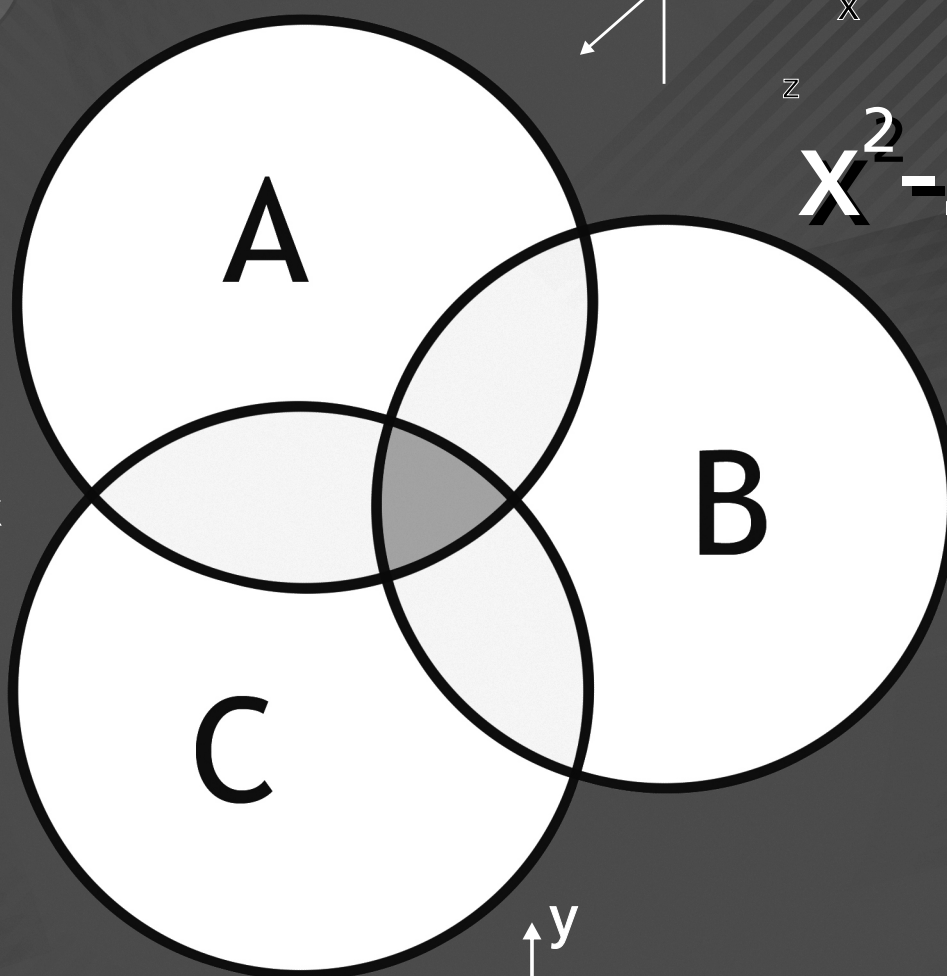


Métodos Determinísticos II

$$3x+1 \geq 0$$



$$x^2 - 2x = 0$$

$$3x+1 \geq 0$$



Fundação

CECIERJ

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Métodos Determinísticos II

Volume único - Módulo 1

Celso Costa



**GOVERNO DO
Rio de Janeiro**

**SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA**



**Ministério
da Educação**



Apoio:



Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001

Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Presidente

Masako Oya Masuda

Vice-presidente

Mirian Crapez

Coordenação do Curso de Administração

UFRRJ - Silvestre Prado

UERJ - Aluizio Belisário

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

Celso Costa

REVISÃO DE CONTEÚDO

Ana Cleide Parente

Eliane Amiune Camargo

COLABORADORES

Ana Cleide Parente

Eliane Amiune Camargo

Marcelo Corrêa

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL

Cristine Costa Barreto

Departamento de Produção

EDITORA

Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO

Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL

Aline Madeira Brondani

Giuseppe Luigi Toscano

Marcelo Freitas

ILUSTRAÇÃO

André Amaral

André Dahmer

Aline Madeira Brondani

Giuseppe Luigi Toscano

CAPA

Eduardo Bordoni

PRODUÇÃO GRÁFICA

Oséias Ferraz

Patricia Seabra

Copyright © 2009, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

C837c

Costa, Celso.

Métodos Determinísticos II. v. único / Celso Costa.

Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

260p.; 19 x 26,5 cm.

ISBN: 978-85-7648-498-1

1. Matemática básica. 2. Sistemas de coordenadas.
3. Equação da reta. 4. Plano euclidiano. I. Título.

CDD: 510

2010/1

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador

Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia

Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO

Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Reitor: Aloísio Teixeira

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Reitor: Ricardo Vieiralves

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

Reitor: Ricardo Motta Miranda

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Reitor: Roberto de Souza Salles

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Reitora: Malvina Tania Tuttman

Métodos Determinísticos II

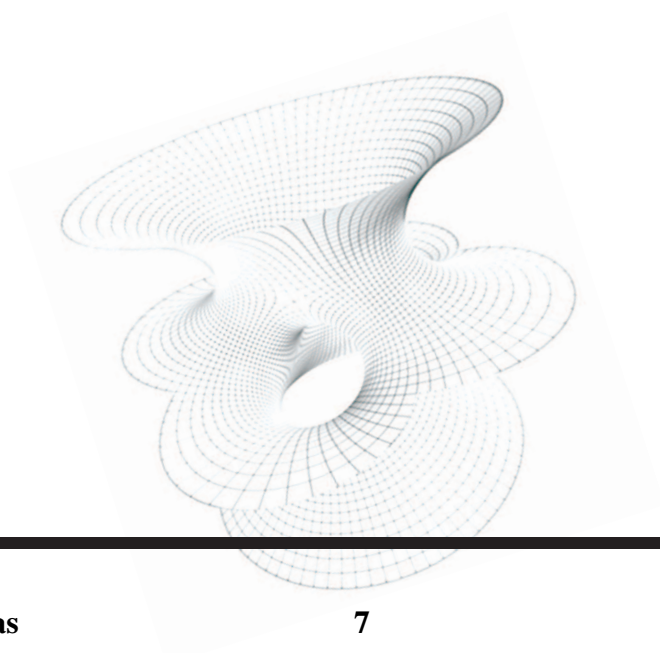
Volume único - Módulo 1

SUMÁRIO

Aula 1 – Funções Compostas e Inversas	7
Aula 2 – As Funções Exponencial e Logarítmica	21
Aula 3 – Uma idéia para quem quer viver no limite!	37
Aula 4 – Limites de Funções – Propriedades	51
Aula 5 – Limites laterais e mais algumas propriedades	67
Aula 6 – Limites envolvendo infinito – Primeira parte	83
Aula 7 – Limites envolvendo infinito – Segunda parte	99
Aula 8 – Funções Reais e Continuidade	117
Aula 9 – O Conceito de Derivada	131
Aula 10 – Interpretação Geométrica e Derivadas das Funções Usuais	147
Aula 11 – Derivadas – Máximos e Mínimos	161
Aula 12 – Derivadas – Máximos e Mínimos – Continuação	177
Aula 13 – O Conceito de Integral – Integral Indefinida	189
Aula 14 – Integral Definida	201
Aula 15 – Coletânea de Exercícios	215
Respostas	241

Aula 0

LINE1
LINE2



1	Funções Compostas e Inversas	7
2	As Funções Exponencial e Logarítmica	21
3	Uma idéia para quem quer viver no limite!	37
4	Limites de Funções – Propriedades	51
5	Limites laterais e mais algumas propriedades	67
6	Limites Envolvendo Infinito – Primeira Parte	83
7	Limites envolvendo infinito – Segunda parte	99
8	Funções Reais e Continuidade	117
9	O Conceito de Derivada	131
10	Interpretação Geométrica e Derivadas das Funções Usuais	147
11	Derivadas – Máximos e Mínimos	161
12	Derivadas – Máximos e Mínimos (Continuação)	177
13	O Conceito de Integral – Integral Indefinida	189

14 Integral Definida **201**

15 Coletânea de Exercícios **215**

Aula 1

FUNÇÕES COMPOSTAS E INVERSAS

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 entender e trabalhar com o conceito de função crescente e de função composta;
- 2 entender os conceitos de função sobrejetiva, injetiva, bijetiva e de função inversa;
- 3 decidir se uma função possui ou não inversa;
- 4 resolver problemas envolvendo funções inversas e representar graficamente as soluções.

Nesta aula, vamos identificar propriedades importantes das funções. Continuamos nosso trabalho considerando funções reais de variável real. Ou seja, os domínios $D = D(f)$ das funções f são sempre subconjuntos de números reais, isto é, $D \subset \mathbb{R}$, enquanto que o contradomínio é constituído de todos os números reais \mathbb{R} . Para iniciar, eis o conceito de função composta.

FUNÇÕES COMPOSTAS

Considere uma função f cujo domínio é D_f e outra função g cujo domínio é D_g . Suponha ainda que a imagem de f , $Im(f)$, esteja contida no domínio de g , isto é, $Im(f) \subset D_g$. Veja a representação da situação no esquema a seguir:

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Im(f) \subset D_g \quad \text{e} \quad g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Note que como $Im(f) \subset D_g$ então para todo número $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$. Logo é permitido aplicar a função g ao número $f(x)$, isto é, calcular o resultado $g(f(x))$. Assim procedendo, estaremos associando a cada número real $x \in D_f$ um número real $g(f(x))$. Portanto, este esquema permite definir uma nova função h , a partir das funções f e g de partida, pela fórmula:

$$h : D_f \longrightarrow \mathbb{R},$$

onde $h(x) = g(f(x))$.

A nova função h é denominada a composta de f com g . Para facilitar, a notação e o cálculo da função composta, vamos considerar x a variável para a função f e y a variável para a função g . Como $Im(f) \subset D_g$, a imagem da função f está contida no domínio da função g e, então, $y = f(x)$. Também representando por w os elementos que estão na $Im(g)$, podemos escrever que

$$y = f(x), \quad w = g(y) \Rightarrow w = h(x) = g(f(x)).$$

Usamos a notação $h = g \circ f$ para representar a função obtida pela composição das funções f e g . Veja, também, a **Figura 1.1** que simboliza a composição de funções.

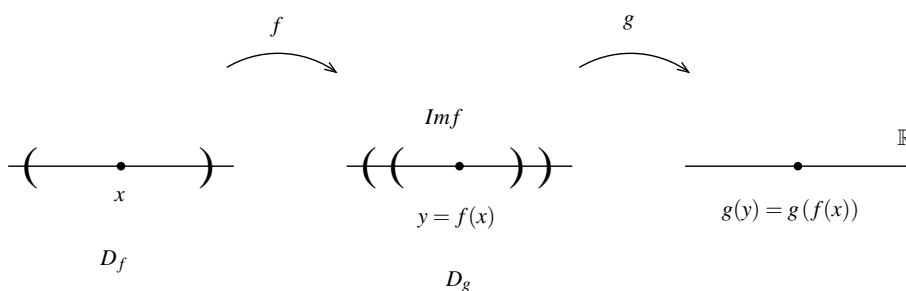


Figura 1.1: A função composta $h = g \circ f$.

Exemplo 1.1

Considere as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned} y &= f(x) = x - 2 \\ w &= g(y) = y^3. \end{aligned}$$

- Encontre a função composta $h = g \circ f$.
- Mostre que $x = 2$ é uma das raízes da equação $h(x) = 0$.

Solução: a. A função composta $h = g \circ f$ tem como fórmula a expressão

$$h(x) = g(f(x)) = g(x - 2) = (x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8.$$

b. Usando a fórmula da função encontramos que

$$h(2) = 2^3 - 6(2)^2 + 12(2) - 8 = 8 - 24 + 24 - 8 = 0.$$

Portanto, $x = 2$ é raiz da equação $h(x) = 0$.

Exemplo 1.2

Sejam as funções $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ x & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad f(x) = x - 3.$$

Encontre a expressão que define $g \circ f = h$.

Solução: Temos que

$$h(x) = g(f(x)) = g(x - 3).$$

Em virtude da definição de g , precisamos saber quando $x - 3 \geq 0$ e quando $x - 3 < 0$.

Ora

$$x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \quad \text{e} \quad x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3.$$

Logo,

$$h(x) = \begin{cases} (x-3)^2 & \text{se } x \geq 3 \\ x-3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

Exemplo 1.3

Sejam as funções reais $f(x) = 3x + 2$ e $(g \circ f)(x) = x^2 - x + 1$. Determine a expressão de g .

Solução: Temos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = x^2 - x + 1.$$

Façamos agora

$$3x + 2 = y \Rightarrow x = \frac{y-2}{3}.$$

Logo,

$$g(y) = \left(\frac{y-2}{3}\right)^2 - \frac{y-2}{3} + 1$$

$$g(y) = \frac{y^2 - 4y + 4}{9} - \frac{y-2}{3} + 1$$

$$g(y) = \frac{1}{9} (y^2 - 4y + 4 - 3(y-2) + 9)$$

$$g(y) = \frac{1}{9} (y^2 - 7y + 19).$$

FUNÇÕES SOBREJETORA, INJETORA E BIJETORA

Até agora, ao tratar das funções, estamos sempre supondo que o contradomínio é todo o conjunto \mathbb{R} . Neste momento, é útil para explicar os conceitos desta parte do nosso estudo, considerar que o contradomínio das funções é um subconjunto $B \subset \mathbb{R}$.

Uma função $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora se $Im(f) = B$. Ou seja, para todo elemento $y \in B$ existe $x \in A$, tal que $f(x) = y$.

Uma função $g: A \rightarrow B$ é injetora (ou injetiva) se elementos diferentes x_1 e x_2 do domínio A dão como imagens elementos $g(x_1)$ e $g(x_2)$ também diferentes. Ou seja, vale a propriedade:

$$x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1), g(x_2) \in \text{Im}(g) \quad \text{e} \quad g(x_1) \neq g(x_2).$$

Uma função $f: A \rightarrow B$, que tem ambas as propriedades injetora e sobrejetora, é dita uma função bijetora.

Exemplo 1.4

Sejam $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $f, g: A \rightarrow B$ como nos diagramas abaixo.

A função f não é injetora, nem sobrejetora. A função g é bijetora.

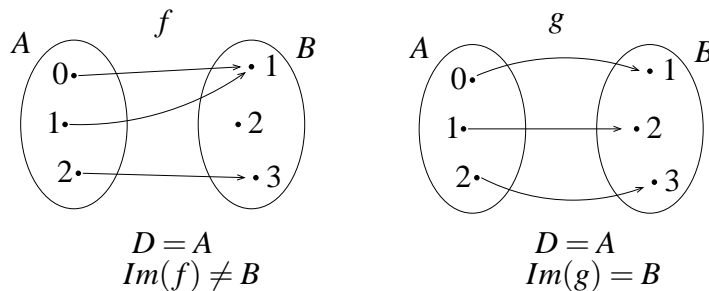


Figura 1.2: As funções f e g .

FUNÇÃO INVERSA

Sobre qualquer conjunto não vazio de números reais $A \subset \mathbb{R}$, podemos definir uma função chamada identidade $I_d: A \rightarrow A$ pela equação $I_d(x) = x$. A partir da função identidade e do conceito de composição de funções, podemos perguntar sobre a existência de funções inversas. Veja como o problema é colocado.

Considere uma função $f: A \rightarrow B$ onde A e B são subconjuntos de números reais. Estamos interessados em encontrar condições para que exista uma função $g: B \rightarrow A$ que seja a função inversa de f . Essa nova função deve ter a propriedade que $g \circ f(x) = I_d$. Veja essa propriedade expressa no seguinte diagrama de funções.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & A \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) = x \end{array}$$

Examine o diagrama e verifique que x é o ponto de partida e de chegada. Mas, quais são as propriedades que devem verificar uma função $f : A \rightarrow B$ para garantir a existência de uma função inversa, conforme o diagrama anterior?

Vamos dedicar nossa energia para encontrar uma resposta, em dois tempos.

Primeiramente, afirmamos que a função deve ser injetiva. De fato, se uma função f não é injetiva, então não existe inversa. Veja um exemplo, representado no diagrama a seguir, onde

$$A = \{5, 6, 7\} \quad \text{e} \quad B = \{1, 2\}.$$

A função inversa não pode ser definida para o elemento 1, pois $f(5) = f(6) = 1$.

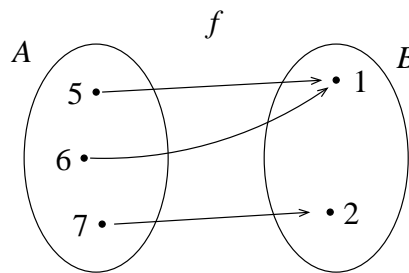


Figura 1.3: Temos que $f(5) = f(6) = 1$.

Em segundo lugar, se a função não é sobrejetora, então não existe inversa. Veja um exemplo de uma função f não sobrejetora, representado no diagrama a seguir, onde

$$A = \{5, 6, 7\} \quad \text{e} \quad B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

A função inversa não pode ser definida em $4 \in B$.

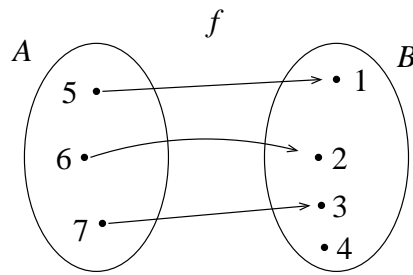


Figura 1.4: Não existe $x \in A$ tal que $f(x) = 4$.

Finalmente, para uma função f bijetora está claro, depois da discussão que fizemos, que existe uma função inversa. Vamos denotar de agora em diante por $f^{-1} : B \rightarrow A$ a função inversa de f .

Portanto, uma função $f : A \rightarrow B$ possui a função inversa f^{-1} se e somente se f é bijetora.

Além disso, a função inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ tem as seguintes propriedades:

- (i) f^{-1} é uma função bijetora de B em A .
- (ii) $D(f^{-1}) = Im(f) = B$.
- (iii) $Im(f^{-1}) = D(f) = A$.

A relação entre os pares ordenados que compõem os gráficos de f e f^{-1} , os quais são denotados por $G(f)$ e $G(f^{-1})$, pode ser expressa simbolicamente por

$$(x, y) \in G(f) \Leftrightarrow (y, x) \in G(f^{-1})$$

ou

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Exemplo 1.5

As funções $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ e $f(x) = \frac{1}{x}$ é tal que $f = f^{-1}$. Veja as contas para comprovar:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x}.$$

Exemplo 1.6

Qual a função inversa da função bijetora $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$?

Solução: Se $y = f(x)$ então $f^{-1}(y) = x$.

Partindo de $y = f(x)$, $y = 3x + 2$, procuramos isolar x .

$$y = 3x + 2 \Rightarrow x = \frac{y-2}{3}.$$

Logo,

$$f^{-1}(y) = x = \frac{y-2}{3}.$$

Como a variável independente pode indiferentemente ser trocada também, podemos escrever, para a função inversa f^{-1} do exemplo anterior, que

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}.$$

Exemplo 1.7

Qual é a função inversa da função bijetora em $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$?

Solução: Temos que

$$y = f(x) = x^3,$$

logo,

$$x = \sqrt[3]{y}.$$

Portanto

$$f^{-1}(y) = x = \sqrt[3]{y}.$$

Ou seja,

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Exemplo 1.8

Um exemplo interessante é o da função identidade. $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $I(x) = x$. Isto é, se escrevermos $y = I(x)$, temos que $y = x$. A representação gráfica desta função resulta na bissetriz do primeiro quadrante. Veja a figura a seguir.

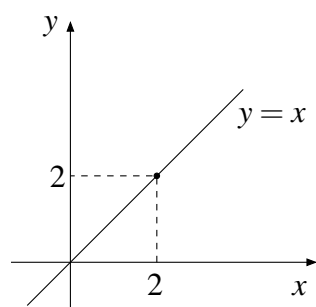


Figura 1.5: A função $I(x) = x$.

É claro que $I^{-1} = I$, isto é, a função identidade e sua inversa coincidem.

OS GRÁFICOS DE UMA FUNÇÃO E SUA INVERSA

Um exame do gráfico a seguir nos leva à conclusão que os pontos (x, y) e (y, x) do plano, abaixo representados, são simétricos com relação à reta $y = x$.

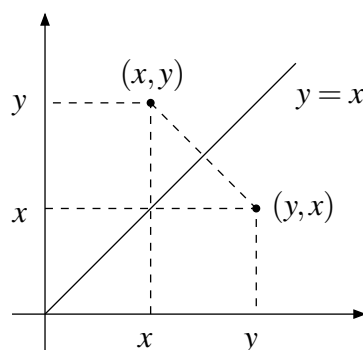


Figura 1.6: Simetria dos pontos (x, y) e (y, x) .

Lembrando a relação

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$$

podemos concluir que, no plano, os pontos que representam uma função e sua inversa são simétricos em relação à reta $y = x$. Isto é, os gráficos que representam f e f^{-1} são simétricos em relação

à reta bissetriz do 1º e 4º quadrante. Veja um exemplo deste fato a seguir.

Exemplo 1.9

Considere a função f e sua inversa f^{-1} definidas por

$$f: (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty) \quad \text{e} \quad f^{-1}: (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$$

$$x \longmapsto f(x) = x^2 \quad \text{e} \quad x \longmapsto f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Observe a propriedade de simetria dos gráficos a seguir.

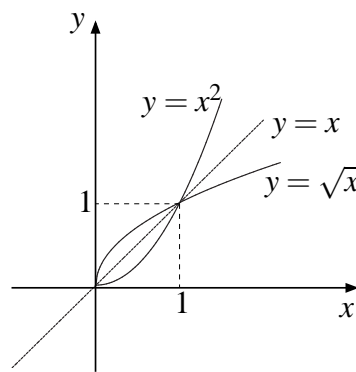


Figura 1.7: Gráficos de funções inversas.

FUNÇÕES MONÓTONAS

Dentre as funções que são injetivas destacam-se as funções crescentes, decrescentes e similares. Acompanhe a formulação destes conceitos.

Considere uma função $f: A \rightarrow B$ onde A e B são subconjuntos de números reais. Então, a função é dita:

- crescente se

$$\text{para todo } x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

- decrescente se

$$\text{para todo } x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

- não-crescente se

para todo $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;

- não-decrescente se

para todo $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;

Veja, nas **Figuras 1.8 e 1.9**, representações gráficas de funções com as propriedades que vêm de serem conceituadas.

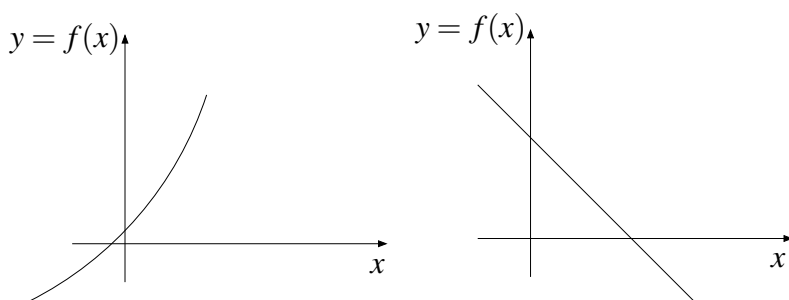


Figura 1.8: Função f crescente e decrescente.

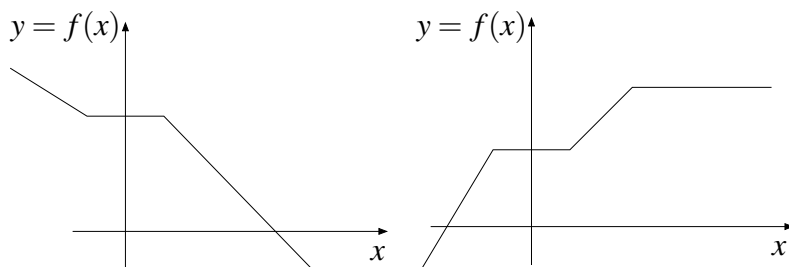


Figura 1.9: Função f não-crescente e não-decrescente.

Exemplo 1.10

A função $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), f(x) = x^2$ é crescente. Veja a justificativa.

Suponha dois números reais a e b positivos, devemos mostrar que se

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b) \Leftrightarrow a^2 < b^2.$$

Para comprovar, acompanhe as contas:

$$a^2 < b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 < 0 \Leftrightarrow (a - b) \cdot (a + b) < 0 \quad (1.1)$$

Como os números são positivos, então $(a + b) > 0$. Também, como $a < b$, então $a - b < 0$. Logo, $(a - b) \cdot (a + b) < 0$. Isto mostra que (1.1) é verdadeiro e que, portanto, $a^2 < b^2$ é verdadeiro. Portanto, a função é crescente. Veja o gráfico da função representado na **Figura 1.10**.

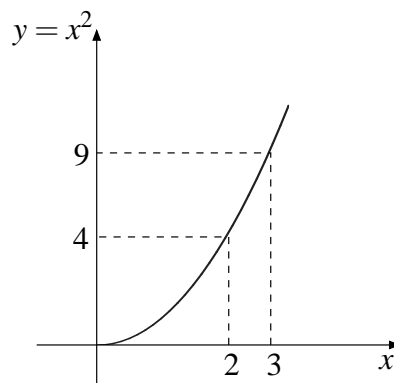


Figura 1.10: Gráfico de uma função crescente.

Exemplo 1.11

Considere a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$$h(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq -2 \\ -x & \text{se } -2 < x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Então f é constante no intervalo $(-\infty, 2]$, decrescente no intervalo $(-2, 0]$ e crescente no intervalo $(0, +\infty)$. Examine estas propriedades no gráfico da função apresentado na **Figura 1.11**.

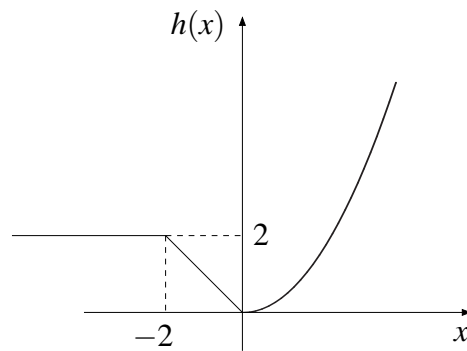


Figura 1.11: Gráfico da função $h(x)$.

Exercício 1.1

1. Examine, nos intervalos $(-\infty, 2]$, $(-2, 2]$ e $(2, +\infty)$, o comportamento da função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \leq -2 \\ -4 & \text{se } -2 < x \leq 2 \\ -x-2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

2. Dados $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2x$, determine:

a) $f \circ g(x)$ b) $f \circ f(x)$ c) $g \circ f(x)$ d) $g \circ g(x)$.

3. Sendo f a função real definida por $f(x) = x^2 - 6x + 8$, para todos os valores $x > 3$. Construa o gráfico de f , conclua que existe a inversa f^{-1} e determine o valor de $f^{-1}(3)$.

