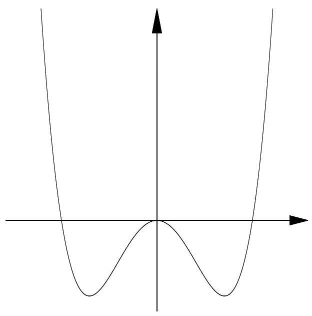
$$h(-x) \;=\; 3(-x) - (-x)^3 \;=\; -3x - (-x^3) \;=\; -3x + x^3 \;=\; -\,(3x - x^3) \;=\; -\,h(x).$$

Então, esse teste direto pela lei de definição é uma abordagem analítica.

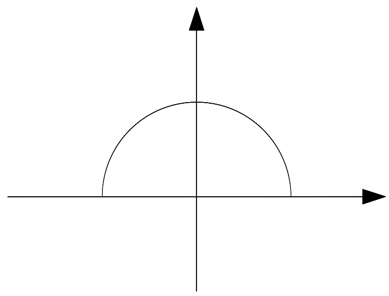
Geometricamente

Quando a função é dada pelo seu gráfico, podemos verificar se ela é par no caso de seu gráfico ser simétrico em relação ao eixo Oy (mole), ou se ela é ímpar, no caso de seu gráfico ser simétrico em relação à origem (nesse caso é preciso um pouco mais de cuidado e jeito, pois nesse caso os pontos $(x, f(x))$ e $(-x, f(-x))$ devem estar sobre a reta que contém a origem).

Aqui estão os gráficos das funções pares:

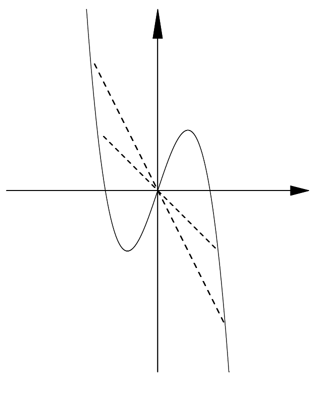


$f(x) = \dfrac{x^4}{10} - x^2$



$g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Eis o gráfico da função ímpar, com as retas tracejadas indicando a simetria em relação à origem:



$h(x) = 3x - x^3$

O que há de interessante a respeito desse tipo de função?

Parece um pouco de exagero o interesse dos matemáticos a respeito desses tipos de funções, as pares e as ímpares, uma vez que a maioria das funções não é uma coisa nem outra. Por exemplo, $f(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 + x^2 - 5x + 8$, não é nem par, nem ímpar, ou $g(x) = x^3 + |x|$.

O que é *realmente* interessante a respeito dessas idéias é que *toda* função f, definida num domínio simétrico A, pode ser escrita, *de maneira única*, como a soma de uma função par com uma função ímpar.

Isso é o que em Matemática nós chamamos de uma *decomposição* e, nesse caso, uma decomposição única. Isto quer dizer que o universo das funções definidas num domínio simétrico se decompõem em dois sub-universos muito especiais, o universo das funções ímpares e o das funções pares.

Observe que, a única função definida no domínio simétrico A que é a um só tempo par *e* ímpar é a função constante igual a zero.

Como podemos *provar* tal coisa?

Bom, se tudo que fosse interessante pudesse ser provado de maneira tão fácil, nós, matemáticos, estaríamos sem empregos...

Mas, nesse caso é fácil. Veja nos exemplos acima, as duas funções estão definidas em toda a reta real.

No caso do polinômio, basta separar as parcelas de potências pares das parcelas de potências ímpares (mole!):

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 + x^2 - 5x + 8 = (-3x^4 + x^2 + 8) + (x^5 + 7x^3 - 5x) = f_p(x) + f_i(x).$$

No outro caso, $g(x) = x^3 + |x|$, também dá para ver qual é a parcela par e qual é a parcela ímpar:

$$g(x) = |x| \ + \ x^3 = g_p(x) \ + \ g_i(x).$$

Em geral, para obter essas funções parcelas, somamos e subtraímos da própria função a composição dela com a função $y = -x$ e dividimos por dois:

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{e} \qquad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

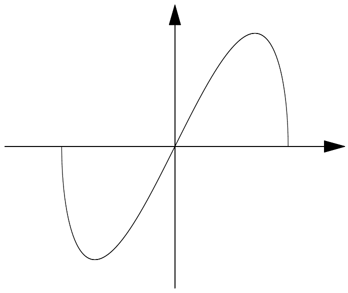
Só para ter certeza que você entendeu ...

4) Nas funções a seguir, determinas as que são pares, as que são ímpares e, nos casos em que a função não for par ou ímpar, escreva-a como uma soma de uma função par com uma função ímpar (ufa!).

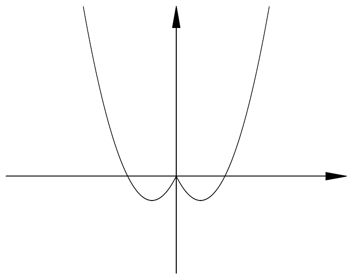
a) $f(x) = x^2 - 2|x|$; b) $g(x) = x\sqrt{1 - x^2} + 4$;

c) $h(x) = \dfrac{x}{1 + x^2} + 4 - \dfrac{x^2}{4}$; d) $j(x) = 3x - x^3 + \sqrt{1 + x^2}$.

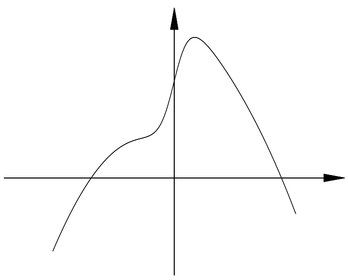
5) Quais dos gráficos a seguir são gráficos de funções pares? e quais são gráficos de funções ímpares?



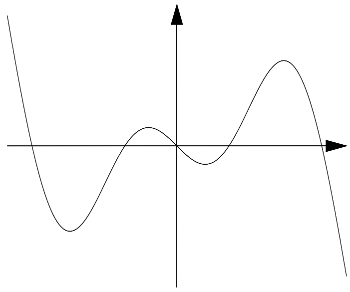
a)



b)



c)



d)

O que mais há para saber?

A coisa com a qual você deve estar bem ocupado nesses dias é composição de funções e, na esteira dessa operação super-importante, a noção de função inversa. Esse assunto foi abordado no EP 12.

Funções trigonométricas - a *bola da vez...*

Por que há tanta dificuldade em lidar com as funções trigonométricas?

As funções trigonométricas são, geralmente, introduzidas após algum tempo de estudo de funções do tipo polinomiais (ou quase). Esse é o nosso caso.

A nossa principal fonte de exemplos são as funções lineares (ou afim, do tipo $f(x) = mb+b$), quadráticas ($f(x) = ax^2 + bx + c$) e assim por diante.

A dificuldade que a maioria das pessoas sente ao passar a lidar com as funções trigonométricas decorre das profundas diferenças que essas (novas funções) apresentam das anteriores. Vejamos algumas delas...

- Por mais complicada que seja uma função polinomial (ou quase), podemos *calculá-la* diretamente em essencialmente qualquer ponto que quisermos. Por exemplo, se $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 7}$ (algo nada amigável, *a priori*) e quisermos calcular $f(10)$, basta colocar a informação na *máquina* e calculá-la: $f(10) = \sqrt{100 - 50 + 7} = \sqrt{57}$, um número um pouco maior do que 7, uma vez que $7^2 = 49$...

  Por mais impreciso que isso seja, é o suficiente para nos sentirmos mais a vontade com a tal função.

  Nada disso ocorre quando lidamos com, por exemplo, $g(x) = \text{sen}(2x) + \cos(x)$. Podemos calcular o valor dessa função em alguns pontos especiais, múltiplos do famoso π que indica o ângulo de 180°. Convenhamos, é uma mudança e tanto.

- As funções polinomiais admitem um número finito de raízes e, quando o valor absoluto da variável x assume valores muito grandes, o valor da função comporta-se de maneira semelhante.

  As funções trigonométricas mais conhecidas, $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ são funções *limitadas*. Mais ainda, são funções limitadas: $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|\text{sen}(x)| \leq 1 \qquad \text{e} \qquad |\cos(x)| \leq 1.$$

- Outra propriedade que diferencia as trigonométricas das tradicionais funções é o fato de elas serem *periódicas*. Isso pode causar coisas tais como:

  A equação $\text{sen}(x) = 2$ não tem solução, enquanto a equação $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ tem uma *infinidade* de soluções.

Convenhamos, já é esquisitice de sobra...

O que podemos fazer para superar as dificuldades e conviver com essas interessantes funções?

Primeiro, você deve entender que essa funções são importantes, que elas nos darão importantes informações e com um certo *jeitinho*, elas não são tão misteriosas assim.

Vamos nos concentrar nas funções seno e cosseno, por enquanto.

Primeiro, você deve passar a pensar em termos de radianos e não em ângulos. Isso é fácil. Basta lembrar que π radianos é o mesmo que 180° (cento e oitenta graus). Por exemplo, no lugar de 45°, você deve dizer $\dfrac{180^\circ}{4} = \dfrac{\pi}{4}$.

É fundamental saber calcular o seno e o cosseno dos chamados ângulos nobres... Esse são, no primeiro quadrante, 0, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{3}$ e $\dfrac{\pi}{2}$. Não é tão difícil assim. Pense em construir uma tabela, em três etapas.

Na primeira, alinhe os ângulos, a partir do zero, na primeira linha, e complete as duas linhas de baixo com os número 0, 1, 2, 3 e 4, em ordens crescente e depois decrescente.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\text{sen}(x)$	0	1	2	3	4
$\cos(x)$	4	3	2	1	0

A tabela ainda não está pronta. A segunda etapa consiste extrair a raiz quadrada de cada número, lembrando que $\sqrt{0} = 0$ e $\sqrt{1} = 1$:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\text{sen}(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
$\cos(x)$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0

Agora, para completar a tabela, basta dividir todos os número po dois:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\text{sen}(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Eu sei, isso é macete, mas funciona...

O que mais?

Bom, tem muito mais, mas para começar, é preciso tatuar no braço a fórmula fundamental da trigonometria: $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Veja, cuidado com a notação, queremos dizer $(\text{sen}x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, para todos os valores atribuídos à x. É por isso que chamamos essa equação de *identidade trigonométrica fundamental.*

Veja um exemplo:

$$\text{sen}^2(\pi/3) + \cos^2(\pi/3) \;=\; (\sqrt{3}/2)^2 + (1/2)^2 \;=\; \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \;=\; 1.$$

Assim, se soubermos que $\text{sen}(\alpha) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ e que $\cos(\alpha)$ é um número positivo, podemos calculá-lo:

$$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1 \quad\Longrightarrow\quad \cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha.$$

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha &= 1 - \text{sen}^2\alpha \\
\cos^2\alpha &= 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1 - \frac{5}{25} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \\
\cos\alpha &= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}
\end{aligned}$$

Essa identidade trigonométrica decorre da própria definição das funções seno e cosseno, usando o chamado círculo trigonométrico e do Teorema de Pitágora. Isto é, o seno e o cosseno de um dado ângulo são os comprimentos dos catetos (pelo menos quando esquecemos dos sinais) de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 1.

Entender essa abordagem (do círculo trigonométrico) é crucial para poder entender a propriedade de periodicidade dessas funções, assim como passar a ser capaz de *propagar* as informações conhecidas sobre os ângulos do primeiro quadrante (entre 0 e $\pi/2$) para outros ângulos nos outros quadrantes.

Espero que a atividade eletrônica dessa semana lhe ajude com isso.

Quais erros típicos você NÃO pode cometer?

Há uma série de erros folclóricos que alunos desinformados cometem e que você NÂO pode cometer. Aqui estão os mais escandalosos:

- É comum o aluno *desassociar* a parte da notação que indica a função trigonométrica (sen ou cos, por exemplo) do seu *argumento.* Assim o alunos responde algo como $f(x) = \cos$. Terrível!! Deve sempre ficar claro qual é o argumento ao qual a função trigonométrica está atuando. É por isso que, se for necessário para evitar dúvida, escrevemos $f(x) = \cos(x)$ no lugar de $f(x) = \cos x$, para indicar que estamos lidando com o cosseno de x...

Há situações onde o uso de parênteses é ainda mais urgente, como $\text{sen}(2x + 1)$, para diferenciar de $\text{sen}2x + 1$ que pode estar querendo dizer $1 + \text{sen}2x$.

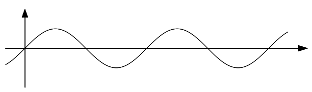
• Reforçando o que foi dito no item anterior, devemos lidar com as notações da forma mais clara possível. É misterioso por que isso ocorre, mas várias pessoas lidam com as funções trigonométricas como se elas fossem *algébricas*. Coisas assim como, confundir $\text{sen}(x + y)$ com $\text{sen}x \ + \text{sen}y$, ou ainda, confundir $\text{sen}x + \cos x$ com algo inexistente: $(\text{sen} + \cos \ x)$.

• Outro ainda freqüente é achar que as constantes possa transitar à vontade no mundo trigonométrico, coisa que está longe de acontecer. Não vá fazer algo assim como confundir $\text{sen}2x$ com $2\,\text{sen}x$, pensando que sen nessa fórmula funciona como uma espécie de parêntese de luxo. Isso é falta de educação matemática...

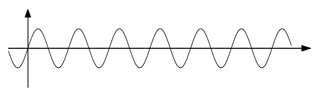
Quem comete esse tipo de erro não está por dentro do que explicaremos no próximo item.

O que você não pode deixar de saber a respeito dos gráficos das funções trigonométricas....

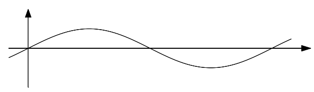
Sabendo o gráfico das funções *básicas* $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \cos(x)$, é possível obter gráficos de muitas outras funções fazendo pequenas modificações. Por exemplo, compare os gráficos de $g(x) = \text{sen}(x)$, $h(x) = \text{sen}(3x)$ e $j(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, sobre um intervalo contendo $[0,\ 4\pi]$.



$g(x) = \text{sen}(x)$



$h(x) = \text{sen}(3x)$



$j(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

A função $h(x) = \text{sen}(3x)$ tem um período três vezes mais curto do que a função $g(x) = \text{sen}(x)$ e, por isso, seu gráfico sobe e desce muito mais vezes (quantas?) do que a original no mesmo trecho do domínio.

Já o período da função $j(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ tem o dobro do comprimento do que o período da função $g(x) = \text{sen}(x)$, portanto, enquanto g (digamos assim, informalmente) sobe e desce duas vezes, a função j completa um só ciclo.

Para arrematar...

Você PRECISA saber distinguir os gráficos das funções trigonométricas, começando das funções seno e cosseno, assim como saber esboçar certos gráficos a partir desses originais.

Para isso é preciso entender de freqüência e periodicidade. Você precisa *entrar na onda...*

A seguir apresentamos alguns exercícios que podem ajudá-lo um pouco com isso.

Conhecer o valor de uma das funções seno ou cosseno num ponto com mais alguma informação sobre a sua localização (no círculo trigonométrico) é suficiente para determinar o valor das outras funções nesse ponto. Veja o exercício a seguir.

6) Sabendo que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ e $\text{sen}\alpha = \frac{2}{3}$, calcule $\cos\alpha$, $\sec\alpha$, $\csc\alpha$, $\text{tg}\alpha$, e $\text{cotg}\alpha$.

Uma etapa importante no estudo das funções trigonométrica, especialmente no que diz respeito ao cálculo dessas funções em ângulos múltiplos de $\pi/6$ e $\pi/4$ (aqueles que TODO mundo precisa saber) é o treinamento de resolução de equações trigonométricas. As mais simples são do tipo a seguir.

7) Resolva as equações a seguir nos intervalos indicados.

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ $[0, \pi]$;

b) $\text{sen}(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $[0, \frac{\pi}{2}]$;

c) $\csc x = \sqrt{2}$ $[0, \frac{\pi}{2}]$;

d) $\text{tg}x = -1$ $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

As equações ficam um pouco mais emocionantes quando envolvem duas funções trigonométricas... Lembre-se de que nessa área os problemas podem ficar deveras complicados. Mas não é o caso do que apresentamos a seguir.

8) Resolva a equação $\text{sen}(x) = \cos(2x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

---

9) Esboce os gráficos das funções a seguir (sobre o domínio $[0, 2\pi]$, pelo menos).

a) $f(x) = 2\,\mathrm{sen}2x$; b) $g(x) = 2\,\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1$;

c) $h(x) = 3\,\mathrm{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; d) $j(x) = 2 + 2\,\mathrm{sen}(4x)$.

Semana 14 - Funções trigonométricas inversas!

Mas, antes,

algo diferente, para variar...

Começaremos essa série de atividades com uns testes. Vamos testar suas habilidades em composições de funções e funções inversas. Esses exercícios foram usados em diferentes provas do tipo vestibular e coisas assim e são bastante interessantes. É possível aprender bastante com elas.

---

1) Se $f(x) = x^2 + 1$, então $(f \circ f)(x)$ é igual a:

(a) $x^4 + 2x^2 + 2$ (b) $x^4 + 2$ (c) $x^4 + 1$

(d) $x + 1$ (e) 1

---

2) Sendo $f(x) = x^2 + 2x$ e $g(x) = 3x + 4$, então $(f \circ g)(x)$ é igual a:

(a) $9x^2 + 20x + 24$ (b) $x^2 + 30x + 24$ (c) $9x^2 + 30x + 24$

(d) $x^2 + 20x + 24$ (e) nda

---

3) Se $g(1 + x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, então $g(3)$ é igual a:

(a) 0 (b) 3 (c) $\frac{1}{2}$

(d) $\frac{3}{10}$ (e) $\frac{2}{5}$

---

4) Se $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$, então $(f \circ f)(x)$ é igual a:

(a) -1 (b) 1 (c) $\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right)^2$

(d) $\dfrac{x-2}{2x+1}$ (e) x

---

5) Se $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 8x + 6$ e $g(x) = 2x - 1$, então $f(2)$ é igual a:

(a) -2 (b) -1 (c) 3

(d) 5 (e) 6

---

6) Considere as funções $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$. Então, as soluções da equação $(f \circ g)(x) = 0$ são:

(a) inteiras (b) negativas (c) racionais não inteiras

(d) inversas uma da outra (e) opostas uma da outra

---

7) Se $f(x) = 2x - 1$, então $f^{-1}(x)$ é igual a:

(a) $\dfrac{x-1}{2}$ (b) $\dfrac{-x-1}{2}$ (c) $\dfrac{x+1}{2}$

(d) $\dfrac{1}{2x-1}$ (e) nda

---

8) Se f^{-1} é a inversa de $f(x) = 2x + 3$, então o valor de $f^{-1}(2)$ é igual a:

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{7}$ (c) 0

(d) $-\frac{1}{7}$ (e) $-\frac{1}{2}$

---

9) A inversa da função $f(x) = x^3 + 1$ é definida pela lei:

(a) $\sqrt[3]{x+1}$ (b) $\frac{1}{x^3+1}$ (c) $\sqrt[3]{x-1}$

(d) $\sqrt[3]{x^3-1}$ (e) nda

---

10) Seja $f : \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\} \longrightarrow B \subset \mathbb{R}$ a função inversível definida por $f(x) = \dfrac{6x}{3x-1}$. O conjunto B é igual a:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R} - \{-2\}$ (c) $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

(d) $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ (e) $\mathbb{R} - \{2\}$

O tema da semana é ...

Funções trigonométricas inversas!

Começamos com a famosa pergunta: por que as pessoas acham este tema tão difícil?

Realmente, as funções trigonométricas inversas reservam alguns segredos e alguns mistérios que custam um pouco a serem revelados. Mas, nada que cinco ou seis horas de estudo seguido por três ou quatro dias para resolver.

Na minha opinião a dificuldade desse tema reside na justaposição de dois assuntos que, por si só, já causam razoável estrago na auto-estima dos alunos: funções trigonométricas *e* funções inversas.

Para complicar ainda mais, as funções trigonométricas não são as funções mais (por assim dizer) inversíveis que conhecemos...

Nossa estratégia para sobrepujar essas dificuldades consistirá em lembrar dos aspectos mais importantes de cada um desses tópicos e, quando estivermos mais certos disso, faremos, cuidadosamente, a mistura desses perigosos ingredientes.

O que você não pode deixar de saber a respeito de funções inversas?

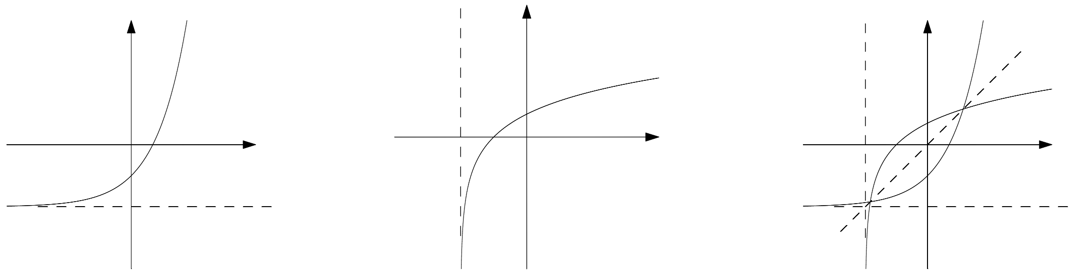
- Se $f : A \longrightarrow B$ é inversível, então $f^{-1} : B \longrightarrow A$. Ou seja, o domínio de f é a imagem (coincidente com o contradomínio) de f^{-1}; a imagem de f é o domínio de f^{-1}.

  Exemplo:

$$\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}-\{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\{2\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-3}+2 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}-\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\{3\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-2}+3 \end{array}}$$

- Seja f uma função inversível. Os gráficos de f e de sua inversa f^{-1} são simétricos em relação à reta definida por $y = x$, bissetriz dos primeiro e terceiro quadrantes.

  Veja os gráficos de $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-2, +\infty)$, de $f^{-1} : [-2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ e os dois gráficos sobrepostos com a reta $y = x$ tracejada.



Note que a reta horizontal $y = -2$ limita o gráfico da f e o a reta vertical $x = -2$ limita o gráfico de f^{-1}. Esse fenômeno é chamado de assíntota horizontal e assíntota vertical e você aprenderá muita coisa sobre isso no Cálculo I.

- Dada a lei de definição $y = f(x)$, da função f, para determinarmos a lei de definição de f^{-1}, devemos "resolver" a equação $y = f(x)$ em x ...

  Por exemplo, se $y = f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$, fazemos $y = \frac{2x-3}{x-1}$ e resolvemos em x:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x-3}{x-1} \\ y(x-1) &= 2x-3 \\ yx - y &= 2x-3 \\ yx - 2x &= y-3 \\ x(y-2) &= y-3 \\ x &= \frac{y-3}{y-2} \end{aligned}$$

  Portanto, para escrever a lei de definição de f^{-1}, colocamos x no lugar de y:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{x-2}.$$

E as trigonométricas, digamos seno e cosseno?

As funções trigonométricas têm características muito especiais, que as diferenciam das usuais funções polinomiais, que foram, até agora, nossa principal fonte de exemplos. Elas são
a) limitadas: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\,\text{sen} x\,| \leq 1, \quad \text{e} \quad |\cos x\,| \leq 1;$
b) periódicas: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x) \quad \text{e} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x);$

c) satisfazem a Identidade Trigonométrica Fundamental:

$$\text{sen}^2 x \; + \; \cos^2 x \; = \; 1$$

válida $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) As funções obtidas à partir dessas duas, tangente, cotangente, secante e cossecante, não são mais limitadas, mas ainda são periódicas e satisfazem importantes identidades decorrentes da Identidade Trigonométrica Fundamental, como

$$\text{tg}^2 x \; + \; 1 \; = \; \sec^2 x,$$

válida em todo o domínio da função tangente, que é igual ao domínio da função secante, determinado pela condição $\cos x \neq 0$.

Encontro de titãs ...

Como lidar com as funções trigonométricas inversas?

É necessário dedicação e paciência. A cultura atual nos dá a impressão que não precisamos gastar mais do que uns poucos minutos para dominar um assunto para estarmos prontos para outro. A Matemática não poderia estar mais distante disso. Portanto, arregace as mangas, beba um copo d'água, vá ao banheiro e pegue todo o material didático disponível sobre o tema, sente-se no seu lugar mágico de estudos e mergulhe de cabeça nas funções trigonométricas inversas. Você acabará gostando disso.

Bem, na falta de alguns dos ingredientes acima citados, faça o possível, a prova está logo ali.

Vamos começar com a seguinte pergunta:

Quais funções podem ser invertidas?

Muitas, poucas, quantas?

A resposta, como tudo na vida, depende de algumas condições. A condição para que uma função seja inversível é que ela seja bijetora, que é uma restrição *forte*. Isso nos leva a crer que a resposta à pergunta feita anteriormente seja que poucas funções são inversíveis.

No entanto, se restringirmos a pergunta às funções com que temos lidado a maior parte do tempo, polinomiais e coisas do gênero, o cenário torna-se um pouco mais róseo. Neste caso, dividiremos a questão em duas abordagens:

a) (Abordagem global)Dada uma função f, será que é inversível?

b) (Abordagem local) Dada uma função f, será que há subintervalos de seu domínio, restritos aos quais f é inversível?

A abordagem global é mais difícil de ser respondida positivamente. No entanto, a abordagem local tem, quase sempre, resposta positiva.(há uma maneira matemática de precisar isso e você aprenderá como, começando no Cálculo I)

Por exemplo, considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Esta função não é injetora ($f(-1) = f(1)$, por exemplo) e não é sobrejetora (não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 = -1$, por exemplo). Logo f não é inversível, respondendo negativamente à pergunta (a).

No entanto, se considerarmos as suas restrições aos intervalos $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$, teremos duas funções inversíveis. Veja os detalhes.