4. A função inversa da função bijetora $f: \mathbb{R} - \{-4\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$ definida por $f(x) = \frac{2x-3}{x+4}$ é:

a) $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2x+3}$ d) $f^{-1}(x) = \frac{4x+3}{x-2}$
 b) $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2x-3}$ e) $f^{-1}(x) = \frac{4x+3}{x+2}$
 c) $f^{-1}(x) = \frac{4x+3}{2-x}$

5. Dada a função real de variável real f , definida por $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \neq 1$:

- a) determine $(f \circ f)(x)$
 b) escreva uma expressão para $f^{-1}(x)$

6. Suponha que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é da forma $f(x) = ax + b$ e verifica $f[f(x)] = x + 1$. Calcule a e b .
7. Seja a função f tal que $f: (\mathbb{R} - \{-2\}) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$. Encontre o número real x que satisfaz $f(f(x)) = -1$.
8. Sendo $f(x-1) = 2x+3$ uma função de \mathbb{R} em \mathbb{R} , a função inversa $f^{-1}(x)$ é igual a:

a) $(3x+1) \cdot 2^{-1}$	d) $\frac{x-3}{2}$
b) $(x-5) \cdot 2^{-1}$	e) $(x+3) \cdot 2^{-1}$
c) $2x+2$	
9. Seja $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ a função dada por $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e f^{-1} a função inversa de f . Calcule o valor de $f^{-1}(4)$.

Aula 2

AS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA



O b j e t i v o s

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 entender os conceitos de função exponencial, função logaritmo e expressar gráficos dessas funções;
- 2 resolver problemas envolvendo as funções exponenciais e logarítmicas.

Os conceitos de funções exponenciais e funções logarítmicas estão baseados em operações de potenciação. Por isso, antes de definir essas funções, vamos recordar brevemente como funciona a potenciação quando a base é um número real positivo diferente de 1 e o expoente um número real. A justificativa para considerar como base apenas números reais b , tais que $b > 0$ e $b \neq 1$, é porque apenas neste contexto são definidas as funções logarítmicas.

Para o número racional m/p , onde o denominador é um número positivo, definimos a potência m/p de b , denotada por $b^{m/p}$ como sendo

$$b^{m/p} = (\sqrt[p]{b})^m.$$

Note que na definição o número m/p pode ser negativo. Nesta situação, como p é sempre um número inteiro positivo, então m é um número negativo.

Também, precisamos dar sentido à expressão b^r , quando r é um número real. Neste ponto, vamos colocar o carro na frente dos bois, apelando para um conceito que só será visto nas próximas aulas: o conceito de limite.

Nesta configuração, definimos b^r , a r -ésima potência de b , onde r é um número real positivo, como o limite

$$b^r = \lim_{n \rightarrow \infty} (b^{r_n}),$$

onde r_n é uma sequência de números racionais que convergem para r . Note que o processo de limite significa que r_n está arbitrariamente próximo de r , se n é muito grande. Se você preferir, deixe este conceito para ser melhor entendido quando estudar o conceito de limite nas aulas seguintes.

Para completar todas as possibilidades para o expoente x , definimos que para $x < 0$,

$$b^x = \left(\frac{1}{b}\right)^{-x}$$

e convencionamos que

$$b^0 = 1.$$

Destas definições decorrem as propriedades tradicionais da potenciação e radiciação, que também vamos recordar. Para todos os números reais m , r e s e qualquer número inteiro positivo p .

$$1. b^r \cdot b^s = b^{r+s}$$


$$2. \frac{b^r}{b^s} = b^{r-s}$$

$$3. b^{m/p} = \sqrt[p]{b^m}$$

A FUNÇÃO EXPONENCIAL

Uma função exponencial é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$. O número real fixo a é denominado a *base da função exponencial*.

Precisamos fazer um comentário e uma observação de carácter geral decorrentes da definição de função exponencial. Acompanhe a nota que vem a seguir.

-  i. Veja que a vantagem de excluir o valor $a = 1$ da definição é porque para todo número real x , $1^x = 1$. Portanto, se forçamos uma definição com $a = 1$, a função exponencial assim definida seria uma função constante, não acrescentando nenhuma novidade.
- ii. O domínio $D = D(f)$ de uma função exponencial é todo o conjunto \mathbb{R} . Quanto ao conjunto imagem da função, confira logo a seguir nas propriedades que $Im(f) = (0, +\infty)$.

PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS

1) Como a base da função exponencial é um número real a que satisfaz $a > 0$ e $a \neq 1$, então para todo número real x , temos que $f(x) = a^x > 0$. Ou seja, os valores da função são todos positivos. Mais do que isso, o conjunto imagem da função coincide com os números positivos. Ou seja $Im(f) = (0, +\infty)$. Portanto, o gráfico de qualquer função exponencial está situado acima do

eixo dos x . Esta situação pode ser constatada nos gráficos apresentados um pouco mais adiante.

2) Para todo valor da base $a > 0$ e $a \neq 1$, temos que $f(0) = a^0 = 1$. Logo o gráfico de qualquer função exponencial passa pelo ponto $A = (0, 1)$. Veja este detalhe nos gráficos apresentados logo a seguir.

GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Antes de tratar o caso geral, vamos trabalhar um exemplo particular, traçando o gráfico da função exponencial

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = 2^x. \end{aligned}$$

Seguindo nossa técnica geral, precisamos construir uma quantidade de pontos da curva que permitam intuir o gráfico da função. Veja a tabela anexa à **Figura 2.1**.

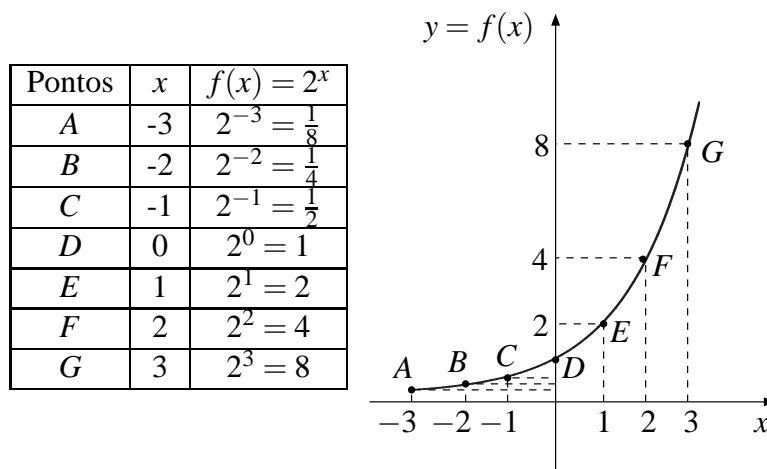


Figura 2.1: Gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$.

Com os dados usados para construir anteriormente o gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$, podemos definir um conjunto de pontos suficientes para esboçar o gráfico da função exponencial de base $\frac{1}{2}$.

Considere, então, a função

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x. \end{aligned}$$

Adaptando os dados da tabela anterior, definimos alguns pontos do gráfico desta nova função exponencial.

Pontos	x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
A	-3	$\frac{1^3}{2} = 2^3 = 8$
B	-2	$\frac{1^2}{2} = 2^2 = 4$
C	-1	$\frac{1^1}{2} = 2^1 = 2$
D	0	$\frac{1^0}{2} = 2^0 = 1$
E	1	$\frac{1^1}{2} = \frac{1}{2}$
F	2	$\frac{1^2}{2} = \frac{1}{4}$
G	3	$\frac{1^3}{2} = \frac{1}{8}$

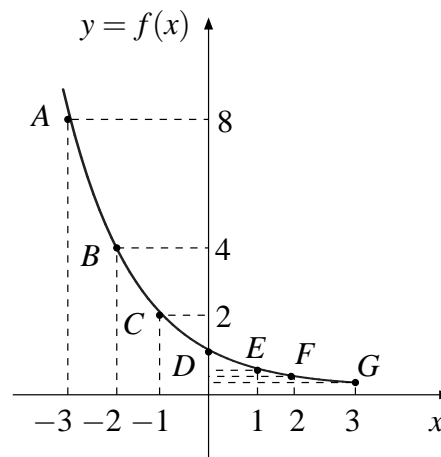


Figura 2.2: Gráfico da função exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

A partir do gráfico de duas funções exponenciais, que acabamos de construir, podemos intuir que, de modo geral, os gráficos das funções exponenciais são de dois tipos dependendo do valor da base ser um número real maior que zero e menor que um ou um número real maior que um. Veja os gráficos a seguir, representados na **Figura 2.3**.

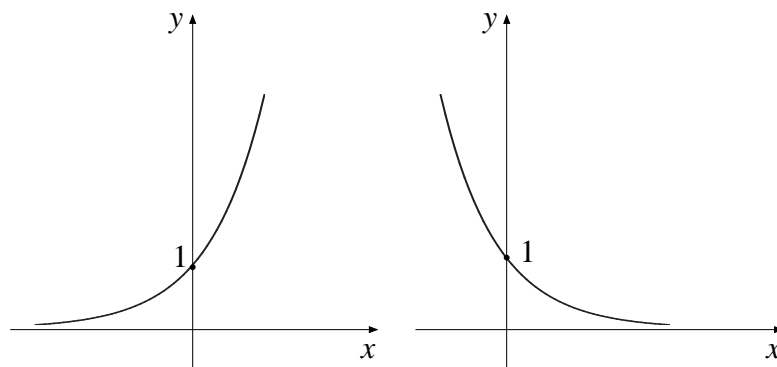


Figura 2.3: As funções $f(x) = a^x$, $a > 1$ e $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$.

Exercício 2.1

1. Mostre através de representação gráfica que os gráficos das funções $f(x) = -3x + 14$ e $g(x) = 3^x$ possuem um ponto de interseção.
2. Determine o domínio das funções:

a) $f(x) = \frac{1}{4^x - 3^x}$

b) $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 3^x}$

A FUNÇÃO LOGARITMO, UMA PITADA DA HISTÓRIA

No século XVII, o desenvolvimento da Matemática na Europa, embora continuasse avançando em suas conquistas teóricas, rende-se à necessidade de realização de cálculos concretos, para modelar dados obtidos através da experimentação empírica. A nova exigência é provocada pelo momento que a ciência e o comércio vivem na Europa. Destaque, de um lado, para a Astronomia, às voltas com uma descrição do sistema solar compatível com as observações; de outro lado, para as necessidades do comércio, principalmente devido à construção de mapas náuticos para as grandes navegações.

As rotinas de trabalho nestas duas frentes exigiam uma infinidade de longos e fatigantes cálculos, todos feitos manualmente. Tudo se complicava, principalmente, quando havia necessidade de multiplicar dois ou mais números grandes. Por

exemplo, o algoritmo usual para a multiplicação de dois números de sete algarismos necessita de 49 multiplicações e uma adição!

A situação colocava um grande desafio às mentes matemáticas da época. Como produzir um método confortável e eficiente, menos sujeito a erros, para dar conta das laboriosas operações numéricas exigidas?

Este quadro mudou espetacularmente em 1614, quando John Neper (1550 - 1617) introduziu o cálculo logaritmico e construiu a primeira tábua de logaritmos.

O LOGARITMO NEPERIANO

Neper trabalhou mais de vinte anos na formulação de suas idéias de cálculo com logaritmos. Em 1614, publicou a obra *Descrição da maravilhosa regra dos logaritmos*, causando forte impacto. A palavra "logaritmo" foi inventada por Neper a partir das palavras gregas *logos* razão e *aritmos* número.

O método dos logaritmos, como passou a ser conhecido, simplificava muito as rotinas dos longos cálculos de então, facilitando, por exemplo, a construção de cartas náuticas e impulsionando o desenvolvimento da Astronomia e do comércio.

Um dos maiores trunfos obtidos pelo projeto de Neper foi o auxílio que forneceu às pesquisas de Johann Kepler. Na tarefa de encontrar um modelo para o sistema solar, Kepler lidava com intermináveis cálculos, com base em dados experimentais. Sem a ajuda da técnica dos logaritmos, provavelmente não teria conseguido emergir do mar de cálculos.

Os logaritmos foram essenciais para a formulação de seu modelo do sistema solar em três proposições fundamentais:

- o sol é o centro do sistema e os astros giram ao redor dele em órbitas que descrevem uma elipse;
- os movimentos elípticos dos planetas em torno do sol são tais que o sol ocupa um dos focos;
- colocando o astro em um dos focos e definindo a cada momento um raio imaginário partindo do sol até um planeta, o movimento do planeta em órbita em torno do sol

faz com que os raios, ao variarem, varram áreas iguais em tempos iguais.

A obra de Neper envolvia de uma forma não explícita o número que hoje é representado pelo símbolo e , um dos mais importantes da Matemática rivalizando com o número π . Um pouco mais tarde voltaremos a focalizar atenção no número e .

LOGARITMO NA BASE b

Como no caso da definição das funções exponenciais, definiremos funções logaritmos com bases b , tais que $b > 0$ e $b \neq 1$. Além disso, o domínio D de definição de uma função logaritmo é o conjunto dos números positivos, isto é, $D = (0, +\infty)$. Reservando a notação \log_b para representar a função logaritmo na base b , definimos o valor da função para um número positivo x através da equivalência,

$$\log_b : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{onde } \log_b(x) = y \Leftrightarrow b^y = x.$$

Na definição de logaritmo, $\log_b(x) = y$, o número b é denominado base do logaritmo. Lemos, então, a expressão dizendo que o logaritmo de x na base b é y .

Exemplo 2.1

- a) $\log_2 64 = 6$, pois $2^6 = 64$
- b) $\log_{20} 1 = 0$, pois $20^0 = 1$
- c) $\log_{15} 15 = 1$, pois $15^1 = 15$
- d) $\log_5 \frac{1}{25} = -2$, pois $5^{-2} = \frac{1}{25}$

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO LOGARITMO

Já vimos propriedades que decorrem diretamente da definição. Veremos, agora, outras propriedades.

- a) $\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$ (logaritmo do produto)
- b) $\log_b a^w = w \cdot \log_b a$ (logaritmo da potência)

c) $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$ (logaritmo do quociente)

d) $\log_{b^z} a = \frac{1}{z} \cdot \log_b a$

e) $\log_{b^z} a^w = \frac{w}{z} \cdot \log_b a$

Vamos mostrar por que valem as propriedades enunciadas. Precisamos apenas trabalhar cuidadosamente com a definição de logaritmo.

Prova da propriedade (a)

Seja $\log_b (x \cdot y) = z$, $\log_b x = z_1$ e $\log_b y = z_2$. Queremos provar que $z = z_1 + z_2$. Podemos escrever

$$b^z = x \cdot y, \quad b^{z_1} = x \quad \text{e} \quad b^{z_2} = y.$$

Logo,

$$b^{z_1} \cdot b^{z_2} = xy \Rightarrow b^{z_1+z_2} = xy.$$

Então,

$$b^z = b^{z_1+z_2} \Rightarrow z = z_1 + z_2.$$

Esta última igualdade era o que precisávamos provar.

Prova da propriedade (b)

Seja $\log_b a^w = x$ e $w \log_b a = y$. Precisamos provar que $x = y$. Temos,

$$b^x = a^w \quad \text{e} \quad \log_b a = \frac{y}{w}.$$

Logo,

$$b^x = a^w \quad \text{e} \quad b^{y/w} = a.$$

Elevando à potência w a última igualdade vem que

$$b^x = a^w \quad \text{e} \quad b^y = a^w \Rightarrow x = y.$$

Esta última igualdade era o que precisávamos provar.

Prova da propriedade (c)

Usando as propriedades (a) e (b) anteriores, escrevemos

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b \left(x \cdot \frac{1}{y} \right) = \log_b x + \log_b \frac{1}{y}.$$

Mas,

$$\log_b \left(\frac{1}{y} \right) = \log_b y^{-1} = -1 \cdot \log_b y.$$

Juntando os dois resultados está completa a prova da propriedade (c).

Prova da propriedade (d)

Seja $\log_{b^z} a = x$ e $\frac{1}{z} \log_b a = y$. Precisamos provar que $x = y$. Temos

$$b^{zx} = a \text{ e } \log_b a^{1/z} = y.$$

Ou seja,

$$b^x = a^{1/z} \text{ e } b^y = a^{1/z} \Rightarrow x = y.$$

Esta última igualdade prova a propriedade (d).

Prova da propriedade (e)

Usando a propriedade (b) e em seguida a propriedade (d), escrevemos

$$\log_{b^z} a^w = w \log_{b^z} a = \frac{w}{z} \log_b a.$$

MUDANÇA NA BASE DE UM LOGARITMO

Todos as propriedades que vimos até agora envolvem logaritmos de mesma base. Em algumas aplicações, é interessante transformar um logaritmo de uma base para outra. Conseguimos isto com a propriedade:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b},$$

onde $a, b, c > 0$, $b \neq 1$ e $c \neq 1$.

Vamos provar esse resultado.

Se $\log_b a = x$, $\log_c a = y$ e $\log_c b = z$, precisamos provar que $x = \frac{y}{z}$.

De fato,

$$b^x = a, \ c^y = a \text{ e } c^z = b \Rightarrow b^x = c^y \text{ e } c^z = b.$$

Logo,


$$b^x = c^y \text{ e } c^{zx} = b^x \Rightarrow zx = y.$$

Esta última igualdade prova o que queríamos.

Exemplo 2.2

Se $\log_2 x = 3$ e $\log_2 y = 5$, então


$$\log_y x = \frac{\log_2 x}{\log_2 y} = \frac{3}{5}.$$

-  i. Os logaritmos de base 10 são chamados decimais. O logaritmo decimal de um número x (com $x > 0$) é indicado por $\log x$ (pode-se omitir o 10 na base).
- ii. Mais adiante um pouco, vamos introduzir um dos mais importantes números da Matemática: o número e . Também, adiante, justificaremos porque esse número é importante. Os logaritmos de base e são chamados logaritmos naturais ou neperianos. O logaritmo neperiano de x é indicado por $\ln x$ ou $\log_e x$.

A FUNÇÃO EXPONENCIAL COMO INVERSA DO LOGARITMO

Considere b um número real positivo. A partir da recordação feita sobre o estudo de potenciação, no início desta aula, ficaram definidas a potência b^x , para todo número real x . E, como consequência, uma função exponencial $f(x)$ na base b , pela expressão

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = b^x. \end{aligned}$$

-  Como $b > 0$ e $b \neq 1$, as definições tornam a função exponencial $f(x)$ de base b e \log_b funções inversas uma da outra. Veja por quê. Se x é um número real, então

$$\log_b(f(x)) = y \Leftrightarrow b^y = f(x) = b^x \Leftrightarrow y = x.$$

Portanto, está mostrado que $\log_b(f(x)) = x$ e, daí, que \log_b e $f(x)$ são funções inversas.

NÚMERO e

Dentro deste contexto, vamos receber um personagem importante do conjunto dos números reais: o número e . Esse número, denominado número de Neper, constitui a base dos logaritmos neperianos. O número e é um número irracional, cujo valor com três casas decimais é $e \approx 2,716$. Em aulas futuras, quando você estudar o processo de limite, poderá apreciar o valor exato de e dado por uma série infinita convergente:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots.$$

LOGARITMO NATURAL E FUNÇÃO EXPONENCIAL

Quando a base b para uma função logaritmo é o número e , então a função recebe uma notação mais simplificada: simplesmente \ln . Ou seja, quando a base é o número e , isto é, \log_e , é simplesmente escrito como \ln e é denominada função logaritmo neperiano, ou logaritmo natural. A função inversa do logaritmo neperiano será denominada, simplesmente, função exponencial e denotada por \exp . Portanto,

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \exp(x) = e^x. \end{aligned}$$

GRÁFICOS DA FUNÇÃO LOGARITMO

A função logaritmo é a função inversa da função exponencial. Portanto, a partir dos gráficos das função exponencial, veja o início da aula anterior; concluímos que:

a) Se $a > 1$ (base > 1).

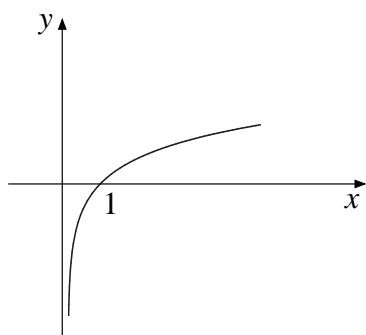


Figura 2.4: Gráfico de $y = \log_a x$.

b) Se $0 < a < 1$ (base entre 0 e 1).

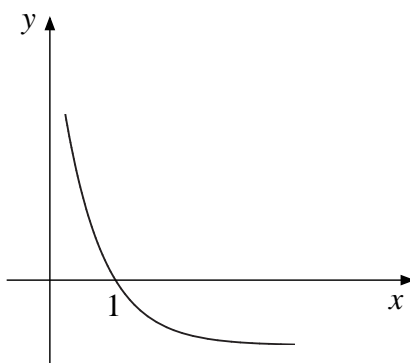


Figura 2.5: Gráfico de $y = \log_a x$.

✍ É importante revisar o método que permite a construção dos gráficos da função logaritmo.

Como a função logarítmica $y = \log_a x$ é a inversa da função exponencial $y = a^x$, podemos obter seu gráfico a partir do gráfico da exponencial. Basta usar o fato de que o gráfico de uma função e sua inversa são simétricos em relação à reta $y = x$, que é a reta bissetriz do 1º e 2º quadrantes. Representando em um mesmo gráfico as funções logaritmo e exponencial, temos:

(I) base $b > 1$

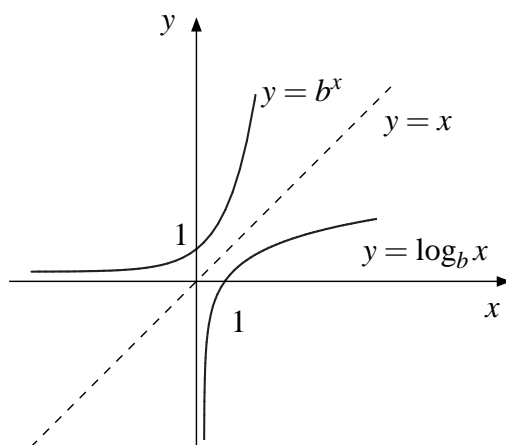


Figura 2.6: Simetria das funções $y = b^x$ e $y = \log_b x$ com respeito à reta $y = x$.

(II) $0 < \text{base } b < 1$

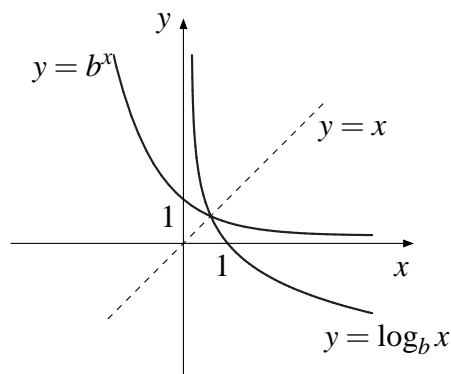



Figura 2.7: Simetria das funções $y = b^x$ e $y = \log_b x$ com respeito à reta $y = x$.

Nos dois casos, para a função $f(x) = \log_b x$, vale que $D(f) = (0, +\infty)$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.

Observando os gráficos anteriores e notando que $\log_b 1 = 0$, pois $b^0 = 1$, qualquer que seja a base b , concluímos que o gráfico da função $y = \log_b x$ sempre passa pelo ponto $(1, 0)$.

 A função $\exp(x) = e^x$ é uma das mais importantes funções da Matemática. Quando tratarmos do assunto derivada,

Exemplo 2.4

Determine o número de dígitos do inteiro 2^{50} .

Solução: Calculamos seu logaritmo decimal,

$$\log 2^{50} = 50 \times \log 2 = 50 \times 0,3010 = 15,05.$$

Como $15 \leq \log 2^{50} < 16$, então 2^{50} é um inteiro de 16 dígitos.

Exercício 2.2

1. Calcule:

a) $\log_3 \frac{1}{27}$

c) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{64}$

e) $\log_{0,01} 10$

b) $\log_{25} 125$

d) $\log_{13} 13 \cdot \log_{15} 1$

2. Sendo $f(x) = 3^{2x}$ e $g(x) = \log_4 x$, calcule $f(g(2))$.

3. Calcule o valor de $4^{\log_2 9}$.

4. Determine o domínio da função $f(x) = \log_x x^2 - 3x + 2$.

5. Sendo $\log_x a = 4$, $\log_x b = 2$ e $\log_x c = 1$, calcule $\log_x \left(\frac{a^3}{b^2 c^2} \right)$.

6. Usando $\log 3 = 0,4771$, calcule:

a) $\log 3000$

b) $\log 0,003$

c) $\log 0,81$

7. Calcule $\log_{0,04} 125$, usando que $\log 2 = 0,3010$.

8. Um número x tem logaritmo igual a 4 na base a e tem logaritmo igual a 8 na base $\frac{a}{3}$. Calcule x e a .

9. Simplifique a expressão $(\log_x 9) \cdot (\log_{81} 16) \cdot (\log_4 3)$.

Aula 3

**UMA IDÉIA PARA QUEM QUER
VIVER NO LIMITE!**



O b j e t i v o

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 calcular limites finitos de funções racionais.

A partir desta aula, você entrará num universo novo, surpreendente. As idéias, os conceitos e as técnicas que você aprenderá, a partir de agora, permitirão resolver problemas que eram completamente inacessíveis mesmo aos matemáticos mais geniais da Antigüidade. Estamos falando das técnicas do Cálculo Diferencial e Integral.

O que vai diferenciar o Cálculo de todas as outras disciplinas que você já cursou até agora é a maneira como lidaremos com as idéias que envolvem o conceito de infinito.

Neste sentido, o Cálculo é um portal que separa a Matemática Clássica – gerada na Grécia antiga e aprofundada ao longo dos séculos, passando pela Idade Média, recebendo contribuições de diversas culturas, como a hindu e a árabe – da Matemática Contemporânea, que lida com problemas elaborados, tais como o cálculo de órbitas de satélites, problemas avançados de Economia e Administração, ou que serve para expressar as mais diversas teorias da Física Moderna, por exemplo.

O vulto da Antigüidade que mais se aproximou dos mistérios que seriam revelados com o advento do Cálculo foi Arquimedes, certamente um dos maiores gênios matemáticos de todos os tempos.

A principal ferramenta matemática que será usada para lidar com o infinito, seja infinitamente grande ou infinitamente pequeno é chamada limite.

Nossa tarefa será estudar o limite aplicado às funções reais, de uma variável real. O limite será peça fundamental para estabelecer as noções de continuidade e diferenciabilidade dessas funções, assim como na definição de integral, que será apresentada nas aulas posteriores.

Nesta primeira abordagem, optamos por um foco mais prático que teórico. Inclusive, porque estamos falando de um curso de Cálculo! No entanto, isto não impedirá que tratemos esses conteúdos com clareza e precisão.

Muito bem! Mãos à obra!

FUNÇÕES

As funções reais, de uma variável real, serão o nosso principal objeto de estudo. Elas já tiveram uma grande participação nos conteúdos das aulas anteriores.

Na verdade, lidaremos com as funções $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nas quais o subconjunto A , da reta real, é uma união de intervalos.

Você já sabe, uma função consiste de uma tripla – o *kit* função: o domínio, o contradomínio e a lei de definição. Aqui está um exemplo.

Exemplo 3.1

Considere $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} - \{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x-3} + 2 \end{array}$$

Neste caso, o domínio é $\mathbb{R} - \{3\}$, o contradomínio é \mathbb{R} e a lei de definição é $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$.

Observe que o conjunto imagem de f , $\text{Im}(f)$, é uma consequência da própria definição e, portanto, não precisa ser declarado.

Exercício 3.1

Determine o conjunto imagem da função f , dada no exemplo anterior.

Vamos recordar uma convenção adotada em Métodos Determinísticos I e que continua válida. Trata-se da convenção estabelecendo que quando nos referimos a uma função e mencionamos apenas a sua lei de definição, estamos considerando que seu domínio é o maior subconjunto de \mathbb{R} no qual esta lei de definição faz sentido. No caso do contradomínio está implicitamente admitido que é o conjunto \mathbb{R} dos números reais.

Exercício 3.2

Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$.

GRÁFICOS DE FUNÇÕES

Antes de iniciarmos o estudo dos limites de funções, vamos recordar também um aspecto da teoria de funções – os gráficos.

Você sabe que, dada uma função f , digamos,

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned} ,$$

podemos considerar

$$G_f = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\} ,$$

o gráfico de f , um subconjunto do produto cartesiano $A \times \mathbb{R}$.

O gráfico da função f é uma consequência de sua definição, mas, dado G_f , podemos *reconstruir* a função f . Dessa forma, podemos nos referir à função f ou ao seu gráfico como se fossem, essencialmente, o mesmo objeto.

A grande vantagem do gráfico, especialmente no caso das funções reais de uma variável real, é que ele pode ser esboçado como um subconjunto do plano cartesiano. Isso permite uma enorme interface entre a álgebra (ou talvez, mais apropriadamente, a análise matemática) e a geometria. Dessa maneira, podemos simplesmente *desenhar* funções, ampliando enormemente nosso estoque de exemplos.

Na verdade, uma das principais metas nesta disciplina consiste em desenvolver ferramentas matemáticas que permitirão, a partir da lei de definição de f , esboçar, com bastante precisão, o seu gráfico. Assim fazendo, estaremos abrindo uma grande via de utilização da Matemática nas áreas de Economia e Administração.

Só para lembrar uma técnica elementar de esboçar gráficos, veja o exemplo a seguir.

Exemplo 3.2

Sabendo que o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ é a hipérbole esboçada na figura a seguir, vamos esboçar o gráfico da função $g(x) = \frac{2x+3}{x+1}$.

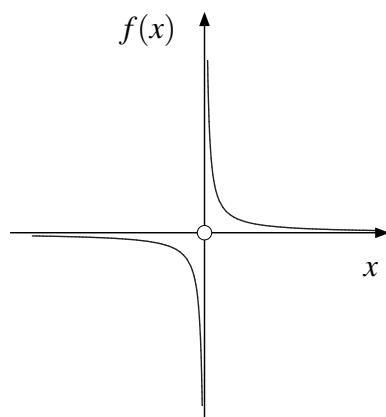


Figura 3.1: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Você deve ter notado que o domínio de f é o conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$ e que o domínio de g é $\mathbb{R} - \{-1\}$.

A idéia aqui será escrever g em termos de f , a menos de operações algébricas simples, que possam ser interpretadas geometricamente.

Um truque algébrico muito útil consiste em *reescrever* certas expressões algébricas de forma que elas possam ser *lidas* mais facilmente. Veja como isso funciona neste caso.

$$\frac{2x+3}{x+1} = \frac{2x+2+1}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}.$$

Ou seja, podemos reescrever a lei de definição de g como

$$g(x) = \frac{1}{x+1} + 2.$$

Assim fica mais fácil perceber o *parentesco* que há entre f e g ,

$$g(x) = f(x+1) + 2.$$

Essa fórmula nos diz que, para obter o gráfico de g a partir do gráfico de f , precisamos fazer duas translações: uma na direção do eixo $\mathcal{O}x$ e outra na direção do eixo $\mathcal{O}y$.

Aqui está um estágio intermediário. O gráfico da função

$$h(x) = f(x+1) = \frac{1}{x+1},$$

cujo domínio é $\mathbb{R} - \{-1\}$, pode ser obtido transladando o gráfico de f de uma unidade para a esquerda. Veja que o fenômeno que ocorre em $x = 0$, no gráfico de f , ocorre em $x = -1$, no gráfico de h .

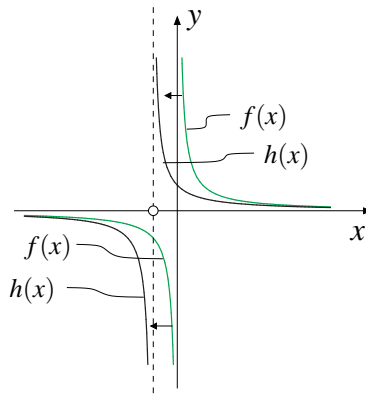


Figura 3.2: Gráfico de h obtido do gráfico de f por uma translação.

Para obter o gráfico de g , observe que

$$g(x) = \frac{1}{x+1} + 2 = h(x) + 2.$$

Isto quer dizer que você pode obter o gráfico de g a partir do gráfico de h , transladando-o duas unidades para cima. O fenômeno que ocorre em $y = 0$ no gráfico de h ocorre também em $y = 2$ no gráfico de g .

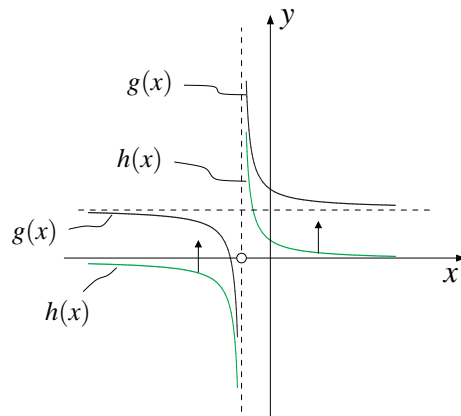


Figura 3.3: Gráfico de g obtido do gráfico de h por uma translação.

Exercício 3.3

Esboce o gráfico da função $g(x) = \frac{1}{x-2} + 1$.

FUNÇÕES À BEIRA DE UM ATAQUE DE LIMITES

Nesta seção, queremos lhe dar uma clara idéia do que significa o símbolo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

sem escrever uma definição *oficial*.

Caso isso seja contra os seus princípios, ou ainda, se a sua curiosidade for do tamanho daquela que matou o gato, você poderá encontrar a definição (oficial) de limites de funções reais, de uma variável real, no material didático do CEDERJ, a disposição na biblioteca. Veja a aula *Limite e continuidade*, do Módulo 2, Volume 2, de Cálculo II.

No entanto, acreditamos que, por agora, esta abordagem informal será mais conveniente.

Começamos com aquela atitude de reconhecimento típica das crianças que desmontam o brinquedo “para saber como é por dentro”, antes de qualquer coisa.

Muito bem, temos a função f (ou melhor, a lei de definição de f), uma constante a , que aparece em $x \rightarrow a$, logo abaixo da abreviação de limite, e outra constante, o L .

A frase matemática, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, deve ser lida da seguinte maneira: o limite da função f , quando x tende para a , é L . Ou ainda, o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L .

Ótimo! Acredito que você deve estar cheio de perguntas a respeito disso tudo. Veja se acerta algumas delas:

1. Qual é a relação de a com o domínio de f ? Será que a pertence ao domínio de f ? Será que não?
2. Por que usamos letra minúscula para a constante a e letra maiúscula para a constante L ?
3. Para que serve o limite? Teria a resposta desta pergunta algo a ver com a definição não-oficial que pretendemos dar para o limite?

Puxa! Vamos respirar um pouco!

Agora, podemos responder à primeira pergunta assim: o ponto a não precisa, necessariamente, pertencer ao domínio de f , mas deve estar *bem posicionado* em relação a ele.

É importante esclarecer este ponto. Em primeiro lugar, estaremos lidando apenas com funções cujos domínios são uniões de intervalos. Esses intervalos podem ser abertos, fechados, semi-fechados, infinitos etc.

Muito bem, queremos que haja um número $r > 0$, tal que

$$(a - r, a) \cup (a, a + r) \subset \text{Dom}(f).$$

Esta frase nos coloca bem no espírito da coisa. O limite lida, o tempo todo, com proximidade, vizinhanças, tão próximo quanto quisermos etc.

Em termos menos técnicos, queremos que a função esteja definida em alguma *vizinhança em torno de a* , exceto, possivelmente, em a .

Veja, uma *vizinhança em torno de a* é um intervalo aberto contendo a .

Exemplo 3.3

Se o domínio de f é $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$, podemos considerar

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x),$$

apesar de f não estar definida em 3.

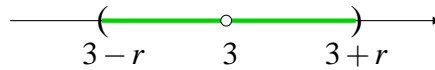


Figura 3.4: A região sombreada indica a vizinhança de 3.

Observe que os casos nos quais f está definida apenas em um dos lados do ponto, ocorrendo, por exemplo, na situação em que $a = 2$ ou $a = 5$ e $\text{Dom}(f) = (2, 5]$. Esses casos serão abordados futuramente quando estudarmos o conceito limites laterais.

Portanto, focando na primeira pergunta, queremos que haja um número $r > 0$ (que pode ser tão pequeno quanto precisarmos), tal que

$$(a - r, a) \cup (a, a + r) \subset \text{Dom}(f).$$

Qual era mesmo a segunda pergunta? Ah, sim! Usamos letra minúscula para a e letra maiúscula para L por tradição. Quase todo mundo faz assim.

Decepcionado? Bem, na verdade, uma boa razão para isso é enfatizar que a se relaciona com o domínio de f enquanto L se relaciona com a imagem, contida no contradomínio de f .

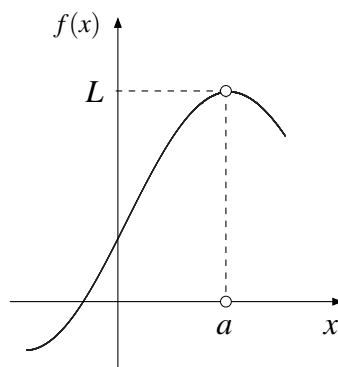


Figura 3.5: Exemplo de uma típica situação onde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Agora, a última pergunta: para que serve o limite?

O limite é uma ferramenta que permite descrever o comportamento da função f nas vizinhanças de um dado ponto $x = a$. Esse momento exige de você um certo esforço. Veja, você já sabe que a função pode ser vista como um instrumento que *transforma* a variável independente x na variável dependente $y = f(x)$. Podemos, portanto, imaginar uma situação dinâmica: a cada valor atribuído a x , obtemos correspondente valor $f(x)$. Muito bem, o limite descreve como $f(x)$ se comporta quando a variável x toma valores *mais e mais próximos* de a . É claro que, nas situações em que o comportamento da função é previsível, o limite não acrescenta informações muito surpreendentes. Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 1 = 5.$$

Isso significa que, se tomarmos valores próximos de 2, $x^2 + 1$ assumirá valores próximos de 5. Realmente, se fizermos $x = 2 + h$, teremos

$$f(2 + h) = (2 + h)^2 + 1 = 4 + 2h + h^2 + 1 = 5 + 2h + h^2.$$

Para valores pequenos de h , os valores correspondentes de $f(2 + h)$ estarão próximos de 5. Neste caso, 2 é elemento do domínio de f , uma função polinomial, e o limite coincide com o valor da função no ponto $f(2) = 5$. Veja, esta é uma situação de muita regularidade, como veremos mais adiante. De uma certa forma, o limite não foi criado para essas situações. Vamos, portanto, considerar uma situação mais interessante. Como diria o investigador, diga-me algo que eu ainda não sei!

UM EXEMPLO DE IMPORTÂNCIA HISTÓRICA – VELOCIDADE MÉDIA E VELOCIDADE INSTANTÂNEA

Velocidade é um conceito tão divulgado na nossa cultura que não pensamos muito nela. Mas, se considerarmos a questão da velocidade instantânea – o carro do piloto campeão cruzou a linha de chegada a 187,56 km/h – mesmo que por um breve instante, veremos que estamos lançando mão de um conceito sofisticado. A velocidade instantânea é a taxa de variação da posição em relação ao tempo calculada no preciso momento em que, digamos, o carro cruzou a linha de chegada.

Pense um pouco: do que, realmente, dispomos para estabelecer essa velocidade instantânea?

Pensou? Muito bem! Para começar, dispomos das velocidades médias. Este será nosso modelo nesta seção: a velocidade instantânea será obtida como um limite das velocidades médias. Vamos a um exemplo.

Exemplo 3.4

Digamos que, após uma série de testes num laboratório, chegou-se à conclusão de que a função

$$s(t) = t^2 + 3t + 10$$

descreve o deslocamento de um carrinho de experiências. Isto é, $s(t)$ é a posição, dada em centímetros, em função do tempo t , dado em segundos (digamos). Assim, no tempo $t = 0$, o carrinho estava a 10cm do ponto de referência, na direção positiva, uma vez que $s(0) = 0^2 + 3 \times 0 + 10 = 10$.

Queremos calcular a velocidade do carrinho no instante $t = 1$.

Começamos com o que dispomos: a velocidade média do carro entre os instantes t e 1:

$$v_m(t) = \frac{s(t) - s(1)}{t - 1}.$$

Usamos o índice m para indicar que essa é uma velocidade média. Além disso, como estamos interessados no específico instante 1, consideramos v_m como uma função apenas de t .

Veja, a função $s(t) = t^2 + 3t + 10$ está bem definida, *a priori*, para quaisquer valores de t , apesar de o trilho onde a experiência foi feita ser finito. No entanto, estamos interessados na nova função $v_m(t)$, que está bem definida em todos os valores de t menos, exatamente, no ponto 1, em questão. De uma certa forma, gostaríamos de dizer que a velocidade no instante 1 é $v_m(1)$, mas não podemos fazer isso.

Para contornar esse impasse, vamos estudar o comportamento da função $v_m(t)$ quando os valores de t estão sendo tomados mais e mais próximos de 1, justamente no ponto em que ela não está definida e no qual estamos interessados.

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 1} v_m(t) &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 + 3t + 10 - 14}{t - 1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 + 3t - 4}{t - 1}.\end{aligned}$$

Atenção! Está na hora de aprender algo novo! É inútil tentar calcular diretamente o valor da expressão $\frac{t^2 + 3t - 4}{t - 1}$, para $t = 1$. No entanto, podemos descobrir os valores de $v_m(t)$, para valores próximos de 1, porém diferentes.

Faremos isso de duas maneiras (ligeiramente diferentes).

Primeiro, vamos fazer $t = 1 + h$, com $h \neq 0$. Assim,

$$\begin{aligned}v_m(1 + h) &= \frac{(1 + h)^2 + 3(1 + h) - 4}{1 + h - 1} = \\ &= \frac{1 + 2h + h^2 + 3 + 3h - 4}{h} = \frac{5h + h^2}{h}.\end{aligned}$$

Veja, para $h \neq 0$, $v_m(1 + h) = 5 + h$ e, para valores de h mais e mais próximos de 0, temos $v_m(1 + h)$ mais e mais próximo de 5.

Assim, diremos que

$$\lim_{t \rightarrow 1} v_m(t) = 5.$$

Parece bom, não?

Vamos tentar a segunda abordagem. Você observou que 1 é uma raiz do polinômio $t^2 + 3t - 4$. Portanto, esse polinômio se fatora, sendo $t - 1$ um dos seus fatores. Na verdade, $t^2 + 3t - 4 = (t - 1)(t + 4)$.

Ótimo! Observe as expressões

$$\frac{(t + 4)(t - 1)}{t - 1} \quad \text{e} \quad t + 4.$$

Elas são diferentes, pois a primeira não está definida em $t = 1$.

No entanto, se $t \neq 1$, então podemos usar qualquer uma delas para calcular $v_m(t)$.

Assim, $\lim_{t \rightarrow 1} v_m(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t+4)(t-1)}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1} t+4$, e o último limite é, claramente, 5.

Concluimos que a velocidade do carrinho no instante $t = 1$ é 5 cm/s.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Você deve estar cansado e com várias coisas para pensar. Pare por aqui, pois você ainda tem os exercícios para fazer.

Veja, esta aula foi o seu primeiro contato com um conceito importante e difícil: o limite de uma função.

Você deve guardar que o limite serve para indicar o comportamento de uma função nas vizinhanças de um certo ponto sem que seja necessário saber o valor da função neste ponto. Na verdade, a função não precisa estar definida no ponto para que consideremos o limite, basta que ela esteja definida *em torno dele*. Na verdade, as principais situações de interesse ocorrem quando não sabemos o valor da função no ponto em questão, como no exemplo 3.4.

Na próxima aula, nos concentraremos mais no aspecto gráfico do limite e aprofundaremos as idéias que foram apresentadas aqui. Até lá!

Exercício 3.4

1. Calcule o domínio das seguintes funções:

$$(a) f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 6}{1 - x}}$$

$$(b) g(x) = \ln\left(1 - \frac{x}{x-3}\right)$$

$$(c) h(t) = \sqrt{t-2} + \frac{1}{\sqrt{5-t}}$$

2. Use a técnica ilustrada no exemplo 1.2 para esboçar os gráficos das seguintes funções:

$$(a) f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$$

$$(b) g(x) = |x+2| - 2$$

$$(c) h(x) = 2 + \sqrt{x-4}$$

$$(d) k(x) = -1 + \ln(x+3)$$

3. Da mesma forma que obtivemos a velocidade instantânea a partir das velocidades médias, podemos obter a aceleração instantânea.

Suponha que $v(t) = t^2 - 4t + 2$ descreva a velocidade de uma partícula que se desloca em uma trajetória retilínea, dada em cm/s. Considerando

$$a_m(t) = \frac{v(t) - v(1)}{t - 1},$$

a aceleração média desse movimento, entre os instantes t e 1, calcule a aceleração desse movimento no instante $t = 1$.

Você poderia interpretar o resultado obtido?

Qual é a aceleração desse movimento no instante 2s?

4. O custo da produção de sabonetes por dia de trabalho em uma certa fábrica é dado pela equação

$$c(x) = 300 + 0.0005x^2 - 0.02x,$$

onde x é o número de sabonetes produzidos no dia e $c(x)$ é dado em reais. Assim, para produzir 1.000 sabonetes em um dia, gasta-se $c(1.000) = 780$, ou seja, setecentos e oitenta reais.

Nesta escala, podemos considerar um sabonete a mais, por dia, um infinitésimo.

Calcule, então, a taxa de variação do custo por dia, se a produção de 1.000 sabonetes for passada para 1.001 e compare o resultado com

$$\lim_{x \rightarrow 1.000} \frac{c(x) - c(1.000)}{x - 1.000}.$$

Acho que você pode usar uma calculadora.

5. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

(d) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x^2 + \sqrt{2}x - 4}$

Aula 4

LIMITES DE FUNÇÕES – PROPRIEDADES



Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 calcular graficamente limites finitos de funções;
- 2 usar certas propriedades de limites para calculá-los.

Nesta aula, você dará continuidade à construção do conceito

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

que foi iniciada na aula anterior. Será dada atenção especial ao aspecto gráfico do conceito. Você aprenderá algumas propriedades que permitirão determinar o limite em alguns casos, além de entender que algumas funções não são *tão bem comportadas* nas vizinhanças de certos pontos, ou seja, começaremos a reconhecer algumas situações em que as funções não admitem limites.

Muito bem, você aprendeu que usamos o limite para descrever o comportamento de uma função f nas vizinhanças de um dado ponto, digamos a . Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 4.1

Considere o limite $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 2x) = 1$. Realmente, se x toma valores próximos de -1 , o valor da função $f(x) = x^3 - 2x$ toma valores próximos de 1 .

Essa é uma situação de bastante regularidade. Veja o gráfico de $f(x) = x^3 - 2x$ na figura a seguir.

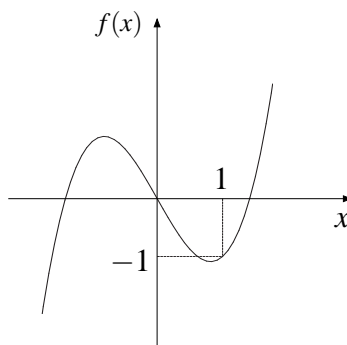


Figura 4.1: Gráfico de $f(x) = x^3 - 2x$.

Vamos, no próximo exemplo, fazer um exercício inverso. Em cada caso, primeiro observe o gráfico e, em seguida, veja como o gráfico determina o limite, indicado logo após a figura.

Exemplo 4.2

Em cada caso, a informação será obtida diretamente do gráfico da função. Em muitas situações, é mais simples desenhar o gráfico de uma função que ilustra uma certa propriedade do que encontrar especificamente sua lei de definição.

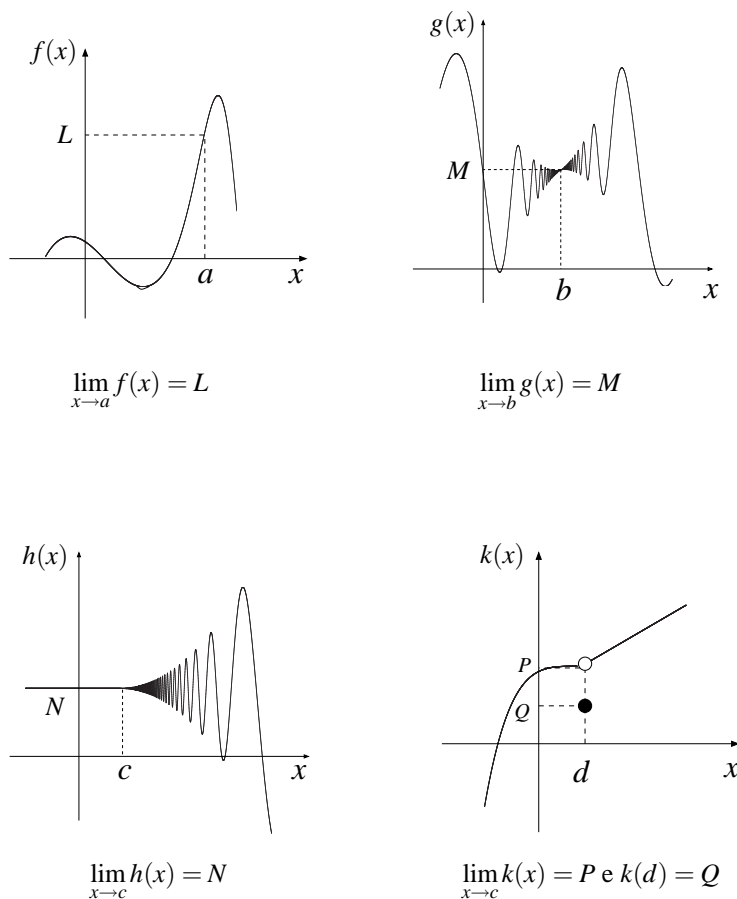


Figura 4.2: Gráficos das funções f , g , h e k , respectivamente.

Você percebeu que a função f não precisa estar definida no ponto em questão para que consideremos o limite neste ponto. No entanto, é necessário que f esteja definida numa região em torno do ponto considerado.

Também é possível que a função esteja definida no ponto em que calculamos o limite e o valor do limite não coincida com o valor da função, como foi ilustrado no caso da função representada pela função k no exemplo 3.2.

Exercício 4.1

Considerando o gráfico de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, esboçado na figura a seguir, determine:

- (a) $f(-2)$ (b) $f(0)$ (c) $f(2)$
 (d) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (f) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

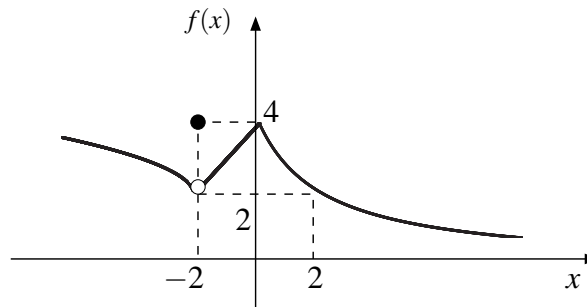


Figura 4.3: Gráfico da função f .

Você viu que situações mais interessantes ocorrem quando a função não está definida no ponto em questão ou a lei de definição da função se aplica aos pontos próximos dele, mas não se aplica nele, especificamente. Veja mais um exemplo no qual algo assim ocorre.

Exemplo 4.3

Considere $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} & \text{se } x \geq 0 \text{ e } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}.$$

Vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Costumamos dizer que tal função tem uma *indeterminação* em $x = 2$, pois, apesar de f estar definida em $x = 2$, não sabemos qual é o seu comportamento nas vizinhanças desse ponto. Queremos saber, então, o que acontece com os valores de $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$ quando tomamos valores para x próximos, porém diferentes de 2.

Calcular o limite significa *levantar* a indeterminação.

Na aula anterior, você aprendeu um truque para fazer isso: usar álgebra elementar. Resumindo: fatorar!

Basta lembrar que $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Assim, a expressão $x - 2$ pode ser fatorada da seguinte forma:

$$x - 2 = (\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2}).$$

Veja, $\sqrt{x}\sqrt{x} = x$, pois estamos assumindo que $x \in [0, +\infty)$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Veja o gráfico de f na figura a seguir.

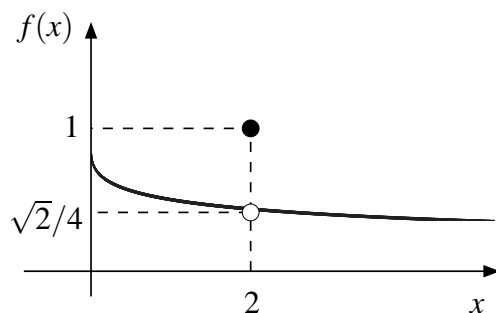


Figura 4.4: Gráfico da função f .

Exercício 4.2

Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

DISTÂNCIA ENTRE NÚMEROS REAIS

Está na hora de aprofundarmos um pouco mais o nosso conceito de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Temos usado, com frequência, termos como: vizinhança, proximidade e outros, semelhantes. Esses termos são úteis, pois apelam para a nossa intuição, ajudando-nos a construir o entendimento do conceito, mas precisamos tornar estas idéias um pouco mais precisas, mais *matemáticas*. Para isso, precisamos de uma propriedade do conjunto dos números reais.

O conjunto \mathbb{R} é munido de uma *distância*, definida pelo módulo de números reais.

Veja, dizemos que a *distância entre os números a e b* é $|a - b|$. Esse conceito é tão natural que quase não notamos a sua importância. Aqui estão algumas de suas propriedades.

- (a) A distância entre dois números é sempre maior ou igual a zero. Na verdade, a distância entre dois números é nula se, e somente se, os números são iguais.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall a, b \in \mathbb{R}, |a - b| \geq 0 \\ |a - b| = 0 \Leftrightarrow a = b \end{array} \right.$$

Isto decorre dos fatos $\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0 \\ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{array} \right.$.

- (b) A distância entre dois números independe da ordem em que os tomamos. Em símbolos matemáticos, temos:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, |a - b| = |b - a|.$$

Isso é decorrência de

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| = |-x|.$$

- (c) Esta terceira propriedade é muito importante, como você verá em breve. Ela será usada diversas vezes ao longo de seus estudos. É chamada *desigualdade triangular*, e envolve três elementos. Para todo a, b e $c \in \mathbb{R}$,

$$|a - b| \leq |a - c| + |c - b|.$$

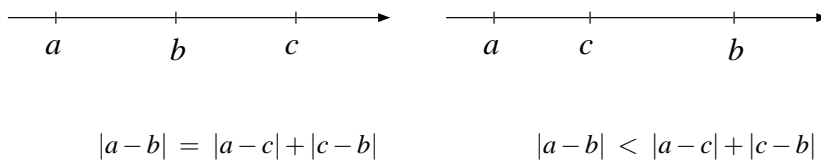


Figura 4.5: Diagrama com duas situações possíveis.

Se c estiver entre a e b , ocorre a igualdade. No outro caso, $|a-b|$ é estritamente menor do que a soma das outras duas distâncias. No entanto, em ambas as situações, vale

$$|a-b| \leq |a-c| + |c-b|.$$

Podemos usar, por exemplo, a distância para expressar certos conjuntos. Veja na igualdade a seguir.

$$(a-r, a) \cup (a, a+r) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-a| < r\}.$$

A desigualdade $0 < |x-a|$ garante que x deve ser diferente de a e a desigualdade $|x-a| < r$ nos diz que x está a um raio menor do que r de a .