Sejam $f_1 : (-\infty, 0] \longrightarrow [0, +\infty)$ e $f_2 : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ duas restrições de f. Isto é, $f_1(x) = f(x) = x^2$ e $f_2(x) = f(x) = x^2$. As duas funções f_1 e f_2 são inversíveis. Eis aqui as suas inversas, como você pode verificar.

$f_1^{-1} : [0, +\infty) \longrightarrow (-\infty, 0]$, definida por $f_1^{-1}(x) = -\sqrt{x}$;

$f_2^{-1} : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$, definida por $f_2^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Note que, nos dois casos, elevar ao quadrado resulta em x:

$$\left(-\sqrt{x}\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x,$$

pois $x \in [0, +\infty)$.

Aqui estão os gráficos.

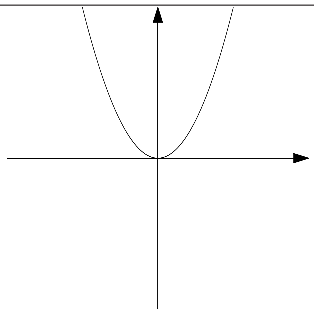


Gráfico de $f(x) = x^2$

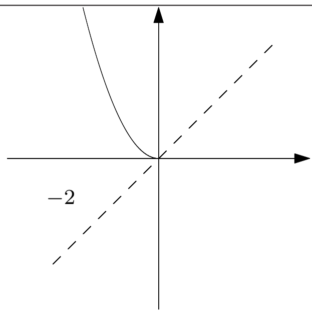


Gráfico de f_1

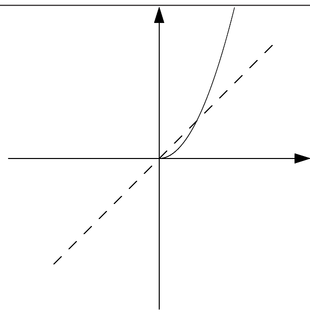
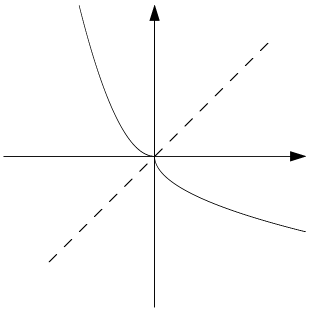
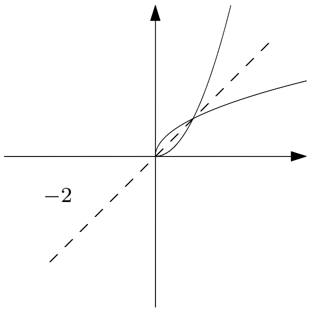


Gráfico de f_2



Gráficos de f_1 e f_1^{-1}



Gráficos de f_2 e f_2^{-1}

Observe mais um exemplo de uma função não inversível, mas que admite “ramos” de inversão. Isto é, admite partes de seu gráfico que, considerados independentemente do resto da função, são gráficos de funções inversíveis.

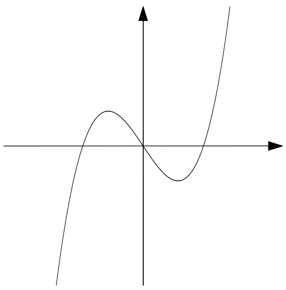
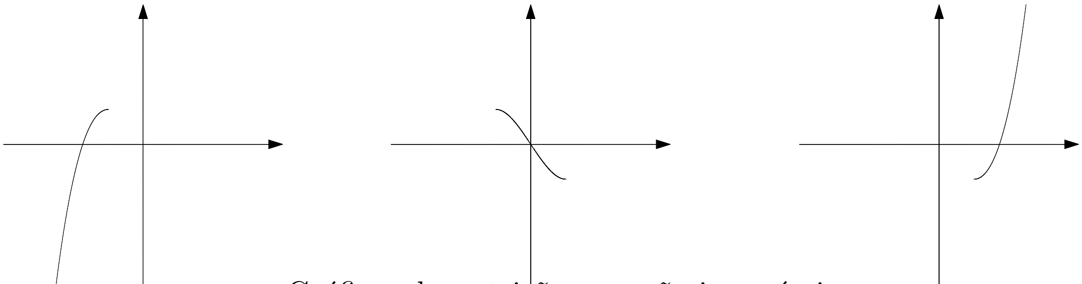


Gráfico de função não inversível



Gráficos de restrições que são inversíveis

Isto é o que faremos com as funções trigonométricas

As funções trigonométricas são, em geral, não sobrejetoras (seno e cosseno são limitadas, nunca excedem 1, em valor absoluto) nem injetoras (uma vez que são periódicas, $\cos(\pi) = \cos(3\pi)$, por exemplo). No entanto, ao olharmos seus gráficos, podemos ver vários "ramos" de inversão. Isto é, os trechos do domínio nos quais a função é crescente (ou decrescente).

Portanto, quando falamos de funções trigonométricas inversas, falamos de fato de restrições das funções trigonométricas que são, de fato, inversíveis. Aqui entra a parte que dá trabalho. Você precisará memorizar, tatuar no cérebro, fazer fichinhas, sei lá, os domínios de inversão das funções trigonométricas. Vamos ao exemplo mais simples: a função seno. Comece olhando seu gráfico, com destaque no trecho que será invertido!

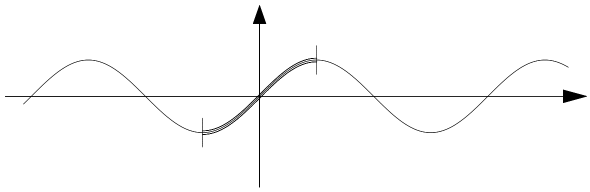
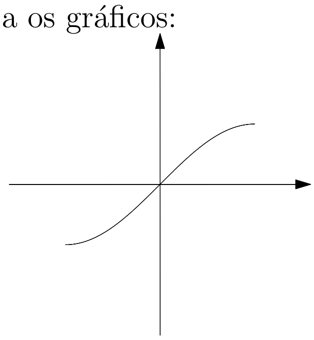


Gráfico de função $f(x) = \text{sen}x$ com destaque do trecho que será invertido.

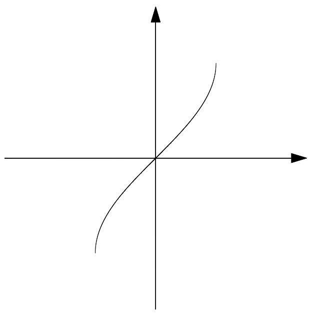
Assim, consideramos a restrição da função seno e sua inversa, a função que chamamos arco seno:

$$\boxed{\begin{array}{cccc} f: & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \text{sen}x \end{array}} \quad \text{e} \quad \boxed{\begin{array}{cccc} f^{-}1: & [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \longmapsto & \text{arc sen}x. \end{array}}$$

Veja os gráficos:



$f(x) = \text{sen}x$



$f^{-1}(x) = \text{arc sen}x$

Olhem bem, pois a diferença é sutil.

Assim, faça uma tabela com os domínios (regiões de inversão) das funções seno (já está aí), cosseno e tangente. Pelo menos essas você PRECISA saber...

Agora, alguns exercícios para praticar.

11) Calcule os seguintes valores:

(a) $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\right)$ (b) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (c) $\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(d) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ (e) $\operatorname{arc\,sen}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ (f) $\arccos\left(\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

(g) $\operatorname{arc\,tg}(1)$ (h) $\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3})$ (i) $\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

---

12) Determine os domínios das seguintes funções:

(a) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(2x)$ (b) $g(x) = \arccos(x-3)$

(c) $h(x) = \operatorname{arc\,tg}(2x-5)$ (d) $j(x) = \sqrt{\operatorname{arc\,sen}(x)}$

(e) $k(x) = \sqrt{4 - \operatorname{arc\,tg}^2 x}$

Não deixe de fazer os exercícios 1, 2 e 3 da aula 39.

Semana 15 - Duas notáveis funções

Onde estamos, afinal?

Estamos na reta final da disciplina. Você deve estar com suas preocupações divididas entre aprofundar seus conhecimentos nos tópicos que temos falado nas últimas semanas, avançar para os conteúdos que ainda faltam e, principalmente, concentrar-se na preparação para a prova.

Parece muita coisa, e é, mas você precisa levar em conta que esses objetivos não são excludentes, muito pelo contrário.

Só para deixar claro quais são esses tantos assuntos que estão nos rondando, vamos listá-los:

a) Cônicas - escrever as equações na forma $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} \pm \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm 1$, identificá-la e fazer seu esboço;

b) Determinar domínios de funções e lidar com suas operações, especialmente a composição: $f \circ g$ ou $g \circ f$?

c) Funções inversas: sob que condições a função é inversível? Qual é a relação dos domínios e das imagens da função e de sua inversa? Como calcular a lei de definição da função inversa? Qual é a relação (geométrica) existente entre o gráfico de uma função e o gráfico de sua inversa?

d) Funções trigonométricas (ai!): quais são os valores de seno, cosseno, tangente e cotangente, secante e cossecante dos ângulos nobres ($30°$, $45°$, $60°$ e seus correspondentes nos outros quadrantes)? Qual é a Identidade Trigonométrica Básica? Como é o gráfico (pelo menos de seno, cosseno e tangente)? Como muda o gráfico quando alteramos a função trigonométrica (de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ para $g(x) = a\operatorname{sen}(bx)$)?

e) Funções trigonométricas inversas (ai! ai!): Aqui é preciso muita paciência e boa-vontade. É fundamental, neste estágio, saber identificar os domínios (ramos) de inversão das funções seno, cosseno e tangente (deixemos as restantes para depois da prova, prometem? Em troca coloco uma tabela com essa informação no fim dessas notas). Saber calcular o arco seno, arco cosseno e arco tangente dos valores associados aos ângulos mais usados. Por exemplo, quanto vale arco seno de $-\frac{1}{2}$?

f) Funções exponencial e logaritmo. Esse assunto será explorado nessas notas.

Perspectiva Gráfica

Um ponto de vista que tem sido bastante explorado nesta disciplina é o aspecto gráfico das funções. Isso é muito importante, pois lhe dará uma perspectiva geral dos conceitos e será de grande valia no seu próximo estágio – o Cálculo I.

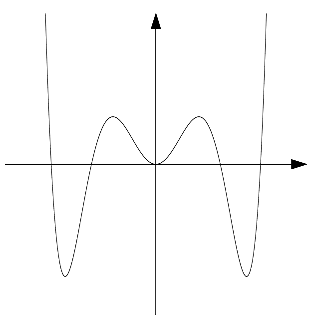
Você precisa saber esboçar os gráficos das funções mais simples, como a função modular, funções cujos gráficos são retas, parábolas, semicírculos, senóides e as variações sobre esses temas, com as translações horizontais e verticais.

Outra coisa importante é ser capaz de identificar se certas curvas são gráficos de funções e, em caso positivo, saber identificar (geometricamente) as propriedades que a função goza, tais como ser par, ser ímpar (ou nenhum dos casos), ser injetora, ser inversível...

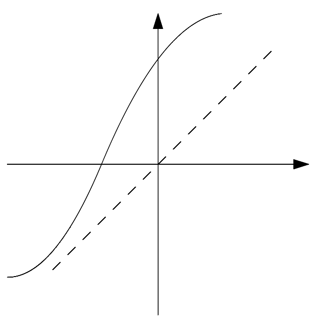
Assim, para dar uma idéia, veja o primeiro exercício desta série:

---

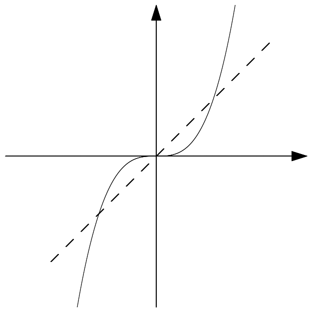
1) Nos quatro gráficos de funções a seguir, identifique as propriedades de cada uma delas, tais como: a função é par, a função é ímpar, a função é injetora. Neste último caso, a função será inversível se restringirmos seu contra-domínio à sua imagem. Neste casos, aproveite a própria figura para esboçar o gráfico da função inversa, usando a propriedade de simetria que esses gráficos gozam. Observe que para fazer tudo isso, não é necessário que conheçamos as leis de definição das funções. Essa é a perspectiva gráfica.



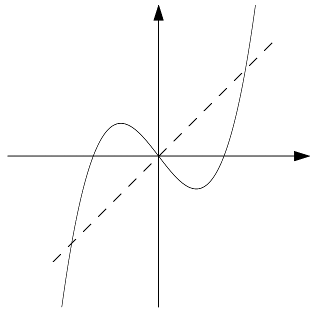
a)



b)



c)



d)

Um dos conteúdos que é preciso trabalhar bastante, para *cansar o braço*, é o de calcular valores de funções trigonométricas nos ângulos nobres e os valores das funções trigonométricas inversas nos correspondentes valores especiais, a saber, 1, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, e os *descendentes* desses.

Por exemplo, se ao chegar na prova você se deparar com uma expressão tal como $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ e *demorar* para saber quanto isso vale, o tempo ficará subitamente nublado, com tendência a chuvas e trovoadas...

O problema a seguir indicará como estão as suas habilidades neste setor.

---

2) Um aluno de Pré-Cálculo queria verificar se seus exercícios sobre funções trigonométricas e funções trigonométricas inversas estavam corretos. Assim, pegou sua calculadora científica e começou a verificação.

a) O aluno precisava calcular o valor de uma certa função trigonométrica em $\frac{\pi}{3}$. Ele colocou um número de dois dígitos, pressionou uma tecla com a inscrição da função trigonométrica desejada e obteve, no visor da calculadora, o número

$$0.866025403$$

Qual era a função trigonométrica a ser calculada e qual foi o número de dois dígitos usado pelo aluno?

A resposta obtida está correta? Como você explica o fato do aluno ter obtido a resposta usando apenas dois dígitos?

b) Em seguida, era preciso verificar o valor correto de $\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2}$. Após muito procurar no teclado da máquina, a tecla mais indicada para fazer esse cálculo era a que tinha a inscrição $\sin^{-1}$. Ele procedeu os cálculos usando essa tecla. Você acha que ele fez a escolha correta? Explique.

c) Ainda nessa situação, o aluno pressionou as teclas 0, ponto e 5, mas não pressionou ponto muito bem. Ao pressionar a tecla com a inscrição sen^{-1} ele obteve uma mensagem de erro: E   0. Você sabe explicar o que aconteceu?

d) Finalmente, o aluno teve sucesso em seu uso da calculadora. Pressionou as teclas 0, ponto e 5, seguidas da tecla com inscrição sen^1, obtendo a resposta

$$0.523598775$$

A resposta obtida é correta? Explique.

Duas notáveis funções

É interessante como certas tecnologias impõem na nossa vida alguns números, que se tornam parte da nossa linguagem diária. Por exemplo, com a chegada dos carros populares, os números usados para indicar a potência de seus motores, tais como 1.0, 1.6, 1.8 e 2.0.

O uso dos computadores nos apresentou outros números ainda mais interessantes, tais como 64, 128, 256, 512. Quem não gostaria de ter um iPod ou mesmo um mp3 player com 1 gigabyte, ou 1024 kilobytes de memória?

Por exemplo, você sabia que a titânica medida de memória de 1 Zettabyte corresponde a 1 099 511 627 776 Gigabytes? Ou de maneira mais incrível ainda, a 9 444 732 965 739 290 427 392 bits?

O que esses números têm de especial?

Esses números são potências de 2:

n	6	7	8	9	10	40	73
2^n	64	128	256	512	1024	1099511627776	9444732965739290427392

Há tempos os matemáticos notaram uma *boa* correspondência entre certas séries aritméticas e suas (por assim dizer) correspondentes geométricas.

Vejamos ainda o exemplo da série geométrica que começa com o número 1 tem razão 2, que guarda correspondência com a série aritmética dos seus expoentes, que começa com 0 e tem razão 1:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

O que é muito, muito interessante mesmo, é que a operação de soma na linha superior corresponde a operação de multiplicação na linha de baixo. Por exemplo, para calcular 16×256, basta observar que 16 corresponde ao 4 e 256 ao 8, somar 4 e 8 e *ler* na tabela que o número correspondente ao 12 é 4096, o resultado do produto.

A idéia é tão boa que merece que a repitamos mais uma vez: se estabelecermos uma tabela colocando na linha superior os expoentes de uma certa base e na linha logo abaixo as potências correspondentes, as operações de multiplicação e (melhor ainda) divisão na linha de baixo seriam *traduzidas* para somas e subtrações na linha de cima.

Agora, avancemos mais um pouco com a idéia: a tabela será tão perfeita que o intervalo entre os números, digamos da linha de cima, será muito, muito pequeno. Tão pequeno que a tabela quase se parecerá com uma linha, um numerozinho seguido do outro. Além disso, a base não será muito grande. Será um número maior do que $2,5$, mas menos do que 3:

n	-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0
e^n	0.3679	0.4066	0.4493	0.4966	0.5488	0.6065	0.6703	0.7408	0.8187	0.9048	1

n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
e^n	1.105	1.221	1.350	1.492	1.649	1.822	2.014	2.226	2.460	2.718

Mais uma vez, para que a tabela tenha um sentido maior, veja como ela pode ser usado para *transformar* produtos em somas.

Para multiplicar 0.4066 por 1.822, fazemos o seguinte: transferimo-nos para o mundo da soma, observando que 0.4066 corresponde a -0.9 e 1.822 corresponde a 0.6. A soma desses números é -0.3, que corresponde a 0.7408 na linha *multiplicativa*.

Portanto, a operação $0.4066 \times 1.822 = 0.7408$ corresponde, na linha dos *expoentes*, à operação $-0.9 + 0.6 = 0.3$.

Paciência, paciência, uma boa idéia merece a nossa atenção.

As funções exponencial e logaritmo são os *portais* que conectam esses dois universos. Para passar do universo aditivo para o universo multiplicativo, usamos a exponencial. Para fazer o caminho de volta, usamos o portal inverso, o logaritmo.

Como os matemáticos chamam isso? Bem, apenas de funções, uma inversa da outra.

Mas, devagar, ainda há muito mistério aqui. Como essas funções são construídas? Que garantias temos de que tudo isso funciona?

Bem, nesse curso você deverá *acreditar* bastante... Acredite que tudo funciona a contento. Mas, ao longo dos cursos de Cálculo e Análise, você aprofundará mais seus conhecimentos sobre esse assunto.

Vejamos, no entanto, no que temos que acreditar...

Todo mundo sabe que 2^n, para números naturais n, é o produto de 2 por 2 por 2, n vezes. Assim, $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

Para quais outros tipos de números r podemos fazer 2^r?

A convenção $2^{-n} = \dfrac{1}{2^n}$ permite colocar no expoente da base 2 também números negativos.

O que mais?

Você sabe que podemos fazer $2^{\frac{1}{2}}$. Mas, aqui, as coisas começam a engrossar. Note que esse número é $\sqrt{2}$, que gerou muita confusão no passado até ser aceito como um número *legítimo*, digamos assim.

Por exemplo, você saberia dizer, exatamente, quem é $\sqrt{2}$?

Eu consigo viver com a seguinte resposta: é o número positivo que elevado ao quadrado é igual a dois. Parece bom, não acha?

Assim, nós aceitamos os números da forma 2^r, para $r \in \mathbb{Q}$, expoentes racionais. Coisas como $2^{\frac{2}{3}}$ ou $2^{-\frac{34}{115}}$.

Muito bem, aqui está o pacote que temos que aceitar: para definir uma função *exponencial*, do tipo

$$f(x) = 2^x,$$

precisamos saber *calcular* o valor de 2 elevado a qualquer número, inclusive os irracionais. Por exemplo, quanto vale

$$2^\pi \qquad \text{ou} \qquad 2^{\sqrt{2}}?$$

Esses números ficam estabelecidos por meio de processos que envolvem conceitos de infinito e, portanto, escapam do reino do Pré-Cálculo e passam para a jurisdição do Cálculo mesmo e da Análise. No entanto, isso não nos impede de prosseguir com as informações que dispomos e estudar essas importantes funções: exponencial e sua inversa, logaritmo.

Na página 126 do módulo 4, a segunda página da aula 40, você encontrará a Proposição 3, que lista as propriedades fundamentais que você precisa saber para lidar com essas coisas.

As, definitivamente, mais importantes, nos dizem que podemos calcular

$$a^x$$

contanto que $a > 0$ (a TEM que ser um número POSITVO, pense positivo) e x pode ser é um número real qualquer.

Além disso, se $a > 1$ e $x > y$, então $a^x > a^y$. Isso garante a injetividade das funções exponencial, carimbando o passaporte da existência das funções logaritmo.

De alguma forma, a noção de mudança de base nos diz que, em vez de nos preocuparmos com *as funções exponenciais*, para os muitos valores de a, basta que nos concentremos em um deles. E o escolhido para desempenhar esse papel é a chamada constante de Napier (dizemos Népier, pronúncia inglesa desse nome, eles não sabem pronunciar o nosso a, latino, bem aberto assim, como na palavra baralho) que representamos por e (dizem as más línguas, foi escolhida por Euler, entenderam? EEEEuler).

Assim, isso é o que você precisa saber sobre essas funções:

Exponencial

$$f(x) = e^x$$

Domínio: $\mathbb{R}$, toda a reta real.

Propriedades principais:

a) sempre crescente ($x > y \implies e^x > e^y$)

b) $e^0 = 1$

c) $\forall\ x, y \in \mathbb{R},\quad e^{x+y} = e^x \times e^y$. A exponencial nos traz do mundo aditivo para p mundo multiplicativo.

d) Imagem: Não importa o valor de x, $e^x > 0$. A imagem da função exponencial é o intervalo $[0, +\infty)$. Essa informação é importante para determinar o domínio da função inversa – logaritmo.

A seguir você verá o gráfico da função exponencial (com base a constante de Napier).

d) Gráfico:

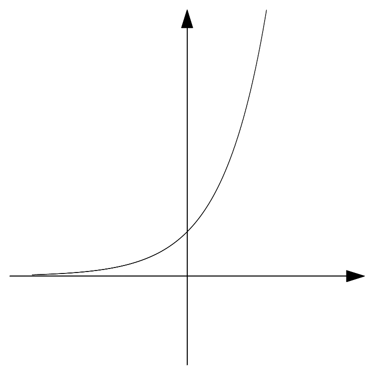


Gráfico de função $f(x) = e^x$.

Logaritmo

$$g(x) = \ln x$$

Domínio: $[0, +\infty)$. Lembre-se, só podemos calcular o logaritmo de números maiores do que zero.

Propriedades principais:

a) sempre crescente: $(x > y \implies \ln x > \ln y)$

b) $\ln 1 \ = \ 0$

c) $\forall\ x, y > 0, \quad \ln xy \ = \ \ln x \ + \ \ln y$. O logaritmo transforma o mundo multiplicativo no mundo aditivo, percorrendo o caminho contrário do que faz a exponencial. É claro, uma função é a inversa da outra.

d) Imagem: a imagem da função logaritmo é toda a reta real, que corresponde ao domínio da função exponencial.

Veja o gráfico da função:

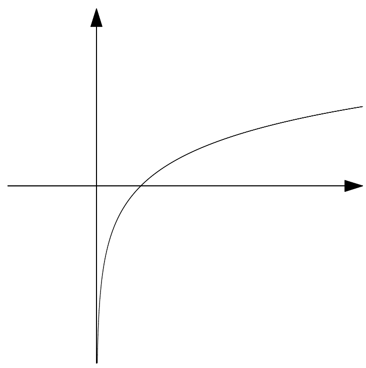


Gráfico de função $g(x) = \ln x$.

Para encerrarmos esse papo, eis aqui uma lista de razões para você gostar de estudar essas duas funções e as funções que podemos obter a partir delas:

- Você já viu funções mais elegantes do que elas? Veja o gráfico da exponencial... Para quem gosta de beleza e sofisticação, essas funções são indispensáveis.

- Há uma variedade de fenômenos do mundo real que para serem modelados precisam de funções construídas à partir delas. Esse assunto é explorado na abertura da aula 40, onde é mencionado o crescimento de colônias de bactérias assim como a noção de decaimento radioativo.

  Na página de endereço

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/expolog/exponenc.htm

você encontrará uma seção de aplicações, tais como a lei do resfriamento dos corpos, curvas de aprendizagem entre outras.

Veja, também, o endereço da logaritmo no Wikipédia:

http://pt.wikipedia.org/wiki/Logaritmo

- Vai cair na prova...

---

3) Determine o domínio de cada função a seguir:

a) $f(x) = e^{\sqrt{1-x}}$; b) $g(x) = \ln(1-x^2)$;

c) $h(x) = \dfrac{1}{\ln x}$; d) $j(x) = \sqrt{1 - \ln x}$.

---

4) Use as propriedades das funções para simplificar as expressões a seguir:

a) $\ln(1-x^2) \; - \; \ln(1-x)$; b) $\dfrac{e^{x+3} \times e^{x-3}}{e^x}$;

c) $2\ \ln(1+x) - \ln\ \sqrt{1+x}$;

---

5) Resolva as seguintes equações:

a) $(x^2+4x-5)\, e^{3x+5} = 0$; b) $e^{2x+5} = 1$;

c) $\ln(x-1) \; = \; \ln(2x+1)$;

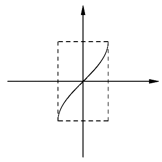
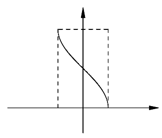
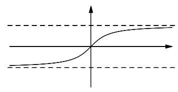
---

6) Esboce o gráfico de cada função a seguir:

a) $f(x) = e^{x-2} + 1$; b) $g(x) = -\ \ln x + 1$;

c) $h(x) = \ln\ |x|$; d) $j(x) = e^{1-x}$.

Tabela com as informações básicas sobre as funções arco...