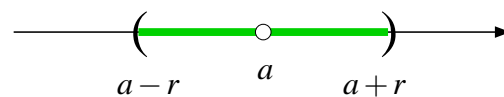


Figura 4.6: $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\}$.

Exercício 4.3

Expresse os seguintes conjuntos usando uniões de intervalos e represente-os graficamente.

- (a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-2| < 3\}$ (b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x+2| \leq 1\}$
 (c) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-5| < 4\}$ (d) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x+4| \geq 3\}$

Chamamos o intervalo aberto $(a-r, a+r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\}$ de vizinhança do ponto a , de raio r .

Voltamos, agora, nossa atenção para

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Essa expressão significa que, para cada vizinhança de L , por menor que seja o seu raio, existe uma vizinhança de a , de algum raio, tal que as imagens dos pontos dessa vizinhança de a , porém diferentes do próprio a , pertencem à vizinhança de L .

Parece complicado, mas é assim mesmo. Leia o parágrafo anterior novamente e compare com a figura a seguir.

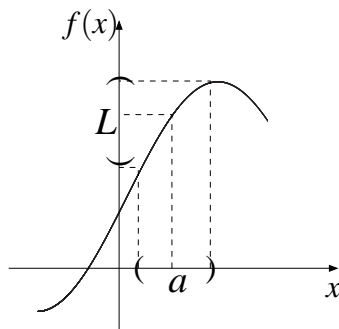


Figura 4.7: Gráfico de função f tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

A faixa vertical indica a vizinhança em torno de L . A faixa horizontal indica a vizinhança em torno de a . Observe que todos os pontos pertencentes à vizinhança de a têm imagem por f na vizinhança de L . Mais uma vez, essa figura representa uma situação de muita regularidade.

Muito bem! Voltaremos a esse assunto em outras ocasiões. Isso tomou um certo tempo e esforço, mas agora temos mais elementos para discutir algumas das propriedades dos limites de funções.

PROPRIEDADE DE UNICIDADE DO LIMITE DE FUNÇÕES

A primeira propriedade dos limites de funções que estudaremos é a de sua *unicidade*. Veja, se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = M,$$

então,

$$L = M.$$

Para demonstrar essa propriedade, usaremos um argumento bastante típico. Preste atenção, pois ele lhe será útil.

O argumento é o seguinte: se $|x|$ for tão pequeno quanto se queira, então $x = 0$. Em símbolos, temos:

$$\forall r > 0, |x| < r \Rightarrow x = 0.$$

Muito bem, vamos demonstrar a propriedade da unicidade do limite. Sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = M.$$

Da nossa descrição de limite, sabemos que existem valores de x suficientemente próximos de a , tais que suas imagens estão arbitrariamente próximas de L e de M .

Digamos assim: dado $r > 0$ qualquer, existe x suficientemente próximo de a tal que

$$|f(x) - L| < \frac{r}{2} \quad \text{e} \quad |f(x) - M| < \frac{r}{2}.$$

Agora, usamos a desigualdade triangular para x , L e M :

$$\begin{aligned} |L - M| &\leq |L - f(x)| + |f(x) - M| \\ &= |f(x) - L| + |f(x) - M| \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r. \end{aligned}$$

Resumindo, para qualquer $r > 0$, conseguimos mostrar que $|L - M| < r$. Ora, isso quer dizer que $L = M$.

EXEMPLOS DE FUNÇÕES COMPLETAMENTE SEM LIMITES!

Você acaba de passar por uma espécie de prova de fogo. A argumentação que você acabou de ler é típica de análise matemática. Ela lhe será apresentada novamente, com mais detalhes e, provavelmente, em diferentes versões. Mas, calma, tudo a seu tempo. Agora é hora de colher os frutos desse resultado. Veremos exemplos de funções *malcomportadas*, isto é, veremos algumas situações em que a função f não admite limite quando x tende a um determinado ponto.

Como é possível detectar tal coisa?

Sabemos que, se o limite de f , quando x tende a a , é L , sempre que os valores de x são tomados arbitrariamente próximos de a , suas imagens devem estar próximas de L . O limite é único, como acabamos de mostrar. Portanto, se em alguma situação tivermos pontos arbitrariamente próximos de a , com imagens arbitrariamente próximas de valores diferentes, digamos $L_1 \neq L_2$, saberemos que a função, neste caso, não admite limite.

É comum usar a expressão *não existe limite* de f quando x tende a a , em tais circunstâncias. Confesso uma certa antipatia pela expressão. Daremos preferência à expressão *a função f não admite limite* quando x tende a a .

Exemplo 4.4

Aqui estão três funções que, de um modo ou de outro, não admitem limite em algum ponto. Primeiro, as suas leis de definições e seus domínios. Veja:

$$f(x) = \frac{1-x}{|x-1|} ; \quad h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases} ;$$

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} - A \\ -1 & \text{se } x \in A \end{cases} ,$$

$$\text{onde } A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

A função f está definida em todos os $x \neq 1$. As funções h e k estão definidas em toda a reta real. Assim,

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{e} \quad \text{Dom}(h) = \text{Dom}(k) = \mathbb{R}.$$

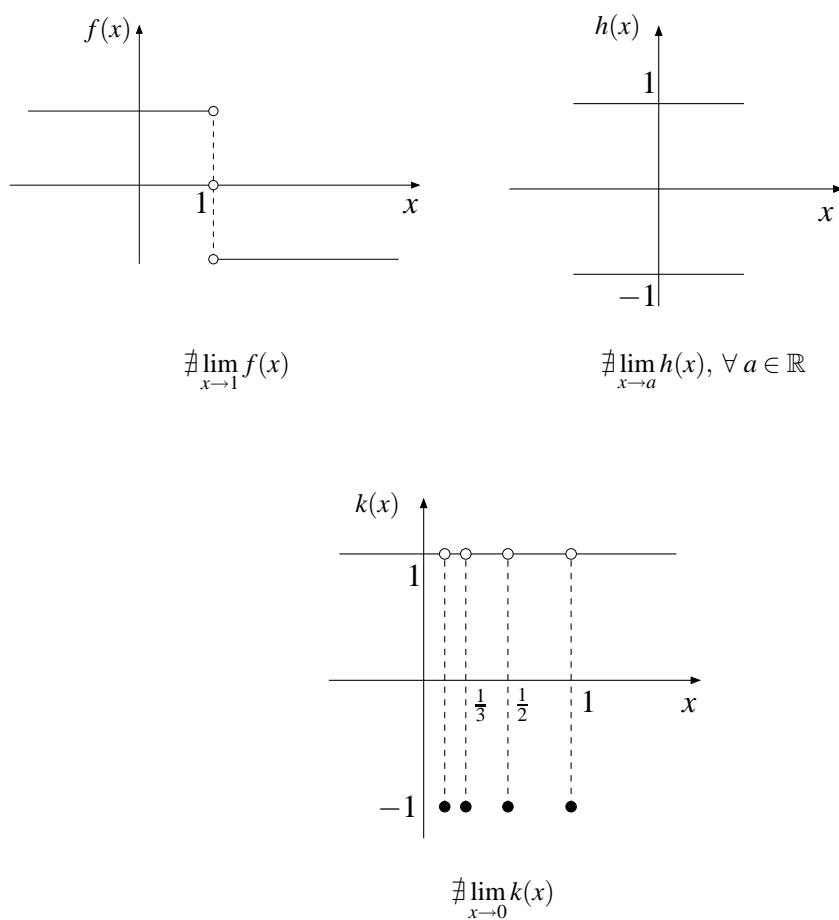


Figura 4.8: Gráficos das funções f , h e k , respectivamente.

Vamos, agora, discutir cada um dos três casos.

A FUNÇÃO f

Você pode reescrever a lei de definição de f como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 1 \\ -1 & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

Realmente, se $x < 1$, $x - 1 < 0$ e $|x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$. Assim,

$$x < 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1 - x}{|x - 1|} = \frac{1 - x}{1 - x} = 1.$$

Analogamente,

$$x > 1 \Rightarrow f(x) = -1.$$

Para valores próximos de 1, porém maiores do que 1, a função f assume o valor -1 . Já para valores próximos de 1, porém menores do que 1, f assume o valor 1. Assim, tão próximo de 1 quanto quisermos, a função f assume valores diferentes, 1 ou -1 . Ora, isso indica que f não admite limite quando x tende a 1, pois caso admitisse, as imagens deveriam estar mais e mais próximas do mesmo ponto: o limite.

A FUNÇÃO h

Parece que há algo de errado com o gráfico desta função, não é? Realmente, duas retas horizontais paralelas não podem ser o gráfico de uma função, pois cada ponto do domínio deve ser associado a um *único* ponto do contradomínio. Bem, o fato é que esse esboço *parece* ter duas retas horizontais. Na verdade, essas retas são como que *porosas*, isto é, na reta superior só aparecem os pontos de primeira coordenada irracional, enquanto a reta inferior é formada pelos pontos de primeira coordenada racional.

Portanto, tão próximo de qualquer ponto quanto quisermos, haverá pontos com valor por h igual a 1 e pontos com valor por h igual a -1 . Isso nos diz que essa função não admite limite em *nenhum* dos pontos de seu domínio.

Isso a torna um pouco diferente dos dois casos anteriores, nos quais as funções não admitiam limite em algum determinado ponto da reta real, mas elas admitem limite em todo os outros pontos.

A FUNÇÃO k

Nesse caso, o gráfico só está sugerido, pois os pontos cujas primeiras coordenadas são da forma $1/n$, para algum número natural n , pertencem ao gráfico com segunda coordenada -1 (são as bolinhas preenchidas, indicadas embaixo). Ora, tão próximo de zero quanto quisermos, haverá pontos desse tipo, cujas imagens por k são iguais a -1 , e também haverá pontos que não são dessa forma, e nestes casos, a imagem por k será 1. Novamente, a função não admite limite em $x = 0$.

Esses foram apenas alguns casos de funções que não admitem limites. Há uma infinidade de outros exemplos, incluindo

casos em que a função não admite limite por outras razões. Veremos mais exemplos nas próximas aulas.

Para terminar esta aula, que já vai um pouco longa, veremos mais uma propriedade dos limites.

A CONDIÇÃO DE LOCALIDADE DO LIMITE

Essa propriedade justifica, de alguma forma, a estratégia que temos usado para levantar a indeterminação de alguns limites. Ela realça o fato de que o limite depende apenas do comportamento da função em uma *pequena* vizinhança do ponto em questão.

Sejam f e g duas funções tais que, para algum número $r > 0$, sempre que $x \in (a - r, a) \cup (a, a + r)$, teremos $f(x) = g(x)$. Dessa forma, existe $r > 0$, tal que

$$0 < |x - a| < r \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Mais uma vez, as funções f e g coincidem em alguma vizinhança do ponto a , com possível exceção do que ocorre no próprio ponto a . Então,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

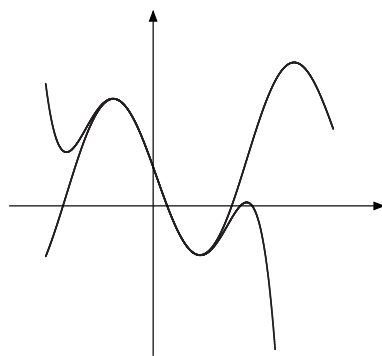


Figura 4.9: Gráficos das funções f e g , coincidentes em alguma vizinhança de zero.

Essa propriedade decorre diretamente da definição do limite. Ela permite que substituamos uma função complicada por uma mais simples, no cálculo do limite, contanto que essas funções coincidam em alguma vizinhança do ponto em questão, tal como:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2.$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta aula, você explorou ainda mais o conceito de limite de uma função num dado ponto. É importante que você crie o hábito de imaginar a situação gráfica correspondente ao cálculo do limite. Isso fortalecerá a sua visão geométrica do conceito.

Nas próximas aulas, continuaremos a lidar com esse tema. Você aprenderá outras propriedades dos limites, assim como os limites laterais.

Não deixe de fazer os exercícios propostos. Até a próxima aula!

Exercício 4.4

1. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$

(b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2 - 1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - 9}{x - 3}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

(e) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{|x| - 4}{x^2 - 16}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{3/2} - 1}{x^{1/2} - 1}$

Lembre-se: $(a-b)(a^2+ab+b^2) = (a^3-b^3)$.

2. Calcule o valor de a , tal que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax^2 - 3x - 2ax + 2}{x^2 - 4} = \frac{3}{4}.$$

3. Considere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = |x-1| - 2.$$

Esboce o gráfico de f e determine os valores de a , tais que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -1.$$

4. Usando como modelos as funções apresentadas no exemplo 3.4, desenhe gráficos de funções que não admitem limite quando x tende a 1.
5. Considere $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função cujo gráfico está esboçado na figura a seguir. Determine os limites, caso existam, e os valores da função indicados.

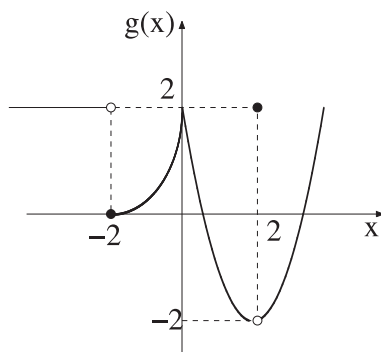


Figura 4.10: Gráfico da função g .

- (a) $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$
(d) $\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$ (e) $g(-2)$ (f) $g(2)$

Aula 5

LIMITES LATERAIS E MAIS ALGUMAS PROPRIEDADES



O b j e t i v o s

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 calcular limites de funções usando os limites laterais;
- 2 calcular limites de funções aplicando as propriedades elementares.

Antes de abordar os principais temas desta aula, você aprenderá mais uma estratégia de cálculo de limites, ampliando, assim, o seu já não tão pequeno conjunto de técnicas para levantar indeterminações.

Exemplo 5.1

Vamos calcular o limite a seguir.

$$\lim_{t \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2t+1}-3}{t^2-3t-4}.$$

O limite está indeterminado. Realmente, temos

$$\lim_{t \rightarrow 4} (\sqrt{2t+1}-3) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow 4} (t^2-3t-4) = 0.$$

A técnica que conhecemos para levantar esse tipo de indeterminação é fatorar e simplificar. É claro que o termo que se encontra no denominador se fatora: $t^2-3t-4 = (t-4)(t+1)$. No entanto, $\sqrt{2t+1}-3$ não é, exatamente, divisível por $t-4$. Sendo assim, usaremos uma estratégia diferente. Tentaremos tornar $\sqrt{2t+1}-3$ um fator de $t-4$.

A chave para resolver o problema está na seguinte identidade algébrica:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

A idéia é modificar a expressão que define a função, multiplicando o numerador e o denominador pelo *conjugado* do termo $\sqrt{2t+1}-3$, que é $\sqrt{2t+1}+3$. Isso não altera o resultado do limite. Lembra-se da última propriedade de limites de funções, apresentada na aula anterior?

Muito bem, aqui está o cálculo do limite.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2t+1}-3}{t^2-3t-4} &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2t+1}-3)(\sqrt{2t+1}+3)}{(t-4)(t+1)(\sqrt{2t+1}+3)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{2t+1-9}{(t-4)(t+1)(\sqrt{2t+1}+3)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{2t-8}{(t-4)(t+1)(\sqrt{2t+1}+3)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{2}{(t+1)(\sqrt{2t+1}+3)} = \frac{2}{5 \times 6} = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Veja, $(\sqrt{2t+1})^2 = 2t+1$, pois $2t+1 \geq 0$, uma vez que o domínio da função é $[-1/2, +\infty)$.

Gostou da estratégia? Tente aplicá-la na situação a seguir.

Exercício 5.1

Calcule o limite dado a seguir.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{9-x}}{x^2 - 6x + 5}.$$

Agora, vamos ao primeiro assunto da aula.

PROPRIEDADES ELEMENTARES DOS LIMITES DE FUNÇÕES

Uma das coisas que torna o estudo das funções tão interessante é a profusão delas. Há uma quantidade estonteante de funções. Essa abundância se reflete no fato de que, a partir de alguns poucos exemplos, podemos gerar muitos e muitos outros, usando operações que você já conhece do Pré-Cálculo. Vamos listar algumas delas.

Considere as funções $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $A \cap B = C \neq \emptyset$.

A partir das funções f e g , nessas condições, podemos obter as seguintes funções:

Soma

$$\begin{aligned}(f+g) : C &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) + g(x)\end{aligned}$$

Multiplicação por constante

$$\begin{aligned}(\alpha f) : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \alpha \cdot f(x)\end{aligned}$$

Produto

$$\begin{aligned}(fg) : C &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \cdot g(x)\end{aligned}$$

Inverso multiplicativo

$$\left(\frac{1}{f}\right): D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{f(x)}$$

onde $D = \{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$.

Usando essas operações de funções, a função identidade $f(x) = x$ e a função constante $g(x) = 1$, podemos obter todas as funções polinomiais, como, por exemplo, $h(x) = 3x^7 - x^2 - 5x + \sqrt{2}$.

Como você já deve estar antecipando, o limite de funções funciona muito bem no que diz respeito a essas operações. Veja, se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M,$$

então

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = L + M$$

$$(b) \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow a} (\alpha f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) = \alpha L$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$$

$$(d) \text{ se, além disso, } L \neq 0, \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}.$$

As demonstrações dessas propriedades passam da mais simples rotina até o caso de envolver alguma sofisticação. Você terá, ainda nas disciplinas de Cálculo, oportunidade de lidar com elas. No momento, no entanto, nosso principal objetivo é usá-las para calcular limites. Veja, agora, os próximos dois exemplos.

Exemplo 5.2

Vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} + \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} \right]$. Nesses casos, calculamos separadamente os limites das parcelas.

Primeiro, o cálculo de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, que apresenta uma indeterminação. Vamos aplicar, alternativamente, a técnica do conjugado, já utilizada anteriormente no exemplo 18.1.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Note que a segunda parcela também apresenta uma indeterminação:

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$. Neste caso, observe que $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$. Assim, podemos fazer, por exemplo:

$$x-1 = (x^{1/3}-1)(x^{2/3}+x^{1/3}+1).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{1/3}-1)(x^{2/3}+x^{1/3}+1)}{x^{1/3}-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^{2/3}+x^{1/3}+1) = 3.\end{aligned}$$

Como sabemos quais são os limites das parcelas, podemos obter o limite dado inicialmente:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} + \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} \right] &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \\ &= \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}.\end{aligned}$$

Veja, a seguir, mais um exemplo do uso das propriedades elementares para o cálculo dos limites.

Exemplo 5.3

Considere f e g funções definidas em toda a reta real, tais que


$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -2.$$

Então,

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) - g(x)) &= \left(2 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \right) = \\ &= 2 \cdot 3 - (-2) = 8 \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x))^2 + 1}{g(x)} = \frac{3^2 + 1}{-2} = -5$$

$$\text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - g(x)}{f(x) + g(x)} = \frac{3 + 2}{3 - 2} = 5.$$

 Fórmulas como

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

só fazem sentido se soubermos, de antemão, que os limites das parcelas (ou fatores, dependendo do caso), são números:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M.$$

Há uma outra operação com funções, um pouco mais sofisticada do que as que vimos até agora, que permite gerar ainda mais funções – a composição de funções.

O limite também comporta-se muito bem em relação a essa operação. Veja o próximo exemplo.

Exemplo 5.4

Sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 4) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \cos t = 1.$$

Então,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \cos(2x - 4) = 1.$$

Voltaremos a considerar esse assunto em breve, quando estudarmos a noção de continuidade de funções.

Para encerrar essa etapa da aula, sobre as propriedades elementares dos limites, aqui está uma oportunidade para você aplicar o que já aprendeu.

Exercício 5.2

Sabendo que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -2$ e $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 4$, calcule:

(a) $\lim_{x \rightarrow a} (2g(x) - 3h(x))$

(b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) + (h(x))^2}{2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - g(x)}{2g(x) - h(x)}.$

LIMITES LATERAIS

Uma das propriedades que caracterizam o conjunto dos números reais é a *boa ordem*. Estamos tão habituados a usá-la que não nos damos conta de sua importância. Ela garante que, dados *dois* números reais a e b , temos

$$a > b \quad \text{ou (exclusivo)} \quad a < b.$$

Portanto, dado um número real a , podemos considerar o conjunto dos números que são maiores do que a e o conjunto dos números que são menores do que a .

Esta é uma boa ocasião para estabelecermos uma combinação: tratamos indiferentemente os elementos do conjunto \mathbb{R} como números reais ou como pontos da reta real, dependendo da situação. Se um apelo geométrico for mais forte, usaremos pontos, caso contrário, usaremos números.

Podemos, portanto, considerar os pontos que estão à direita de a e os pontos que estão à esquerda de a .

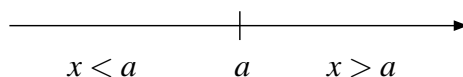


Figura 5.1: Representação dos pontos da reta real em relação ao ponto a .

A propriedade da *boa ordem* é crucial na definição dos intervalos. Veja, a seguir, um exemplo.

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

Isso permite uma certa adaptação da definição de limites de funções – os *limites laterais*.

A idéia é a seguinte: queremos estudar o comportamento de uma dada função f nas vizinhanças de um certo ponto a , mas queremos considerar, digamos, apenas o caso em que os pontos analisados estão à direita de a .

Há pelo menos duas situações típicas nas quais tal abordagem pode ser útil:

(a) a função está definida apenas em um dos lados do ponto em questão;

(b) a lei de definição da função f é dada por diferentes expressões, uma para os pontos à direita de a , outra para os pontos à esquerda.

Exemplo 5.5

$$\text{As funções } f(x) = \sqrt{9 - x^2} \text{ e } g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} & \text{se } x \geq 0 \\ 3x + 5 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ilustram as duas situações. O domínio da função f é o intervalo fechado $[-3, 3]$. Veja a **Figura 5.2**. Portanto, f está bem definida à direita de -3 , por exemplo, mas não está definida à sua esquerda. A função g é definida em \mathbb{R} , mas por expressões distintas, conforme consideramos $x < 0$ ou $x > 0$.



Figura 5.2: $\text{Dom}(f)$.

Aqui estão os limites laterais.

LIMITE LATERAL À DIREITA DE a

Considere f uma função tal que, para algum $r > 0$, $(a, a+r) \subset \text{Dom}(f)$. Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Leia: limite de f quando x tende a a , pela direita, é igual a L .

se, para cada vizinhança de L , por menor que seja o seu raio, encontramos uma vizinhança de a , tal que as imagens dos pontos nesta vizinhança, mas que estão à direita de a , e diferentes de a , pertencem à vizinhança de L .

Assim, impomos a condição que x tende a a , porém, apenas pelo lado direito.

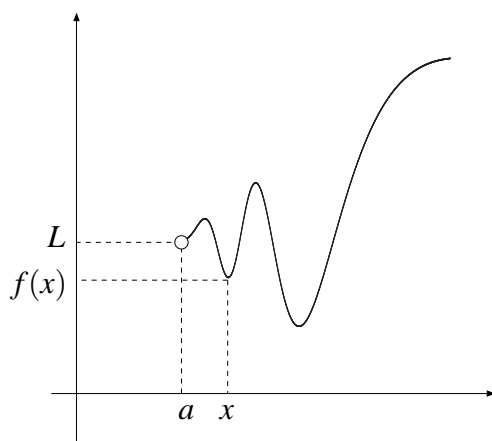


Figura 5.3: Limite lateral à direita.

LIMITE LATERAL À ESQUERDA DE a

Analogamente, seja g uma função tal que, para algum número real positivo $r > 0$, $(a-r, a) \subset \text{Dom}(g)$.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = M$$

Leia: limite de g quando x tende a a , pela esquerda, é igual a M .

indica o limite de g quando x tende a a , considerando apenas os pontos à esquerda de a .

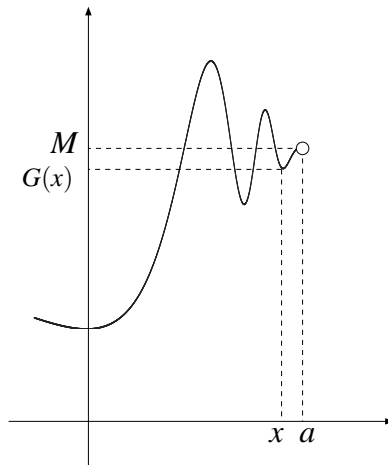


Figura 5.4: Limite lateral à esquerda.

O LIMITE E OS LIMITES LATERAIS

Decorre da própria construção dos limites laterais que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \\ \text{e} \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L. \end{cases}$$

Assim, no caso de $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, concluímos que f não admite limite quando x tende a a .

Exemplo 5.6

Considere a função f dada pela seguinte lei de definição:

$$f(x) = \frac{5\sqrt{3-x}}{x-4}.$$

O domínio de f é determinado pelas condições

$$3-x \geq 0 \quad \text{e} \quad x \neq 4.$$

Ou seja, $\text{Dom}(f) = (-\infty, 3]$. Veja, f não está definida em pontos à direita de 3, mas podemos considerar o comportamento dos

valores por f de pontos próximos a 3, pelo lado esquerdo:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{5\sqrt{3-x}}{x-4} = 0,$$

pois $\lim_{x \rightarrow 3^-} 5\sqrt{3-x} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 3^-} x-4 = -1$.

Note que as propriedades elementares de limites também valem para os limites laterais.

Veja o esboço do gráfico de f .

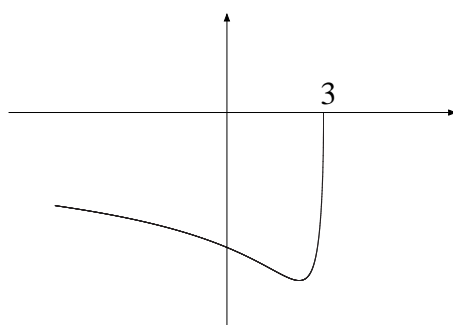


Figura 5.5: Gráfico de f (tal que $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0$).

Exemplo 5.7

Considere, agora, a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \sin(x-1) + 2 & \text{se } x \geq 1 \\ |x+1| & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Essa função é definida por duas sentenças. Para analisar o comportamento da função g , nas vizinhanças do ponto 1, usamos os limites laterais.

Vamos considerar, inicialmente, o limite de g quando x tende a 1, pela direita.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sin(x-1) + 2 = 2.$$

Note que $x \rightarrow 1^+$ significa que estamos considerando $x > 1$ e, portanto, $g(x) = \sin(x-1) + 2$.

Agora, o limite quando x tende a 1, pela esquerda.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} |x + 1| + = 2.$$

Veja, agora, $x \rightarrow 1^-$ significa que $x < 1$ e, assim, $g(x) = |x + 1|$.

Você observou que, apesar das diferentes expressões para g , à direita e à esquerda de 1,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x).$$

Como os limites laterais são iguais a 2, podemos concluir que g admite limite quando x tende a 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2.$$

Veja, a seguir, o gráfico de g .

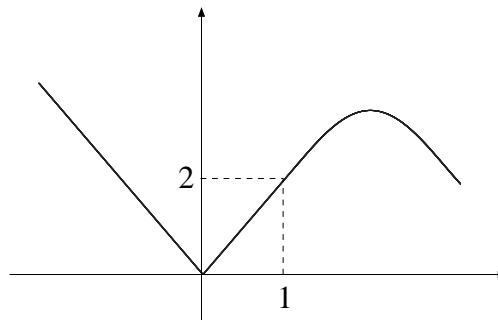


Figura 5.6: Gráfico de g (tal que $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$).