Função	Domínio	Imagem	Gráfico
$y = \operatorname{arc\,sen} x$	$[-1,\, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right]$	
$y = \arccos x$	$[-1,\, 1]$	$[0,\, \pi]$	
$y = \operatorname{arc\,tg} x$	$\mathbb{R}$	$\left[-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right]$	

---

e-endereços de sites sobre funções logaritmo e exponencial com applets e coisas no gênero

http://sapp.telepac.pt/criarplus/mat/expon/expo.htm

http://www.ime.usp.br/ nelio/software/cepa/exp.html

Este é o endereço de um applet muito interessante. Com ele você poderá traçar gráficos de funções do tipo

$$f(x) = a\, e^{bx+m} \; + \; k$$

Isto é, você pode atribuir valores às constantes a, b, m e k e traçar o gráfico da função correspondente a esses valores. Há um limite de que valores você pode atribuir a essas constantes, mas o applet é realmente muito bom. Como você pode traçar até 5 gráficos sobrepostos, é interessante comparar o que muda no gráfico quando fazemos um alteração, digamos de b, passando de 1 para -1, por exemplo.

http://descartes.cnice.mec.es/Descartes1/Autoformacion/Archivos_comunes/expolog.htm

Este site é em espanhol... Eu tive uma boa impressão mas veja lá se você tem tempo para explorar essas coisas agora. De qualquer forma, fica aqui a dica.

Semana 16 - Preparação para AP2!

Um dos conteúdos que é preciso trabalhar bastante, para *cansar o braço*, é o de calcular valores de funções trigonométricas nos ângulos nobres e os valores das funções trigonométricas inversas nos correspondentes valores especiais, a saber, 1, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, e os *descendentes* desses.

Por exemplo, se ao chegar na prova você se deparar com uma expressão tal como $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ e *demorar* para saber quanto isso vale, o tempo ficará subitamente nublado, com tendência a chuvas e trovoadas...

O problema a seguir indicará como estão as suas habilidades neste setor.

---

1) O valor de $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

---

2) O valor de $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

---

3) O valor de $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ é:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$

---

4) O valor de $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \sec\left(\frac{\pi}{3}\right)$ é:

a) 3 b) -1 c) -3 d) $1 + \frac{2\sqrt{3}}{2}$ e) $-1 + \frac{2\sqrt{3}}{2}$

---

5) O valor de $\sec\left(\frac{13\pi}{4}\right) + \csc\left(\frac{9\pi}{4}\right)$ é:

a) $2\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $-2\sqrt{2}$ d) $-2\sqrt{3}$ e) 0

---

6) O valor de $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é:

a) $\frac{11\pi}{12}$ b) $\frac{13\pi}{12}$ c) $\frac{5\pi}{12}$ d) $\frac{17\pi}{12}$ e) $\frac{7\pi}{12}$

7) O valor de $\operatorname{arc\,tg}(-1) + \operatorname{arc\,sec}(-2)$ é:

a) $\frac{11\pi}{12}$ b) $\frac{13\pi}{12}$ c) $\frac{5\pi}{12}$ d) $\frac{17\pi}{12}$ e) $\frac{7\pi}{12}$

Um lindo teorema de Álgebra, que não é difícil de provar, afirma que o resto da divisão do polinômio $p(x)$ por $x - a$ é $p(a)$. Isso pode ser útil no momento de calcular os valores de um dado polinômio num número a. Por exemplo, o polinômio $p(x)$ é divisível por $x - 1$ se, e somente se, a soma de seus coeficientes é nula. Assim, é imediato ver que $x^3 - 3x + 3x + 1$ é divisível por $x - 1$ (e, portanto, 1 é uma de suas raiz), enquanto $x^3 - 2x^2 + x - 1$ não o é.

---

8) Use a informação anterior para calcular o valor do polinômio no ponto indicado

a) $x^5 - 3x^2 + 2x + 2;$ $x = 2;$

b) $x^4 + 3x^3 - 2x + 4;$ $x = -1.$

---

9) Considere as funções determinadas por: $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2$; $h(x) = 3x$; $j(x) = x + 4$; $k(x) = \frac{1}{x}$.

Determine as leis de definição e os domínios de cada uma das funções a seguir:

a) $f \circ h$; b) $g \circ j$; c) $j \circ f$; d) $k \circ f$;

e) $k \circ j$; f) $h \circ g \circ j$; g) $j \circ h \circ f$; h) $k \circ g \circ j$;

---

10) Determine o domínio das funções a seguir:

a) $f(x) = \ln(x + 3)$; b) $g(x) = \operatorname{arc\,sen}(x - 3)$;

c) $h(x) = \operatorname{arc\,tg}(x + 2)$; d) $j(x) = e^{\sqrt{x-2}}$

---

11) Resolva as equações a seguir:

a) $\ln(x^2 + 4x + 4) = 0$; b) $e^{|x-3|-1} = 1$.

---

12) A função f está definida em toda a reta real e é inversível. Sabendo que $f(1) = -1$, $f(2) = 0$, $f(3) = 2$, $f(4) = 3$ e $f(5) = 4$, calcule $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(f(4))$ e $f^{-1}(4)$.

---

13) A função $f : A \longrightarrow B$, definida pela equação $f(x) = \dfrac{1}{x+3} - 2$ é inversível. Denotamos sua inversa por $f^{-1} : B \longrightarrow A$. Determine a lei de definição de f^{-1} assim como os subconjuntos A e B da reta.

---

14) Sabendo que $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ e que $\theta \in [3\pi/2,\, 2\pi]$, calcule $\operatorname{sen}\theta$, $\sec\theta$, $\csc\theta$ e $\operatorname{tg}\theta$.

GABARITO

Gabarito das Atividades Propostas

Semana 01

---

1) Quais dos seguintes números são inteiros?

a) $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}$ b) $\left(\dfrac{1}{121}\right)^{-1/2}$ c) $\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}$ d) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{60}$

Solução: Todos! Esses números são iguais a 2, 11, 4 e 1, respectivamente.

---

2) Resolva as seguintes equações:

a) $x^2 - 3x = 10$

Solução: Podemos reescrevê-la como $x^2 - 3x - 10 = 0$ Usando a fatoração do polinômio de grau dois, obtemos$(x-5)(x+2) = 0$. Assim, as raízes da equação são $x = 5$ e $x = -2$.

b) $2y^2 + 9 = 9y$

Solução: Basta usar a Fórmula de Báskara para a equação $2y^2 - 9y + 9 = 0$ e obter as raízes $y = 3$ e $y = \frac{3}{2}$.

c) $\dfrac{4-r}{r^2-2} = 1$

Solução: Neste caso, fazemos uma pequena modificação algébrica para obter a equação $4 - r = r^2 - 2$, que é equivalente a $r^2 + r - 6 = 0$. Agora, fatoração de polinômios nos dá $(r+3)(r-2) = 0$, cujas raízes são $r = -3$ e $r = 2$.

d) $\dfrac{2}{3-a} = a$

Solução: De maneira análoga você pode descobrir que $a = 1$ ou $a = 2$.

---

3) Resolva as equações a seguir na variável indicada.

a) $\dfrac{K}{2-r} = x,\quad$ em r; **Solução:** $r = \dfrac{2x-K}{x}$

b) $\dfrac{1-P}{2-a} = P,\quad$ em P; **Solução:** $P = \dfrac{1}{3-a}$

c) $\dfrac{K}{2-t} = \dfrac{1}{1-K},\quad$ em t. **Solução:** $t = K^2 - K + 2$

---

4) Considere os números naturais em cujas representações decimais se usa apenas um algarismo, assim como o 11, o 333 ou 777777. Quais desses números são divisíveis por 9?

Solução: Você deve ter se lembrado do critério de divisibilidade por 9, que é simples: um número é divisível por 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos for divisível por 9.

Comecemos com os números formados apenas com o dígito 1, como 11 e 11111111. Para que um número desse tipo seja divisível por 9, precisamos de um número múltiplo de 9 de algarismos. O menor desses números é 111 111 111, cento e onze milhões, cento e onze mil e cento e onze.

Isso é o que ocorre com os números formados apenas com os algarismos 1, 2, 4, 5, 7, e 8. Precisamos ter *gomos* de 9 algarismos, como os números 222222222 ou 555555555555555555.

Para os números formados apenas com o algarismo 3 ou com o algarismo 6, basta que eles sejam formado por *gomos* de três algarismos, assim como 333 ou 666666.

Finalmente, todos os números formados apenas com o dígito 9 são divisíveis por 9.

Bem, o exercício acabou e a resposta é essa. Mas, há uma coisa que eu acho bonita. Veja o resultado das divisões desses números por 9 e me descubra algo que elas têm em comum.

$$\frac{111\,111\,111}{9} = \qquad \frac{222\,222\,222}{9} = \qquad \frac{444\,444\,444}{9} =$$

$$\frac{555\,555\,555}{9} = \qquad \frac{777\,777\,777}{9} = \qquad \frac{888\,888\,888}{9} =$$

---

5) (O problema do cadê) Para quais algarismos k e d o número $k6d3$ é divisível por 11?

Solução: Você sabe qual é o critério de divisibilidade por 11?

Um número é divisível por 11 se a soma dos algarismos em posição par menos a soma dos algarismos em posição ímpar é um número divisível por 11.

Assim, 121, que é 11^2, satisfaz esse critério. O algarismo 1 ocupa a primeira e a terceira posições, contando da direita para a esquerda, enquanto que o algarismo 2 ocupa a segunda posição. Assim, $1+1=2$, a diferença é zero, divisível por 11. Mais um exemplo, o número 9372. A soma dos algarismos nas posições pares é $9+7=16$, enquanto a soma dos algarismos nas posições ímpares é $3+2=5$ Como $16-5=11$, 9372 é divisível por 11, como você pode verificar.

Você já sabe distinguir quando um número de quatro algarismos é divisível por 11?

Para que um número do tipo $k6d3$ seja divisível por 11, a condição $k+d-9$ é divisível por 11 deve ser satisfeita. Portanto, esses números são: 9603, 8613, 7623, 6633, 5643, 4653, 3663, 2673, 1683 e vamos também incluir o 0693.

Para terminar, tente detectar entre os cinco números a seguir, o único que não é divisível por 11:

1782 143 1595 1432 1078

---

6) Use o algoritmo que determina o $\text{mdc}(a, b)$ para determinar a fração irredutível equivalente à fração $\dfrac{13068}{15246}$.

Solução: Se você usou a decomposição em fatores primos para encontrar a fração irredutível equivalente a fração dada no exercício teve um bocado de trabalho. Ao fazer o exercício com o algoritmo do mdc percebeu como ele é vantajoso em casos como esse. Aqui está:

	1	6	
15246	13068	2178	
2175	0		

O algoritmo termina no segundo passo. $\text{mdc}(15246, 13068) = 2178$. Assim,

$$\frac{13068}{15246} = \frac{6 \times 2178}{7 \times 2178} = \frac{6}{7}.$$

---

7) Por que é difícil decompor o número 97343 em fatores primos?

Solução: Quanto tempo você gastou com esse exercício? Bem, a idéia aqui é colocar a teoria e a prática em contato. A teoria é o maravilhoso Teorema Fundamental da Aritmética que afirma que *todo* natural admite uma única decomposição em fatores primos. A prática é o ganha-pão de muitos matemáticos: pode ser muito, muito difícil decompor um número em fatores primos. Determinar se um dado número é primo ou não já é uma tarefa titânica. Procure saber sobre os chamados primos de Mersenne e você terá uma idéia melhor do que isso quer dizer. Mas, voltemos à nossa *vaca fria*: por que é difícil decompor o número 97343 em fatores primos?

A pergunta tem um certo subjetivismo e você poderia ter respondido: mas não é difícil decompor este número, veja: $97343 = 311 \times 313$.

A eventual dificuldade reside no fato de que para decompor teríamos que tentar a sua divisibilidade por todos os primos menores do que 311.

Moral da História: se os fatores primos de um número forem relativamente grande, é difícil obter sua decomposição em fatores primos.

---

8) Determine quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras, justificando a sua resposta.

- Em cada seqüência (sucessiva) de 5 números inteiros há dois que são divisíveis por 3.
- $\text{mdc}(a, b) = 1 \iff \text{mmc}(a, b) = a \times b$.
- Se um número n é divisível por 858, então n é divisível por 11.

Solução:
a) Em cada seqüência (sucessiva) de 5 números inteiros há dois que são divisíveis por 3.

Tão falsa quanto uma nota de R$ 3. Basta tomar 1, 2, 3, 4, 5.

b) $\text{mdc}(a, b) = 1 \iff \text{mmc}(a, b) = a \times b$.

Essa é verdadeira. De uma certa forma, quanto menor for o mdc, tanto maior será o mmc. Se $\text{mdc}(a, b) = 1$, não há fatores comuns em a e b e $\text{mmc}(a, b) = a \times b$. Por outro lado, se $\text{mmc}(a, b) = a \times b$, então a e b não têm fatores primos comuns.

c) Se um número n é divisível por 858, então n é divisível por 11.

Outra verdadeira. Como 858 é divisível por 11, qualquer número divisível por ele também o será por 11. (Mais uma vez a divisibilidade por 11.)

---

9) Uma certa pessoa tem R$ 1.314, 47 em uma conta bancária e pretende fazer uma retirada de modo que, na próxima sexta-feira, quando o CPMF incidir sobre o valor retirado, a conta ficará com saldo zero. De quanto deve ser esta retirada?

Solução: Em geral, se você for a um banco e formular a pergunta: quanto preciso retirar de minha conta corrente para zerá-la na sexta-feira, após a incidência do CPMF, o atendente faz a seguinte *conta*: $0.0038 \times 1314.47 = 4.994986$ (usamos ponto, notação científica, no lugar da vírgula) e aproximando o resultado (uma vez que a unidade mínima usada para dinheiro é o centavo, apesar dos postos de gasolina insistirem no absurdo de R$ 2,599 para o litro de gasolina) diz: o CPMF é de R$ 4,99, retire R$ 1309,48.

Bem, essa conta pode ser melhorada, pois o CPMF só incide sobre o *valor retirado*. Uma conta mais precisa seria: suponha que o valor a ser retirado seja x. Assim, queremos que na sexta-feira, após a incidência do CPMF, o saldo da conta seja

$$1.314,47 - (x + 0.0038x) = 0.$$

A *nova* conta resulta $x = \frac{1314.47}{1.0038} = 1309.493923$, que aproximamos para R\$ 1309, 49. Ou seja, a diferença é de um centavo.

Apesar das necessárias aproximações para que o valor seja expresso em reais (e centavos de reais), se o valor inicial fosse maior, a diferença seria mais visível, digamos assim. Para terminar, faça os dois procedimentos para a quantia R\$ 132 214, 78, por exemplo.

Comentários Finais

Em dois momentos nessa lista mencionamos os Critérios de Divisibilidade. Esse é um tema fascinante e pode ser muito bem explorado para despertar o interesse das pessoas pelos números e, por conseqüência, por Matemática.

O critério de divisibilidade por 9, por exemplo, é muito simples de ser explicado. Cada número da forma 10^k quando dividido por 9 tem resto 1: 10=9+1, $100 = 99+1$, $1000 = 999+1$, e assim por diante. Portanto, se $n = a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0 = a_k \times 10^k + a_{k-1} \times 10^{k-1} + \dots + a_2 \times 100 + a_1 \times 10 + a_0$, podemos escrevê-lo na forma $n = M + a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0$, onde M certamente é divisível por 9. Portanto, n é divisível por 9 se, e somente se, $a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0$, a soma dos seus algarismos, é divisível por 9. Veja num exemplo:

$$\begin{aligned} 2457 &= 2 \times 1000 + 4 \times 100 + 5 \times 10 + 7 = (2 \times 999 + 2) + (4 \times 99 + 4) + (5 \times 9 + 5) + 7 \\ &= 2 \times 999 + 4 \times 99 + 5 \times 9 + 2 + 4 + 5 + 7. \end{aligned}$$

Como $2 \times 1000 + 4 \times 100 + 5 \times 10 + 7 = 2 \times 999 + 4 \times 99 + 5 \times 9$ é, claramente, divisível por 9, basta ver se $2 + 4 + 5 + 7$ é divisível por 9.

Apesar de esses assuntos serem interessantes, vá com cuidado, seu tempo é seu tesouro.

Semana 02

Desenvolver uma espécie de *olho clínico* na Matemática é muito importante. Uma boa maneira de fazer isso consiste em trabalhar com exercícios do tipo falso ou verdadeiro. Devemos decidir (primeiro) se a afirmação é ou não verdadeira e (segundo) demonstrá-la caso seja verdadeira ou exibir um contra-exemplo caso contrário. Sempre que possível praticaremos esse saudável exercício.

---

1) Quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras, justificando sua resposta.

1) $\dfrac{17}{51} < \dfrac{171}{501}$

Verdadeira, pois $\dfrac{17}{51} = \dfrac{1}{3} < \dfrac{171}{501} = \dfrac{57}{167} \approxeq 0.3413$.

2) $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16}$

Falsa, pois $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} \neq 3 + 4 = \sqrt{9} + \sqrt{16}$.

Veja, esses números medem os comprimentos dos catetos e da hipotenusa de um triângulo retângulo e a soma dos comprimentos dos catetos é maior do que o comprimento da hipotenusa.

3) Se $y > 0$, então $\sqrt{y^2} = y$.

Verdadeira, pois $\sqrt{y^2} = |y| = y$ se $y > 0$.

4) $\sqrt{49} = \pm 7$

Falsa. Veja, $\sqrt{49} = 7$.

Observação: É comum ouvirmos a resposta *mais ou menos dois* ao perguntarmos *qual é a raiz quadrada de quatro?* Essa resposta é errada. A raiz quadrada de quatro é dois. Uma das razões para esse erro é a confusão causada pelo uso da palavra *raiz* em circunstâncias diferentes. Veja a afirmação *as raízes da equação* $x^2 = 4$ *são 2 e -2.* Agora sim, a resposta está adequada, pois $(2)^2 = (-2)^2 = 4$.

5) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 \in \mathbb{Z}$

Verdadeira. Apesar da presença dos radicais, ao efetuarmos as operações, obtemos

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 + 2 - 2\sqrt{6} + 3 = 10 \in \mathbb{Z}.$$

6) $\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} > 1 + \sqrt{6}$

Falsa. Veja como as aparências enganam:

$$\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{6} + 6} = \sqrt{1^2 + 2\sqrt{6} + \left(\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{\left(1 + \sqrt{6}\right)^2} = 1 + \sqrt{6},$$

pois $1 + \sqrt{6} > 0$.

---

2) Calcule $q \in \mathbb{Z}$ tal que $q - 1 < \dfrac{-127}{31} < q$.

Solução:

$\dfrac{127}{31} = 4 + \dfrac{3}{31}$. Assim, a fração $\dfrac{-127}{31}$ está entre -5 e -4. Realmente,

$$-5 = \frac{-155}{31} < \frac{-127}{31} < \frac{-124}{31} = -4.$$

Portanto, $q = -4$.

---

3) Determine os inteiros n $(n \in Z)$ tais que $\dfrac{n+1}{n+\frac{2}{3}} \leq \dfrac{7}{9}$.

Solução:

Aqui, uma lição prática muito importante: apesar de muito parecidas com as equações, as inequações requerem uma abordagem diferente para serem resolvidas. A resolução de uma inequação requer *uma análise de sinais.* Isto é, precisamos reescrever a inequação para colocá-la na forma "alguma coisa de x" comparada com zero e fazer a análise de sinais.

$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{n+\frac{2}{3}} &\leq \frac{7}{9} \\
\frac{3(n+1)}{3n+2} - \frac{7}{9} &\leq 0 \\
\frac{27(n+1) - 7(3n+2)}{9(3n+2)} &\leq 0 \\
\frac{6n+13}{9(3n+2)} &\leq 0
\end{aligned}$$

Agora, a análise dos sinais:

− − − − − − − −	− − −	+	+ +	+ + +	+ + + + + ++	$6n+13$
− − − − − − − −	− − −	−	− −	− − −	+ + + + + ++	$9(3n+2)$
+ + + + + + + +	+ + +	−	− −	− − −	+ + + + + ++	$\dfrac{6n+13}{9(3n+2)}$
-3	$-13/6$	-2	-1	$-2/3$		

A primeira linha do diagrama indica os sinais do numerador, a segunda indica os sinais do denominador e a terceira apresenta os sinais do quociente, resultado da combinação dos sinais das linhas superiores. A região hachurada indica o intervalo onde o quociente é negativo. Os únicos inteiros nesse intervalo são -2 e -1.

---

4) Calcule o número de elementos do conjunto $C = \left\{ n \in \mathbb{Z} \; ; \; \dfrac{-17}{3} < n < \dfrac{5321}{123} \right\}$.

Solução:

$-\dfrac{17}{3} = -5 - \dfrac{2}{3}$ e $\dfrac{5321}{123} = 43 + \dfrac{32}{123}$. Assim, $C = \left\{ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots 42,\ 43 \right\}$, um conjunto com 49 elementos.

---

5) Uma certa pessoa tem R$ 11,65 em moedas de 5, 10, 25 e 50 centavos. Sabe-se que o número de moedas de 5 centavos é o dobro do número de moedas de 10 centavos, que há três moedas de 25 centavos a mais do que o de moedas de 10 centavos e, além disso, que há uma moeda de 10 centavos a mais do que as moedas de 50 centavos. Quantas moedas de 5, 10, 25 e 50 centavos a pessoa possui?

Solução:

Esse problema não é difícil. A razão para dedicarmos algum tempo com ele é despertar a consciência para a importância da álgebra, da simbologia algébrica no nosso dia-a-dia. Vamos *representar* o número de moedas de 10 centavos (desconhecido) por x e *equacionar* o problema, usando que há

x moedas de 10 centavos;

$2x$ moedas de 5 centavos;

$x + 3$ moedas de 25 centavos;

$x - 1$ moedas de 50 centavos.

Assim, a equação que queremos resolver é

$$\begin{aligned} 0.10\,x + 0.05\,(2x) + 0.25\,(x+3) + 0.50\,(x-1) &= 11.65 \\ 0.1\,x + 0.1\,x + 0.25\,x + 0.5\,x + 0.75 - 0.5 &= 11.65 \\ 0.95\,x &= 11.4 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Logo, há 12 moedas de 10 centavos, 24 moedas de 5 centavos, 15 moedas de 25 centavos e 11 moedas de 50 centavos.

---

6) Considere a seguinte brincadeira:

1) Pense em um número.

2) Adicione 2.

3) Multiplique por 3.

4) Adicione 9.

5) Multiplique por 2.

6) Divida por 6.

7) Subtraia o número com que você começou.

8) O resultado é 5.

E aí, funcionou? Como você explica essa aparente mágica?

Solução:

Bem, para entender a situação, vamos representar o valor desconhecido por x. A seqüência de comandos pode ser equacionada:

1. $x+2$;
2. $3(x+2)$;
3. $3(x+2)+9$;
4. $2[3(x+2)+9]$;
5. $\dfrac{2[3(x+2)+9]}{6}$;
6. $\dfrac{2[3(x+2)+9]}{6}-x$.

O resultado deve ser ?

$$\frac{2[3(x+2)+9]}{6}-x \;=\; \frac{6x+12+18}{6}-x \;=\; x+\frac{30}{6}-x \;=\; 5,$$

é claro ...

Exercícios *para cansar o braço*

a) Calcule, racionalize e simplifique, expressando suas respostas com expoentes positivos. Suponha que todas as letras representam apenas números positivos.

1) $169^{-1/2}=\dfrac{1}{\sqrt{169}}=\dfrac{1}{13}$

2) $\sqrt[3]{-1331}=-\sqrt[3]{1331}=-11$

3) $(125)^{-2/3}=\dfrac{1}{5^2}=\dfrac{1}{25}$

4) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{8}=-2$

5) $\sqrt{\sqrt[3]{343}}\sqrt{7}$

6) $\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$

7) $\sqrt{25}+\sqrt{144}=5+12=17$

8) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{1/3}+\left(\dfrac{1}{27}\right)^{-1/3}=\dfrac{1}{2}+3=\dfrac{7}{2}$

9) $\sqrt{2}+\sqrt{18}=\sqrt{2}+3\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

10) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

11) $\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 10\sqrt{3} - 2\sqrt{12} = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$

12) $5\sqrt{75x^2} - 2\sqrt{12x^2} = 21x\sqrt{3}$

13) $\dfrac{24}{3x^2} = \dfrac{8}{x^2}$

14) $\dfrac{8}{\sqrt[3]{2}} = 4\sqrt[3]{4}$

15) $(a^{-4}b^{-8})^{3/4} = \dfrac{1}{a^3b^6}$

16) $\dfrac{a^2b^{-1/2}c^{1/3}}{a^{-3}b^{1/2}c^{2/3}} = \dfrac{a^5c}{b}$

17) $\frac{1}{3}(x^3+2)^{-2/3} \cdot 3x^2 = \dfrac{x^2\sqrt[3]{x^3+2}}{x^3+2}$

18) $\frac{2}{3}(x^3 - 6x^2)(2x-12) = \dfrac{4x^2(x-6)^2}{3}$

19) $\sqrt[3]{\dfrac{32}{x^2}} - \dfrac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x^3}} = \left(\dfrac{2}{x}\right)^{2/3}$

20) $\dfrac{\sqrt{72a^3}}{3b} - \dfrac{a\sqrt{50a}}{2b} + \dfrac{12a^2}{b\sqrt{2a}} = \dfrac{11a\sqrt{2a}}{2b}$

b) Simplifique efetuando as operações indicadas.