Veja, agora, um exemplo no qual os limites laterais são diferentes.

Exemplo 5.8

Considere a função definida por $h(x) = \frac{|x - 1|}{1 - x^2}$, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Veja, apesar de a lei de definição da função ser dada por uma única sentença, há duas situações a considerar: $x > 1$ e $x < 1$. Isso se deve à presença do módulo na definição. Novamente, para analisarmos o comportamento da função h nas vizinhanças de 1, temos de usar os limites laterais.

Primeiro, o limite à esquerda (para variar).

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{(1-x)(1+x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(1+x)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Observe que a condição $x < 1$, equivalente a $x-1 < 0$, nos diz que $|x-1| = -(x-1)$.

Agora, o limite à direita.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)}{(1-x)(1+x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{(1+x)} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Neste caso, a condição $x > 1$ garante $|x-1| = x-1$.

Veja, a seguir, o gráfico de h numa vizinhança de 1.

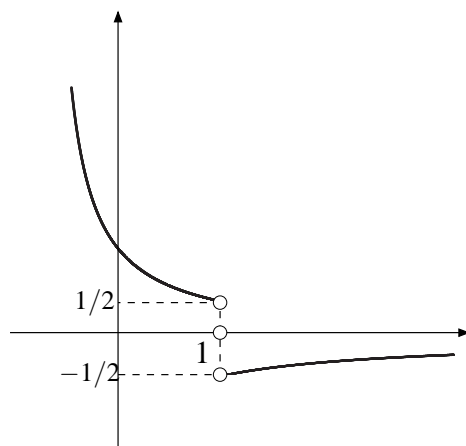


Figura 5.7: Gráfico de h (tal que $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$).

Com essa série de exemplos, terminamos a aula!

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta aula, você aprendeu mais algumas técnicas para levantar indeterminações, mais algumas propriedades dos limites e conceito de limites laterais.

Não deixe de colocar esses novos conhecimentos em prática, na lista de problemas apresentada a seguir.

Exercício 5.3

1. Considere f , g e h , funções definidas nas vizinhanças de 2, tais que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 3$. Usando essas informações e as propriedades de limites, calcule:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + g(x) - h(x)] & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 2} |f(x)g(x) - h(x)| \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{f(x) - g(x)}{h(x)} \right] & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{h(x) - f(x)} \end{array}$$

2. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir, justificando a sua resposta.

- Se $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -1$, então $\lim_{x \rightarrow 3} [f(x) - g(x)] = 1$.
- Se $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$, então $f(3) = 5$.
- Se $f(3) = 5$, então $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$.
- Se $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -5$, então $\lim_{x \rightarrow 3} |f(x)| = 5$.

3. Calcule os seguintes limites:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2} \\ \text{(c)} \lim_{t \rightarrow -3^+} \frac{3 + t}{\sqrt{9 - t^2}} & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} \\ \text{(e)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^{3/2} - 2\sqrt{2}}{x^{1/2} - \sqrt{2}} & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{2 - \sqrt{x^2 + 3}} \end{array}$$

4. Trace o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & \text{se } x \geq 2 \\ x + 1 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

e calcule, se existirem, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Esboce o gráfico de f .

5. Considere a função

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|+4}{2} & \text{se } x \geq 2 \\ |x-a| & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

onde a é uma constante. Sabendo que $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$, determine a e calcule $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.

Esboce o gráfico de g .

Aula 6

LIMITES ENVOLVENDO INFINITO – PRIMEIRA PARTE



O b j e t i v o s

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 calcular limites infinitos quando $x \rightarrow a$, $x \rightarrow a^+$ ou $x \rightarrow a^-$;
- 2 identificar e representar geometricamente as assíntotas verticais dos gráficos de funções.

Este é um bom momento para fazer um balanço dos conteúdos que você aprendeu nas três aulas anteriores. Em outras palavras, quais conceitos novos você conheceu? Quais limites você é capaz de calcular? Quais serão os próximos passos? Bem, vejamos.

Em primeiro lugar, você deve ter uma clara idéia do significado da frase matemática

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

inclusive de sua interpretação geométrica.

Isso cobre uma boa parte do conteúdo teórico apresentado, digamos assim. Do ponto de vista prático, você deve saber que a partir das propriedades elementares dos limites de funções, se $p(x)$ é uma função polinomial, então

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a).$$

Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (2x^2 - x - 2) = 2 - \sqrt{2}.$$

Mais ainda, você já deve dar conta de algumas complicações, tais como calcular

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} \quad \text{ou} \quad \lim_{t \rightarrow 2} \frac{\sqrt{t+2} - 2}{t - 2}.$$

Praticando bem, você deve ter encontrado as respostas 3 e $1/4$.

Finalmente, você deve estar fluente na linguagem dos limites laterais.

Você deve ter notado que as funções com que temos lidado até agora são, essencialmente, funções algébricas. Veja, as funções algébricas são aquelas funções cujas leis de definição envolvem um número finito de operações elementares, além das inversas de funções que podem ser assim construídas. Por exemplo, as funções

$$f(x) = \frac{3x-7}{2x+1} \quad \text{e} \quad g(x) = (2x+5)^{2/3}$$

são funções algébricas.

Nesta aula, vamos ampliar o conceito de limite envolvendo o infinito. Você aprenderá o significado de símbolos tais como

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty,$$

e descobrirá como reconhecer quando isso ocorre. Assim, você aprenderá a calcular estes limites. Além disso, também conhecerá a interpretação geométrica desses limites. Antes de mais nada, leia a seguir um pequeno histórico sobre o assunto.

BREVE HISTÓRICO

Infinito não é uma noção exclusiva dos matemáticos. Nas mais diferentes áreas do conhecimento humano, deparamo-nos com coisas que são muito, muito grandes e, também, coisas extremamente pequenas.

Veja a manchete estampada numa certa página de internet em 23 de setembro de 2004: “Cientistas registram colisão frontal de galáxias”. Uma equipe internacional de cientistas observou a colisão frontal de dois conjuntos de galáxias – uma “tempestade cósmica perfeita”. Segundo um dos cientistas, “viu-se a formação de um dos maiores objetos do universo”.

No outro extremo deste espectro, encontramos, já sem surpresas, coisas como exames de DNA, que revelam as partes mais ínfimas de que somos feitos, ou ainda, lemos reportagens que nos preparam para um novo mundo servido por novidades da *nanotecnologia*.

Só para citar dois pioneiros, Anaximandro (610 - 540 a.C.) inaugurou esse debate posicionando-se favoravelmente ao infinito: o universo contém uma infinidade de mundos, a duração do universo é infinita, e assim por diante. Ele foi citado e rebatido por Aristóteles (384 - 322 a.C.).

Você deve concordar que o conjunto dos números naturais é, pelo menos *potencialmente*, infinito, no sentido que, não importa até quanto contamos, sempre podemos seguir adiante. Sobre isso, Aristóteles poderia dizer que os números não são coisas que existem fora da mente humana e, portanto, não formam algo *realmente* infinito.

Nanotecnologia

Conjunto de técnicas que visam a estender a capacidade humana de manipular a matéria até os limites do átomo. O domínio da nanotecnologia permitiria criar novos materiais e produtos usando a capacidade da tecnologia moderna de ver e manipular átomos e moléculas. Ela permitiria entre outras coisas, aumentar exponencialmente a capacidade de armazenar e processar dados dos computadores, criar novos meios de aplicar medicamentos e gerar materiais mais leves e mais resistentes do que os conhecidos.

Como você pode ver, a questão é, no mínimo, delicada. Mas vamos nos refugiar nas águas tranquilas da Matemática. Nossa tarefa será bem mais simples. Muito bem, vamos a isso!

LIMITES INFINITOS

O símbolo $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ será usado para indicar situações nas quais os valores de $f(x)$ tornam-se arbitrariamente grandes, na medida em que calculamos f em valores de $x > a$, mais e mais próximos de a .

Um exemplo simples dessa situação ocorre nas vizinhanças de zero, no caso da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Exemplo 6.1

Veja, a seguir, uma tabela com alguns valores de x e de $f(x)$, assim como um esboço do seu gráfico.

x	$f(x)$
1	1
0.5	2
0.25	4
0.01	100
0.0001	10.000

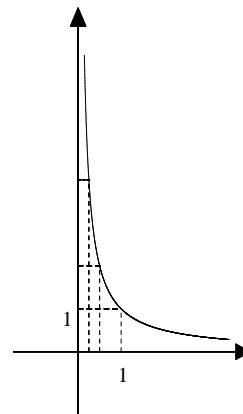


Figura 6.1: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, para $x > 0$.

Na verdade, essa tabela sugere o comportamento dos valores de $f(x)$, na medida em que tomamos, para x , valores mais e mais próximos de zero, pela direita. Esse comportamento será expresso por

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Geometricamente, esta situação corresponde ao que chamamos *assíntota vertical* do gráfico da função.

No entanto, precisamos explicitar um pouco mais o que queremos dizer com $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$. É verdade que o exemplo é eloqüente, mas a questão é delicada. Parte do problema está no fato de que grande, assim como pequeno, são conceitos relativos. Veja, nos dois próximos exemplos, as dificuldades que podemos encontrar.

Exemplo 6.2

Vamos considerar o $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 2.000x}{1.000x^2}$.

Olhando a tabela a seguir, assim como o gráfico da função $g(x) = \frac{1 - 2.000x}{1.000x^2}$, gerado num computador, sobre o intervalo $[0.001, 0.1]$, a qual conclusão você chegaria?

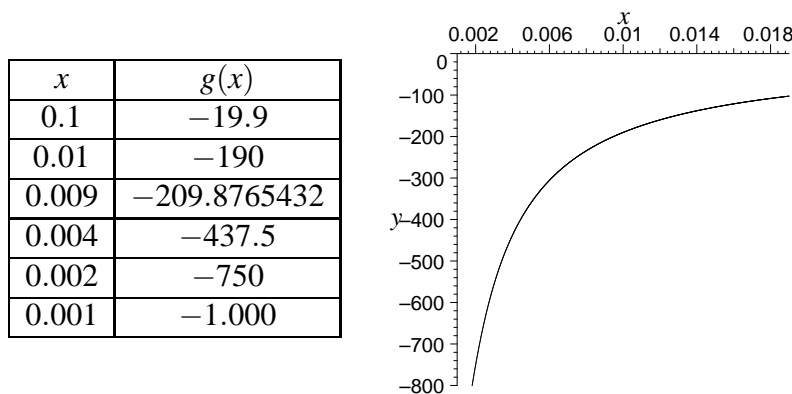


Figura 6.2: Gráfico da função $g(x) = \frac{1 - 2.000x}{1.000x^2}$.

A impressão é que, ao tomarmos valores de x mais e mais perto de zero, passando de 0.1 para 0.001, os valores de $f(x)$ se afastam de zero, na direção negativa, passando de aproximadamente -20 para -1.000. Se baseássemos nosso estudo apenas nessas informações, tenderíamos a responder $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$. No entanto, resta a pergunta: teríamos tomado valores de x suficientemente próximos de zero para determinar o comportamento da função? A resposta é não! Veja a próxima série de valores assim como o gráfico de g sobre um intervalo um pouco maior.

x	$g(x)$
0.1	-19.9
0.0009	-987.654321
0.0006	-555.555556
0.00051	-76.893503
0.0005	0
0.0002	15.000
0.0001	80.000

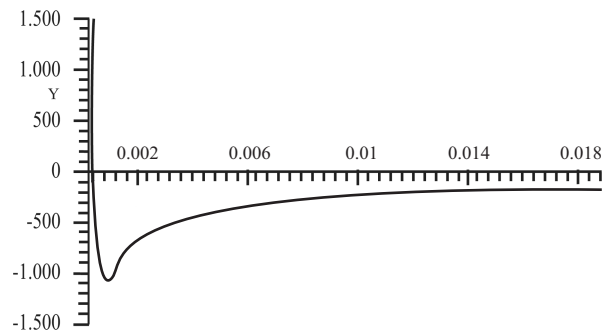


Figura 6.3: Gráfico da função $g(x) = \frac{1 - 2.000x}{1.000x^2}$.

Você deve ter notado que os gráficos estão com a escala de x diferente da escala de y . Caso contrário, não poderíamos interpretá-los adequadamente.

Na verdade, o que ocorre é

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 2.000x}{1.000x^2} = +\infty.$$

Até o fim da aula, você aprenderá a fazer este tipo de cálculo.

O exemplo, a seguir, nos reserva ainda outro tipo de surpresa.

Exemplo 6.3

Agora, vamos estudar o $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1.000 + x}{8x^2 + 0.01}$.

Veja uma tabela com alguns valores de x e de $h(x) = \frac{1.000 + x}{8x^2 + 0.01}$, assim como o seu gráfico, no intervalo $[0.0009, 1]$.

x	$g(x)$
10	1.262484219
2	31.3027179
1	124.968789
0.2	3030.909091
0.05	33335.0
0.001	99920.16387
0.0009	99935.33190

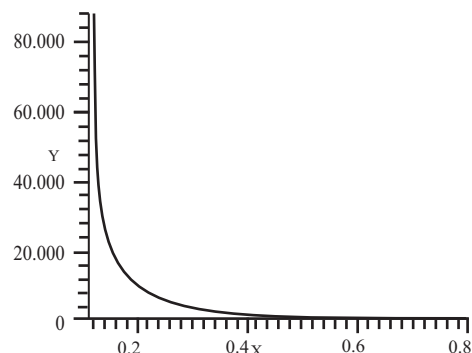


Figura 6.4: Gráfico da função $g(x) = \frac{100 + x}{8x^2 + 0.01}$.

Novamente, uma análise precipitada, que levasse em conta apenas esses dados, nos levaria a crer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1.000 + x}{8x^2 + 0.01} = +\infty$. Se fizéssemos isso, estaríamos incorrendo em outro erro. Neste caso, a função tem limite (finito) no ponto zero. Veja o seu gráfico numa outra perspectiva.

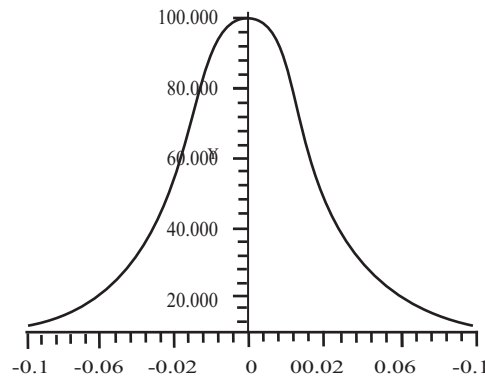


Figura 6.5: Gráfico da função $h(x)$.

Um simples cálculo nos mostra $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1.000 + x}{8x^2 + 0.01} = 100.000$.

Portanto, ao estabelecer o significado do símbolo

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty,$$

precisamos ter a certeza de que os valores de $f(x)$ não apresentem comportamentos do tipo daqueles ilustrados nos dois exemplos anteriores.

A definição que apresentaremos a seguir nos garantirá a exclusão de tais problemas.

Definição 6.1

Considere f uma função tal que, para um certo $R > 0$, $(a, a + R) \subset \text{Dom}(f)$. Dizemos que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ se, para cada $M > 0$, existe um $r > 0$ ($R > r > 0$) tal que, se $x \in (a, a + r)$, então $f(x) > M$.

A condição $(a, a + R) \subset \text{Dom}(f)$, para um certo $R > 0$, garante que a função f está definida à direita de a e, portanto, faz sentido considerar $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Assim, quando afirmamos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty,$$

estamos dizendo que, para cada reta horizontal $y = M$, há um (pequeno) intervalo de comprimento $r > 0$, $(a, a + r)$, tal que, se $x \in (a, a + r)$, então

$$f(x) > M.$$

Isso quer dizer que a restrição do gráfico de f ao intervalo $(a, a + r)$ está acima da reta $y = M$, conforme a ilustração a seguir.

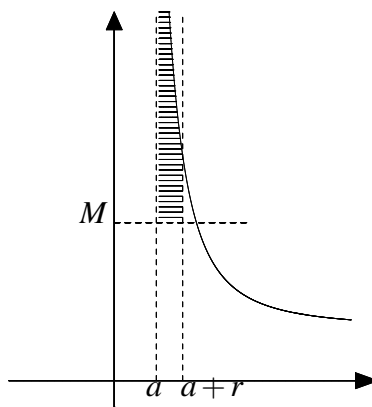


Figura 6.6: Gráfico de função tal que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

Lembre-se do exemplo 22.3. Como o gráfico de $h(x) = \frac{1.000 + x}{8x^2 + 0.01}$ não ultrapassa a reta $y = 100.001$, o limite de $h(x)$, quando x tende a zero, pela direita, não pode ser infinito.

Fazendo as devidas adaptações, obtemos as definições para

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty.$$

Veja mais um caso.

Definição 6.2

Considere f uma função tal que, para um certo $R > 0$, $(a - R, a) \subset \text{Dom}(f)$. Dizemos que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ se, para cada $M > 0$, existe um $r > 0$ ($R > r > 0$) tal que, se $x \in (a - r, a)$, então $f(x) < -M$.

Veja a representação gráfica desta situação.

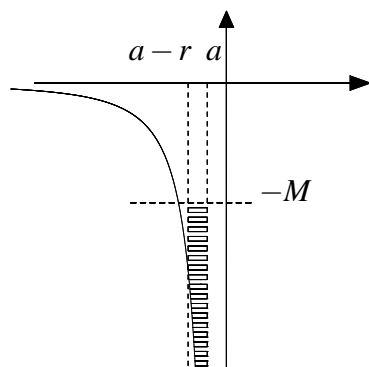


Figura 6.7: Gráfico de função tal que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$.

Exemplo 6.4

Aqui estão alguns exemplos de limites infinitos.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

(b) $\lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{3}{\sqrt{x} - 3} = +\infty$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 + 1}{(x - 1)^2} = +\infty$

Além disso, se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$, dizemos simplesmente que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty.$$

Da mesma forma, se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$, dizemos simplesmente que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

Exercício 6.1

Considerando o gráfico da função f na figura a seguir, determine os limites indicados.

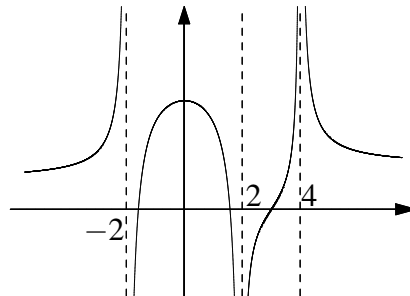


Figura 6.8: Gráfico da função f .

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| (a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ | (b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ | (c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ | (e) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ |
| (g) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ | (h) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ | (i) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$. |

ASSÍNTOTAS VERTICAIS

Dizemos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de f se ocorrer algum dos seguintes limites:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= -\infty; & \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= -\infty; & \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

Exemplo 6.5

Vamos determinar as assíntotas verticais da função $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-x-6}$.

Aqui está a oportunidade de você aprender a calcular os limites infinitos. As situações típicas são de funções cuja lei de definição é dada por um quociente. Para que o limite de $f(x)$ seja

infinito, quando x tende a a , é preciso que o limite do denominador, quando x tende a a , seja zero, e o limite do numerador seja diferente de zero. Neste caso, todo o trabalho consistirá em fazer uma análise dos sinais para determinar se o limite será $+\infty$ ou $-\infty$.

Começamos calculando o domínio da função, determinando as retas candidatas a assíntotas verticais. Nesse caso, para que f esteja bem definida, é necessário que $x^2 - x - 6 \neq 0$. Portanto, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$.

Vamos estudar o comportamento de f nas vizinhanças dos pontos -2 e 3 . Para isso, usaremos os limites laterais. Veja, a seguir, a análise dos sinais da função que está no denominador, $y = x^2 - x - 6$.

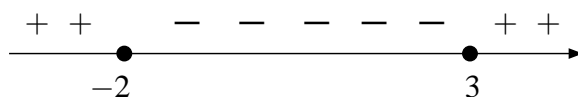


Figura 6.9: Análise do sinal da função $y = x^2 - x - 6$.

Muito bem, estamos preparados para calcular os limites.

$$(a) \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x - 3}{x^2 - x - 6} = -\infty.$$

Realmente, quando x tende a -2 , o numerador $y = 2x - 3$ tende a -6 . A análise de sinais feita anteriormente mostra que, se x tende a -2 , pela esquerda, o denominador tende a zero *com sinal positivo*. Assim, o limite de $f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - x - 6}$, quando x tende a -2 , pela direita, será $-\infty$.

$$(b) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x - 3}{x^2 - x - 6} = +\infty.$$

Neste caso, o numerador continua com o sinal negativo, mas quando x tende a 2 , pela direita, o denominador tende a zero *com sinal negativo*, como pode ser visto na sua análise de sinal. Portanto, o limite de $f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - x - 6}$, com x tendendo a -2 pela direita, será $+\infty$.

$$(c) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x - 3}{x^2 - x - 6} = -\infty.$$

Veja como a situação mudou, uma vez que o limite do numerador, quando x tende a 3, é positivo. Quando x tende a 3, pela esquerda, o denominador tende a zero *com sinal negativo*. Concluimos que o limite de $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-x-6}$, com x tendendo a 3 pela esquerda, será $-\infty$.

$$(d) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-3}{x^2-x-6} = +\infty.$$

Neste caso, a situação do numerador não se alterou e o denominador tende a zero com sinal positivo. O limite de $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-x-6}$, com x tendendo a 3 pela direita, $+\infty$.

Assim, o gráfico de f tem duas assíntotas verticais: $x = -2$ e $x = 3$. Veja um esboço de seu gráfico.

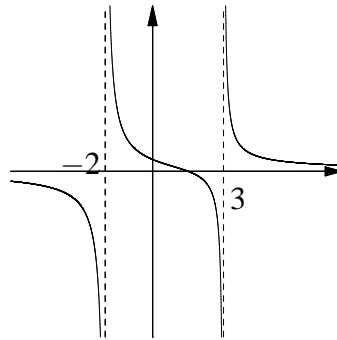


Figura 6.10: Gráfico da função f .

Exemplo 6.6

Vamos encontrar as assíntotas verticais da função

$$g(x) = \frac{x}{(x-1)^2(x+2)},$$

calculando todos os possíveis limites infinitos.

Começamos determinando o domínio da função. Essa parte é fácil: o domínio de g é o conjunto $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

Agora, a análise do sinal da função que se encontra no denominador, $y = (x-1)^2(x+2)$.

+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	$(x-1)^2$
-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	$(x+2)$
-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	$(x+2)(x-1)^2$
					-2						1	

Como não há mudança de sinal de $y = (x-1)^2(x+2)$ nas vizinhanças de 1, podemos calcular diretamente o limite da função.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = +\infty,$$

pois, quando x tende a 1, o limite do numerador é $1 > 0$ e o limite do denominador é zero, mas a função $y = (x-1)^2(x+2)$ é positiva em todos os pontos de uma certa vizinhança em torno de 1.

Para -2 , usaremos os limites laterais, pois $y = (x-1)^2(x+2)$ é negativa à esquerda de -2 e positiva à direita. Como o limite do numerador, quando x tende a -2 , é negativo,

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = -\infty.$$

Veja um esboço do gráfico de g , na figura a seguir.

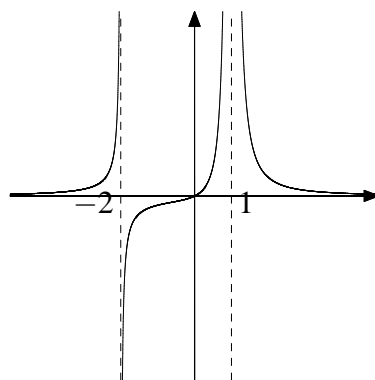


Figura 6.11: Gráfico da função g .

RESUMO DA ÓPERA

Limites infinitos, com $x \rightarrow a$, ocorrem quando há um quociente, com o limite do numerador sendo um número diferente de zero e o limite do denominador igual a zero.

Geometricamente, esses limites correspondem às assíntotas verticais.

Veja, também, que é possível termos um dos limites laterais sendo infinito e o outro finito. Isso é suficiente para caracterizar uma assíntota vertical.

Do ponto de vista operacional, tudo o que temos de fazer é uma análise de sinal, do tipo que você aprendeu a fazer no Pré-Cálculo.

O limite do numerador é positivo? É negativo? E o limite do denominador vai a zero com sinal positivo? Com sinal negativo?

Os limites laterais desempenham um importante papel. Veja ainda mais um exemplo.

Exemplo 6.7

Calcule $\lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{2x+1}{x^2-2x-3}$, para $a = -1$ e $a = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+1}{x^2-2x-3} = -\infty,$$

pois $\lim_{x \rightarrow -1^-} 2x+1 = -1$ e $\lim_{x \rightarrow -1^-} x^2-2x-3 = 0^+$.

As outras respostas são:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x^2-2x-3} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x+1}{x^2-2x-3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x+1}{x^2-2x-3} = +\infty.$$

Veja o gráfico da função.

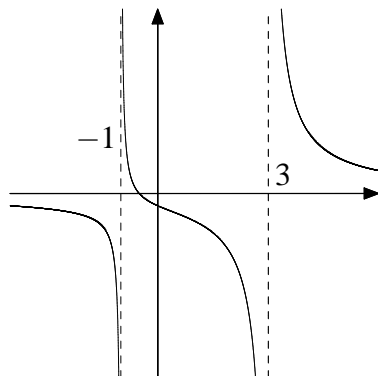


Figura 6.12: Gráfico da função $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-2x-3}$.

É bom saber da existência de coisas menos comportadas. Por exemplo, há casos de funções não limitadas, quando $x \rightarrow a^\pm$ e o limite não é do tipo $f(x) \rightarrow \infty$ ou $f(x) \rightarrow -\infty$.

Aqui está um tal exemplo: $\nexists \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$. O gráfico de f oscila de valores positivos para negativos e vice-versa, tomando valores cada vez mais afastados da origem.

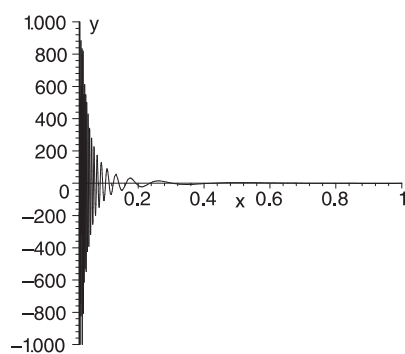


Figura 6.13: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$, para $x > 0$.

Você sabia que, em alemão, se diz *unendlich* para infinito? Soa bem poético, não? Muito bem, está na hora de parar, pois você ainda tem a lista de problemas para fazer. Na próxima aula, continuaremos a falar sobre limites envolvendo infinito.

Exercício 6.2

1. Calcule os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+2}{x-3}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-4}{x^2-1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-3}{x^2-1}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2-1}{x+1}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x}-5}{1-\sqrt{x}}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 2/3^+} \frac{x}{2-3x}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow \pi^+} \sec x$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 2\pi^+} \cot x$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x}{1-e^x}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{\ln x}.$$

2. Determine as assíntotas verticais da função $f(x) = \frac{8}{4-x^2}$, calculando todos os seus possíveis limites infinitos.

3. Determine as assíntotas verticais da função $g(x) = \frac{1-x}{x^3-2x^2-x+2}$, calculando todos os seus possíveis limites infinitos.

4. Dê um exemplo de uma função definida em $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ que tenha $x = n$ como uma assíntota vertical, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

5. Determine o valor de a tal que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-3}{x^2-ax+1} = -\infty.$$

Aula 7

LIMITES ENVOLVENDO INFINITO – SEGUNDA PARTE



O b j e t i v o s

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 calcular limites do tipo: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
- 2 identificar e representar geometricamente as assíntotas horizontais dos gráficos de funções.



John Wallis
(1642 - 1727)

Foi um precursor do Cálculo. Sua principal obra é *Arithmetica Infinitorum* (Aritmética do Infinito), publicada em 1656. Há uma tradução recente desse livro para o inglês, publicada pela Springer-Verlag. Apesar de algumas imprecisões, esse livro desempenhou papel importante ao aprofundar e divulgar as idéias de Descartes e de Cavalieri, sobre a Geometria Analítica e sobre o cálculo de áreas de regiões delimitadas por curvas algébricas.

Na aula anterior, você aprendeu a usar o símbolo ∞ para indicar na expressão $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, por exemplo, que para valores suficientemente próximos a a , os valores correspondentes $f(x)$ tornam-se arbitrariamente grandes. Além disso, a expressão $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ deve ser lida assim: limite de $f(x)$, quando x tende a a , é infinito.

Até 1655, o símbolo ∞ era usado como uma alternativa para M, representando 1.000 em algarismos romanos quando, por sugestão do matemático inglês **John Wallis**, passou a representar infinito. Como você pode ver, a sugestão foi bem aceita pela comunidade matemática.

ALGUMAS PROPRIEDADES DOS LIMITES INFINITOS

Com a extensão da definição de limites de funções a casos envolvendo infinito, obtemos uma série nova de propriedades que estabelecem algo assim como uma aritmética com infinito.

Suponha que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$. Então,

$$1) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + h(x)] = +\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} [h(x) \cdot f(x)] = \begin{cases} +\infty & \text{se } L > 0 \\ -\infty & \text{se } L < 0 \end{cases}$$

$$5) \text{ se } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}.$$

Além disso, as afirmações continuam verdadeiras se trocarmos $x \rightarrow a$ por $x \rightarrow a^+$ ou $x \rightarrow a^-$.

Exemplo 7.1

Já sabemos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\sin x}{x} + \frac{1}{x} \right] = +\infty.$$

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, o limite da soma das funções,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$$

é uma *indeterminação do tipo* $\infty - \infty$, pois o resultado é imprevisível.

Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 7.2

Você verá que uma pequena alteração na função pode modificar, de maneira dramática, o resultado do limite.

Vamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\frac{1}{x-3} + \frac{a}{x^2 - 2x - 3} \right],$$

para os seguintes valores de a : -3 , -4 e -5 .

É claro que $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$.

Para $a < 0$, como $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$,

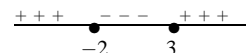
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{a}{x^2 - 2x - 3} = -\infty,$$

pois $\lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - 2x - 3 = 0$, mas, se $x > 3$, $y = x^2 - 2x - 3 > 0$.

Portanto, se $a < 0$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\frac{1}{x-3} + \frac{a}{x^2 - 2x - 3} \right]$ é uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$.

$$\text{No entanto, } \frac{1}{x-3} + \frac{a}{(x+1)(x-3)} = \frac{x+1+a}{(x+1)(x-3)}.$$

Aqui está a análise
do sinal de
 $y = x^2 - 2x - 3$.



Caso $a = -3$

Se fizermos a igual a -3 , o limite será $+\infty$. Veja:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-2}{(x+1)(x-3)} = +\infty,$$

pois $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x-2) = 1 > 0$.

Caso $a = -4$

Neste caso, o resultado é finito.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{4}.$$

Caso $a = -5$

Finalmente, para $a = -5$, o limite será $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-4}{(x+1)(x-3)} = -\infty,$$

pois $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x-4) = -1 < 0$.

CONCLUSÃO

Para diferentes valores atribuídos à constante a , o limite resultou, ora $+\infty$, ora um número real, ora $-\infty$, ou seja, em situações como essa, não descuide, aja com cuidado!

Exercício 7.1

Determine o valor de k , tal que

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \left[\frac{3}{x+2} + \frac{k}{x^2-4} \right]$$

seja finito. Para quais valores de k o limite anterior será $-\infty$?

LIMITES DE FUNÇÕES NO INFINITO

Até agora nós temos usado o limite como uma ferramenta para estudar o comportamento dos valores de uma dada função f , nas vizinhanças de um certo ponto a .

Nosso próximo passo será usar o limite para estudar o comportamento dos valores de $f(x)$ quando tomamos para x (ou para $-x$, dependendo do caso) valores arbitrariamente grandes. Isto é, queremos estabelecer sentido para as expressões

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Devido à similaridade entre as duas situações, vamos nos concentrar no caso $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Para que a expressão possa ter algum sentido, é necessário que

$$[b, +\infty) \subset \text{Dom}(f),$$

para algum número b , caso contrário, não poderíamos tomar valores de $f(x)$, para valores arbitrariamente grandes de x .

Há duas situações especiais que queremos distinguir:

(a) para valores arbitrariamente grandes de x , os valores de $f(x)$ também se tornam arbitrariamente grandes (ou então os valores de $-f(x)$ tornam-se arbitrariamente grandes);

(b) na medida em que tomamos valores maiores e maiores para x , os valores correspondentes $f(x)$ tornam-se arbitrariamente próximos de um certo número L .

Essas situações serão denotadas por

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L.$$

Exemplo 7.3

Considere n um inteiro não-nulo. Então,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \geq 1 \\ 0 & \text{se } n \leq -1. \end{cases}$$

Em particular,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{2}}{x} = -\infty.$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

É muito importante saber interpretar geometricamente o significado desses limites no infinito. Começaremos com o caso $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = M$). Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ (respectivamente, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = M$), diremos que a reta $y = L$ (respectivamente, $y = M$) é uma *assíntota horizontal* do gráfico de f . Isso quer dizer que, para valores cada vez maiores de x (respectivamente, de $-x$) o gráfico de f torna-se mais e mais próximo da reta $y = L$ ($y = M$). Veja alguns exemplos.

Exemplo 7.4

Veja, nas figuras a seguir, gráficos de funções com assíntotas horizontais.

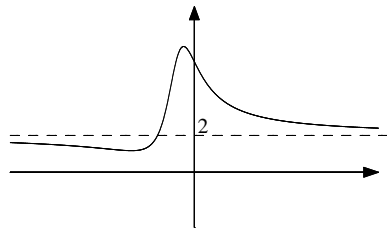


Figura 7.1: Função f .
Assíntota horizontal $y = 2$.

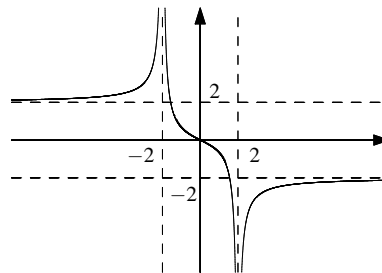


Figura 7.2: Função g .
Assíntotas horizontais $y = 2$ e $y = -2$.

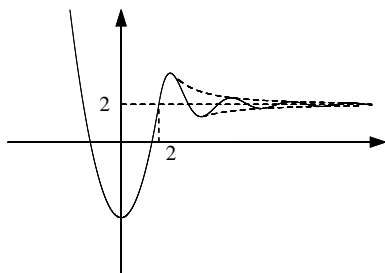


Figura 7.3: Função h .
Assíntota horizontal $y = 2$.

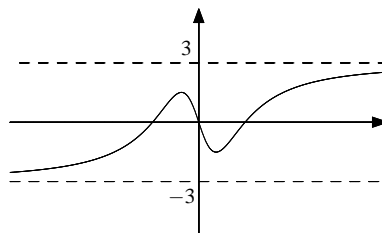


Figura 7.4: Função k .
Assíntotas horizontais $y = 3$ e $y = -3$.

A função f (**Figura 7.1**) tem uma única assíntota horizontal. Neste caso, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

A função g (**Figura 7.2**) tem quatro assíntotas: duas verticais e duas horizontais. Veja quais são seus limites infinitos e no infinito:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= 2, & \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= -2 \\ \lim_{x \rightarrow -2} g(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 2} g(x) &= -\infty \end{aligned}$$

Algo interessante ocorre no caso da função h (**Figura 7.3**). Essa função certamente não é polinomial (por quê?). A reta $y = 2$ é a única assíntota do gráfico da função, pois $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2$, mas o gráfico de h oscila em torno da reta, com amplitude cada vez menor, na medida em que tomamos valores cada vez maiores para x .

Finalmente, no caso da função k , não há assíntota vertical, mas duas assíntotas horizontais, pois $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = -3$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 3$.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Aqui está a definição de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, necessária para podermos interpretá-la geometricamente.

Definição 7.1

Dizemos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se, e somente se, para cada $M > 0$ existe um número $r > 0$, tal que, se $x > r$, então $f(x) > M$.

Isso significa geometricamente que, dada uma altura $M > 0$ *qualquer*, existe um número r suficientemente grande, tal que a parte do gráfico de f sobre o intervalo $[r, +\infty)$ fica acima da reta $y = M$.

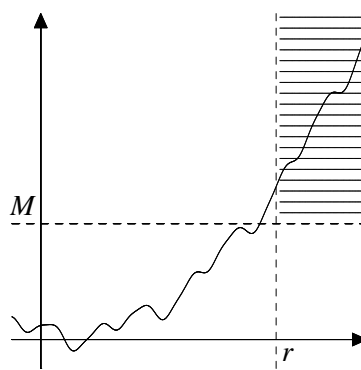


Figura 7.5: Gráfico de função em que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Na **Figura 7.5**, você nota que o gráfico de f sobre o intervalo $[r, +\infty)$ está contido na região com hachuras, isto é, acima da reta $y = M$.

Note que essa situação é dinâmica. Isso deve ocorrer para *todos* os valores de M . Dessa forma, para valores de M cada vez maiores, possivelmente teremos de aumentar os valores de r .

Na figura a seguir, você poderá ver como, para três diferentes valores de M , precisamos, para o exemplo em questão, de três diferentes valores de r , indicados pelos correspondentes índices. Assim, se $x > r_1$, então $f(x) > M_1$. Se $x > r_2$, então $f(x) > M_2$. Finalmente, para $x > r_3$, temos $f(x) > M_3$. Essa última afirmação está enfatizada na figura pelo fato de o gráfico de f estar contido na região com hachuras. E, assim, para cada novo M , maior que o anterior, seguiríamos obtendo um novo r , tal que, se $x > r$, $f(x) > M$.

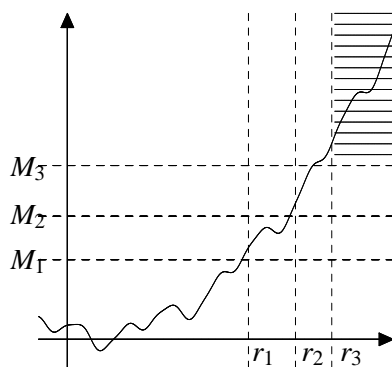


Figura 7.6 : Gráfico de função em que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

COMPORTAMENTO DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS NO INFINITO

É muito importante saber o comportamento no infinito das polinomiais. Além disso, é muito fácil. Tudo depende do *termo de maior grau*. Lembre-se de que uma função polinomial é dada por uma equação do tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

na qual a_i são números reais e estamos supondo que $a_n \neq 0$ e $n \geq 1$.

Dizemos que $p(x)$ é uma função polinomial de grau n , e $a_n x^n$ é o termo de maior grau. Então,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0 \\ -\infty & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \begin{cases} n \text{ é par e } a_n > 0 \\ n \text{ é ímpar e } a_n < 0 \end{cases} \\ -\infty & \text{se } \begin{cases} n \text{ é ímpar e } a_n > 0 \\ n \text{ é par e } a_n < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Parece complicado, mas não é. Veja, nas figuras a seguir, quatro exemplos que indicarão todas as possibilidades.

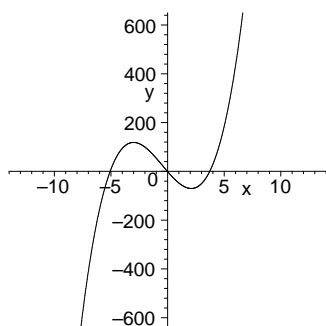


Figura 7.7: n ímpar, $a_n > 0$.

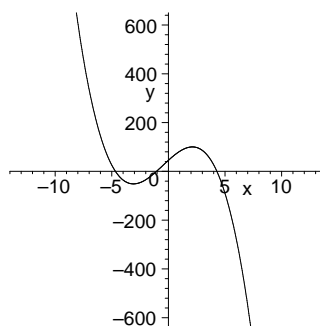


Figura 7.8: n ímpar, $a_n < 0$.

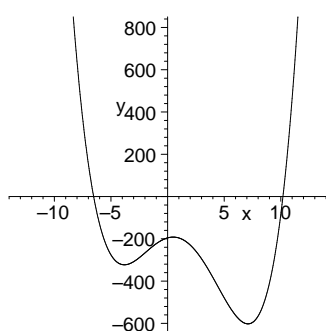


Figura 7.9: n par, $a_n > 0$.

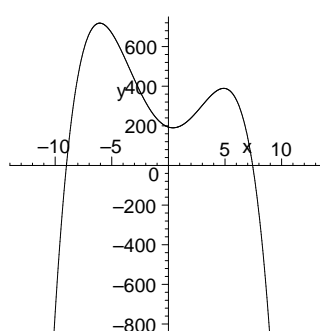


Figura 7.10: n par, $a_n < 0$.

CÁLCULO DOS LIMITES NO INFINITO

Vamos começar com o cálculo dos limites no infinito das funções polinomiais. Assim, você compreenderá como chegamos às conclusões apresentadas na seção anterior e aprenderá uma primeira técnica para levantar essas indeterminações. Desse modo, você perceberá, algebricamente, por que o comportamento das funções polinomiais no infinito é determinado pelo termo de maior grau. Parece estranho, mas, na verdade, se alterarmos a função polinomial, mudando apenas os coeficientes dos termos de graus menores, a função sofre alterações numa região limitada em torno da origem, mas seu comportamento para valores muito grandes de $|x|$ permanece, essencialmente, o mesmo. Isso é ilustrado pelo próximo exemplo.

Exemplo 7.5

A função $f(x) = x^2 - 2x$ tem duas raízes reais (2 e 0), enquanto a função $g(x) = x^2 - 2x + 2$, diferente de f apenas pelo termo constante, não tem raízes reais. No entanto,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty.$$

Veja os gráficos sob duas diferentes perspectivas, nas figuras a seguir.

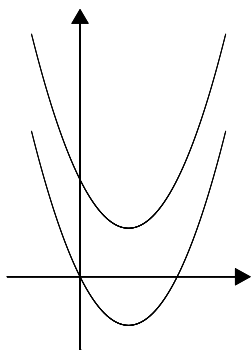


Figura 7.11: Gráficos de f e g em torno da origem.

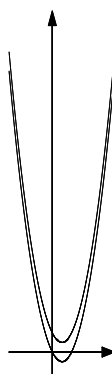


Figura 7.12: Funções f e g numa vizinhança maior.

Agora, veja um exemplo de como calculamos o limite de um polinômio quando x tende a $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemplo 7.6

Vamos calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - 5x^2 - 2x - 7)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 5x^2 - 2x - 7)$.

O termo de maior grau é $3x^3$, isto é, $a_n > 0$ e n ímpar. Portanto, a resposta do cálculo deve ser

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - 5x^2 - 2x - 7) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 5x^2 - 2x - 7) = -\infty.$$

Note que, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^2 = -\infty$, o limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - 5x^2 - 2x - 7)$ está indeterminado. Mas veja como podemos contornar isso. Como estamos interessados no comportamento de $3x^3 - 5x^2 - 2x - 7$, para valores muito grandes de

x , podemos supor $x > 0$ e colocar $3x^3$ em *evidência*. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - 5x^2 - 2x - 7) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 \left(1 - \frac{5}{3x} - \frac{2}{3x^2} - \frac{7}{3x^3} \right).$$

Agora, o limite de cada uma das parcelas, $-\frac{5}{3x}$, $-\frac{2}{3x^2}$ e $-\frac{7}{3x^3}$, quando $x \rightarrow +\infty$, é zero. Isto é,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{3x} - \frac{2}{3x^2} - \frac{7}{3x^3} \right) = 1$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - 5x^2 - 2x - 7) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 \left(1 - \frac{5}{3x} - \frac{2}{3x^2} - \frac{7}{3x^3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 = +\infty. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 5x^2 - 2x - 7) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 \left(1 - \frac{5}{3x} - \frac{2}{3x^2} - \frac{7}{3x^3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 = -\infty. \end{aligned}$$

Vejamos se você está pronto para um pouco de ação.

Exercício 7.2

Calcule os seguintes limites:

- | | |
|--|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 5x + 2$ | (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^5 + 7x^2 - 8$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^2 - 5x^3$ | (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 17x - 0.4x^5 + 7x^2$ |
| (e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 - 3 x ^3$ | (f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^{3/2} + 2x^{1/2} + 4.$ |

CÁLCULO DE LIMITES NO INFINITO DE FUNÇÕES RACIONAIS

O comportamento no infinito de funções racionais (definidas pelo quociente de dois polinômios) também é definido pelos graus dos polinômios envolvidos. Veja o resumo a seguir. Con-

sidere $p(x)$ e $q(x)$ duas funções polinomiais, cujos coeficientes dos termos de maior grau são a e b , respectivamente. Então,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } \text{grau}(p) > \text{grau}(q) \\ \frac{a}{b} & \text{se } \text{grau}(p) = \text{grau}(q) \\ 0 & \text{se } \text{grau}(p) < \text{grau}(q) \end{cases}$$

O sinal do limite, no caso em que $\text{grau}(p) > \text{grau}(q)$ é determinado pelos sinais dos coeficientes dos termos de maior grau.

A maneira de obter esse resultado é semelhante à que usamos no caso dos polinômios. Veja como usar essa estratégia no próximo exemplo.

Exemplo 7.7

Vamos calcular alguns limites. Começaremos com um exemplo em que o grau do numerador é maior do que o grau do denominador.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 3x^2 + 2x - 5}{3 - x - 2x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(3 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right)}{x^2 \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} - 2 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right)}{\left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} - 2 \right)} \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x \right) \\ &= -\infty, \end{aligned}$$

pois o limite de cada fração do tipo $\frac{c}{x^m}$, com $x \rightarrow \infty$, é igual a zero.

Veja um caso no qual o numerador e o denominador têm o mesmo grau.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + \sqrt{2}}{5 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(3 - \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{2}}{x^2} \right)}{x^2 \left(\frac{5}{x^2} - 1 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{2}}{x^2}}{\frac{5}{x^2} - 1} = -3.\end{aligned}$$

Finalmente, um caso em que o limite será infinito.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{3x^2 + x - 4} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)}{x^2 \left(3 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{x \left(3 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} \right)} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \\ &= 0.\end{aligned}$$

A mesma estratégia pode ser usada para calcular limites no infinito de funções algébricas envolvendo radicais. Mas, neste caso, é necessário atenção com a situação $x \rightarrow -\infty$, devido ao sinal negativo dos valores de x .

Exemplo 7.8

Vamos determinar as assíntotas horizontais da função $f(x)$

$$= \frac{10 - 3x}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

Para calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10 - 3x}{\sqrt{x^2 + 4}}$, lembramos que estamos considerando valores muito grandes de x . Portanto, podemos supor que $x > 0$. Isso permite escrever

$$\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = x \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}},$$

pois $x > 0$ e $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10 - 3x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{10}{x} - 3\right)}{x \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{10}{x} - 3}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = -3.$$

Raciocínio semelhante se aplica para calcular o limite com $x \rightarrow -\infty$, porém, neste caso, $x < 0$, e, portanto, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Isso significa que o cálculo do limite fica

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10 - 3x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\frac{10}{x} - 3\right)}{-x \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\frac{10}{x} - 3}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = 3.$$

Parece um pouco estranho, mas veja o gráfico da função.

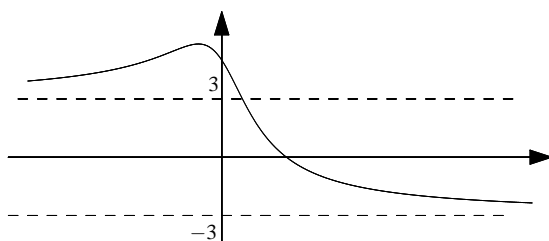


Figura 7.13: Gráfico da função $f(x) = \frac{10 - 3x}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta aula, você aprendeu que o limite serve para descrever o comportamento das funções quando a variável dependente assume valores muito grandes ($x \rightarrow +\infty$) ou quando $-x$ assume valores muito grandes ($x \rightarrow -\infty$).

É muito importante saber o comportamento no infinito dos polinômios, assim como das funções racionais.

Voltaremos a esse tema em breve. Agora, não deixe de praticar as idéias que aprendeu nos exercícios propostos a seguir.

Exercício 7.3

1. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - x^3)$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + 3x - 5)$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{5}x^7 + 8)$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 8x^2)$

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 5}{1 - \sqrt{x}}$

(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{1 + 3x^2}$

(g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 2}{x^3 + 7x - 8}$

(h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5}{5x + 4}$

(i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 7x^2}{3x - 2x^2 + 8}$

(j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2} - \frac{2x - 2}{x^2 + 3}$

(l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3 + \frac{4}{x}}$

(m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4x^2 + 3}{x - 5} + \cos x^2 \right]$

(n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2} + 2x^{1/2} + 1}{x + 4}$

2. Determine as assíntotas verticais e horizontais, caso estas existam, de cada uma das funções a seguir.

(a) $f(x) = \frac{1}{x - 3}$

(b) $g(x) = \frac{3x + 2}{x - 5}$

(c) $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

(d) $k(x) = \frac{x - 2x^2}{x^2 - 1}$

(e) $l(x) = \frac{3x + 1}{x^2 - x - 6}$

(f) $m(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{\sqrt{5 + x^4}}$

(g) $n(x) = \frac{\sqrt{7}x^3 + 2x - 8}{1 - x^2 - x^3}$

(h) $u(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x - 4}$

3. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^5/2 - 4x^2 + 3}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{5}{x^2} - \frac{2}{x^4} \right]$

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^3}{x^2 + 5}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x^2 + 2x + 4}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + 1}$

(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 2}{1 + x}$

4. Seja $a \neq 0$ um número real e n um número inteiro. Determine condições sobre a e n , tais que o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^n + 3x + 4}{ax^2 + x + 1}$$

seja:

(a) $+\infty$; (b) $-\infty$; (c) 2; (d) -2 ; (e) 0.

5. Sabendo que $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^3} = 2$, calcule $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

Aula 8

FUNÇÕES REAIS E CONTINUIDADE



Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 identificar a propriedade de continuidade nas funções reais;
- 2 relacionar a noção de continuidade em um ponto com a noção de limites laterais;
- 3 conhecer exemplos de funções contínuas;
- 4 decidir se funções são contínuas pelo cálculo de limites.

A noção de função contínua já aparece no ensino médio de uma forma intuitiva. É ensinado que funções contínuas são aquelas cujo gráfico pode ser desenhado, sem levantar o lápis do papel. Essa é uma idéia útil para uma primeira compreensão do fenômeno da continuidade. Vamos rapidamente rever essa forma intuitiva de ver este conceito.

Examine a **Figura 8.1**, a seguir. Na esquerda, está representado o gráfico de uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, onde intuitivamente percebemos que o desenho do gráfico pode ser realizado sem levantar a ponta do lápis do papel. Na direita, temos representado o gráfico de uma função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, a qual não é contínua. Veja que no ponto $(d, g(d))$ o gráfico não tem continuidade: o desenho foi realizado levantando o lápis do papel.

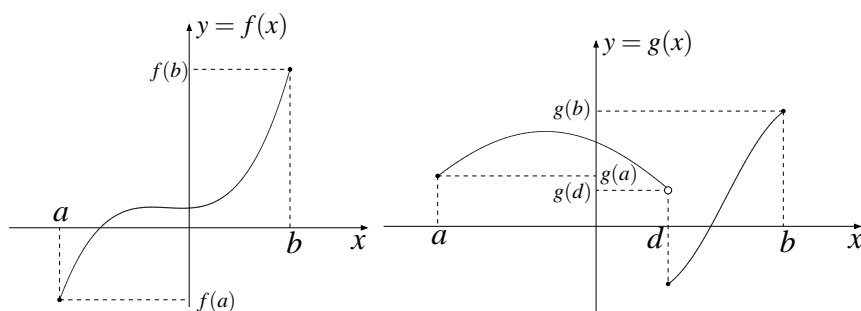


Figura 8.1: Continuidade a partir do gráfico.

Em outras palavras, o gráfico de uma função contínua não pode ter saltos ou falhas.

O objetivo agora é partir da idéia intuitiva expressa na **Figura 8.1** e tornar precisa a noção de função contínua. Para construir este conceito, vamos primeiro falar em continuidade num ponto. Porque ao desenhar o gráfico de uma função, se o lápis salta do papel, isso ocorre no momento de passagem em um ponto do gráfico. Veremos que o conceito de limite de uma função em um ponto de seu domínio é a ferramenta adequada para detectar a quebra da continuidade.

LIMITE DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO DE SEU DOMÍNIO

Considere uma função $f(x)$ e um ponto a do domínio da função. Então o ponto $(a, f(a))$ é um ponto do gráfico da função. Nesta situação, a função é contínua no ponto a se valores x da variável independente próximos de a forem transformados pela função em valores $f(x)$ que estão próximos de $f(a)$. Para garantir rigorosamente essa propriedade enunciada precisamos do conceito de limite de uma função em um ponto estudado nas Aulas 19 e 20. Veja ilustrada a situação na **Figura 8.2**.

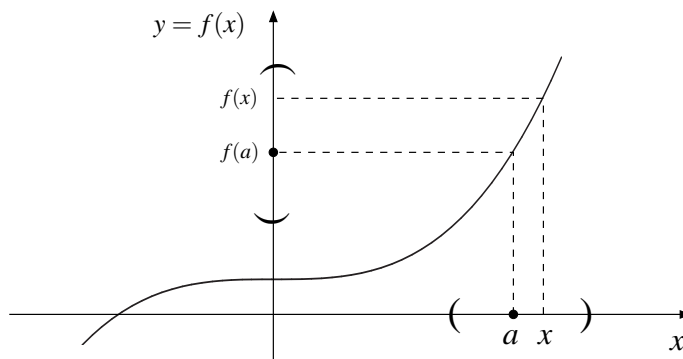


Figura 8.2: Continuidade da função f no ponto.

Veja como funciona a propriedade de continuidade. Significa que quanto mais a variável x se aproxima do ponto a , mais $f(x)$ se aproxima de $f(a)$. Isso traduzido em termos de limite fica:

$$\text{se } x \rightarrow a \text{ então } f(x) \rightarrow f(a).$$

Veja a notação adequada para traduzir o fenômeno da continuidade da função no ponto $x = a$.



Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida no intervalo I , é contínua em $x = a \in I$ se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$



- i. Isso é importante! Só tem sentido discutir a continuidade de uma função em um ponto $x = a$, se o ponto pertencer ao domínio de definição da função.
- ii. A continuidade ou não de uma função num ponto $x = a$ de seu domínio deve ser entendida no sentido amplo de limites laterais. Por exemplo, se o domínio da função é o intervalo fechado $I = [a, b]$ então o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ deve ser entendido como um limite lateral. Isso é, a função ser contínua no ponto $x = a$ é equivalente a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$. Igualmente, a função é contínua no ponto $x = b$ se $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.
- iii. Observe que no caso de existência de ambos os limites laterais da função no ponto $x = a$, isso é, no caso em que o ponto $x = a$ é acessível tanto à esquerda quanto à direita então a continuidade da função neste ponto é equivalente a que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a).$$

- iv. Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ que não é contínua no ponto $x = a \in I$ é dito uma função descontínua.

Feitas essas observações destacamos a noção global de continuidade para uma função:



Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida num intervalo I é contínua, se for contínua em todos os pontos do intervalo I .

Chamo a atenção para um ponto importante. Não é essencial que o domínio de definição da função seja exatamente um intervalo. Na verdade, a noção de continuidade é pontual e exige apenas que o ponto pertença ao domínio, e seja possível calcular o limite da função neste ponto. O domínio da função pode ser, por exemplo, uma união de intervalos. Analise o próximo exemplo, a seguir.

Exemplo 8.1

Discutir a continuidade da função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

Solução: Observe o gráfico da função na **Figura 8.3**.

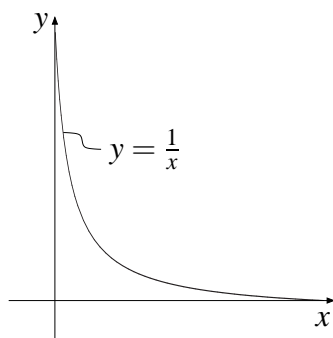


Figura 8.3: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ com $x > 0$.

Note que para todo $x_0 > 0$ temos que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} = f(x_0).$$

Logo, está provado que a função é contínua em todos os pontos de seu domínio. Portanto, $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.



- i. Em relação ao exemplo anterior não tem sentido investigar se a função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua ou descontínua no ponto $x_0 = 0$, uma vez que este ponto não pertence ao domínio da função.
- ii. O fato de que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1/x = \infty$ simplesmente revela que não é possível estender o domínio da função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ para o intervalo $[0, +\infty)$, de modo a preservar a continuidade.

Outro importante ponto é que podemos interpretar a continuidade de uma função segundo dois pontos de vista equivalentes: o gráfico e o numérico.

QUAL É A INTERPRETAÇÃO GRÁFICA DE CONTINUIDADE?

Neste caso, a continuidade da função é equivalente à continuidade da curva do plano que representa o gráfico da função. Qualquer descontinuidade em um ponto desta curva identifica um ponto de descontinuidade da função. Considere, por exemplo, a curva do plano que representa o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^3 & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Note que ao percorrer a curva da esquerda para a direita encontramos um salto do ponto $(0, 1)$ para o ponto $(0, 0)$. Examine a **Figura 8.4** para verificar estes fatos. Isso significa que a função é descontínua no ponto $x = 0$.

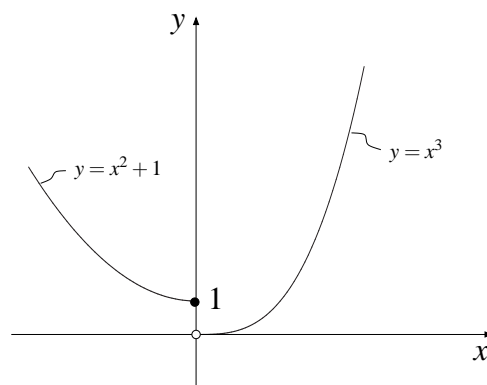


Figura 8.4: Gráfico da função f .

QUAL É A INTERPRETAÇÃO NUMÉRICA DE CONTINUIDADE?

Uma função f é contínua num ponto $x = a$ se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Isso quer dizer que valores x da variável independente próximo do número a são levados pela função f para valores $f(x)$ próximos ao valor $f(a)$.

Traduzido em linguagem técnica, a continuidade de uma função f num ponto $x = a$ verifica a seguinte propriedade: dado

qualquer intervalo K de números reais centrado no ponto $f(a)$ é possível encontrar outro intervalo I centrado em $x = a$ de modo que se x é um número do domínio da função e $x \in I$ então $f(x) \in K$. Veja a ilustração desta propriedade na **Figura 8.5**.

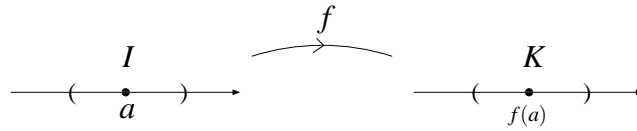


Figura 8.5: Continuidade da função f .

Em aplicações práticas, a continuidade é importante porque ela quer dizer que pequenos erros na variável independente levam a, relativamente, pequenos erros no valor da função.

Exemplo 8.2

Suponha que $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ e que queremos calcular $f(\pi)$. Ora, essa é uma função contínua. Então, tomando o valor aproximado $\pi \cong 3,14$ obtemos uma boa aproximação para $f(\pi)$:

$$f(\pi) \cong \sqrt{(3,14)^2 + 3,14 + 1} \cong \sqrt{13,9996} \cong 3,74.$$

É evidente que podemos aumentar a precisão considerando mais dígitos na aproximação decimal para π .

Exemplo 8.3

A função $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em seu domínio de definição $I = [0, +\infty]$.

Solução: De fato, se $a > 0$ então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a} = f(a).$$

Para o caso em que $a = 0$ encontramos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0 = f(0).$$

Portanto, está verificado que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Exemplo 8.4

A função polinomial $f(x) = -x^3 + x^2 + 5$ está definida para todos os números reais e é uma função contínua. Veja o gráfico desta função na representação da **Figura 8.6**.

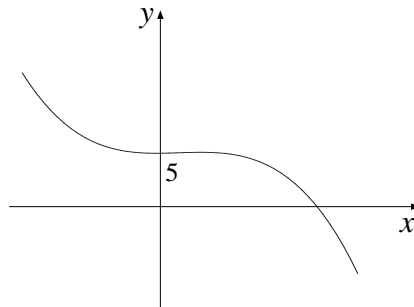


Figura 8.6: Gráfico de função polinomial $f(x) = -x^3 + x^2 + 5$.

Na verdade toda função polinomial $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, com $x \in \mathbb{R}$ é contínua. Basta observar que para todo $c \in \mathbb{R}$ temos $\lim_{x \rightarrow c} p(x) = p(c)$.

PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS

Apresentaremos agora algumas propriedades das funções contínuas, que são traduções das mesmas propriedades para limites de funções.

1. Sejam f e g funções definidas no mesmo intervalo I . Se f e g são contínuas em um ponto $x = a$ do domínio I , então, também são contínuas no ponto $x = a$ as funções:

$$f + g, \quad f - g, \quad f \cdot g \quad \text{e} \quad \frac{f}{g},$$

desde que $g(x) \neq 0$, para todo $x \in I$.

2. As funções polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas são contínuas em todos os pontos de seus domínios, os quais podem ser intervalos fechados, semi-abertos, abertos ou infinitos ou união de intervalos.

3. Considere duas funções contínuas $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, onde I e J são intervalos tais que $f(I) \subset J$. Então, a função composta $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é também contínua.

Exemplo 8.5

Considere a função r , definida por

$$r(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^4 - 2x^2 + 1}.$$

Esta função é dada pelo quociente de duas funções polinomiais e primeiramente devemos determinar seu domínio. Trabalhando com o denominador da função encontramos que:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2.$$

Logo, os valores que anulam o denominador são $x = \pm 1$. Portanto, o domínio D de definição da função r é constituído da união de três intervalos abertos:

$$D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

Por outro lado, r é dada pelo quociente de duas funções contínuas. Portanto, segundo a Propriedade 1 anterior, temos que r é uma função contínua em todos os pontos do seu domínio.

Veja o resultado mais geral que engloba, como caso particular, o que estamos discutindo neste exemplo.

Considere duas funções polinomiais p e q . A função racional

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

é contínua no domínio de sua definição. Veja que o domínio da função racional r é constituído de todos os números $x \in \mathbb{R}$ onde $q(x) \neq 0$.

Aqui é preciso fazer uma observação de caráter técnico. Muitas vezes é possível estender o domínio de uma função racional para pontos a , onde $q(a) = 0$. Isso ocorre em casos em que também $p(a) = 0$. Veja um exemplo.

Exemplo 8.6

A função racional $r(x) = \frac{x^3 - x}{x + 1}$ é definida para todos os números reais.

Solução: Veja o denominador $q(x) = x + 1$ é tal que $q(-1) = 0$. Para o numerador temos que $p(-1) = 0$. Veja também que

$$p(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1).$$

Logo,

$$r(x) = \frac{x(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = x(x - 1) = x^2 - x, \quad x \neq -1.$$

Isso evidencia que o domínio da definição da função $r(x)$ é o conjunto dos números reais, exceto em $x = -1$.

Exemplo 8.7

A função módulo, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$ é contínua. Veja seu gráfico na **Figura 8.7** a seguir.

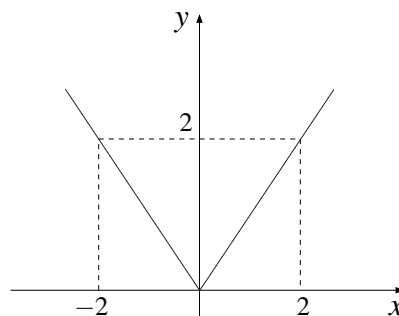


Figura 8.7: Gráfico da função módulo $f(x) = |x|$.

Exercício 8.1

Encontre o domínio das funções a seguir e mostre que são contínuas.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x^2 - 1| - 3}$

b) $g(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{x^4 - 8x^3 + 12x^2}$

Exemplo 8.8

Determine o domínio e discuta a continuidade da função racional

$$r(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1}.$$

Solução: Para determinar o domínio da função racional devemos antes de tudo encontrar os valores que anulam o denominador. Encontramos que $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ e então $x = 1$ é o valor que, *a priori*, deve ser retirado do domínio. No entanto, uma verificação direta mostra que $x = 1$ também é uma raiz do polinômio $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$. Isso significa que $(x - 1)$ divide a função polinomial $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Para realizar a divisão e, portanto, definir os fatores, devemos encontrar coeficientes a , b e c que resolvem a equação

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

Desenvolvendo e resolvendo encontramos que $a = 1$, $b = -2$ e $c = 1$. Portanto,

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)(x^2 - 2x + 1) = (x - 1)^3$$

e a função racional pode ser representada por

$$r(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x - 1)^3}{(x - 1)^2} = x - 1, x \neq 1.$$

Portanto, o domínio de r é o conjunto $\mathbb{R} - \{1\}$ e a função é contínua em todos os pontos do seu domínio.

Exemplo 8.9

Vamos examinar a continuidade ou não das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2 + 1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 4 - \frac{1}{2}x^2 & \text{se } x > 2 \\ -x + 2 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

Solução: Precisamos discutir apenas a continuidade de f no ponto $x = 1$ e dizer no ponto $x = 2$. Do exame das fórmulas das funções fica claro que f é uma função descontínua no ponto $x = 1$, enquanto que g é uma função contínua em $x = 2$.

As contas comprovam que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{x^2 + 1}{x - 1} = -\infty.$$

Portanto, qualquer que seja o valor atribuído à função no ponto $x = 1$ não torna a função contínua. Assim, a função f é descontínua nesse ponto.

Por outro lado,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 4 - \frac{1}{2}x^2 = 2$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -x + 2 = -2 + 2 = 0,$$

o que comprova que g não é contínua em $x = 2$.

Exemplo 8.10

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ já citada no início desta aula é uma função contínua.

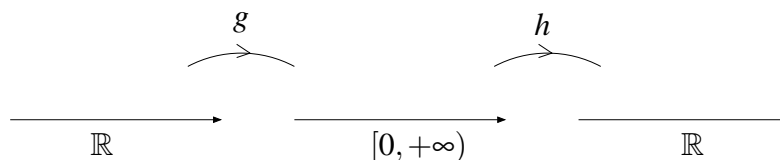
Para ver isso, considere as funções $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : [0, +\infty)$ definidas por

$$g(x) = x^2 + x + 1 \quad \text{e} \quad h(x) = \sqrt{x}.$$

Então, a função f pode ser obtida como composição das funções g e h . Ou seja,

$$f = h \circ g \quad \text{ou} \quad f(x) = h(g(x)).$$

Veja que essa composição só foi possível porque a totalidade da imagem da função g está contida no domínio da função h . Em outras palavras, como $x^2 + x + 1 > 0$ para qualquer número real x então vale que $g(\mathbb{R}) \subset [0, +\infty)$. Veja no diagrama a seguir, representada a composição das funções.



Finalmente, como $f = h \circ g$ e as funções h e g são contínuas, então é contínua a função f .

Exercício 8.2

1. Encontre o domínio das funções a seguir e mostre que são contínuas.

a) $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 - x} + |x + 1|$

b) $q(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{\sqrt{x^2 - 8x + 12}}$

c) $r(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{\sqrt{x^4 - 8x^3 + 12x^2}}$

2. Em cada uma das funções definidas nos itens a seguir, determine o maior domínio D para o qual as funções são contínuas.

a) $f(x) = \frac{|1 - x| - 1}{x - 2}$

b) $q(x) = \frac{3x^2 + x - 4}{x - 1}$

c) $r(x) = \frac{3x^2 + x}{\sqrt{3x^3 - x^2}}$

Aula 9

O CONCEITO DE DERIVADA

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 compreender o conceito de derivada;
- 2 interpretar geometricamente o conceito de derivada;
- 3 calcular a derivada das funções polinomiais e racionais;
- 4 usar o conceito de derivada para estudar custo de produção e custo marginal de produção.

INTRODUÇÃO

Derivada de uma função é o conceito central do cálculo diferencial criado por Newton e Leibniz no século XVIII e é um dos mais importantes em Matemática. Este conceito é uma ferramenta indispensável para estudar o comportamento das funções, notadamente para representar gráficos, identificar máximos e mínimos. A dupla paternidade do nascimento do conceito de derivada segue da necessidade de Newton entender o conceito de velocidade instantânea de um móvel, e, do lado de Leibniz, da necessidade de encontrar um método para relacionar o comportamento local de uma curva com sua tangente. Nosso ponto de vista inicial será entender a conexão entre uma curva e sua tangente num ponto, e logo adiante ver o que isso tem a ver com a noção de derivada de uma função.

TANGENTE A UMA CURVA PLANA

Considere uma curva no plano representando o gráfico de uma função $f : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que num ponto $P = (c, f(c))$ exista uma reta tangente à curva. Veja a **Figura 9.1**. Conhecida a função, a pergunta fundamental é: como determinar a equação da reta tangente? Vamos procurar responder a esta questão. Como veremos, a resposta está vinculada ao conceito de derivada de uma função.

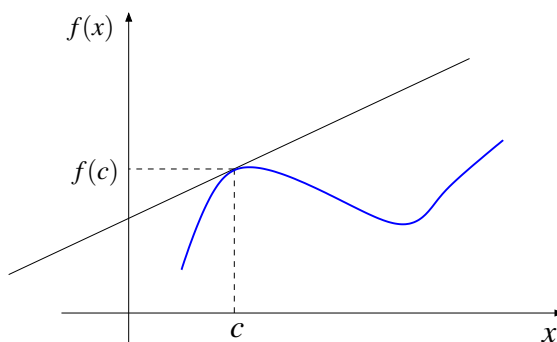


Figura 9.1: A tangente a uma curva.

Note que o ponto $P = (c, f(c))$ pertence à curva e à reta tangente. Este ponto é o ponto de tangência. Para encontrar a equação da reta tangente, uma vez que conhecemos que

$P = (c, f(c))$ é um ponto da reta, basta encontrar o coeficiente angular (a inclinação).

COMO ENCONTRAR A INCLINAÇÃO DA RETA TANGENTE?

Esta é a pergunta-chave do momento. E para responder usaremos a idéia de limite. Acompanhe a argumentação a seguir.

Note que a reta tangente pode ser obtida como limite das retas secantes à curva gráfico da função, onde os dois pontos que definem as secantes são o próprio ponto $P = (c, f(c))$ e um outro ponto distinto $Q = (s, f(s))$. Aqui, s é um número do domínio $I = (a, b)$ da função, arbitrariamente próximo do número c , e tal que $s \neq c$. Veja a **Figura 9.2** a seguir, onde está representada uma reta r secante à curva e próxima da reta tangente t .

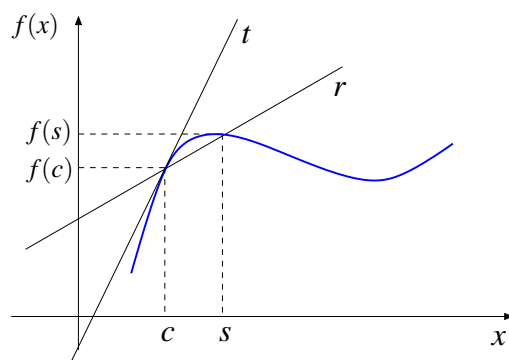


Figura 9.2: Reta tangente como limite de secantes.

Portanto, uma reta secante particular, muito próxima da tangente, por exemplo a reta r como na **Figura 9.2**, é uma reta que passa pelos pontos $P = (c, f(c))$ e $Q = (s, f(s))$. Vamos considerar que $y = ax + b$ é a equação da reta tangente e usando a equação da reta que passa por dois pontos, como $y = mx + n$, com $m, n \in \mathbb{R}$, onde m e n devem ser determinados, como a equação da reta secante.

Como a reta secante passa pelos pontos $P = (c, f(c))$ e $Q = (s, f(s))$ então:

$$f(c) = mc + n$$

$$f(s) = ms + n.$$

Resolvendo em m e n o sistema anterior, encontramos que

$$m = \frac{f(s) - f(c)}{s - c}$$

$$n = f(c) - \frac{f(s) - f(c)}{s - c} \cdot c.$$

Assim, a equação $y = mx + n$ para a reta secante r pode ser expressa como

$$y = \frac{f(s) - f(c)}{s - c} \cdot (x - c) + f(c).$$

Nesta equação, o coeficiente

$$a_s = \frac{f(s) - f(c)}{s - c} \quad (9.1)$$

representa a inclinação da reta secante r . Note que no coeficiente angular a_s temos o índice s que indica que o coeficiente está relacionado com a secante associada ao ponto variável $Q = (s, f(s))$, uma vez que toda secante aqui considerada passa pelo ponto fixo de tangência $P = (c, f(c))$. Note também, que quando o número s converge para o número c , isso é quando $s \rightarrow c$ então os coeficientes angulares a_s das retas secantes convergem para o coeficiente a da reta tangente, ou seja, $a_s \rightarrow a$. Portanto, usando a expressão que aparece em 9.1 encontramos que

$$\lim_{s \rightarrow c} a_s = a \Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow c} \frac{f(s) - f(c)}{s - c} = a \quad (9.2)$$

Note que no limite anterior sempre trabalhamos com a variável s muito próxima de c , mas sempre com $s \neq c$.

Exemplo 9.1

Encontre a reta tangente à curva representada pelo gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ no ponto $P = (1, 2)$.

Solução:

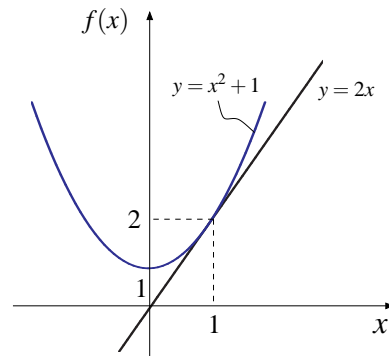


Figura 9.3: Reta tangente por um ponto da curva.

Localize na **Figura 9.3** o ponto $P = (1, 2)$ sobre a curva que representa o gráfico da função. Em seguida, represente a reta tangente à curva por este ponto.

Como conhecemos o ponto $P = (1, 2)$ da reta tangente, podemos calcular seu coeficiente angular e portanto definir sua inclinação, através da fórmula 9.2 descrita anteriormente. Veja os cálculos, onde o ponto de tangência $P = (c, f(c)) = (1, 2)$. Assim,

$$\lim_{s \rightarrow c} \frac{f(s) - f(c)}{s - c} = \lim_{s \rightarrow c} \frac{(s^2 + 1) - (1^2 + 1)}{s - 1} = \lim_{s \rightarrow c} \frac{s^2 - 1}{s - 1}.$$

Continuando o desenvolvimento com o objetivo de calcular o limite encontramos que

$$a = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^2 - 1}{s - 1} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{(s + 1)(s - 1)}{s - 1} = \lim_{s \rightarrow 1} (s + 1) = 2.$$

Agora temos condições de determinar a equação da reta tangente. Essa reta passa pelo ponto $P = (1, 2)$ e tem coeficiente angular $a = 2$. Portanto, a equação tem a forma

$$y - 2 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x.$$

Exercício 9.1

Calcule a equação da reta tangente à curva definida pelo gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x - 1$ no ponto $P(-1, -1)$.

A TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO DE UMA FUNÇÃO

Considere uma curva no plano definida pelo gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e um ponto $P = (x_0, f(x_0))$ para o qual existe uma tangente. Sabemos que para calcular o coeficiente angular a da tangente é necessário determinar o limite

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Observe que a variável x que converge para x_0 tem a propriedade que $x \neq x_0$. Então, podemos entender que o valor da variável x é obtido por meio de um acréscimo Δx ao valor fixo x_0 . Ou seja,

$$x = x_0 + \Delta x.$$

Note que o acréscimo Δx é positivo (se x estiver à direita de x_0) ou negativo (se x estiver à esquerda de x_0). Observe, ainda, que o limite que serve para calcular o valor a do coeficiente angular da reta tangente pode ser escrito como

$$a = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ou ainda, lembrando que no gráfico da função no eixo vertical está representada a variável dependente $y = f(x)$, podemos escrever a variação da função expressa no numerador do limite anterior na forma $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Portanto, o coeficiente angular da reta tangente pode ser calculado como

$$a = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Ou seja, a inclinação da reta tangente é obtida como razão entre os acréscimos do valor da função em consequência de um acréscimo no valor da variável. Veja a representação gráfica dessa situação na **Figura 9.4**.

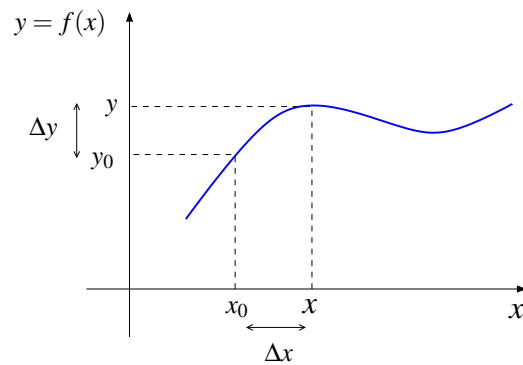


Figura 9.4: Razão entre acréscimos.

Uma vez fixado um valor x_0 , denominamos o quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

de **taxa média de variação da função** quando a variável x passa do valor x_0 para o valor $x_0 + \Delta x$, o qual representa a variação média provocada nos valores da função entre estes dois pontos.

Exemplo 9.2

Veja o cálculo da taxa média de variação da função $f(x) = x^4 - x$ quando a variável x sofre um acréscimo $\Delta x = 2$ a partir do ponto $x_0 = 1$.

Solução: Temos que

$$x = x_0 + \Delta x = 1 + 2 = 3.$$

Então,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x) = f(3) - f(1) = (3^4 - 3) - (1^4 - 1) = 78.$$

Portanto, a taxa média de variação da função procurada é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{78}{2} = 39.$$

Veja a representação gráfica da solução na **Figura 9.5** a seguir.

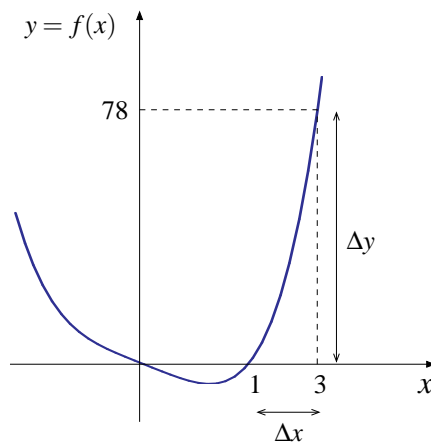


Figura 9.5: Taxa de variação média de função.

Exercício 9.2

Calcule a taxa de variação média das seguintes funções entre os pontos -2 e 6 , onde

a) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}$

A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO


Neste momento, temos base suficiente para introduzir o conceito de derivada de uma função num ponto.

Considere uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida num intervalo aberto e um ponto $x_0 \in I$. Se existir o

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

diremos que a função possui derivada no ponto $x_0 \in I$ (ou é diferenciável no ponto $x_0 \in I$) e denotamos este valor limite pelo símbolo $f'(x_0)$. Com a notação estabelecida temos que

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

-  i. Para calcular a derivada da função num ponto é essencial que este ponto pertença a um pequeno intervalo totalmente contido no domínio da função. Observe que a função está definida num intervalo aberto I que pode ser um intervalo finito do tipo $I = (a, b)$ ou mesmo um intervalo infinito do tipo $I = (-\infty, +\infty)$, ocasião em que o domínio da função é o conjunto \mathbb{R} de todos os números reais.
- ii. Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida num intervalo aberto I é dita uma função derivável (ou diferenciável) se possuir derivada em cada ponto do intervalo I .

Exemplo 9.3

Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -3x^2 + x$ e um ponto x_0 arbitrário. Então, como

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

temos que

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[-3(x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)] - [-3x_0^2 + x_0]}{\Delta x}.$$

Desenvolvendo e efetuando as simplificações encontramos que

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-6x_0\Delta x - 3\Delta x^2 + \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-6x_0 - 3\Delta x + 1) = -6x_0 + 1.$$

O resultado $f'(x_0) = -6x_0 + 1$ mostra que podemos escrever para todo ponto $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -6x + 1$$

e encontramos uma nova função a qual é denominada a derivada da função $f(x) = -3x^2 + x$.

Exercício 9.3

Usando argumentos similares ao do exemplo anterior, calcule a derivada da função $f(x) = x^3$.

PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS

Considere duas funções diferenciáveis $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ definidas no mesmo intervalo aberto I . Decorre imediatamente das propriedades de limites de funções as seguintes propriedades:

1. A função $(f + g)(x)$, a soma das funções $f(x)$ e $g(x)$, é diferenciável e

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

2. A função $(f \cdot g)(x)$, produto das funções $f(x)$ e $g(x)$, é diferenciável e

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

3. Em todo ponto onde $g(x) \neq 0$, a função quociente $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ possui derivada no ponto x e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

4. A função constante $f(x) = c$ possui derivada nula.

Exemplo 9.4

Calcule a derivada da função $f(x) = x^n$, onde n é um número inteiro positivo.

Solução: Para todo ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ precisamos calcular

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x},$$

Assim,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^n + nx_0^{n-1}\Delta x + n(n-1)x_0^{n-2}\Delta x^2 + \dots + n(n-1)x_0\Delta x^{n-1} + \Delta x^n - x_0^n}{\Delta x}.$$

Desenvolvendo e simplificando, encontramos que

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (nx_0^{n-1} + n(n-1)x_0^{n-2}\Delta x + \dots + n(n-1)x_0\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1}) = nx_0^{n-1}.$$

Portanto, chegamos à conclusão que a função $f(x) = x^n$ tem como derivada a função $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemplo 9.5

Considere a nova função $g(x) = cx^n$, onde c é um número constante e $n \geq 1$ é um número inteiro.

Note que as propriedades 2) e 4), e o exemplo que acabou de ser desenvolvido, permitem calcular a derivada da função $g(x)$. Encontramos que

$$g'(x) = ncx^{n-1}.$$

Exemplo 9.6

De modo geral, usando a propriedade aditiva para a derivada da soma de duas funções diferenciáveis e o resultado do exemplo anterior, encontramos a fórmula para a derivada de uma função polinomial.