1) $(2x+1)(2x-1) = 4x^2 - 1$

2) $(-2x+3)(x+7) = -2x^2 - 11x + 21$

3) $(\frac{1}{2}x + 4)(x-8) = \dfrac{x^2}{2} - 32$

4) $(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2}) = x - 2$

5) $(\frac{1}{10}x - \frac{1}{100})(x + \frac{1}{10}) = \dfrac{x^2}{10} - \dfrac{1}{1000}$

6) $(x^2+x+9)(x^2-3x-4) = (x^2+x+9)(x-4)(x+1) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 31x - 36$

7) $(y-1)(y^3+y^2+y+1) = y^4 - 1$

8) $(x^{1/3} - 2)(x^{2/3} + 2x^{1/3} + 4) = x - 8$

9) $(x^{2k}+1)(x^{2k}-1) = x^{4k} - 1$

10) $(x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16) = x^5 + 32$

c) Racionalize o denominador e simplifique.

1) $\dfrac{12}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = 6(\sqrt{5} + \sqrt{3})$

2) $\dfrac{20}{3 - \sqrt{2}} = \dfrac{20(3+\sqrt{2}}{7}$

3) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \dfrac{x - \sqrt{xy}}{x - y}$

4) $\dfrac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \dfrac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$

d) Fatore

1) $x^5 - 32 = (x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$

2) $3y^4 - 48 = 3(y-2)(y+2)(y^2+4)$

3) $ax^2 + 15 - 5ax - 3x = (x-5)(ax-3)$

4) $9x^3 - 42x^2 + 49x = x(3x-7)^2$

5) $x^2 - 10x + 24 = (x-4)(x-6)$

6) $25x^2 - 144y^2 = (5x - 12y)(5x + 12y)$

7) $x^3 + 64 = (x+4)(x^2 - 4x + 16)$

8) $a^3x - b^3y + b^3x - a^3y = (a+b)(a^2 - ab + b^2)(x - y)$

9) $9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2$

10) $24a^2 + 25ab + 6b^2 = (3a + 2b)(8a + 3b)$

Se você percebeu alguma dificuldade nessas últimas séries de exercícios, esses de *cansar o braço*, procure praticar mais buscando exercícios semelhantes nos livros disponíveis no pólo, nas estantes em casa, enfim, onde você conseguir. Mais ainda, se você participe de algum grupo de estudos, *passe* alguns desse para seus colegas e vice-versa. Mas, não deixe de praticar!

Semana 03

---

1) Coloque em ordem crescente os números a seguir:

$$1 + \sqrt{3}, \qquad \pi, \quad \frac{40}{13}, \qquad 1 - \sqrt{3}, \qquad \sqrt{13}.$$

Solução: $1 - \sqrt{3} \ < \ 1 + \sqrt{3} \ < \ \dfrac{40}{13} \ < \ \pi \ < \ \sqrt{13}.$

Note que $1 < \sqrt{3} < 2$, pois $1 < 3 < 4$. Assim, $1 - \sqrt{3} < 0$, o único número negativo da lista, é o menor de todos. Além disso, $1 + \sqrt{3} < 1 + 2 = 3$.

Como $\dfrac{40}{13} \approxeq 3.076$ e $\pi \approxeq 3,141592654$, temos $1 - \sqrt{3} < 0 < 1 + \sqrt{3} < 3 < \dfrac{40}{13} < \pi$.

Para estabelecer a última desigualdade, basta notar que $\pi^2 \approxeq 9.869604404 < 13 = \left(\sqrt{13}\right)^2$. Portanto, $\pi < \sqrt{13}$.

---

2) Quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras, justificando sua resposta.

1) Entre dois números racionais sempre há um irracional;

Verdadeira.

Os números irracionais (assim como os racionais) são densos na reta. Isso significa, em particular, que dados dois números reais quaisquer, digamos $x_1 < x_2 \in \mathbb{R}$, existe um número irracional, digamos y tal que $x_1 < y < x_2$.

2) O produto de números irracionais é um número irracional;

Falsa.

Por exemplo, $\sqrt{2}$ é irracional mas $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

3) $\forall b \in \mathbb{R}, \quad |-|b|| = b$;

Falsa.

Por exemplo, se $b = -3$, $|-|b|| = |-|-3|| = |-3| = 3 \neq -3 = b$.

4) $\forall a,\ b \in \mathbb{R}, \quad ||a| - |b|| \geq |a| - |b|$.

Verdadeira.

Veja, $\forall x \in \mathbb{R}, \ |x| \geq x$ pois, no caso $x \geq 0$, ocorre a igualdade, e no caso $x < 0$, $|x| > 0 > x$.

---

3) Determine um número irracional entre os números $\dfrac{17}{13}$ e $1,32$.

Solução: Sabemos que $\dfrac{17}{13} = 1,30769230769230\ldots$ Portanto, qualquer número real da forma $1,31\ldots$ estará entre $\dfrac{17}{13}$ e $1,32$.

Agora, o "pulo do gato".

Queremos determinar um número *irracional* entre $\dfrac{17}{13}$ e $1,32$. Isso dependerá de como preencheremos as infinitas casas decimais que se seguem ao 1.

O que *não* podemos fazer?

Se colocarmos apenas um número finito de casas ou uma série que se repete (dízima periódica), o resultado será um número raciona. Portanto, isso é o que não queremos. Vale qualquer coisa menos essas duas mencionadas.

Por exemplo, podemos usar um mesmo dígito, digamos 2, intercalando-o com um outro qualquer, digamos 3, deixando intervalos cada vez mais longos. Veja:

$$1,3123223222322223222223222222322222223222222223222222222232\ldots$$

Uma outra possibilidade seria preencher o campo com todos os números naturais enfileirados, um após o outro, mas vistos apenas como uma fila de dígitos. Observe:

$$1,311234567891011121314151617181920212223242526272829303132333 4\ldots$$

---

4) Uma certa substância radioativa decai a uma taxa de 50% a cada hora. Num determinado instante há 320g da substância. Quanto restará da substância após 8 horas? Após quantas horas restará menos do que 1 grama da substância?

Solução: Esse é um problema bem fácil. Ele só é interessante no sentido de mostrar como podemos usar a notação matemática adequadamente.

Após uma hora, restará $\frac{1}{2} \times 320$ g da substância. Após duas horas, restará $\frac{1}{2^2} \times 320$g. E assim por diante, até

$$\frac{1}{2^8} \times 320\text{g} \ = \frac{5}{4}\text{g}.$$

Ainda há uma quantidade maior do que 1g da substância. Mas, após mais uma hora, teremos $\frac{5}{8}$g, menos do que 1g.

---

5) Escreva o número $12,34\overline{272}$ como uma fração irredutível e determine a representação decimal do número $\frac{21}{17}$.

Solução:

Colocamos $x = 12,34\overline{272}$. Assim,

$$\begin{aligned} 10^5\,x - 10^2\,x &= 1234272,\overline{272} - 1234,\overline{272} \\ 99900\,x &= 1234272 - 1234 \\ x &= \frac{1233038}{99900} = \frac{616519}{49950}. \end{aligned}$$

$\frac{21}{17} \ = \ 1,\overline{2352941176470588}.$

Esse deve ter dado trabalho...

Exercícios *para cansar o braço*

Resolva as equações a seguir:

a) $|x - 1| = 3$

Se $x - 1 \geq 0$, temos $x - 1 = 3$, cuja solução é $x = 4$. Se $x - 1 < 0$, temos $x - 1 = -3$, cuja solução é $x = -2$.

Interpretando geometricamente, temos que x dista 3 unidades de 1. As possibilidades são -2 e 4.

b) $|2x - 5| = 0$

Neste caso, como $|x| = 0 \iff x = 0$, temos $2x - 5 = 0$, cuja solução é $x = \frac{5}{2}$.

c) $\left|\dfrac{1}{1-x}\right| = 2$

Temos que resolver a equação $|1-x| = \dfrac{1}{2}$ ou $|x-1| = \dfrac{1}{2}$. As soluções são $x = \dfrac{1}{2}$ e $x = \dfrac{3}{2}$, os números que estão a meia unidade de distância de 1.

d) $\dfrac{x}{|x|} = -1$

Neste caso, basta que x seja um número estritamente negativo: $x < 0$.

Resolva as inequações a seguir:

a) $|x-3| \leq 1$

Geometricamente, queremos os pontos que estão a uma distância menor ou igual a 1 unidade do número 3. Isso inicia em 2 e vai até 4, incluindo os extremos. Solução: $[2,\ 4]$.

b) $|4-x| < 2$

Podemos reescrevê-la como $|x-4| < 2$. De maneira análoga ao item anterior, temos a solução $(2,\ 6)$. A diferença é que não incluímos os extremos dos intervalos na solução.

c) $|x+2| \geq 4$

Neste caso, queremos os pontos que estão a uma distância maior ou igual a 4 do número -2: $|x-(-2)| \geq 4$. A solução é a união de dois intervalos infinitos: $(-\infty,\ -6] \cup [2,\ +\infty)$. Isso é, os números que estão à esquerda de -6, incluindo o extremo -6 ou os números que estão à direita de 2, incluindo 2.

d) $|3x-6| < 9$

Aqui, antes resolver, fazemos $|x-2| < 3$, cuja solução é $(-1,\ 5)$.

Você poderia justificar a mudança na inequação?

Fatore:

1) $-7x + 49 = -7(x-7)$

2) $5xy + 25y^2 + 10y^5 = 5y(x + 5y + 2y^4)$

3) $x^2 - 36 = (x-6)(x+6)$

4) $4x^2 - 121 = (2x11)(2x+11)$

5) $(a+2)^2 - 25b^2 = (a+2-5b)(a+2+5b)$

6) $x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9)$

7) $8a^3 - \dfrac{1}{125} \;=\; \dfrac{1}{125}\,(10z-1)(100a^2+10a+1)$

8) $3x^2 - 48k^4 \;=\; 3\,(x-4k^2)(x+4k^2)$

9) $2hx^2 - 8h^3 \;=\; 2h(x-2h)(x+2h)$

10) $4x^2 + 12xy + 9y^2 \;=\; (2x+3y)^2$

11) $10x^2 - 39x + 14 \;=\; (5x-2)(2x-7)$

12) $a^6 - 2a^3 + 1 \;=\; (a^3-1)^2 \;=\; (a-1)^2(a^2+a+1)^2$

13) $12x^2y - 22xy^2 - 60y^3 \;=\; 2y(2x+3y)(3x-10y)$

Simplifique as expressões a seguir reduzindo-as aos menores termos.

1) $\dfrac{4b^2-4ab}{3a^2-3ab} \;=\; \dfrac{4b(b-a)}{3a(a-b)} \;=\; -\dfrac{4b}{3a}$

2) $\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-x-2} \;=\; \dfrac{(x+5)(x+1)}{(x+1)(x-2)} \;=\; \dfrac{x+5}{x-2}$

3) $\dfrac{x^2-4}{x^4-16} \;=\; \dfrac{x^2-4}{(x^2-4)(x^2+4)} \;=\; \dfrac{1}{x^2+4}$

4) $\dfrac{x+y}{x-y} \cdot \dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2} \;=\; \dfrac{x+y}{x-y} \cdot \dfrac{(x-y)^2}{(x-y)(x+y)} \;=\; 1$

Combine e simplifique as expressões a seguir:

1) $\dfrac{2}{3x^2} - \dfrac{1}{2x} \;=\; \dfrac{4-3x}{6x^2}$

2) $\dfrac{7}{x-2} + \dfrac{3}{x+2} \;=\; \dfrac{2(5x+4)}{x^2-4}$

3) $\dfrac{5}{(x-1)(x+2)} - \dfrac{8}{4-x^2} \;=\; \dfrac{13x-18}{(x^2-4)(x-1)}$

4) $\dfrac{1-4x}{2x+5} + \dfrac{8x^2-16x}{4x^2-25} - \dfrac{1}{2x-5} \;=\; \dfrac{2}{2x+5}$

Resolva as inequações a seguir:

1) $x - 3 \;<\; 2x + 5$

Essa é direta: $-x < 8$ ou $x > -8$. Solução: $(-8, +\infty)$.

2) $\dfrac{1}{x-3} \leq 0$

Aqui, a solução é $x < 3$. Apesar da igualdade na inequação, o extremos do intervalo deve ser excluído pois anula o denominador. Resposta: $(-\infty, 3)$.

3) $\dfrac{x}{2x-5} < 0$

$(0, 5/2)$

4) $\dfrac{x+3}{4-x} \geq 0$

$[-3, 4)$

As duas últimas requerem a análise de sinais...

Semana 04

---

1) Quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras, justificando sua resposta.

1. A união de dois subconjuntos densos da reta é um subconjunto denso;

   Verdadeiro. Na verdade, a união de um subconjunto denso da reta com qualquer outro subconjunto da reta já resulta em um subconjunto denso da reta.

2. A união de dois subconjuntos discretos da reta é um conjunto discreto;

   Falso. Os conjuntos $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots, \}$ e $\{0\}$ são ambos subconjuntos discretos da reta mas a união deles não é mais um subconjunto discreto, pois agora é impossível isolar o elemento 0 dos outros elementos.

3. Se $A \subset \mathbb{R}$ é um subconjunto discreto, então $A \cap [a, b]$ é um subconjunto discreto na reta;

   Verdadeiro. Note que $A \cap [a, b]$ é um subconjunto de A e todo subconjunto de um conjunto discreto também é um subconjunto discreto da reta.

4. Se $A \subset \mathbb{R}$ é um subconjunto denso, então $A \cap [a, b]$ é um subconjunto denso da reta;

   Falso. O conjunto $A \cap [a, b]$ está contido no intervalo $[a,]$ e, portanto, não é mais um subconjunto denso da reta. Realmente, $(a \cap [a, b]) \cap (b+1, b+2) = \varnothing$.

---

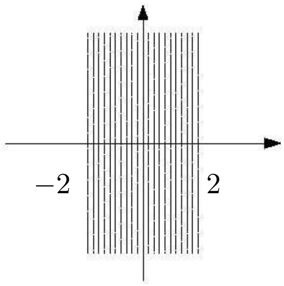
2) Determine o conjunto solução das equações e inequações a seguir.

a) $\left\|x - \dfrac{2}{3}\right\| = 4$	**Solução:** $x = 10/3$ ou $x = 14/3$
b) $\|x+2\| = \sqrt{2}$	**Solução:** $x = -2 - \sqrt{2}$ ou $x = -2 + \sqrt{2}$
c) $\|x - \pi\| < \dfrac{\pi}{2}$	**Solução:** $x \in (\pi/2, 3\pi/2)$
d) $\|2x - 3\| < \|4 - x\|$	**Solução:** $x \in (-1, 7/3)$

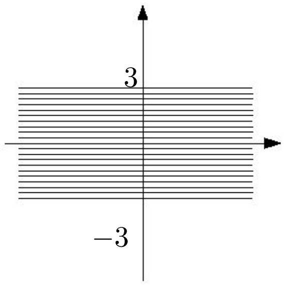
3) Represente graficamente cada um dos seguintes subconjuntos do plano:

a) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; |x| \leq 2 \}$; c) $C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; -1 \leq x \leq 2, \quad -2 \leq y \leq 3 \}$;

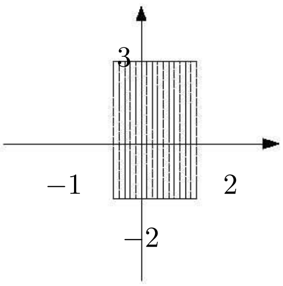
b) $B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; |y| \leq 3 \}$; d) $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; |x| = 1, \quad 0 \leq y \leq 2 \}$;



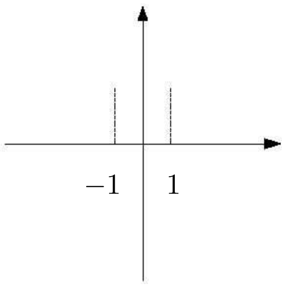
a)



b)



c)

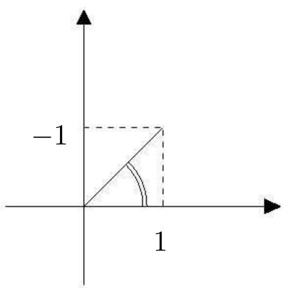


d)

---

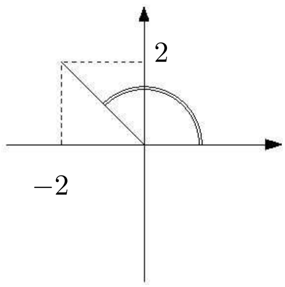
4) Determine as coordenadas polares dos pontos a seguir e represente-o no plano.

$A = (1,1)$



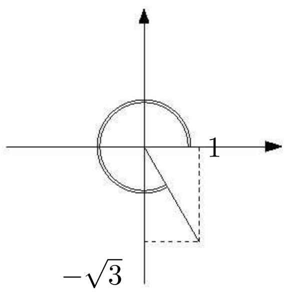
Neste caso, a distância do ponto até a origem é $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e o ângulo formado com a semi-reta positiva do eixo Ox é 45^{o}. Logo, as coordenadas polares do ponto A são $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

$B = (-2,2)$



Aqui temos uma situação semelhante a anterior, mas mudamos de quadrante. A distância do ponto até a origem agora é $2\sqrt{2}$ e o ângulo é $90^{\text{O}} + 45^{\text{O}}$. Assim, as coordenadas polares do ponto B são $\left(2\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

$C = (1, -\sqrt{3})$



Neste caso, a distância do ponto até a origem é $\sqrt{1+3} = 2$. Para determinar o ângulo precisamos nos lembrar daqueles ângulos nobres, $30^{\text{O}},\ 60^{\text{O}}$ e seus múltiplos. Veja, $\operatorname{sen}(30^{\text{O}}) = \dfrac{1}{2}$ e $\cos(30^{\text{O}}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Assim concluímos que este ângulo excede 270^{O} por mais 30^{O}. Concluímos que as coordenadas polares do ponto C são $\left(2, \dfrac{5\pi}{3}\right)$.

---

5) Recomponha o(s) quadrado(s) em cada um dos casos a seguir.

1) $x^2 + 6x + 10$

$(x+3)^2 + 1$

2) $x^2 - 4x + 2$

$(x-2)^2 - 2$

3) $z^2 - 8z + 17$

$(z-4)^2 + 1$

4) $x^2 - x + 2$

$(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

5) $x^2 + x - \frac{5}{4}$

$(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2}$

6) $x^2 + 8x + y^2 - 4y + 19$

$(x+4)^2 + (y-2)^2 - 1$

7) $x^2 + 2x - y^2 - 6y - 12$

$(x+1)^2 - (y+3)^2 - 4$

8) $x^2 - 3x + \frac{5}{2}$

$(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}$

Semana 05

---

1) Calcule o coeficiente angular, caso exista, da reta determinada pelos pontos dados.

a) $(3,\, 4);\ (2,\, -5)$

Solução: Aqui devemos usar a fórmula $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Neste caso, obtemos,

$$m = \frac{-5-4}{2-3} = 9.$$

b) $(4,\, 3);\ (-5,\, 2)$ $\quad m = \dfrac{1}{9}$

c) $(-2,\, 4);\ (-2,\, 17)$ $\quad$ Não há coeficiente angular. A reta é vertical: $x = -2$.

d) $(5,\, -3);\ (15,\, -3)$ $\quad m = 0$. A reta é horizontal: $y = -3$.

e) $(-9,\, 0);\ (-3,\, 12)$ $\quad m = 2$

f) $(2,\, -\frac{3}{4});\ (-\frac{1}{3},\, \frac{2}{3})$ $\quad m = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{-\frac{1}{3} - 2} = -\dfrac{17}{28}$

---

2) Esboce o gráfico da reta de coeficiente angular m e que contém o ponto dado.

a) $m = -1;\ (2,\, 3)$

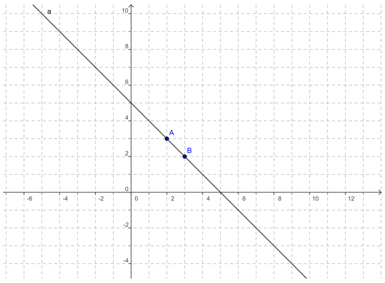
b) $m = \frac{3}{4};\ (0,\, 2)$

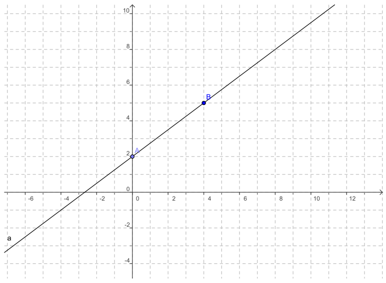
c) $m = 2;\ (1,\, 1)$

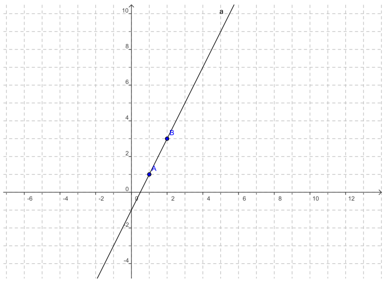
d) $m = -\frac{1}{3};\ (-2,\, 3)$

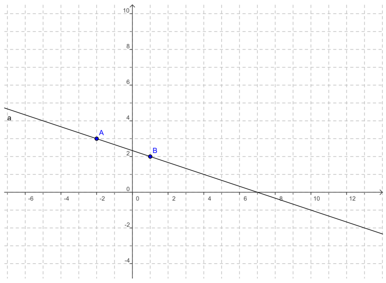
e) $m = 0;\ (3,\, 1)$

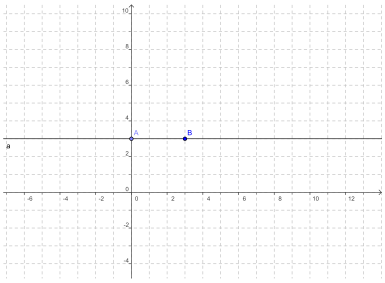
f) $m = -2;\ (0,\, 4)$

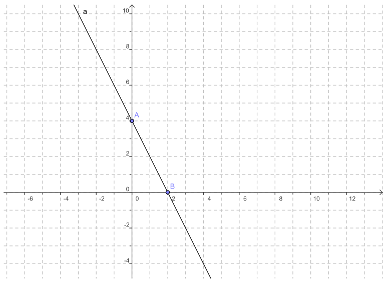
a) 

b) 

c) 

d) 

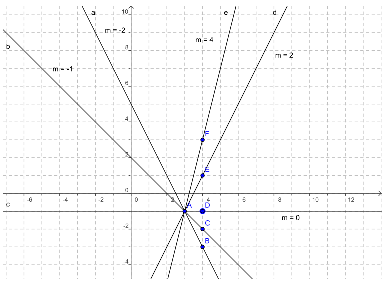
e) 

f) 

---

3) Esboce cada uma das retas com coeficiente angular dado a seguir e tais que o ponto $(3, -1)$ é comum a todas elas.

$m = -2$; $m = -1$ $m = 0$, $m = 2$, $m = 4$



---

4) Determine a equação da reta determinada pelos pontos dados.

a) (1, 2); (0, −2)

Podemos calcular o coeficiente angular como na primeira série de exercícios e, depois, usar a fórmula

$$\boxed{y - y_1 \;=\; m\,(x - x_1)}$$

$$m \;=\; \frac{2+2}{1} \;=\; 4$$

$$\begin{aligned} y - 2 &= 4\,(x-1) \\ y &= 4x - 4 + 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{y = 4x - 2}$$

Podemos, alternativamente, usar o determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \;=\; 0$$

$$2x - 2 + 2y + 2x - y = 0$$
$$y = 4x - 2$$

b) (1, 1); (3, −2) $\qquad 3x + 2y = 5$

c) (1, 4); (−1, 3) $\qquad x - 2y = -7$

d) (1, 0); (1, 3) $\qquad x = 1$

e) (3, 0); (6, 0) $\qquad y = 0$

f) (1, −2); $(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$ $\qquad y = -2x$

Exercícios para cansar o braço

a) $x^2 - 2x + 4 =$

$(x-1)^2 + 3$

b) $z^2 - 8z + 8 =$

$(z-4)^2 - 8$

c) $t^2 - 2at + 3a^2 =$

$(t-a)^2 + 2a^2$

d) $y^2 - 2\sqrt{2}\,y - 1 =$

$(y-\sqrt{2})^2 - 3$

e) $4a^2 - 4a + 4 =$

$(2a-1)^2 + 3$

f) $x^4 - 4x^2 - y^2 - 2y + 3 =$

$(x^2-2)^2 - (y+1)^2$

g) $x^2 - x - y^2 - 3y - 5 =$

$(x-1/2)^2 - (y+3/2)^2 - 3$

h) $z^2 + t^2 - 4z + 6t + 1 =$

$(z-2)^2 + (t+3)^2 - 12$

Semana - 06

---

1) Determine a equação da reta que é paralela a reta r e contém o ponto A.

1) $r:\ y = 2x - 3;\qquad A:\ (3,0)$

Solução:

$m = 2;$ A equação é da forma $y - 0 = 2\,(x-3)$

$$\boxed{y = 2x - 6}$$

2) $r:\ 2x - 3y + 2 = 0;\qquad A:\ (1,-2)$

Solução:

Reescrevendo a equação $2x - 3y + 2 = 0$, obtemos $y = \frac{2}{3}\,x + \frac{2}{3}$. A equação procurada é da forma $y + 2 = \frac{2}{3}\,(x-1)$.

$$\boxed{y = \tfrac{2}{3}\,x - \tfrac{8}{3}}$$

3) $r:\ y = \dfrac{-2}{3}x + \dfrac{4}{3};\qquad A:\ (0,-3)$

Solução:

$m = \frac{-2}{3}$. A equação procurada é da forma $y + 3 = \frac{-2}{3}\,(x-0)$

$$\boxed{y = -\tfrac{2}{3}\,x - 3}$$

4) r contém $(2,5)$ e $(-1,3)$; $\quad A:\ (1,-\frac{2}{3})$

Solução:

Calculamos o coeficiente das retas pela fórmula $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$:

$m = \dfrac{3-5}{-1-2} = \dfrac{2}{3}$. Assim, a equação procurada é da forma $y + \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}\,(x-1)$

$$\boxed{y = \tfrac{2}{3}\,x + \tfrac{2}{3}}$$

---

2) Determine a equação da reta que é perpendicular à reta r e que contém o ponto A:

1) $r : y = -x + 4$; $\quad A:\ (-3,1)$

Solução:

$m = -\dfrac{1}{-1} = 1$. A equação procurada é da forma $y - 1 = (x+3)$

$$\boxed{y = x + 4}$$

2) $r : 2x - 3y + 5 = 0$; $\quad A:\ (-2,2)$

Solução:

Reescrevendo a equação $2x - 3y + 5 = 0$ na forma $y = \dfrac{2}{3}\,x + \dfrac{5}{3}$, concluímos que seu coeficiente angular é $\dfrac{2}{3}$. Assim, o coeficiente angular da reta em questão é $m = -\dfrac{1}{\frac{2}{3}} = -\dfrac{3}{2}$. Assim, a equação procurada tem a forma $y - 2 = -\frac{3}{2}\,(x+2)$

$$\boxed{y = -\tfrac{3}{2}\,x - 1}$$

3) $r : y = -\dfrac{1}{3}\,x + \dfrac{5}{3}$; $\quad A : (0,-4)$

Solução:

O coeficiente da reta procurada é $m = -\dfrac{1}{-\frac{1}{3}} = 3$. A equação é da forma $y + 4 = 3\,(x-0)$

$$\boxed{y = 3x - 4}$$

4) r contém os pontos $(-1, 3)$ e $(0, -2)$; $\quad A : (-2, 1)$

Solução:

O coeficiente angular da reta que contém os pontos $(-1, 3)$ e $(0, -2)$ é:
$\dfrac{-2-3}{0+1} = -5$. Portanto, o coeficiente angular em questão é $\frac{1}{5}$. Sua equação tem a forma $y - 1 = \frac{1}{5}(x + 2)$

$$\boxed{y = \tfrac{1}{5}x + \tfrac{7}{5}}$$

---

3) Determine a equação da reta paralela à reta $y + x = 4$ e contém o ponto comum às retas $y = x$ e $y = 4$.

Solução:

O ponto comum às retas $y = x$ e $y = 4$ tem coordenadas $(4, 4)$. Assim, a equação procurada tem a forma $y - 4 = -(x - 4)$

$$\boxed{y = -x + 8}$$

---

4) Determine a equação da reta perpendicular à reta $y = 4 - 2x$ e que contém o ponto comum às retas $y + x = 2$ e $2x - y = 1$.

Solução:

O ponto comum às retas $y + x = 2$ e $2x - y = 1$ é a solução do sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

que é $x = 1$ e $y = 1$. Assim, a reta procurada tem coeficiente angular $\frac{1}{2}$ e contém o ponto $(1, 1)$. Essa reta tem a forma $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$

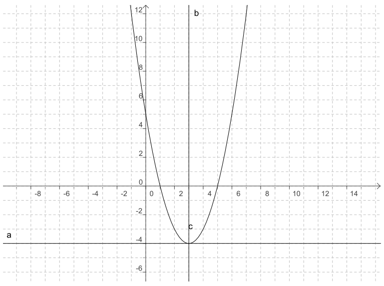
$$\boxed{y = \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2}}$$

5) Escreva as equações a seguir na forma $y - y_0 = a\,(x - x_0)^2$ e esboce os gráficos das correspondentes parábolas.

1) $y = x^2 - 6x + 5$

$$y = x^2 - 6x + 9 - 9 + 5$$

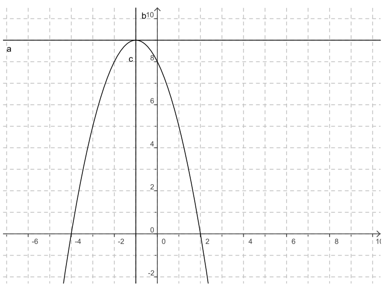
$$\boxed{y + 4 = (x-3)^2}$$



2) $y = 8 - x^2 - 2x$

$$y = -(x^2 + 2x + 1 - 1) + 8$$

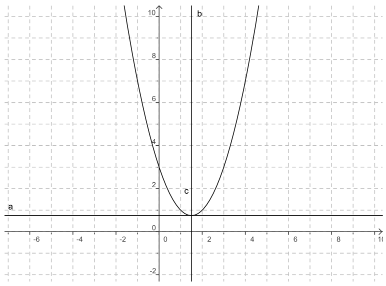
$$\boxed{y - 9 = -(x+1)^2}$$



3) $y = x^2 - 3x + 3$

$$y = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 3$$

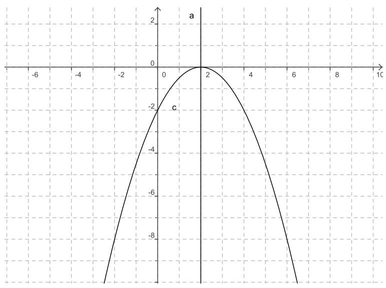
$$\boxed{y - \tfrac{3}{4} = (x - \tfrac{3}{2})^2}$$



4) $y = -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 2$

$$y = -\frac{1}{2}\,(x^2 - 4x + 4 - 4) - 2$$

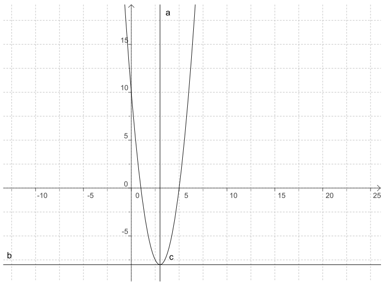
$$\boxed{y = -\tfrac{1}{2}\,(x-2)^2}$$



5) $y = 2x^2 - 12x + 10$

$$y - 10 = 2\,(x^2 - 6x + 9 - 9)$$

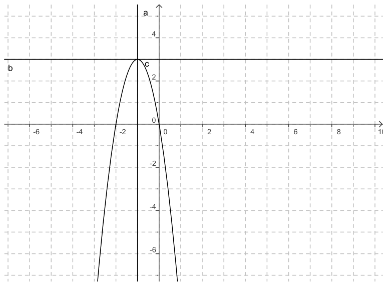
$$\boxed{y = 2\,(x-3)^2 - 8}$$



$$\boxed{y-3=-3\,(x+1)^2}$$

6) $y \;=\; -3x^2-6x$

$$y=-3\,(x^2+2x+1-1)$$



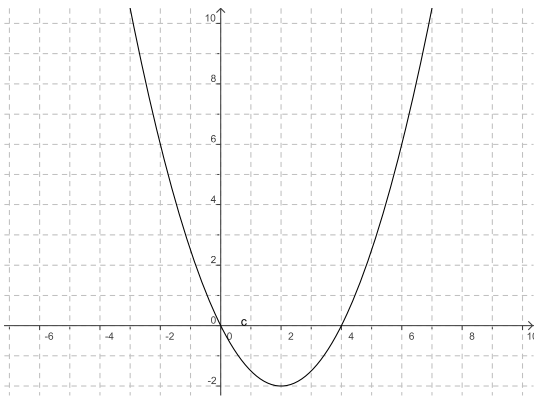
---

6) Determine as constante a, b e c tais que a parábola $y=ax^2+bx+c$ contenha os pontos $(6,6)$, $(2,-2)$ e $(0,0)$.

Solução:

Como $(0,0)$ pertence à parábola, $c=0$. Agora, as duas outras informações geram as equações $6=36a+6b$ e $-2=4a+2b$.

Resolvendo o sistema, encontramos os valores de a e b e obtemos a equação da parábola: $y=\dfrac{x^2}{2}-2x$. Veja seu gráfico a seguir:



Semana - 07

Seção Nostalgia

---

1) Quais dos números a seguir são racionais?

a) $\dfrac{2-\pi}{3\,\pi} \;=\; \dfrac{2}{3\,\pi} - \dfrac{1}{3}$

Número irracional, soma de irracional com um racional. Por que é mesmo que o inverso de um irracional é irracional?

b) $0,1715715715715715\ldots$

Número racional, dízima periódica.

c) $(1+\sqrt{2})^4 = 17 + 12\sqrt{2}$

Número irracional, soma de racional com irracional.

d) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}-\sqrt{80}} == -1$, pois $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ e $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

Assim, o número é racional.

e) $\sqrt{14641} = 121$, racional.

f) $0,1010010001000010000010000001\ldots$

Irracional, pois não há um padrão de repetição.

---

2) Resolva a inequação a seguir.

$$\frac{x-1}{5x-2x^2+3} \leq 0$$

Resposta:

$$(\frac{-1}{2},\, 1] \cup (3,\, +\infty)$$

---

3) Resolva as equações a seguir.

a) $|2-x| = 7$;

Resposta:

$$x = 9 \qquad \text{ou} \qquad x = -5$$

b) $|x-1| - 4 = 5 - |x+3|$; **Resposta:**

$$x = \frac{-11}{2} \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{7}{2}$$

c) $2x^2 - 7x - 13 = 3x + 15$;

Resposta:

$$x = -2 \qquad \text{ou} \qquad x = 7$$

d) $\sqrt{2^x} = 64$;

Resposta:

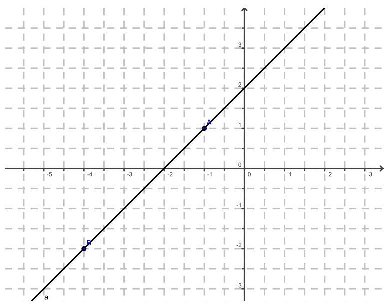
$$x = 12$$

---

4) Determine as equações das retas determinadas pelas condições a seguir.

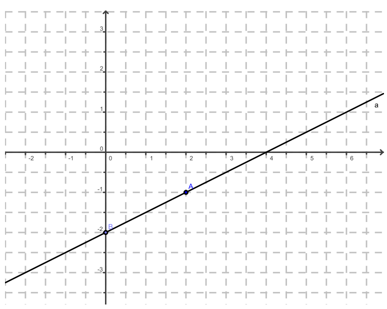
1) Contém os pontos $(-1,\ 1)$ e $(-4,\ -2)$;

Resposta: A reta $y = x + 2$.



2) Tem coeficiente angular positivo, contém o ponto $(2,\ -1)$ e corta o eixo Oy a duas unidades de distância da origem;

Resposta: A reta $y = \dfrac{x}{2} - 2$.



3) Contém o ponto $(-1, 0)$ e é perpendicular à reta $2x - 3y + 5 = 0$.

Resposta: Para ser perpendicular a reta $2x - 3y + 5 = 0$, sua equação deve ter a forma $3x + 2y + c = 0$.

Como deve conter o ponto $(-1,\ 0)$, ele deve satisfazer a equação e isso determina c: $-3 + 0 + c = 0$. Assim, $c = 3$ e a equação procurada é

$$3x + 2y + 3 = 0.$$

5) Qual é o menor inteiro n tal que $n\sqrt{2} > \sqrt{19}$?

Resposta:

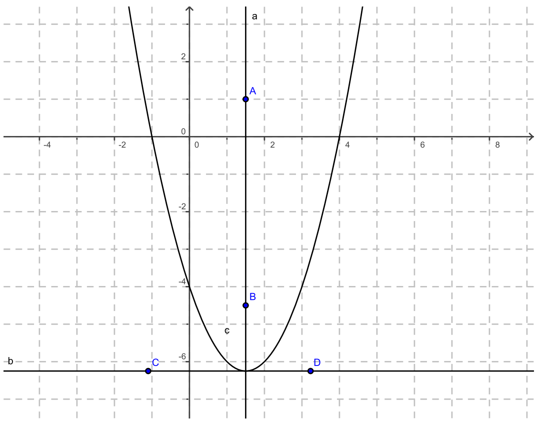
$$n = 4$$

Seção novidades

---

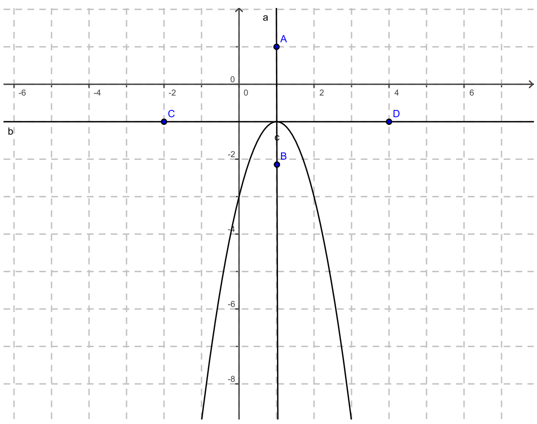
6) Identifique cada uma das curvas determinadas pelas equações a seguir e esboce-as.

1) $y \;=\; x^2 - 3x - 4$



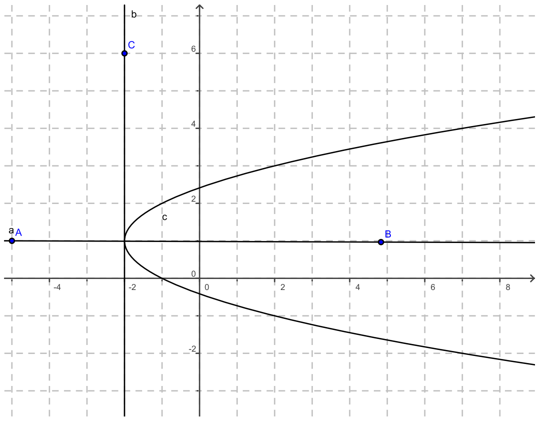
$$y + 25/4 = (x - 3/2)^2$$

2) $y \;=\; 4x - 2x^2 - 3$



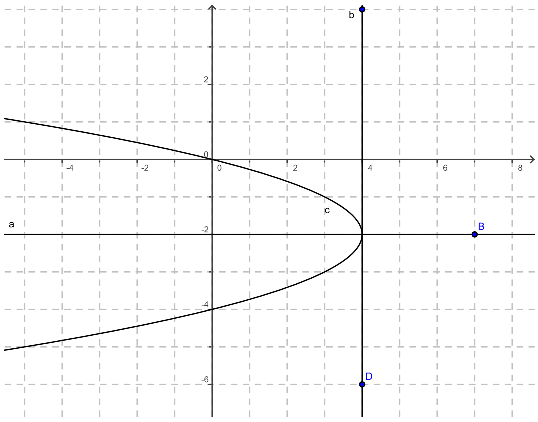
$$y + 1 = -2(x - 1)^2$$

3) $x \;=\; y^2 - 2y - 1$



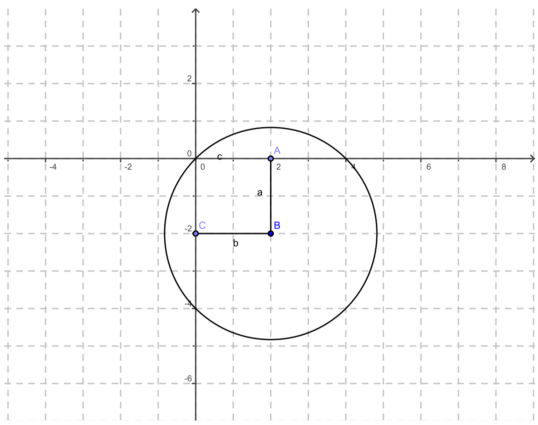
$x + 2 = (y - 1)^2$

4) $x = -y^2 - 4y$



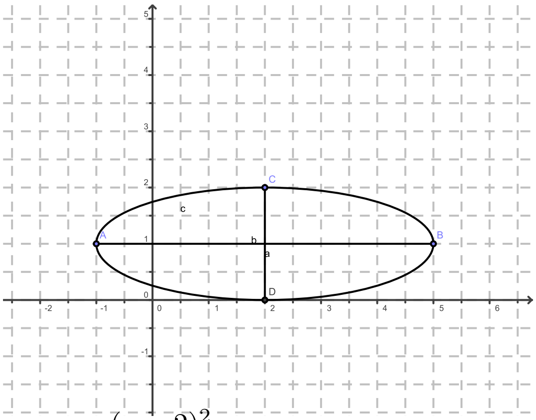
$x - 4 = -(y + 2)^2$

5) $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$



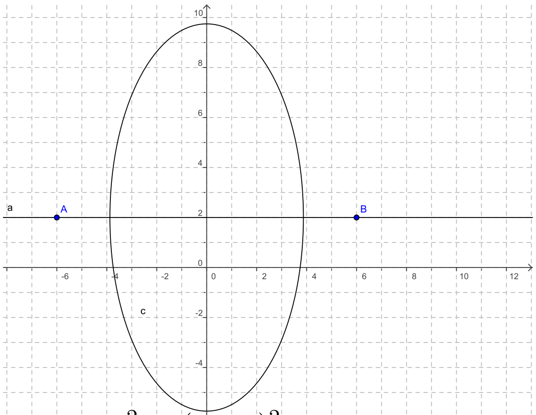
$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$

6) $x^2 + 9y^2 - 4x - 18y + 4 = 0$



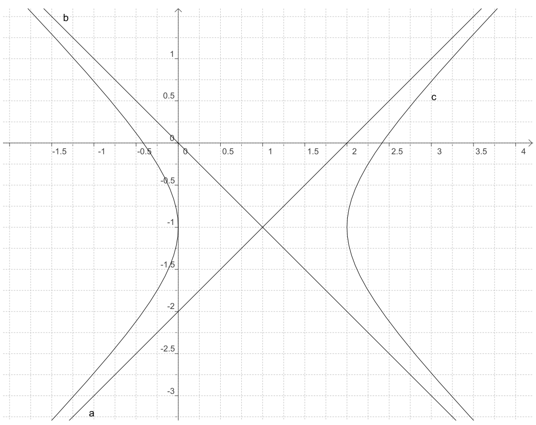
$$\frac{(x-2)^2}{9}+(y-1)^2=1$$

7) $4x^2+y^2-4y=56$



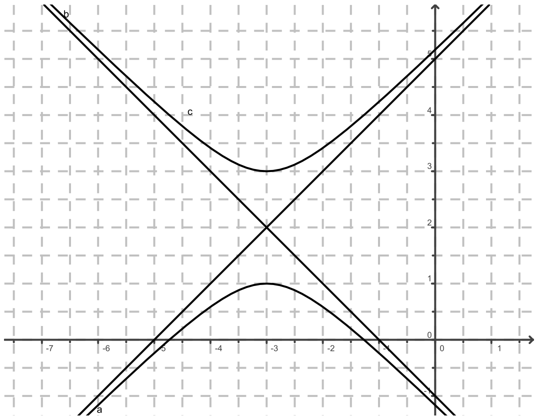
$$\frac{x^2}{15}+\frac{(y-2)^2}{60}=1$$

8) $x^2-y^2-2x-2y=1$



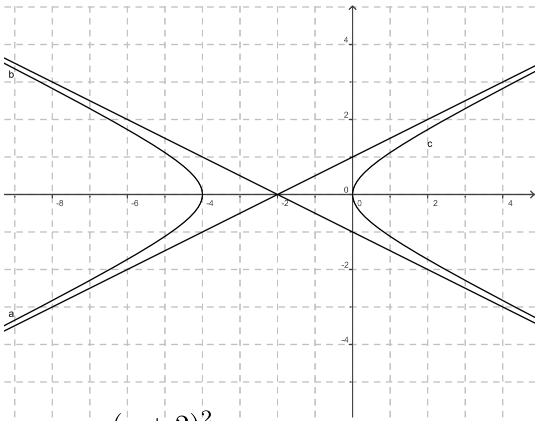
$$(x-1)^2-(y+1)^2=1$$

9) $y^2 - x^2 - 6x - 4y = 6$



$$-(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$$

10) $x^2 - 4y^2 + 4x = 0$



$$\frac{(x+2)^2}{4} - y^2 = 1$$

---

7) Uma bólido desloca-se numa trajetória cujo formato é uma parábola, partindo de seu vértice, o ponto $(1, -1)$, na direção noroeste. (Estamos considerando que o eixo Oy está na direção Sul-Norte e Ox na direção Oeste-Leste.) Sabe-se que o eixo de simetria da trajetória é uma reta na direção Sul-Norte e que a velocidade do bólido na direção Ox é constante 1 unidade por segundo. Após 1 segundo da partida, ele se encontra na posição $(2, 0)$. Determine a posição do bólido 3 segundos após a partida.

Solução:

A equação da parábola deve ter a forma $y + 1 = a\,(x-1)^2$ pois seu eixo de simetria é vertical e o vértice ocorre no ponto $(1, -1)$.

Para determinar a, basta observar que $(2,\, 0)$ deve satisfazer a equação. Assim $1 = a\,(2-1)^2$, que implica $a = 1$.

A equação da trajetória é $y + 1 = (x - 1)^2$.

Após 3 segundos a coordenada x da posição é do bólido é $x = 4$. Substituindo na equação, obtemos $y = 8$. A posição do bólido após 3 segundos da partida é o ponto $(4,\, 8)$.

---

8) Um construtor de pistas de circuito fechado foi requisitado para construir uma pista no formato elíptico. Essa pista deve ocupar a maior área de um retângulo de 3 por 1 km.

O construtor imaginou um sistema de coordenadas cuja origem ocupa (digamos) o canto inferior da esquerda e calculou a equação da elipse que determina a parte externa da pista. Qual equação ele encontrou?

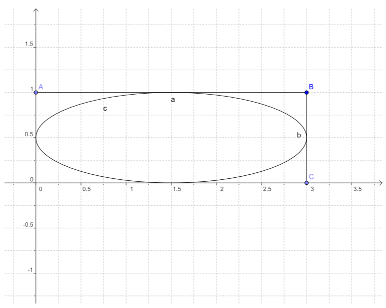
Uma árvore ocupa a posição $\left(\frac{1}{5},\, \frac{1}{5}\right)$. Sem levar em consideração questões de segurança, será necessário cortar a árvore para construir a pista ou não?

Solução:

A equação deve ter a forma

$$\frac{(x - 3/2)^2}{9/4} + \frac{(y - 1/2)^2}{1/4} = 1$$

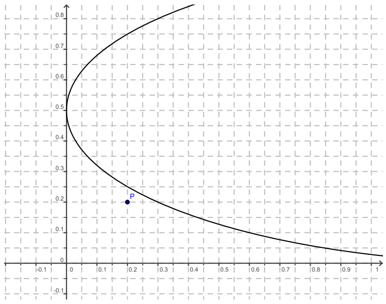
e o esboço da elipse que circundará a pista é



Substituindo $(1/5,\, 1/5)$ na parte esquerda da equação, obtemos:

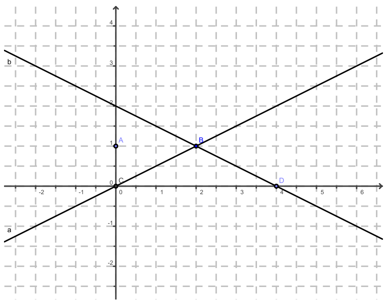
$$\frac{(1/5 - 3/2)^2}{9/4} + \frac{(1/5 - 1/2)^2}{1/4} = \frac{10}{9} > 1.$$

Isso quer dizer que a árvore está do lado de fora da pista, mas bem na *beiradinha*…



9) Determine a equação da hipérbole que contém o ponto (0, 1), cujas assíntotas têm coeficientes angulares $1/2$ e $-1/2$ e cujo centro é o ponto $(2, 1)$.

Solução: Colocando as informações num esboço:



A hipérbole deve ter equação do seguinte tipo:

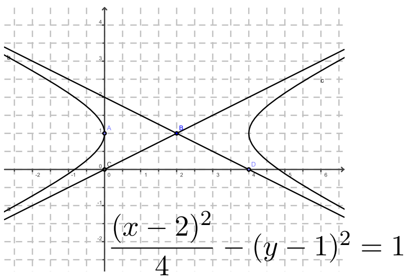
$$\frac{(x-2)^2}{4} - (y-1)^2 = a > 0$$

pois deve ser uma translação de uma hipérbole de equação

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = a > 0,$$

que corta o eixo Ox no ponto $(-2, 0)$, não cortando assim o eixo Oy.

Para determinar o valor de a basta substituir $(0, 1)$ na equação, obtendo $a = 1$.



Semana 08

1) Escreva o número racional $0.\overline{714285}$ na forma $\dfrac{p}{q}$, com $q \neq 0$.

Solução:

Aqui, o truque é fazer $x = 0.\overline{714285}$ e notar que

$$1000000x - x = 714285,$$

que nos dá $x = \dfrac{714285}{999999}$. A surpresa é que $\dfrac{714285}{999999} = \dfrac{5}{7}$.

---

2) Simplifique a expressão

$$\frac{\sqrt[3]{x} - 3}{x - 27}.$$

Solução:

Neste caso, devemos lembrar a fórmula $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ para fatorar o improvável

$$x - 27 = (x^{1/3} - 3)\,(x^{2/3} + 3x^{1/3} + 9).$$

Isso nos dá

$$\frac{x^{1/3} - 3}{x - 27} = \frac{x^{1/3} - 3}{(x^{1/3} - 3)\,(x^{2/3} + 3x^{1/3} + 9)} = \frac{1}{x^{2/3} + 3x^{1/3} + 9}.$$

Esse parece mais pesado!!

---

3) Racionalize $\dfrac{2}{\sqrt{3} - 1}$.

Solução:

$$\frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)\,(\sqrt{3} + 1)} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = \sqrt{3} + 1$$

---

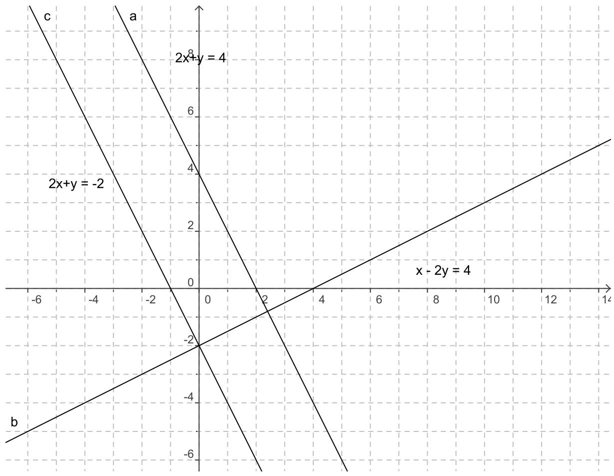
4) Determine as equações das retas paralela e perpendicular à reta de equação $2x + y = 4$ cuja interseção com o eixo Oy ocorre no ponto $(0, -2)$.