De fato, seja a função polinomial de grau n ,

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

onde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ são coeficientes reais e $a_n \neq 0$. Então $p'(x)$, a derivada de $p(x)$, é dada por

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}.$$

Exemplo 9.7

Calcule a derivada da função $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 1}$.

Solução: Em primeiro lugar é importante destacar que o domínio de definição D da função é constituído pela união disjunta de dois intervalos abertos

$$D = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty).$$

Por outro lado, escrevendo a função $f(x)$ na forma

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \quad g(x) = x^2 + 2x \quad \text{e} \quad h(x) = x + 1$$

encontramos que

$$g'(x) = 2x + 2 \quad \text{e} \quad h'(x) = 1.$$

Agora usando a propriedade 3 anterior para a derivada do quociente de duas função temos que

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+2)(x+1) - (x^2+2x)}{(x+1)^2}.$$

Fazendo as simplificações encontramos, finalmente, a expressão para a derivada de $f(x)$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)^2}.$$

Exercício 9.4

Encontre os domínios de definição e as derivadas de cada uma das funções

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$

b) $g(x) = \frac{-x^4 + 2x - 1}{x^3 - x}$

A FUNÇÃO DERIVADA

Considere uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, a qual está definida num intervalo aberto I e que possui derivada em todos os pontos do intervalo. Em primeiro lugar, afirmamos que a existência da derivada garante que a função f é contínua. Pode ser provado que

$$f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ derivável em } I \Rightarrow f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ é contínua em } I.$$

Este resultado decorre da definição de derivada. Vamos dar uma ligeira idéia de como funciona um prova deste resultado. Acompanhe os argumentos. Considere um ponto $a \in I$ no qual queremos provar que f é contínua. Como f possui derivada em a , então existe um número real $f'(a)$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Ora, na expressão anterior, temos o limite de um quociente de duas funções de mesma variável x : o denominador $x - a$ e o numerador $f(x) - f(a)$. Como o quociente tem como limite o número real $f'(a)$ e o denominador tem limite nulo quando $x \rightarrow a$, então o numerador também tem limite nulo. Isso é,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

comprovando a continuidade da função no ponto $a \in I$.

Note, no entanto, que a implicação contrária do que acabamos de provar não é verdadeira. Uma função contínua não possui necessariamente derivada. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 9.8

Considere a função módulo, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = |x|.$$

Conhecemos da aula anterior que esta é uma função contínua. Vamos agora mostrar que não possui derivada no ponto $x_0 = 0$.

A razão para não existência da derivada pode ser percebida na **Figura 9.6** que representa o gráfico da função. Aí fica expressa a impossibilidade de traçar uma reta tangente ao gráfico da função pelo ponto $(0, 0)$.

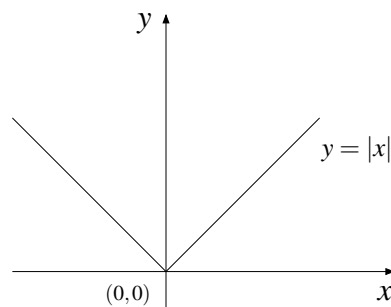


Figura 9.6: Gráfico de $f(x) = |x|$.

APLICAÇÃO

Suponha que $y = f(x)$ represente a função que estabelece o custo total y que uma fábrica dispende para a produção e comercialização de x unidades de um certo bem material. Veja

que nesta situação o quociente y/x , custo total dividido pela quantidade produzida, representa exatamente o custo médio para a produção de cada unidade do bem material. Vamos destacar este custo médio:

$$\frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x}.$$

Suponha que num certo mês a fábrica produziu x_0 unidades do produto e no mês seguinte provoca um acréscimo Δx de unidades produzidas (note que o acréscimo Δx pode ser negativo). Nessa situação o quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

representa o acréscimo médio no custo por unidade acrescida.

O limite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

é denominado o custo marginal.

A partir do que já foi trabalhado nesta aula, sabemos que o custo marginal representado na forma do limite anterior é a derivada da função no ponto x_0 , ou seja, será representado por $f'(x_0)$.

Exemplo 9.9

Considere que a função $f(x) = 2x + \frac{1}{2}x^2$ representa o custo de produção e comercialização de x unidades de um certo produto. Vamos encontrar:

- o custo médio para a produção e comercialização de uma unidade do produto, num regime de produção de 10 unidades.
- o acréscimo médio por unidade de produção quando o regime de produção passa de 10 unidades para 12 unidades.
- o custo marginal de produção para um regime de produção de $x_0 = 8$ unidades.

Solução: Em primeiro lugar, a natureza do problema leva a considerar apenas a parte do domínio de definição desta função que compreende o intervalo dos números positivos $I = (0, +\infty)$, uma vez que

não tem sentido a produção de número negativo de unidades. Veja na **Figura 9.7**, a seguir, o gráfico da função.

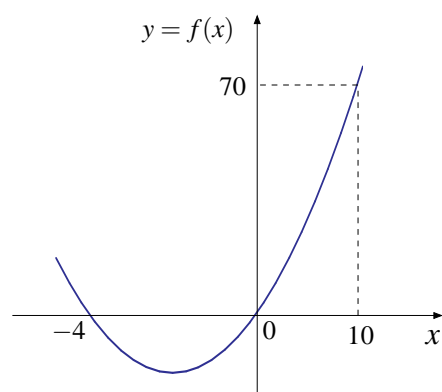


Figura 9.7: Função custo de produção.

Para responder à primeira pergunta do exemplo, usamos o valor $x = 10$ para encontrar a média procurada:

$$\frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(10)}{10} = \frac{20+50}{10} = 7.$$

Para responder à segunda pergunta, usamos que $x_0 = 10$ e $\Delta x = 2$ para avaliar que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(12) - f(10)}{2} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{96}{2} = 48.$$

Finalmente, para responder à última pergunta, devemos calcular a derivada da função no ponto $x_0 = 8$. Encontramos que

$$f'(x) = 2 + x \Rightarrow f'(8) = 10.$$

Veja, representada na **Figura 9.8**, função $f'(x)$. A parte positiva do gráfico ($x > 0$) representa o custo marginal de produção e comercialização.

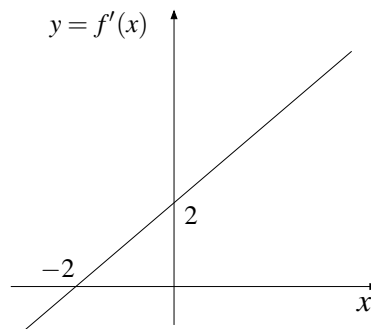


Figura 9.8: Custo marginal.

Exercício 9.5

Considere a função $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^3 + 500}$ representando o custo de produção de x unidades de um certo produto. Determine:

- o custo médio para a produção de uma unidade do produto, num regime de produção de 6 unidades.
- o acréscimo médio por unidade de produção quando o regime de produção passa de 6 para de 10 unidades.
- a função que representa o custo marginal de produção. Calcule este custo para $x_0 = 5$ unidades.

Aula 10

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA E DERIVADAS DAS FUNÇÕES USUAIS

O b j e t i v o s

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 encontrar as expressões das derivadas das funções exponencial, logaritmo e potências;
- 2 usar a composição de funções no cálculo de derivadas;
- 3 aplicar o conceito de derivada no cálculo das funções consumo e poupança.

INTRODUÇÃO

Na aula anterior estudamos o conceito de derivada de uma função real definida num intervalo aberto, e as principais propriedades da derivada para funções definidas por soma, produto e quociente de funções diferenciáveis. Como aplicação pudemos deduzir fórmulas para a derivada de funções polinomiais e de funções racionais.

Nesta aula, vamos continuar nosso estudo encontrando fórmulas para a derivada de funções, onde aparecem potências e radicais e as derivadas das funções logarítmicas e exponenciais. Também vamos estudar um importante teorema, denominado Regra da Cadeia, que estabelece a fórmula de derivação de funções compostas. A aula encerra com uma aplicação das técnicas no tratamento da funções consumo e poupança.

A DERIVADA DA RAIZ QUADRADA DE UMA FUNÇÃO

Para esquentar o assunto, considere uma função real $f(x)$, com a propriedade que $f(x) > 0$ para todo valor x no domínio da função. Vamos encontrar a expressão para a derivada da função $g(x)$ definida por

$$g(x) = \sqrt{f(x)}.$$

Note que a função $g(x)$ está bem definida, em vista que $f(x) > 0$, para todo valor x . Então, veja que elevando ao quadrado ambos os membros, expressamos de um modo distinto a relação entre as funções:

$$g^2(x) = f(x) \quad (10.1)$$

Em primeiro lugar, podemos tratar a função $g^2(x)$ como um produto de funções. Ou seja $g^2(x) = g(x) \cdot g(x)$. Portanto, usando a regra da derivada para o produto de duas funções, encontramos, a partir de (10.1), que

$$g'(x) \cdot g(x) + g(x) \cdot g'(x) = f'(x).$$

Ou seja,

$$2g(x) \cdot g'(x) = f'(x).$$

Como $g(x) = \sqrt{f(x)}$ encontramos, a partir da última expressão, que


$$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

Exemplo 10.1

Calcule a derivada da função $g(x) = \sqrt{x^3 - 2x}$.

Solução: Usando a fórmula que acabamos de deduzir, encontramos que

$$g'(x) = \frac{3x^2 - 2}{2\sqrt{x^3 - 2x}}.$$

 Na dedução da fórmula para a diferenciabilidade da função $g(x) = \sqrt{f(x)}$, num certo momento, foi necessário derivar ambos os membros da igualdade funcional

$$g^2(x) = f(x).$$

Na ocasião, usamos a propriedade que estabelece a fórmula da derivada para um produto de funções. Fórmulas deste tipo tem validade mais geral. Veja um caso útil para efeitos práticos, que destacamos a seguir.

A DERIVADA DA ENÉSIMA POTÊNCIA DE UMA FUNÇÃO

Considere uma função diferenciável $f(x)$. Queremos estabelecer a diferenciabilidade da função $g(x) = [f(x)]^n$, onde $n > 0$ é um número natural. Nesta situação, vale a seguinte implicação. Se

$$g(x) = [f(x)]^n \Rightarrow g'(x) = n f'(x) [f(x)]^{n-1} \quad (10.2)$$

Esta fórmula pode ser provada através do método de indução finita. Não é essencial que você acompanhe a prova desta fórmula. No entanto, se você tem o conhecimento do método, poderá saborear sua aplicação.

Note que se $n = 1$, então a confirmação da validade da fórmula é imediata:

$$g(x) = [f(x)]^1 \Rightarrow g'(x) = 1f'(x)[f(x)]^{1-1} \Rightarrow g'(x) = f'(x).$$

Agora suponha que a fórmula de derivação (10.2) vale para um número natural n qualquer. Precisamos, a partir disso, provar que a fórmula também vale para o número $n + 1$. Isto é, para uma função do tipo $g(x) = [f(x)]^{n+1}$. Acompanhe os cálculos. Podemos escrever a função $g(x)$ na forma

$$g(x) = f(x) \cdot [f(x)]^n$$

e usar a regra da derivação para o produto e a hipótese de indução (que garante como é a derivada de $[f(x)]^n$) para concluir que

$$g'(x) = f'(x) \cdot [f(x)]^n + f(x) \cdot n \cdot f'(x) [f(x)]^{n-1}.$$

Operando a adição do segundo membro encontramos

$$g'(x) = (n + 1) \cdot f'(x) [f(x)]^n$$

que é a fórmula procurada para o caso do expoente $n + 1$.

Veja nos próximos exemplos, duas aplicações úteis deste resultado.

Exemplo 10.2

Encontre a derivada da função $f(x) = (x^2 - 1)^8$.

Solução: Note que o exemplo é uma função polinomial de grau 16, e que pode ser escrita na forma desenvolvida, depois de um bom esforço. No entanto, isso não é necessário para efeito do cálculo da derivada, uma vez que sabemos tratar este caso de potência. Usando a fórmula anterior encontramos imediatamente que

$$f'(x) = 8 \cdot 2x \cdot (x^2 - 1)^7 = 16x(x^2 - 1)^7.$$

Exemplo 10.3


Encontre a derivada da função $f(x) = \sqrt[n]{x}$, onde $n > 1$.

Solução: Eleve ambos os membros da igualdade à potência n para encontrar que

$$[f(x)]^n = x.$$

Agora derive ambos os membros para encontrar que

$$n \cdot f'(x) [f(x)]^{n-1} = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

-  i. É interessante observar, diretamente na fórmula que acabamos de escrever, a comprovação que a função raiz enésima $f(x) = \sqrt[n]{x}$ não é diferenciável para o valor $x = 0$.
- ii. Veja, como consequência da fórmula anterior, que para $n = 2$ recuperamos os resultados do primeiro exemplo trabalhado nesta aula, e que para $n = 3$ encontramos que

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Exercício 10.1

Calcule a derivada da função $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1}$, para $x > 1$.

DERIVADA DA FUNÇÃO LOGARITMO

Considere a função $f(x) = \log(x)$. Para expressar a derivada da função logaritmo num ponto $x_0 \in (0, +\infty)$, devemos calcular o limite

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log(x_0 + \Delta x) - \log(x_0)}{\Delta x}.$$

Temos que

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\log(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} - \frac{\log(x_0)}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta x} \left(\log \left(\frac{x_0 + \Delta x}{x_0} \right) \right) \right].$$

Continuando o desenvolvimento encontramos que

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta x} \left(\log \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right) \right) \right].$$

Precisamos trabalhar a função que aparece entre colchetes para encontrar um limite conhecido. Para isso, precisamos fazer uma mudança de coordenadas.

Seja $u \neq 0$ tal que $\Delta x = u \cdot x_0$. Veja que quando $\Delta x \rightarrow 0$ também $u \rightarrow 0$, uma vez que x_0 está fixado. Assim, encontramos que

$$f'(x_0) = \frac{1}{x_0} \lim_{u \rightarrow 0} \left[\frac{1}{u} (\log(1+u)) \right] = \frac{1}{x_0} \lim_{u \rightarrow 0} \left[(\log(1+u))^{1/u} \right].$$

Como $f(x) = \log(x)$ é uma função contínua, podemos trocar os símbolos de limite com o símbolo \log e assim encontrar que

$$f'(x_0) = \frac{1}{x_0} \log \left[\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{1/u} \right].$$

O limite que aparece na fórmula anterior é clássico e tem o seguinte resultado

$$\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{1/u} = e,$$

onde e é o número de Neper, a base do logaritmo natural. Portanto,

$$f'(x_0) = \frac{1}{x_0} \log(e) = \frac{1}{x_0}.$$

CONCLUSÃO

A derivada da função logaritmo natural $f(x) = \log(x)$ é dada por

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

DERIVADAS DE FUNÇÕES COMPOSTAS – REGRA DA CADEIA

Vamos dar uma paradinha para avaliar nosso esforço até agora. Veja que tivemos um pouco de trabalho para calcular a derivada de uma função do tipo $g(x) = \sqrt{x}$ e de uma função do tipo $g(x) = [f(x)]^n$. Também a derivada da função logaritma, esta sim, dispendeu muita energia; exigindo ainda o conheci-

mento específico de um limite que resulta no número e .

A situação que não tem remédio! A medida que avançamos no estudo do Cálculo Diferencial, mais e mais precisamos lidar com funções complicadas, as quais resolvem problemas seja em Física, em Engenharia ou em Administração. Por isso, não podemos continuar no método da força bruta, deduzindo fórmulas para o cálculo da derivada para cada um dos casos particulares. Precisamos de resultados globais que facilitem nossa tarefa. Estes resultados desejados são os teoremas. Um dos mais importantes deles é o teorema que estabelece a regra da cadeia, a qual prescreve a derivada de funções compostas.

TEOREMA 10.1

Derivada para Funções Compostas (Regra da Cadeia)

Considere duas funções reais diferenciáveis $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que a imagem de f esteja contida no domínio de g . Ou seja, que $f(I) \subset J$. Então a função composta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ é diferenciável e

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)).$$

A força deste teorema pode ser apreciada já na primeira aplicação, no próximo exemplo.

Exemplo 10.4

Calcular a derivada da função $g(x) = \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}$.

Solução: A função pode ser reescrita como

$$g(x) = (x^3 - 1)^{2/3}.$$

Portanto, a função pode ser colocada na forma

$$g(x) = [f(x)]^{2/3},$$

onde $f(x) = (x^3 - 1)$. Logo:

$$g'(x) = \frac{m}{n} f'(x) [f(x)]^{\frac{m}{n}-1} \Rightarrow g'(x) = \frac{2}{3} (3x^2) (x^3 - 1)^{\frac{2}{3}-1}.$$

Assim,

$$g'(x) = x^2 (x^3 - 1)^{-1/3} \Rightarrow g'(x) = \frac{x^2}{(x^3 - 1)^3}.$$

Exemplo 10.5

Encontre a derivada da função $f(x) = \log(1 + \sqrt{x})$.

Solução: A função $f(x)$ se expressa como composição das funções $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ e $h(x) = \log(x)$. Ou seja $f(x) = (h \circ g)(x)$, e, assim, $f'(x) = g'(x) \cdot h'(g(x))$. Como

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x} \quad \text{e} \quad h'(x) = \frac{1}{x},$$

a regra da cadeia para a função $f(x) = (h \circ g)(x)$ mostra que

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(g(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot \frac{1}{g(x)}.$$

Substituindo, encontramos que

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x(1 + \sqrt{x})} = \frac{(\sqrt{x} - x)}{2x(1 - x)}.$$

DERIVADA DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Seja um número $a > 0$, tal que $a \neq 1$ e a função $f(x) = a^x$. Transformando a função encontramos que

$$\log(f(x)) = x \log(a).$$

E assim, usando derivadas de funções compostas encontramos que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \log(a) \Rightarrow f'(x) = \log(a) \cdot f(x) = \log(a) \cdot a^x.$$

✍ No caso em que $a = e$, onde e é o número de Neper, então $\log(a) = \log(e) = 1$ e de acordo com os resultados que acabamos de encontrar:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x.$$

Exemplo 10.6

Encontre a derivada da função $f(x) = e^{x^2+1}$.

Solução: De novo temos uma função composta. Escrevendo

$$g(x) = x^2 + 1 \quad \text{e} \quad h(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h'(g(x)).$$

Então,

$$f'(x) = 2xe^{x^2+1}.$$

Exercício 10.2

Encontre a derivada da função $f(x) = e^{\frac{x+1}{x^2+1}}$.

A DERIVADA SEGUNDA DE UMA FUNÇÃO

No estudo de máximos e mínimos de funções que desenvolveremos na Aula 11, entra de maneira decisiva o conceito de derivada segunda. Acompanhe a definição deste conceito.

Suponha que uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ possui derivada em todos os pontos do intervalo aberto I . Então, fica definido uma nova função $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$, denominada a *derivada da função f* . E o processo pode continuar produzindo a derivada segunda $f'' : I \rightarrow \mathbb{R}$, a derivada terceira, $f''' : I \rightarrow \mathbb{R}$ etc.

Exemplo 10.7

A função $f(x) = x\sqrt{x}$ possui uma derivada primeira contínua, mas não possui derivada segunda no ponto $x = 0$.

Solução: Expressando a função $f(x)$ como um produto das funções x e \sqrt{x} e usamos a regra do produto para encontrar a derivada.

$$f'(x) = \sqrt{x} + x \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Calculando a derivada segunda encontramos que

$$f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}}.$$

Mas esta função não está definida em $x = 0$ e, portanto, não existe a derivada segunda neste ponto.

Exercício 10.3

Encontre o domínio de definição e as duas primeiras derivadas da função $f(x) = \log(2\sqrt{x} - 2x)$.

APLICAÇÃO: POUPANÇA NACIONAL, RENDA E CONSUMO

Em macroeconomia, é definida a função *consumo global*, como uma variável dependente, em cada momento, do conjunto da renda nacional. O raciocínio, admitido neste contexto, estabelece que à medida que a renda aumenta (ou diminui), o consumo aumenta (ou diminui). No entanto, esta relação não é de proporcionalidade direta, uma vez que a resposta da sociedade ao fenômeno de variação da renda não é linear. No contexto da aplicação que pretendemos neste texto e simplificando a análise teórica, a derivada da função consumo, num momento determinado, é denominada função *propensão marginal ao consumo*. Do ponto de vista teórico, a função propensão marginal ao consumo mede a velocidade de resposta dada pelo consumo à variação da renda nacional. Portanto, se a função consumo é dada por

$$c(x) = f(x),$$

então temos que a derivada

$$c'(x) = f'(x)$$

é a função propensão marginal ao consumo.

Exemplo 10.8

Considere que a função consumo seja dada por

$$c(x) = \frac{x}{3} + \sqrt{x}$$

onde x representa a renda nacional e $c(x)$ o consumo que varia em função de x .

Note que a natureza da função consumo implica que devemos trabalhar apenas com valores positivos da renda nacional, isto é para $x > 0$. Também observe, no nosso exemplo, que a partir de um certo valor $x_0 > 0$, se $x > x_0$ então

$$c(x) < x.$$

Isso significa que, para estes valores, a função consumo nacional $c(x)$ é inferior à renda nacional x . Este fato pode ser observado na figura a seguir. Para $x > x_0$, o gráfico da função consumo $c(x)$ fica sempre abaixo da diagonal que representa a renda nacional x .

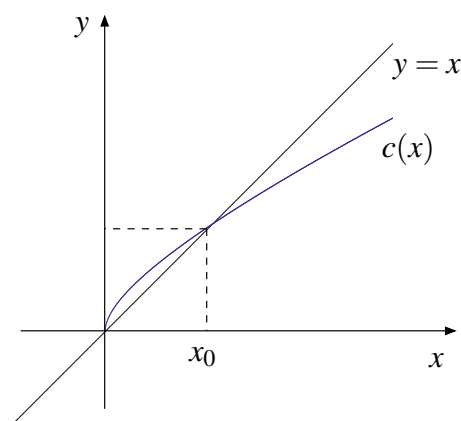


Figura 10.1: Comparação entre consumo e renda.

Note que o valor x_0 pode ser calculado resolvendo a equação $c(x) = x$. Ou seja,

$$\frac{x}{3} + \sqrt{x} = x \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{3}x \Rightarrow x = \frac{4}{9}x^2 \Rightarrow x = 0, x = \frac{9}{4}.$$

Portanto, $x_0 = \frac{9}{4}$ é o valor para o qual o consumo $c(x)$ equivale à renda x .

Observe ainda no gráfico da **Figura 10.1**, que para uma renda nacional $x = 9$ corresponde a um consumo $c = 6$. O valor a mais da renda nacional sobre o consumo constitui a poupança. De modo geral, o excesso de renda sobre o consumo constitui a *quantidade de poupança nacional* $q(x)$. Ou seja,

$$q(x) = x - c(x).$$

Veja na **Figura 10.2**, o gráfico da função quantidade de poupança nacional $q(x)$. Note que para valores muito pequenos da renda temos que $q(x) < 0$. Este valor negativo para a quantidade de poupança nacional pode ser interpretado como endividamento, fenômeno provocado pelos modestos valores para a renda nacional.

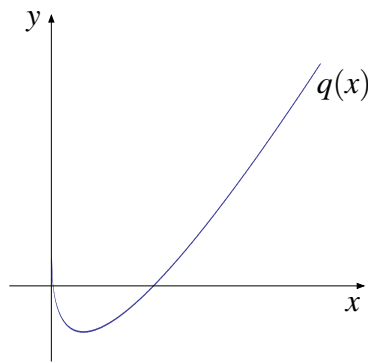


Figura 10.2: Quantidade de poupança nacional.

A pergunta aqui é a seguinte: a partir de que valor para a renda nacional começa a existir poupança?

Para responder a esta pergunta devemos encontrar os valores de x para os quais $q(x) > 0$. Portanto,

$$q(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{3} - \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{3} > \sqrt{x}.$$

Ou seja,
$$\frac{2x}{3\sqrt{x}} > 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{3} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x > \frac{9}{4}.$$

Finalmente, veja o cálculo da função $p(x)$, a propensão marginal ao consumo.

Temos que:

$$c'(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Examine, na **Figura 10.3** a seguir, o gráfico da função propensão ao consumo $c'(x)$.

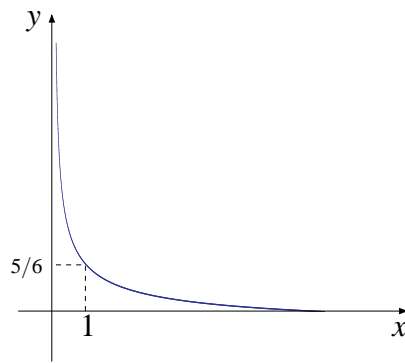


Figura 10.3: A propensão ao consumo $c'(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Vimos que a variação da renda faz flutuar o consumo de modo não linear e este fenômeno é medido num momento determinado pela derivada da função consumo, que é a função propensão ao consumo. Também, a variação da renda interfere na quantidade de poupança $q(x)$ num determinado momento da vida nacional, dando origem à função $q'(x)$, a propensão à poupança. Na nossa situação, temos que

$$q'(x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Exercício 10.4

1. Calcule as duas primeiras derivadas das seguintes funções.
 - a) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \log(x^2 - 1)$
 - b) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$
2. Determine o domínio de definição de cada uma das funções a seguir e calcule as duas primeiras derivadas.

- a) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 4x}}{x^2 + 3x + 2}$

- b) $f(x) = \frac{\log(x^3 - 4x)}{x + 1}$

Aula 11

DERIVADAS – MÁXIMOS E MÍNIMOS

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 aplicar o conceito de derivada para detectar pontos de máximo e mínimo de funções diferenciáveis;
- 2 conhecer critérios para localização de pontos de máximo e mínimo;
- 3 resolver problemas envolvendo máximos e mínimos;
- 4 identificar pontos de concavidade, convexidade e inflexão para funções.

Considere uma função contínua, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida num intervalo aberto I . Estamos interessados em detectar os pontos de máximo, de mínimo e de inflexão para a função. Este é um estudo importante para as aplicações do cálculo diferencial em vista de funções que modelam fenômenos nas áreas da Física, Química, Economia ou Administração.

Antes de oferecer as técnicas, vamos começar com a definição do que seja um ponto de máximo ou de mínimo para uma função.

MÁXIMOS E MÍNIMOS RELATIVOS

Um ponto $x_0 \in I$ é um ponto de máximo local para uma função $f(x)$ se existir um intervalo J_ε , centrado em x_0 e contido no domínio I , tal que para todo x em J_ε implique que $f(x) \leq f(x_0)$.

Em outras palavras, existe um número positivo $\varepsilon > 0$ tal que

$$J_\varepsilon = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I \quad \text{e} \quad \text{se } x \in J_\varepsilon \text{ então } f(x) \leq f(x_0).$$

De modo similar, um ponto $x_0 \in I$ é um ponto de mínimo local para a função se existir um intervalo J_ε , centrado em x_0 e contido no domínio I , tal que para todo x em J_ε implique que $f(x) \geq f(x_0)$.

Em outras palavras, existe um número positivo $\varepsilon > 0$ tal que

$$J_\varepsilon = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I \quad \text{e} \quad \text{se } x \in J_\varepsilon \text{ então } f(x) \geq f(x_0).$$

Veja na **Figura 11.1**, a seguir, o gráfico de uma função diferenciável $f : (-3, 3) \rightarrow \mathbb{R}$, onde indicamos os pontos x_1 e x_2 , respectivamente, um ponto de máximo local e um ponto de mínimo local para a função.