Solução:

As retas têm equações $2x + y = c$ e $-x + 2y = d$, respectivamente. Para determinar as constantes c e d, devemos substituir $(0, -2)$ nas equações, obtendo

$-2 \; = \; c$ e $2 \times (-2) \; = \; d$.

Portanto, a reta paralela tem equação $2x + y \; = \; -2$ e a reta ortogonal tem equação $2y - x = -4$. Veja os esboços das retas:



---

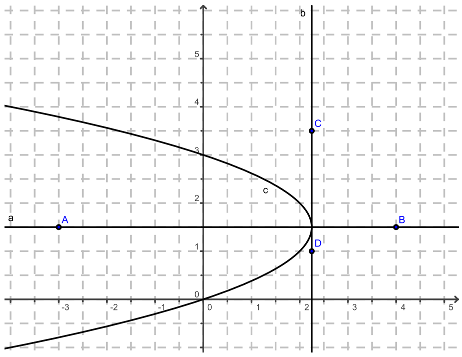
5) Identifique cada uma das curvas determinadas pelas equações a seguir e esboce-as.

1) $y^2 + x - 3y = 0$

$$\begin{aligned} x &= -y^2 + 3y \\ x &= -(y^2 - 3y + \frac{9}{4}) + \frac{9}{4} \\ x - \frac{9}{4} &= -\,(y - \frac{3}{2})^2 \end{aligned}$$

A curva é uma parábola de vértice no ponto $(\frac{9}{4},\, \frac{3}{2})$, com eixo de simetria na reta horizontal $y = \frac{3}{2})$, com a concavidade voltada para Oeste, devido ao sinal negativo em frente a $(y - \frac{3}{2})^2$.

Você deve ter notado que os pontos $(0,\, 0)$ e $(0,\, 3)$ pertencem à curva.

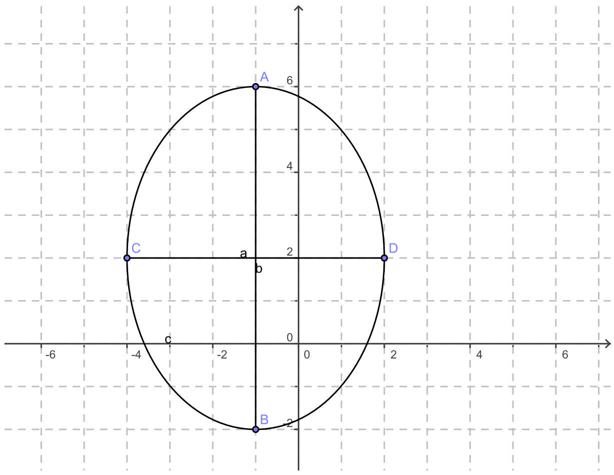


2) $16x^2 + 32x + 9y^2 - 36y = 92$

$$\begin{aligned} 16x^2 + 32x + 9y^2 - 36y &= 92 \\ 16(x^2 + 2x) \; + \; 9(y^2 - 4y) &= 92 \\ 16(x^2 + 2x + 1) \; + \; 9(y^2 - 4y + 4) &= 92 + 16 + 36 \\ 16(x+1)^2 + 9(y-2)^2 &= 144 \end{aligned}$$

$$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1.$$

A curva é uma elipse de centro no ponto $(-1, 2)$, com braço menor 3 na direção x e braço maior 4, na direção y.

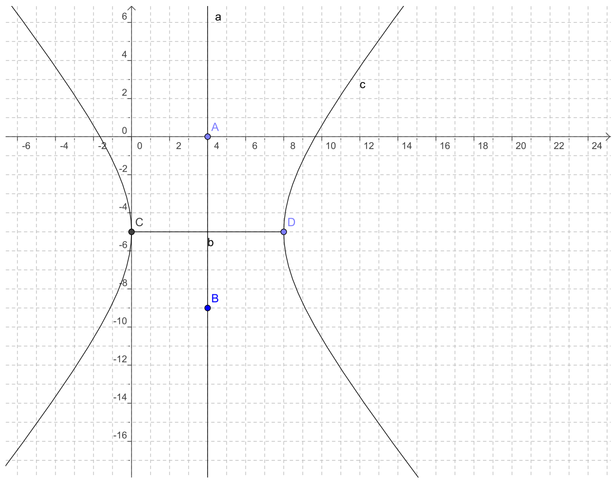


3) $25x^2 - 200x - 16y^2 - 160y = 400$

$$\begin{aligned} 25x^2 - 200x - 16y^2 - 160y &= 400 \\ 25(x^2 - 8x) \; - \; 16(y^2 + 10y) &= 400 \\ 25(x^2 - 8x + 16) \; - \; 16(y^2 + 10y + 25) &= 400 + 400 - 400 \\ 25(x-4)^2 - 16(y+5)^2 &= 400 \end{aligned}$$

$$\frac{(x-4)^2}{16} - \frac{(y+5)^2}{25} = 1.$$

A curva é uma hipérbole de centro no ponto $(4, -5)$, com eixo de simetria a reta vertical $x = 4$. Os pontos $(0, -5)$ e $(8, -5)$ satisfazem a equação e, portanto, pertencem à hipérbole.



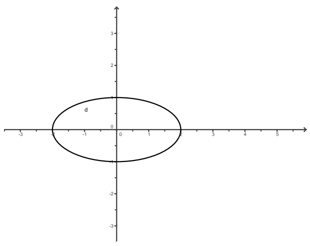
Em busca da cônica perdida

1) Usando o quadro acima, identifique o tipo de cônica correspondente à equação:

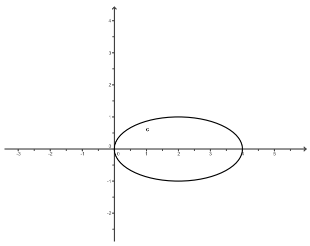
Equação	Tipo de Curva
$5x^2 - 13y^2 + 4x - 5y + 12 = 0$	Hipérbole
$x^2 + 12y^2 - 4x + 2y - 12 = 0$	Elipse
$x^2 + 3x + y - 4 = 0$	Parábola
$y^2 - 5x + 4y + 14 = 0$	Parábola
$4x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 17 = 0$	Circunferência
$4x^2 - 12y^2 + 20x + 5 = 0$	Hipérbole
$x^2 + 4y^2 + 2x + 12 = 0$	$\varnothing$

2) Identifique e faça um esboço de cada uma das cônicas a seguir:

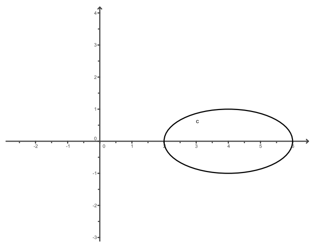
Equação	Tipo de Curva
$x^2 + 4y^2 = 4$	Elipse
$x^2 + 4y^2 - 4x = 0$	Elipse
$x^2 + 4y^2 - 8x = -12$	Elipse
$x^2 - y^2 - 2x = 0$	Hipérbole
$x^2 - y^2 - 6x = -8$	Hipérbole
$x^2 - y^2 - 8x = -15$	Hipérbole



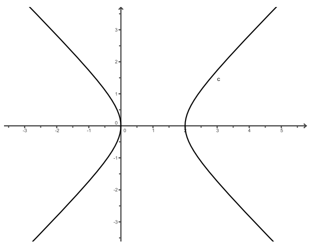
$x^2 + 4y^2 = 4$



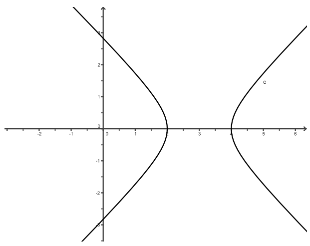
$x^2 + 4y^2 - 4x = 0$



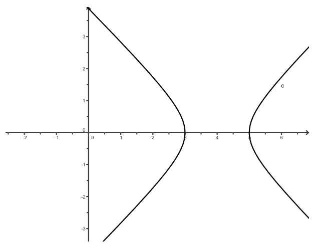
$x^2 + 4y^2 - 8x = -12$



$x^2 - y^2 - 2x = 0$



$x^2 - y^2 - 6x = -8$



$x^2 - y^2 - 8x = -15$

Semana 09

---

1) Determine os valores de a e de b para os quais a igualdade de polinômios

$$(bx - 3)(x + a) \;=\; 2x^2 + 7x - 15$$

ocorra.

Solução:

$(bx - 3)(x + a) = bx^2 + bax - 3x - 3a = bx^2 + (ba - 3)x - 3a = x^2 + 7x - 15.$

Assim, $b = 2$ e $-3a = -15 \implies a = 5$. Devemos verificar que os coeficientes do monômio de grau 1 são iguais. Mas, se $b = 2$ e $a = 5$, então $ba - 3 = 7$.

---

2) Determine, usando a divisão euclidiana, o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ da divisão de $p(x)$ por $d(x)$:

a) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$ $\quad d(x) = x^2 - 4x + 1$

b) $p(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 14x - 15$ $\quad d(x) = x^2 + x - 3$

Solução:

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 5}{x^2 - 4x + 1} = x - 2 + \frac{2x - 3}{x^2 - 4x + 1}$$

$$\frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 14x - 15}{x^2 + x - 3} = x^2 - 3x + 4 + \frac{x - 3}{x^2 + x - 3}$$

---

3) Calcule o resto da divisão de $x^3 - 2x + 1$ por $x + 1$ sem efetuar a divisão!

Solução:

Se tomarmos $p(x) = x^3 - 2x + 1$, basta calcular $p(-1) = -1 + 2 + 1 = 2$

Assim, o resto da divisão de $p(x)$ por $x + 1$ é 2. Verifique a exatidão de $\dfrac{p(x)}{x+1}$.

---

4) Determine o valor de a tal que a divisão de $p(x) = x^5 + 3x + a$ por $d(x) = x - 2$ seja exata.

Solução:

Neste caso, fazemos $p(2) = 2^5 + 3 \times 2 + a = 32 + 6 + a = a + 38$ que deve ser zero para que a divisão seja exata. Ou seja, $a = -38$.

Semana 10

---

1) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^2 - 4$. Usando a notação apresentada no material didático, temos:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2-4 \end{array}$$

Indique o domínio desta função, seu contradomínio assim como sua lei de definição.

O gráfico desta função é dado pela figura a seguir. Determine a imagem desta função.

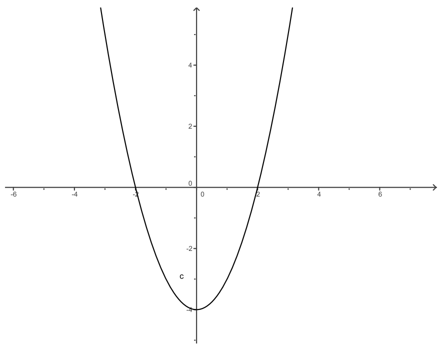


Gráfico da função $f(x) = x^2 - 4$.

Solução:

O domínio e o contradomínio desta função é o conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais.

A sua lei de definição é $f(x) = x^2 - 4$. Isto é, a função f *transforma* a variável independente x na variável dependente $y = f(x) = x^2 - 4$.

A imagem da função pode ser um subconjunto próprio do contradomínio, como é o caso neste exemplo. A imagem de f é o intervalo (fechado e infinito) $[-4, +\infty)$. Para comprovar isso devemos verificar que os únicos valores de a para os quais a equação

$$f(x) = x^2 - 4 = a$$

tem solução são aqueles do intervalo $[-4, +\infty)$.

Realmente, se $a < -4$, como -12, a equação fica

$$x^2 - 4 = -12 \qquad \text{ou} \qquad x^2 = -8,$$

que não tem solução real.

Para os valores $a \geq -4$ você poderá facilmente verificar que a equação têm solução.

Esses fatos podem ser verificados no gráfico da função.

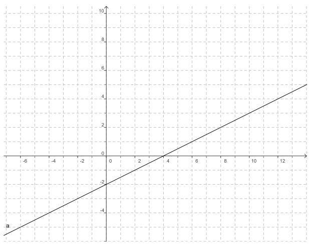
2) Considere as três funções a seguir:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x}{2}-2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & [-4,\,8] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x}{2}-2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} h: & [-4,+\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x}{2}-2 \end{array}$$

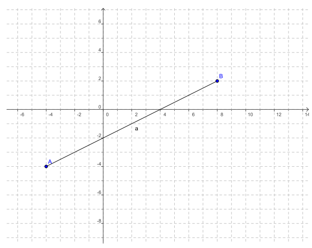
Essas funções são iguais ou diferentes? O que elas têm em comum e o que as diferencia?
Faça um esboço de cada um de seus gráficos.
Dica: Lembre-se que a equação $y = \frac{x}{2} - 2$ determina uma reta que você sabe esboçar.

Solução:

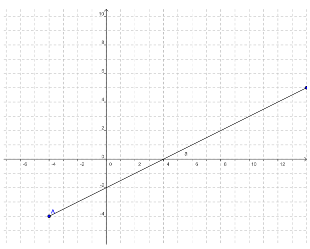
Essas três funções, apesar de terem a mesma lei de definição, são diferentes umas das outras devido aos seus domínios, todos diferentes. Enquanto f está definida em toda a reta real, g está definida num intervalo fechado e limitado e h está definida na semi-reta $[-4,\,+\infty)$. Assim, seus gráficos serão diferentes. O gráfico de f é a reta definida pela equação $y = \frac{x}{2} - 2$, o gráfico de g é o segmento de reta que une os pontos $(-4,\,-4)$ e $(8,\,2)$ e o gráfico de h é a semi-reta que inicia no ponto $(-4,\,4)$, contem o ponto $(8,\,2)$ e prossegue indefinidamente para a direita.



Domínio: $\mathbb{R}$



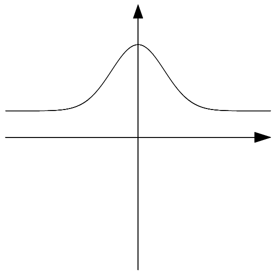
Domínio: $[-4,\,8]$



Domínio: $[-4,\,+\infty)$

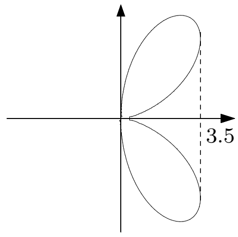
---

3) Indique qual de cada curva, considerada sobre o domínio indicado embaixo de cada uma delas, é o gráfico de uma função, justificando sua resposta com o critério da vertical.



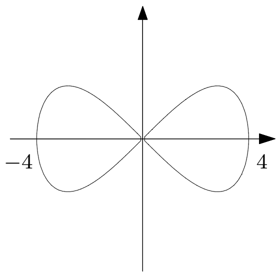
a)

Domínio: $\mathbb{R}$



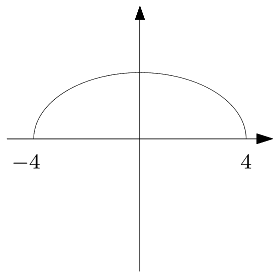
b)

Domínio: $[0,\ 3.5]$



c)

Domínio: $[-4,\ 4]$



d)

Domínio: $[-4,\ 4]$

Solução:

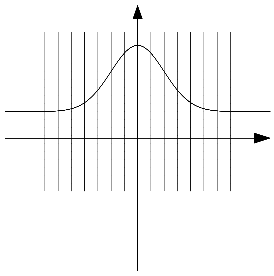
a) Essa curva é o gráfico de uma função cujo domínio é $\mathbb{R}$, pois a interseção de cada reta vertical $x = a$ com a curva é um único ponto.

b) Essa curva não é gráfico de uma função sobre o domínio $[0,\ 3.5]$, pois a interseção de uma reta vertical tal como $x = 2$ é um conjunto de 4 pontos.

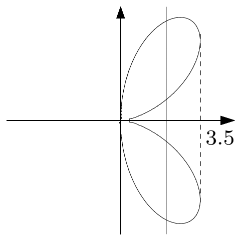
c) Analogamente, a curva não é gráfico de uma função sobre o domínio $[-4,\ 4]$, pois a interseção de uma reta vertical tal como $x = -2$ ou $x = 2$ é um conjunto de 2 pontos.

d) Essa curva é o gráfico de uma função cujo domínio é $[-4,\ 4]$, pois a interseção de cada reta vertical $x = a$, com $-4 \leq a \leq 4$, com a curva é um único ponto.

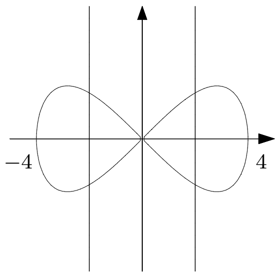
Veja, nas figuras a seguir:

a) 

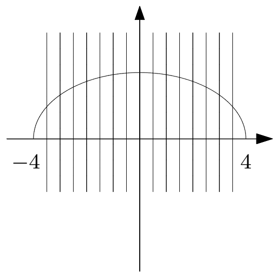
Domínio: $\mathbb{R}$

b) 

Domínio: $[0,\, 3.5]$

c) 

Domínio: $[-4,\, 4]$

d) 

Domínio: $[-4,\, 4]$

Semana 11

---

1) Determine os domínios das seguintes funções:

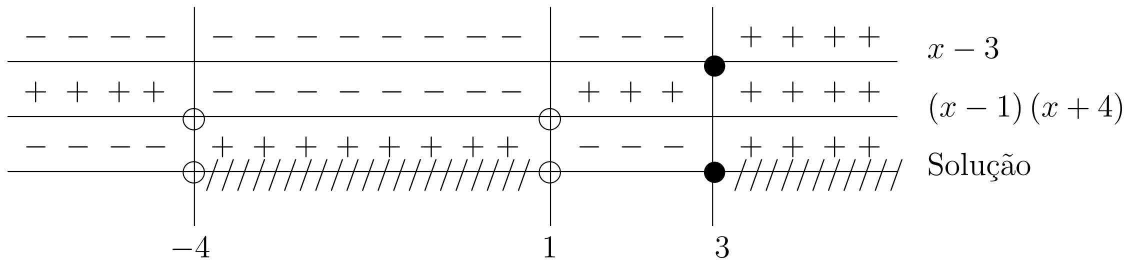
a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x^2+3x-4}}$;

Solução: A condição para que a função esteja bem definida é

$$\frac{x-3}{x^2+3x-4} \geq 0.$$

Essa inequação é *quase* a inequação da prova, não é? Para resolvê-la é necessário fazer a análise dos sinais dos termos envolvidos. Aqui está:

$$\frac{x-3}{x^2+3x-4} \;=\; \frac{x-3}{(x+4)(x-1)} \;\geq\; 0$$



$$\text{Usando intervalos:}\quad \mathrm{Dom}(f)\;=\;(-4,\,1)\cup[3,+\infty)$$

b) $g(x) = \dfrac{2-x}{2x^3+x^2-5x+2}$.

Solução: Neste caso a condição para que a função esteja bem definida é

$$2x^3+x^2-5x+2\neq 0$$

Assim, basta resolver o negativo da afirmação, que é a equação $2x^3+x^2-5x+2=0$. Essa equação do terceiro grau tem uma particularidade: a soma de seus coeficientes é nula: $2+1-5+2=0$, indicando que $x=1$ é uma raiz. Assim, basta dividir o polinômio $2x^3+x^2-5x+2$ por $x-1$, usando Briott-Ruffini, por exemplo, para obter a completa fatoração: $(x-1)(2x-1)(x+2)$. Assim, as raízes do denominador são 1, $\frac{1}{2}$ e -2. Portanto,

$$\mathrm{Dom}(g)\;=\;\mathbb{R}\;-\;\left\{-2,\,\frac{1}{2},\,1\right\}\;=\;(-\infty,-2)\cup\left(-2,\,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty).$$

---

2) Considere $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $g(x)=\frac{1}{2x-1}$ e $h(x)=x^2-3x+2$.

Determine o domínio das funções $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $r(x)=f(x)+g(x)$ e $s(x)=g(x)\cdot h(x)$, assim como as leis de definição das funções $r=f+g$ e $r=g\cdot h$.

Solução:

No caso de f a restrição é $1-x^2\geq 0$, que define o intervalo $[-1,\,1]$.

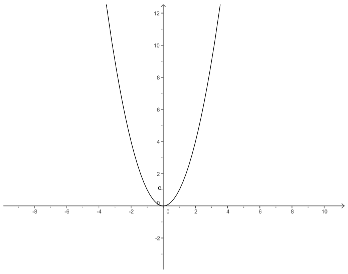
A restrição, no caso g é $2x-1\neq 0$ e não há restrição no caso h. Assim, a resposta do exercício é:

$\mathrm{Dom}(f)=[-1,\,1]$, $\mathrm{Dom}(g)=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $\mathrm{Dom}(h)=\mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(r)=\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)=\left[-1,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$, $\mathrm{Dom}(s)=\mathrm{Dom}(g)\cap\mathrm{Dom}(h)=\mathrm{Dom}(g)=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

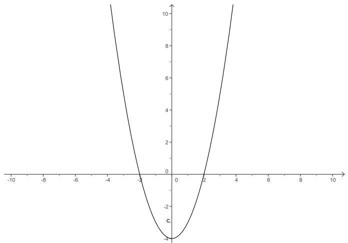
---

3) Esboce os gráficos das funções f, g e h, comparando-os. (Isto é, note como um pode ser obtido do outro por uma translação.) Aproveite a ocasião para lembrar-se das parábolas.

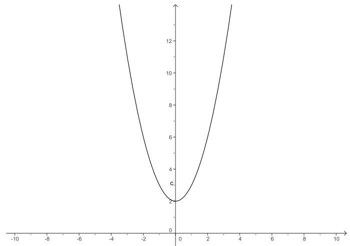
Solução:



$f(x) = x^2$



$g(x) = x^2 - 4$



$h(x) = x^2 + 2$

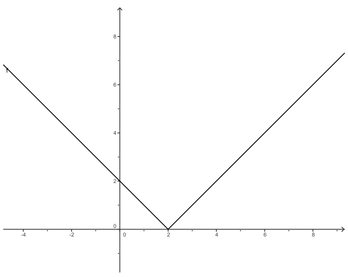
---

4) Esboce os gráficos das funções a seguir, obtidas do gráfico de $f(x) = |x|$ por meio de translações verticais e/ou horizontais, assim como eventuais simetrias em relação ao eixo Ox (gráfico de $-f$):

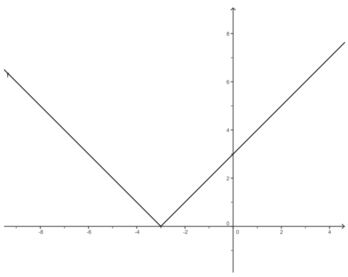
a) $g(x) = |x - 2|$; b) $h(x) = |x + 3|$; c) $j(x) = |x + 3,5|$;

d) $k(x) = |x| - 3$; e) $l(x) = |x| + 2$; e) $m(x) = |x - 2| - 3$.

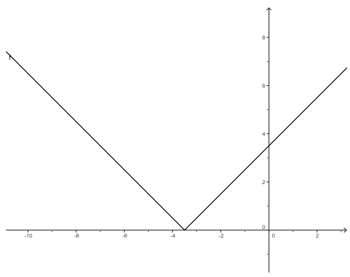
Solução:



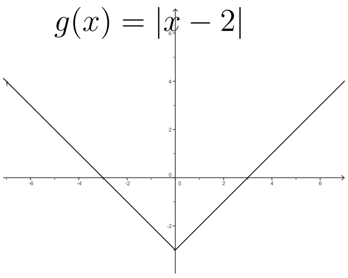
$g(x) = |x - 2|$



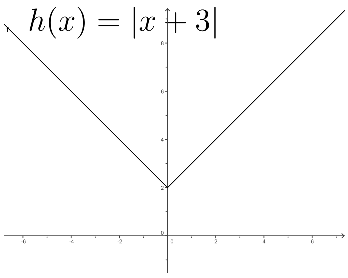
$h(x) = |x + 3|$



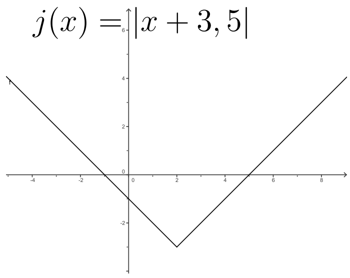
$j(x) = |x + 3,5|$



$k(x) = |x| - 3$



$l(x) = |x| + 2$



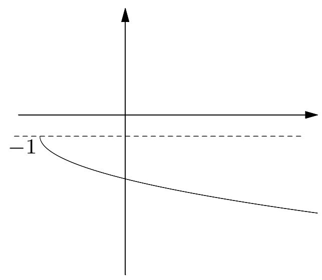
$m(x) = |x - 2| - 3$

Você notou que não chegamos a usar a função $y = -|x|$. Quem sabe no próximo?

5) Esboce o gráfico da função $g(x) = -\sqrt{x+4}\ -1$.

Solução:

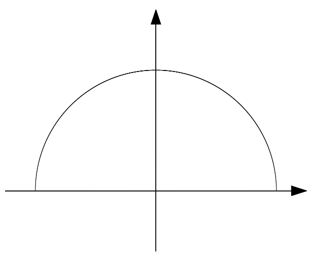
A equação $y = -\sqrt{x+4}\ -1$ (que é a que nos interessa agora) é o *ramo inferior* da parábola definida pela equação $x = (y+1)^2 - 4$. Assim o gráfico de $g(x) = -\sqrt{x+4}\ -1$, cujo domínio é $[-4, +\infty)$, é o ramo inferior da parábola:



Semana 12

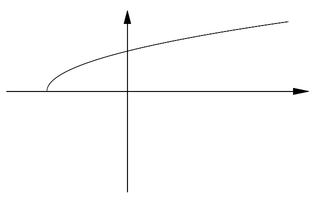
1) Em cada caso a seguir, determine as leis de definição da função $g \circ f$, seu domínio e esboce o seu gráfico.

$f(x)$	$g(x)$
$f(x) = 1 - x^2$	$g(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = x + 6$	$g(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = x^2 + 4$	$g(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2}$



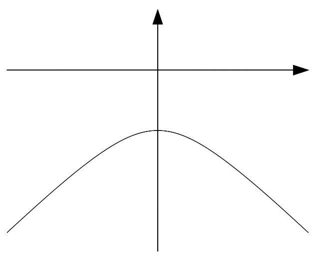
$g \circ f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$\text{Dom}(g \circ f) = [-1,\ 1]$



$g \circ f(x) = \sqrt{x+6}$

$\text{Dom}(g \circ f) = [-6, +\infty]$



$g \circ f(x) = -\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{2}$

$\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$

2) Todas as funções a seguir são inversíveis. Em cada caso, determine a função inversa, dando o domínio, o contra-domínio e a lei de definição.

a) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2x-3 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x+3}{2} \end{array}$

b) $\begin{array}{rccc} g: & [-4, +\infty) & \longrightarrow & [-2, +\infty) \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x+4} - 2 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{rccc} g^{-1}: & [-2, +\infty) & \longrightarrow & [-4, +\infty) \\ & x & \longmapsto & (x+2)^2 - 4 \end{array}$

c) $\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} - \{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{-2\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{7-2x}{x-3} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{rccc} h^{-1}: & \mathbb{R} - \{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{3\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{3x+7}{x+2} \end{array}$

d) $\begin{array}{rccc} j: & [3, 5] & \longrightarrow & [4, 8] \\ & x & \longmapsto & (x-3)^2+4 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{rccc} j^{-1}: & [4, 8] & \longrightarrow & [3, 5] \\ & x & \longmapsto & 3+\sqrt{x-4} \end{array}$

---

3) Identifique nos gráficos a seguir quais são os pares de funções com suas respectivas inversas.

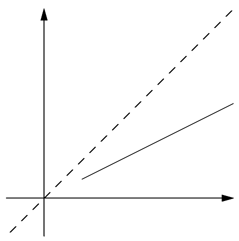


Gráfico de f

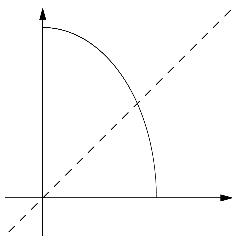


Gráfico de g

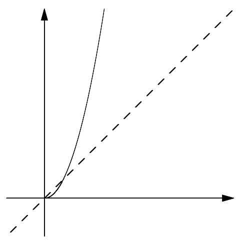


Gráfico de h

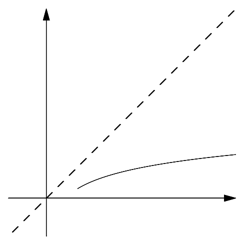


Gráfico de j

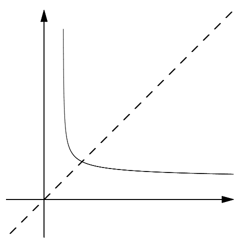


Gráfico de k

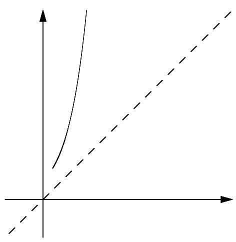


Gráfico de l

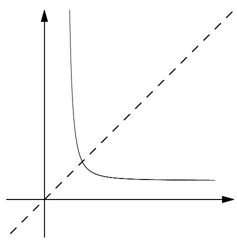


Gráfico de t

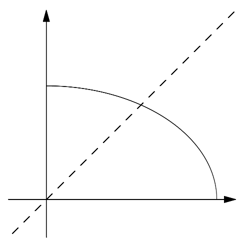


Gráfico de u

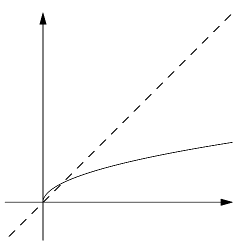


Gráfico de v

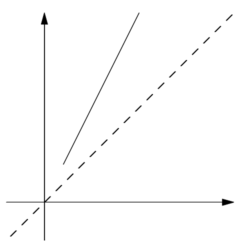
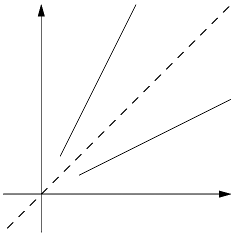
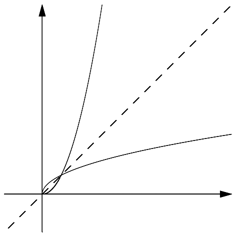


Gráfico de w

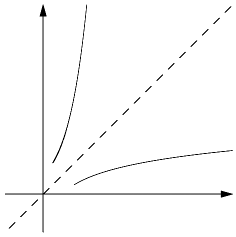
Os pares de gráficos de funções com suas inversas são: (f, w), (g, u), (h, v), (j, l) e (k, t). Veja os esboços sobrepostos:



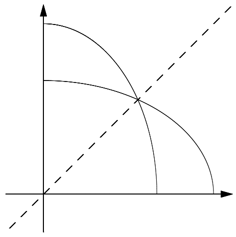
Gráficos de f e w



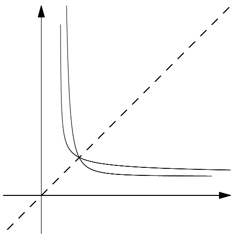
Gráficos de g e u



Gráficos de h e v



Gráficos de j e l



Gráficos de k e t

Semana 13

---

1) Quais são os domínios das seguintes funções?

a) $f(x) = \dfrac{1}{11x - 12 - 2x^2}$;

Solução:

A condição que define a função é $11x - 12 - 2x^2 \neq 0$.

Como $11x - 12 - 2x^2 = 0 \iff x = 4$ ou $x = \dfrac{3}{2}$, temos

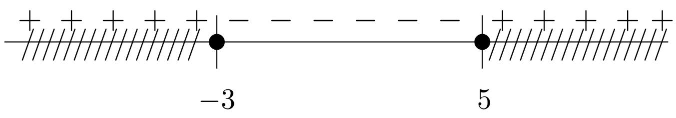
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3/2, 4\} = (-\infty, 3/2) \cup (3/2, 4) \cup (4, +\infty).$$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$;

Solução:

A condição que define a função é $x^2 + 2x - 15 \geq 0$.

As soluções de $x^2 + 2x - 15 = 0$ são -3 e 5. Para resolver a inequação precisamos fazer a análise dos sinais.



Assim, a solução da inequação está indicada na figura e determina o domínio da função:

$$\text{Dom}(g) \;=\; (-\infty,\, -3] \cup [5,\, +\infty).$$

c) $h(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$.

Solução:

Neste caso, a condição que define a função é $x \geq 0$, $x - 1 \geq 0$ e $x - 2 \geq 0$. Veja bem, as três condições devem ser satisfeitas simultaneamente. Ou seja, $x \geq 0$, $x \geq 1$ e $x \geq 2$. Como a última condição inclui as anteriores, o domínio da função é

$$\text{Dom}(h) = [2,\, +\infty).$$

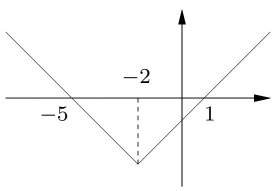
---

2) Usando os gráficos das funções $y = |x|$, $y = \dfrac{1}{x}$ e $y = \sqrt{x}$, esboce os gráficos das funções a seguir:

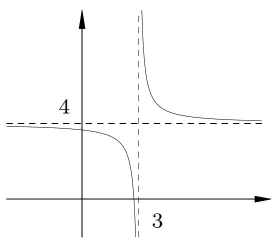
a) $f(x) = |x+2| - 3$; b) $g(x) = \dfrac{1}{x-3} + 4$;

c) $h(x) = \sqrt{x-1} + 2$; d) $j(x) = \sqrt{-x}$;

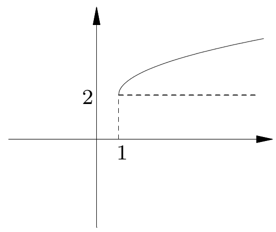
e) $k(x) = \sqrt{4-x} + 2$ f) $l(x) = 4 - |x-3|$.



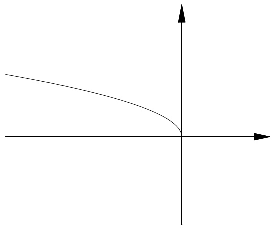
$f(x) = |x+2| - 3$



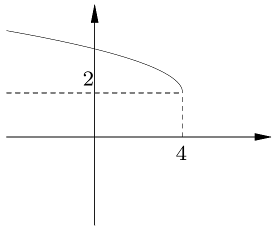
$g(x) = \dfrac{1}{x-3} + 4$



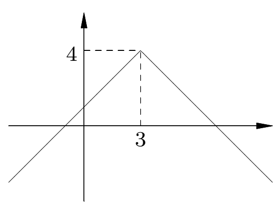
$h(x) = \sqrt{x-1} + 2$



$j(x) = \sqrt{-x}$



$k(x) = \sqrt{4-x} + 2$



$l(x) = 4 - |x-3|$

3) Esboce os gráficos das funções a seguir:

a) $f(x) = \sqrt{10x - x^2}$; b) $g(x) = -\dfrac{\sqrt{4x^2+36}}{3}$.

Solução:

Para descobrir quais cônicas definem os gráficos das funções precisamos de fazer alguns cálculos. Está na hora de usar um *rascunho*!

Primeiro a equação $y = \sqrt{10x - x^2}$:

$$\begin{aligned} y^2 &= 10x - x^2 \\ x^2 - 10x + y^2 &= 0 \\ x^2 - 10x + 25 + y^2 &= 25 \\ (x-5)^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}$$

Assim, descobrimos que o gráfico da função $f(x) = \sqrt{10x - x^2}$ é a metade superior do círculo de raio 5 e centro no ponto $(5, 0)$. Veja, esse círculo é tangente ao eixo Oy.

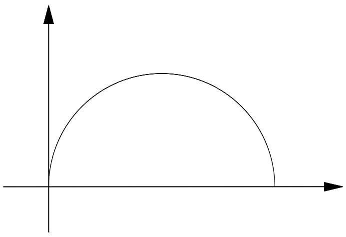
Agora, a equação $y = -\dfrac{\sqrt{4x^2+36}}{3}$:

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{4x^2+36}{9} \\ 9y^2 &= 4x^2 + 36 \\ -4x^2 + 9y^2 &= 36 \\ -\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} &= 1 \end{aligned}$$

Essa equação define uma hipérbole cujas assíntotas são definidas pelas equações $y = \pm\dfrac{2}{3}y$.

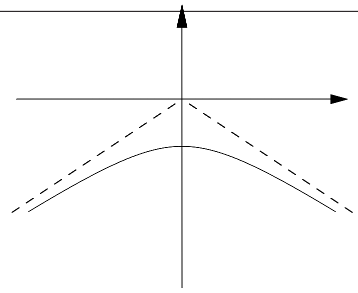
O gráfico da função $g(x) = -\dfrac{\sqrt{4x^2+36}}{3}$ é o ramo inferior da hipérbole.

Veja os gráficos a seguir.



$f(x) = \sqrt{10x - x^2}$

$\mathrm{Dom}(f) = [0,\, 10]$



$g(x) = -\dfrac{\sqrt{4x^2+36}}{3}$

$\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$

Só para ter certeza que você entendeu ...

4) Nas funções a seguir, determinas as que são pares, as que são ímpares e, nos casos em que a função não for par ou ímpar, escreva-a como uma soma de uma função par com uma função ímpar (ufa!).

a) $f(x) = x^2 - 2|x|$; b) $g(x) = x\sqrt{1-x^2} + 4$;

c) $h(x) = \dfrac{x}{1+x^2} + 4 - \dfrac{x^2}{4}$; d) $j(x) = 3x - x^3 + \sqrt{1+x^2}$.

Solução:

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. $f(-x) = (-x)^2 - 2|-x| \;=\; x^2 - 2|x| \;=\; f(x)$. Como o domínio de f é simétrico e $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, a função é par.

b) $\mathrm{Dom}(g) = [\,-1,\, 1\,]$. $g(-x) = (-x)\sqrt{1-(-x)r} + 4 \;=\; -x\sqrt{1-x^2} + 4$. Esta equação nos diz que a função não é par ou ímpar. Portanto, vamos escrevê-la como a soma de funções, uma par e outra ímpar. (Lembre-se de que essa decomposição é única, mas nesse momento, isso é um detalhe...)

$$g_p(x) = \frac{g(x)+g(-x)}{2} \;=\; \frac{x\sqrt{1-x^2} + 4 \;+\; \left(-x\sqrt{1-x^2}\;+4\right)}{2} \;=\; 4.$$

$$g_i(x) = \frac{g(x)-g(-x)}{2} \;=\; \frac{x\sqrt{1-x^2} - 4 \;+\; \left(-x\sqrt{1-x^2}\;+4\right)}{2} \;=\; x\sqrt{1-x^2}.$$

Função par: $g_p(x) \;=\; 4$ (toda função constante é par);

Função ímpar: $g_i(x) \;=\; x\sqrt{1+x^2}$ (o produto de uma função ímpar por uma função par). Realmente,

$$g(x) \;=\; \underbrace{x\sqrt{1-x^2}}_{g_i(x)} \;+\; \underbrace{4}_{g_p(x)}.$$

c) $\text{Dom}(h) = \mathbb{R}$ e h não é par nem ímpar:

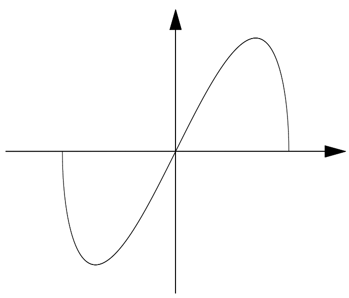
$$h(x) = \underbrace{\frac{x}{1-x^2}}_{h_i(x)} + \underbrace{4 - \frac{x^2}{4}}_{h_p(x)}.$$

d) $\text{Dom}(j) = \mathbb{R}$ e j não é par nem ímpar:

$$j(x) = \underbrace{3x - x^3}_{j_i(x)} + \underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{j_p(x)}.$$

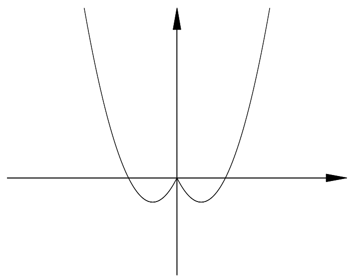
---

5) Quais dos gráficos a seguir são gráficos de funções pares? e quais são gráficos de funções ímpares?



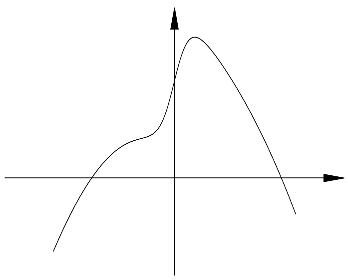
a)

Função ímpar



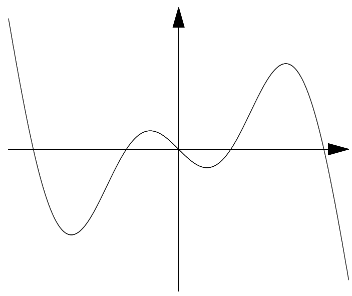
b)

Função par



c)

Não é ímpar nem par



d)

Função ímpar

Conhecer o valor de uma das funções seno ou cosseno num ponto com mais alguma informação sobre a sua localização (no círculo trigonométrico) é suficiente para determinar o valor das outras funções nesse ponto. Veja o exercício a seguir.

6) Sabendo que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ e $\text{sen}\alpha = \frac{2}{3}$, calcule $\cos\alpha$, $\sec\alpha$, $\csc\alpha$, $\text{tg}\alpha$, e $\text{cotg}\alpha$.

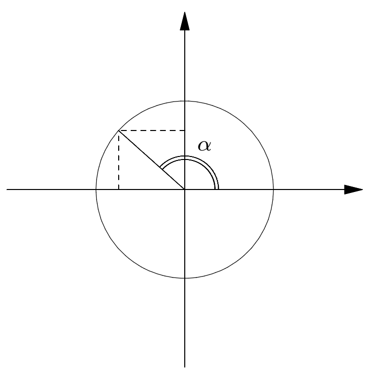
Solução:

Usamos a Identidade Trigonométrica Fundamental $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ mais a informação $\text{sen}\alpha = \frac{2}{3}$:

$$\begin{aligned} \frac{4}{9} + \cos^2\alpha &= 1 \\ \cos^2\alpha &= 1 - \frac{4}{9} \\ \cos^2\alpha &= \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Concluímos que $\cos\alpha$ pode ser igual a $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ou $-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Usamos agora a informação $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Ou seja, α é um ângulo do segundo quadrante e, portanto, $\cos\alpha < 0$. Veja a figura.



α no segundo quadrante

Assim, concluímos que

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Agora é fácil calcular os outros valores:

$$\begin{aligned}
\sec\alpha &= \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{3\sqrt{5}}{5};\\
\csc\alpha &= \frac{1}{\mathrm{sen}\alpha} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2};\\
\mathrm{tg}\alpha &= \frac{\mathrm{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5};\\
\mathrm{cotg}\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\mathrm{sen}\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

Uma etapa importante no estudo das funções trigonométrica, especialmente no que diz respeito ao cálculo dessas funções em ângulos múltiplos de $\pi/6$ e $\pi/4$ (aqueles que TODO mundo precisa saber) é o treinamento de resolução de equações trigonométricas. As mais simples são do tipo a seguir.

---

7) Resolva as equações a seguir nos intervalos indicados.

a) $\cos x = \frac{1}{2}$, $[0, \pi]$;

Solução:

Quando pensamos: "qual é o ângulo cujo cosseno vale $\frac{1}{2}$?", lembramo-nos da tabela de senos e cossenos de ângulos famosos e concluímos

$$\cos 60^{\mathrm{O}} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Ou seja, $x = \dfrac{\pi}{3}$ é solução da equação $\cos x = \frac{1}{2}$ no intervalo $[0, \pi]$. Resta saber se há outras soluções. Isso poderia ocorrer pois as funções trigonométricas não são injetoras.

O subintervalo $[0, \pi/2]$ corresponde ao primeiro quadrante e, nesse trecho, a solução encontrada é a única possível.

O subintervalo $[\pi/2, \pi]$ corresponde ao segundo quadrante, trecho no qual a função cosseno assume apenas valores negativos. Assim, a equação $\cos x = \frac{1}{2}$ não tem solução nesse metade do intervalo.

Concluímos que a equação $\cos x = \frac{1}{2}$ tem $x = \dfrac{\pi}{3}$ como única solução no intervalo $[0, \pi]$.

b) $\text{sen}(2x) \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad [0, \frac{\pi}{2}]$;

Solução:

Essa equação merece mais cuidado. devido a $2x$. Veja, resolver $\text{sen}(2x) \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ é equivalente a resolver $\text{sen}(y) \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}$ no intervalo $[0, \pi]$ pois, se fizermos $y = 2x$, a condição $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ é equivalente a $0 \le 2x = y \le \pi$.

Vamos, então, considerar a equação $\text{sen} y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ no intervalo $[0,\, \pi]$. Novamente, uma pergunta: "Qual é o ângulo cujo seno vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$?"

A resposta não tarda:

$$\text{sen} 60^{\text{O}} \;=\; \text{sen}\frac{\pi}{3} \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Esta é a única solução $y \in [0, \pi/2]$. Mas, agora, também há solução no segundo quadrante: $\text{sen} 120^{\text{O}} \;=\; \text{sen}\frac{2\pi}{3} \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Portanto, as duas possíveis soluções de $\text{sen} y \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}$ no intervalo $[0, \pi]$ são $y = \frac{\pi}{3}$ e $y \;=\; \frac{2\pi}{3}$. Mas a resposta deve ser dada na variável x:

As soluções de $\text{sen}(2x) \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ são:

$$x = \frac{\pi}{6}\left(\text{correspondente a } y = \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{e} \quad x = \frac{\pi}{3}\left(\text{correspondente a } y = \frac{2\pi}{3}\right).$$

c) $\csc x \;=\; \sqrt{2}, \qquad [0, \frac{\pi}{2}]$;

Solução:

A equação pode ser colocada na forma $\dfrac{1}{\text{sen} x} \;=\sqrt{2}$ ou

$$\text{sen} x \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \;=\; \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

O ângulo famoso em $[0, \pi/2]$ que satisfaz esta equação é $x = \dfrac{\pi}{4}$.

d) $\text{tg} x \;=\; -1, \qquad [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Solução:

A equação pode ser colocada na forma $\dfrac{\text{sen} x}{\cos x} \;= -1$.

Ou seja, queremos saber quais são os ângulos tais que sen$x$ $=$ $-\cos x$. Esses ângulos são da forma $\dfrac{(2k+1)\,\pi}{4}$ (número ímpar vezes π, sobre 4) e que pertencem ao segundo ou ao quarto quadrante.

O intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$ varre o segundo e o terceiro quadrantes. Isso nos diz que a única possível solução de tg$x = -1$ em $[\pi/2, 3\pi/2]$ é

$$x = \frac{3\pi}{4}.$$

Observação: Use algum dos applets das AEs para verificar essas respostas.

---

8) Resolva a equação sen(x) $=$ $\cos(2x)$ no intervalo $[0,\, 2\pi]$.

Solução:

A razão dessa equação não ser *tão* difícil é o fato (fácil de ser lembrado?) de que

$$\cos 60^{\mathrm{o}} \;=\; \frac{1}{2} \;=\; \mathrm{sen} 30^{\mathrm{o}}.$$

Assim, a equação tem $x = \dfrac{\pi}{6}$ como solução. Agora é que vem o problema: haverá outra?

Precisamos trabalhar com as possíveis simetrias dessas funções. Quais outros ângulos satisfazem a equação sen$x$ $=$ $\dfrac{1}{2}$ no intervalo $[0,\, 2\,\pi]$? Certamente x $=$ $\dfrac{5\pi}{6}$ (corresponde a $150^{\mathrm{o}} = 180^{\mathrm{o}} - 30^{\mathrm{o}}$).

Uma verificação permite notar que $\cos 2\,\dfrac{5\pi}{6} \;=\; \cos\dfrac{5\pi}{3} \;=\; \dfrac{1}{2}$, que nos dá uma segunda solução. Veja, $\dfrac{5\pi}{3}$ corresponde a $2\pi - \dfrac{\pi}{3}$ (ou seja, $360^{\mathrm{o}} - 60^{\mathrm{o}}$).

Bem, isso até parece filme de suspense... haverá terminado? O que mais pode ocorrer? Devemos ter cuidado com as possibilidades 0, 1 e -1... Veja,

$$\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2} \;=\; -1 \;=\; \cos\pi \;=\; \cos 3\pi.$$

Bem, agora acabou, as soluções são:

$$x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6} \text{ e } \frac{3\pi}{2}.$$

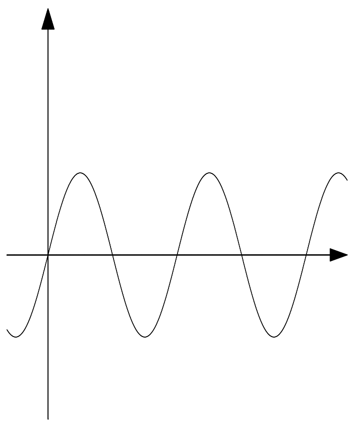
Para ter certeza, use os applets para traçar os gráficos das duas funções...

---

9) Esboce os gráficos das funções a seguir (sobre o domínio $[0, 2\pi]$, pelo menos).

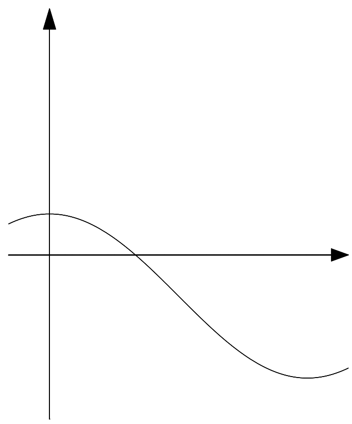
a) $f(x) = 2\,\text{sen}2x$; b) $g(x) = 2\ \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1$;

c) $h(x) = 3\,\text{sen}\big(x - \frac{\pi}{4}\big)$; d) $j(x) = 2 + 2\,\text{sen}(4x)$.



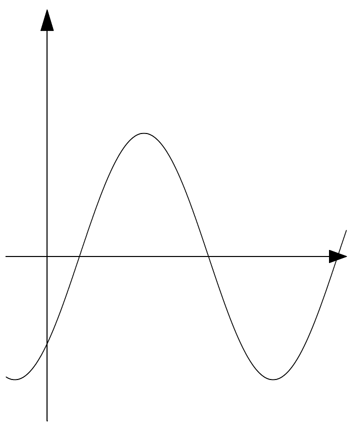
a)

$f(x) = 2\,\text{sen}2x$



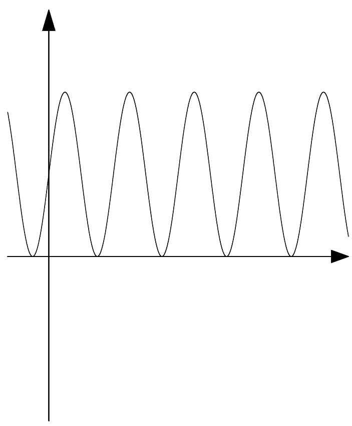
b)

$g(x) = 2\ \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1$



c)

$h(x) = 3\,\text{sen}\big(x - \frac{\pi}{4}\big)$



d)

$j(x) = 2 + 2\,\text{sen}(4x)$

Semana 14

---

1) Se $f(x) = x^2 + 1$, então $(f \circ f)(x)$ é igual a:

(a) $x^4 + 2x^2 + 2$ (b) $x^4 + 2$ (c) $x^4 + 1$

(d) $x + 1$ (e) 1

Solução:

Aqui devemos compor a função f com ela mesma: $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (f(x))^2 + 1 = (x^2+1)^2 + 1 = x^2 + 2x^2 + 1 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$. Assim, a resposta correta é a letra (a).

---

2) Sendo $f(x) = x^2 + 2x$ e $g(x) = 3x + 4$, então $(f \circ g)(x)$ é igual a:

(a) $9x^2 + 20x + 24$ (b) $x^2 + 30x + 24$ (c) $9x^2 + 30x + 24$

(d) $x^2 + 20x + 24$ (e) nda

Solução:

Aqui devemos compor as funções $f(x)$ com $g(x)$: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 2g(x) = (3x+4)^2 + 2(3x+4) = 9x^2 + 24x + 16 + 6x + 8 = 9x^2 + 30x + 24$. Assim, a resposta correta é a letra (c).

---

3) Se $g(1+x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, então $g(3)$ é igual a:

(a) 0 (b) 3 (c) $\frac{1}{2}$

(d) $\frac{3}{10}$ (e) $\frac{2}{5}$

Solução:

Neste caso temos uma composição disfarçada: $g(x)$ está composta com a função (simples) $f(x) = 1+x$. Ou seja, sabemos a lei de definição de $g \circ f$. Portanto, para calcular $g(3)$ fazemos $1 + x = 3$, e obtemos:

$g(3) = g(1+2) = \dfrac{2}{x^2+1} = \dfrac{2}{5}$. A resposta correta é a letra (e).

---

4) Se $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, então $(f \circ f)(x)$ é igual a:

(a) -1 (b) 1 (c) $\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right)^2$

(d) $\dfrac{x-2}{2x+1}$ (e) x

Solução:

Assim como no exercício 1, queremos calcular $f \circ f$:

$$f(f(x)) \;=\; \frac{2\,f(x)+1}{f(x)-2} \;=\; \frac{2\,\frac{2x+1}{x-2}+1}{\frac{2x+1}{x-2}-2} \;=\; \frac{\frac{4x+2+x-2}{x-2}}{\frac{2x+1-2x+4}{x-2}} \;=\; \frac{5x}{5} \;=\; x$$

Veja, a inversa desta função é ela mesma. Calcule seu domínio e sua imagem. A resposta pata a questão é a letra (e).

---

5) Se $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 8x + 6$ e $g(x) = 2x - 1$, então $f(2)$ é igual a:

(a) -2 (b) -1 (c) 3

(d) 5 (e) 6

Solução:

A idéia é a mesma do exercício anterior, com um pouco mais de complicação. Sabemos que $f(g(x)) = 4x^2 - 8x + 6$ e $g(x) = 2x - 1$. Portanto, para calcular $f(2)$, precisamos descobrir para qual valor de x, $g(x) = 2$. Para isso, basta resolver a equação $2x - 1 = 2$, que resulta $x = \frac{3}{2}$.

Assim, $f(2) = f(g(3/2)) = 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{3}{2}\right) + 6 \;=\; 4\left(\frac{9}{4}\right) - 4 \times 3 + 6 \;=\; 9 - 12 + 6 \;=\; 3.$

Portanto, a resposta correta é letra (c).

---

6) Considere as funções $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$. Então, as soluções da equação $(f \circ g)(x) = 0$ são:

(a) inteiras (b) negativas (c) racionais não inteiras

(d) inversas uma da outra (e) opostas uma da outra

Solução:

Precisamos resolver a equação $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 0$. Para isso, calculamos $f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) + 1 = 2x^2 - 1 = 0$. As soluções de $2x^2 - 1 = 0$ são $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, que são opostas uma a outra. A resposta correta é a letra (e).

---

7) Se $f(x) = 2x - 1$, então $f^{-1}(x)$ é igual a:

(a) $\dfrac{x-1}{2}$ (b) $\dfrac{-x-1}{2}$ (c) $\dfrac{x+1}{2}$ (d) $\dfrac{1}{2x-1}$ (e) nda

Solução:

Precisamos resolver a equação $y = f(x) = 2x - 1$ em x.

$$\begin{aligned} y &= 2x - 1 \\ 2x - 1 &= y \\ 2x &= y + 1 \\ x &= \frac{y+1}{2} \end{aligned}$$

Portanto, $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$ e a resposta é letra (c).

Note que a tentação é responder com a letra (d), que é a lei de definição de $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, uma outra função. Aqui usamos f^{-1} como um notação, não literalmente $\big(f(x)\big)^{-1}$.

---

8) Se f^{-1} é a inversa de $f(x) = 2x + 3$, então o valor de $f^{-1}(2)$ é igual a:

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{7}$ (c) 0

(d) $-\frac{1}{7}$ (e) $-\frac{1}{2}$

Solução:

A tentação é calcular a expressão da função inversa para calcular $f^{-1}(2)$. Mas, isso não é necessário. Vamos, no lugar disto, resolver a equação $f(x) = 2$. Ou seja, para que valor de x, $2x + 3 = 2$?

A resposta é $x = -\frac{1}{2}$. Assim, como $f(-1/2) = 2$, sabemos que $f^{-1}(2) = -\frac{1}{2}$, e a resposta da questão é letra (e).

---

9) A inversa da função $f(x) = x^3 + 1$ é definida pela lei:

(a) $\sqrt[3]{x+1}$ (b) $\frac{1}{x^3+1}$ (c) $\sqrt[3]{x-1}$

(d) $\sqrt[3]{x^3-1}$ (e) nda

Solução:

Agora não tem jeito. Temos que resolver a equação $y = x^3 + 1$ em x, que resulta

$$x = \sqrt[3]{y-1}.$$

Assim, a resposta correta é a letra (c). Mais uma vez, a *falsa* resposta é a letra (b).

---

10) Seja $f : \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\} \longrightarrow B \subset \mathbb{R}$ a função inversível definida por $f(x) = \dfrac{6x}{3x-1}$. O conjunto B é igual a:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R} - \{-2\}$ (c) $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

(d) $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ (e) $\mathbb{R} - \{2\}$

Solução:

Uma maneira de descobrir qual é o conjunto B consiste em inverter a função f e calcular seu domínio. Fazendo isso, resolvemos a equação $y = \dfrac{6x}{3x-1}$ em x:

$$x = \frac{y}{3y-6}.$$

Como o domínio da função $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{3x-6}$ é $\mathbb{R} - \{2\}$, a resposta da questão é letra (e).

---

11) Calcule os seguintes valores:

Solução:

a) A melhor maneira de resolver esse tipo de problema é reformular a pergunta. Ou seja, para calcular $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\right)$, perguntamos: "Qual é o *arco* cujo seno vale $\frac{1}{2}$?"

A resposta deve vir de bate-pronto: $30°$ ou $\frac{\pi}{6}$.

Na verdade, $\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$ também tem esta propriedade, mas como queremos calcular $\operatorname{arc\,sen}(1/2)$, sabemos que a resposta deve estar no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, que é a imagem da função arcoseno, o domínio escolhido para inverter a função seno.

Você deve ter encontrado as seguintes respostas:

(a) $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ (b) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ (c) $\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\pi}{4}$

(d) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ (e) $\operatorname{arc\,sen}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$ (f) $\arccos\left(\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{3\pi}{4}$

(g) $\operatorname{arc\,tg}(1) = \frac{\pi}{4}$ (h) $\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ (i) $\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$

---

12) Determine os domínios das seguintes funções:

(a) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(2x)$ (b) $g(x) = \arccos(x-3)$

(c) $h(x) = \operatorname{arc\,tg}(2x-5)$ (d) $j(x) = \sqrt{\operatorname{arc\,sen}(x)}$

(e) $k(x) = \sqrt{4 - \operatorname{arc\,tg}^2 x}$

Solução:

a) Sabemos que o domínio de $y = \operatorname{arc\,sen} x$ é $[-1,\ 1]$. Assim, o domínio da função $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(2x)$ é determinado pela condição

$$-1 \leq 2x \leq 1,$$

que determina o intervalo $\big[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\big]$.

b) Agora usamos o fato de que o domínio da função $y = \arccos x$ é $[-1, 1]$. Assim, o domínio da função $g(x) = \arccos(x-3)$ é determinado pela condição

$$-1 \leq x - 3 \leq 1$$

que é equivalente a $2 \leq x \leq 4$. Assim, o domínio da função g é o intervalo $[2,\ 4]$.

c) Essa é a questão fácil. O domínio da arco-tangente é toda a reta real. Portanto, não qualquer restrição e o domínio da função h é $\mathbb{R}$.

d) O domínio da função $j(x) = \sqrt{\operatorname{arc\,sen}(x)}$ é determinado pela condição $\operatorname{arc\,sen}(x) \geq 0$. O domínio de arcoseno é $[-1,\ 1]$ e a imagem da metade do intervalo, $[-1, 0)$ é aplicada no intervalo $[\pi/2, 0)$, pois senos de ângulos entre $-\pi/2$ e 0 são negativos. Assim, o domínio de j é o intervalo $[0,\ 1]$.

Essa foi um pouco mais difícil.

e) Para fechar, temos que determinar o domínio de $k(x) = \sqrt{4 - \operatorname{arc\,tg}^2 x}$. Essa parece complicada. Mas, vamos em frente. A condição é

$$4 - \operatorname{arc\,tg}^2 x \geq 0.$$

Isso quer dizer que $\operatorname{arc\,tg} x$ deve pertencer ao intervalo $[-2,\ 2]$. Mas, a imagem da função arco-tangente é o domínio de inversão da função tangente, o intervalo $\big[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\big]$, que está contido no intervalo $[-2,\ 2]$, pois $\pi < 4$.

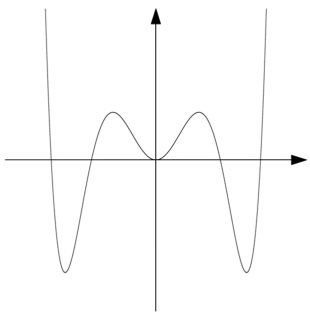
Assim o domínio da função k é todo o conjunto dos número reais, $\mathbb{R}$.

Semana 15

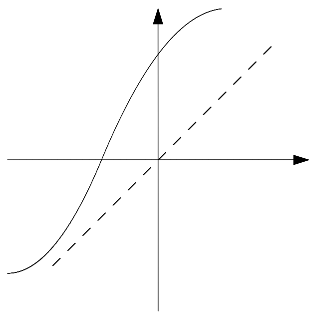
---

1) Nos quatro gráficos de funções a seguir, identifique as propriedades de cada uma delas, tais como: a função é par, a função é ímpar, a função é injetora. Neste último caso, a função será

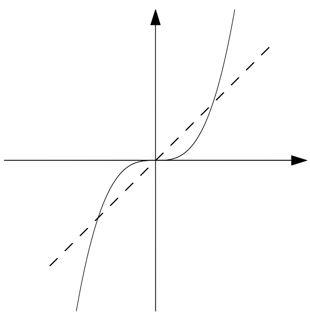
inversível se restringirmos seu contra-domínio à sua imagem. Neste casos, aproveite a própria figura para esboçar o gráfico da função inversa, usando a propriedade de simetria que esses gráficos gozam. Observe que para fazer tudo isso, não é necessário que conheçamos as leis de definição das funções. Essa é a perspectiva gráfica.



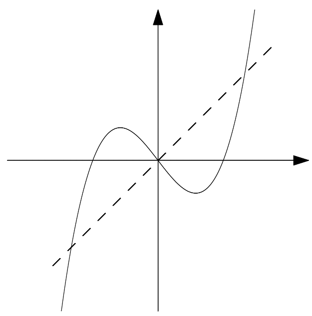
a)



b)



c)



d)

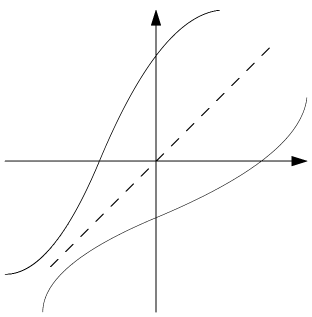
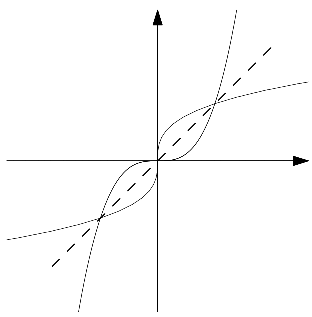
Solução:

a) A função é par (e não injetora).

b) A função é injetora (não é função par e não é função ímpar). Veja, na figura a seguir o esboço do gráfico da inversa.

c) A função é ímpar e injetora. Veja, na figura a seguir o esboço do gráfico da inversa.

d) A função ímpar, mas não é injetora.

Gráficos das funções e das suas inversas, realçando a simetria em relação à reta $y = x$, tracejada no esboço.

Um dos conteúdos que é preciso trabalhar bastante, para *cansar o braço*, é o de calcular valores de funções trigonométricas nos ângulos nobres e os valores das funções trigonométricas inversas nos correspondentes valores especiais, a saber, 1, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, e os *descendentes* desses.

Por exemplo, se ao chegar na prova você se deparar com uma expressão tal como $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ e *demorar* para saber quanto isso vale, o tempo ficará subitamente nublado, com tendência a chuvas e trovoadas...

O problema a seguir indicará como estão as suas habilidades neste setor.

---

2) Um aluno de Pré-Cálculo queria verificar se seus exercícios sobre funções trigonométricas e funções trigonométricas inversas estavam corretos. Assim, pegou sua calculadora científica e começou a verificação.

a) O aluno precisava calcular o valor de uma certa função trigonométrica em $\frac{\pi}{3}$. Ele colocou um número de dois dígitos, pressionou uma tecla com a inscrição da função trigonométrica desejada e obteve, no visor da calculadora, o número

$$0.866025403$$

Qual era a função trigonométrica a ser calculada e qual foi o número de dois dígitos usado pelo aluno?

A resposta obtida está correta? Como você explica o fato do aluno ter obtido a resposta usando apenas dois dígitos?

Solução:

O valor do arco em radianos $\frac{\pi}{3}$, corresponde em graus ao ângulo de 60°. O aluno usou o modo *grau*, geralmente representado no visor das calculadoras científicas por DEG, para calcular o valor da função trigonométrica desejado.

O número 0.866025403 é a melhor aproximação racional de $\sqrt{3}2$ que a calculadora típica pode nos oferecer. Assim, sabemos que o aluno estava calculando o seno do ângulo.

$$\text{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A melhor aproximação que a calculadora científica típica pode oferecer é $\text{sen}30° = 0.866025403$.

b) Em seguida, era preciso verificar o valor correto de $\text{arc sen}\frac{1}{2}$. Após muito procurar no teclado da máquina, a tecla mais indicada para fazer esse cálculo era a que tinha a inscrição $\sin^{-1}$. Ele procedeu os cálculos usando essa tecla. Você acha que ele fez a escolha correta? Explique.

Solução:

Em inglês, seno é sine (do latim sinus, de sino, sinuoso e tantas outras) e, portanto, as calculadoras científicas importadas costumam ter grafado sin na tecla que permite calcular o seno. Além disso, $\sin^{-1}$, em geral, se refere à função arco seno, o -1 no expoente indicando função inversa e não o inverso do número.

c) Ainda nessa situação, o aluno pressionou as teclas 0, ponto e 5, mas não pressionou ponto muito bem. Ao pressionar a tecla com a inscrição sen^{-1} ele obteve uma mensagem de erro: E 0. Você sabe explicar o que aconteceu?

Solução:

A mensagem de erro ocorreu pois ao deixar de pressionar suficientemente a tecla ponto, o aluno calculou $\text{arc sen}5$, que não existe, uma vez que o domínio da função arco seno é $[-1, 1]$.

d) Finalmente, o aluno teve sucesso em seu uso da calculadora. Pressionou as teclas 0, ponto e 5, seguidas da tecla com inscrição sen^{-1}, obtendo a resposta

$$0.523598775$$

A resposta obtida é correta? Explique.

Solução:

A resposta está correta. Na verdade,

$$\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2} \;=\; \frac{\pi}{6}.$$

Se a calculadora estivesse no modo DEG, a resposta seria 30, de 30°. Como a calculadora estava no modo RAD, de radianos, ela nos ofereceu a melhor aproximação de $\frac{\pi}{6}$ que poderia:

$$\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2} \;=\; \frac{\pi}{6} \;\approx\; \frac{3.141592654}{6} \;\approx\; 0.523598775.$$

---

3) Determine o domínio de cada função a seguir:

a) $f(x) = e^{\sqrt{1-x}}$; b) $g(x) = \ln{(1-x^2)}$;

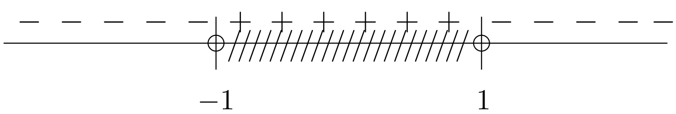
c) $h(x) = \dfrac{1}{\ln\, x}$; d) $j(x) = \sqrt{1 - \ln\, x}$.

Solução:

a) $(f(x) = e^{\sqrt{1-x}})$ O domínio da função exponencial é $\mathbb{R}$, a reta real. Mas, neste caso, queremos o domínio da exponencial composta com a função $y = \sqrt{1-x}$. Assim, se $f(x) = \sqrt{1-x}$ e $g(x) = e^x$, o domínio de $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{\sqrt{1-x}}$ é igual ao domínio de f, que é determinado pela condição $1 - x \geqslant 0$. Assim, estamos lidando com conjunto definido pela condição $x \leqslant 1$, o intervalo a seguir:

$$(-\infty,\, 1].$$

b) $(g(x) = \ln{(1-x^2)})$ A condição é $1 - x^2 > 0$, devido à composição com a função logaritmo. Assim, temos que fazer a análise de sinal.



Assim, o domínio da função é o intervalo

$$(-1,\, 1).$$

c) $(h(x) = \dfrac{1}{\ln x})$ Neste caso queremos, de imediato, que x seja positivo, devido ao logaritmo. No entanto, como logaritmo aparece no denominador, queremos ainda que $\ln x \neq 0$. Isso só ocorre se $x = 1$. Portanto, o domínio é dado pela união a seguir:

$$(0,\, 1) \cup (1,\, +\infty).$$

d) $(j(x) = \sqrt{1 - \ln x})$ Agora, queremos que $1 - \ln x \geqslant 0$.

A condição $x > 0$ já está imposta pelo uso da função logaritmo. Além disso, queremos que os valores de $\ln x$ sejam menores ou iguais a 1, $\ln x \leqslant 1$. Isso ocorre apena quando x pertence ao intervalo $(0,\, e]$, pois $y = \ln x$ é uma função sempre crescente e $\ln x = 1 \iff x = e$, a constante de Napier.

Resposta: $(0,\, e]$.

---

4) Use as propriedades das funções para simplificar as expressões a seguir:

a) $\ln(1 - x^2) - \ln(1 - x) = \ln\left(\dfrac{1 - x^2}{1 - x}\right) = \ln(1 + x)$.

b) $\dfrac{e^{x+3} \times e^{x-3}}{e^x} = \dfrac{e^{x+3+x-3}}{e^x} = \dfrac{e^{2x}}{e^x} = e^x$.

c) $2\ln(1 + x) - \ln\sqrt{1 + x} = \ln\dfrac{(1 + x)^2}{\sqrt{1 + x}} = \ln(1 + x)^{3/2}$.

---

5) Resolva as seguintes equações:

a) $(x^2 + 4x - 5)\, e^{3x+5} = 0$;

Este exercício ensina uma idéia que será usada mais tarde. Observe que exponencial de qualquer valor é sempre um número positivo. Assim, como $e^{3x+5} >)$, $(x^2 + 4x - 5)\, e^{3x+5} = 0 \iff x^2 + 4x - 5 = 0$.

Assim, basta resolver a equação do segundo grau, $x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1) = 0$, cujas raízes são -5 e 1.

b) $e^{2x+5} = 1$;

Aqui, $e^u = 1 \iff u = 0$. Assim, a solução é $x = -\frac{5}{2}$.

c) $\ln(x - 1) = \ln(2x + 1)$;

Neste caso, vamos usar as propriedades do logaritmo:

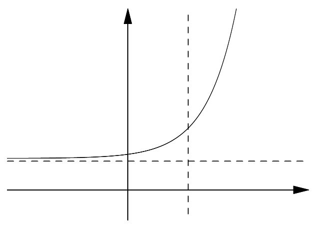
$\ln(x-1) \; - \; \ln(2x+1) \; = \; 0, \quad \ln\left(\dfrac{x-1}{2x+1}\right) \; = \; 0.$

Nossa única chance é colocar $\dfrac{x-1}{2x-1} \; = \; 1$, que tem solução $\; x = -2$.

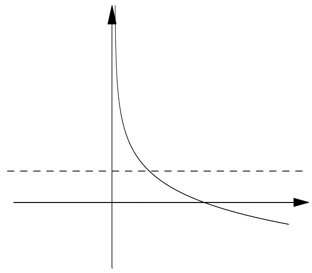
Mas, quem nos dera, essa solução não nos serve, pois -2 não pertence ao domínio de $y = \ln(x-1)$ nem de $y = \ln(2x+1)$. Conclusão: a equação não tem solução.

---

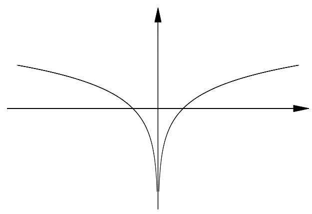
6) Esboce o gráfico de cada função a seguir:



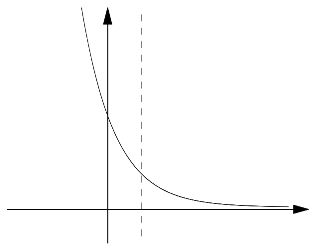
$f(x) = e^{x-2} + 1$



$g(x) = -\ \ln x + 1$



$h(x) = \ln |x|$



$j(x) = e^{1-x}$

Semana 16

---

1) letra d)
2) letra b)
3) letra c)
4) letra a)
5) letra e)
6) letra a)
7) letra c)

8) a) 26; b) 10.

Sugestão: pratique o dispositivo de Briot-Ruffini para efetuar esse cálculo.

---

9) a) $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(3x) = \sqrt{3x}$.

$\text{Dom}(f \circ h) = [0, +\infty)$.

b) $(g \circ j)(x) = g(j(x)) = g(x+4) = (x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$.

$\text{Dom}(g \circ j) = \mathbb{R}$

c) $(j \circ f)(x) = j(f(x)) = j(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 4$.

$\text{Dom}(j \circ f) = \text{Dom}(f) = [0, +\infty)$.

d) $(k \circ f)(x) = k(f(x)) = k(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Neste caso, devemos acrescentar a condição $x \neq 0$, para que $\text{Im}(f) \subset \text{Dom}(k) = \mathbb{R} - \{0\}$. Portanto, $\text{Dom}(k \circ f) = (0, +\infty)$.

e) $(k \circ j)(x) = k(j(x)) = k(x+4) = \dfrac{1}{x+4}$.

$\text{Dom}(k \circ j) = \mathbb{R} - \{-4\} = (-\infty, -4) \cup (-4, +\infty)$.

f) $(h \circ g \circ j)(x) = h(g(j(x))) = h(x^2 + 8x + 16) = 3x^2 + 24x + 48$.

$\text{Dom}(h \circ g \circ j) = \mathbb{R}$.

g) $(j \circ h \circ f)(x) = j(h(f(x))) = j(h(\sqrt{x})) = j(3\sqrt{x}) = 3\sqrt{x} + 4$.

$\text{Dom}(j \circ h \circ f) = [0, +\infty)$.

h) $(k \circ g \circ j)(x) = k(g(j(x))) = k(g(x+4)) = k((x+4)^2) = \dfrac{1}{(x+4)^2}$.

$\text{Dom}(k \circ g \circ j) = \mathbb{R} - \{-4\} = (-\infty, -4) \cup (-4, +\infty)$.

---

10) a) $\text{Dom}(f) = (-3, +\infty)$; b) $\text{Dom}(g) = [2, 4]$;

c) $\text{Dom}(h) = \mathbb{R}$; d) $\text{Dom}(j) = [2, +\infty)$

---

11) Resolva as equações a seguir:

a) $\ln(x^2 + 4x + 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = 1$. Assim, a solução é $x = -3$ ou $x = -1$.

b) $e^{|x-3|-1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x - 3| - 1 = 0$. A solução, portanto, é $x = 4$ e $x = 2$.

---

12) $f^{-1}(0) = 2$, pois $f(2) = 0$; $f^{-1}(2) = 3$, pois $f(3) = 2$; $f^{-1}(f(4)) = 4$; $f^{-1}(4) = 5$, pois $f(5) = 4$.

---

13) $A = \mathbb{R} - \{-3\}$, $B = \mathbb{R} - \{-2\}$ e $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x+2} - 3$.

---

14) Usamos a equação $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ para concluir que $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}$ ou $\operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{3}$. Como $\theta \in [3\pi/2, 2\pi]$, temos que θ está no quarto quadrante e, portanto, $\operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{3}$. Agora é fácil calcular os valores das outras funções trigonométricas em θ.

ISBN 978-85-7648-366-3
9 788576 483663

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

UERJ
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Universidade Federal Fluminense
uff

UNIVERSIDADE DO BRASIL

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

UNIRIO

FUNDAÇÃO
SANTA CABRINI
Provedora de acesso à Cidadania

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL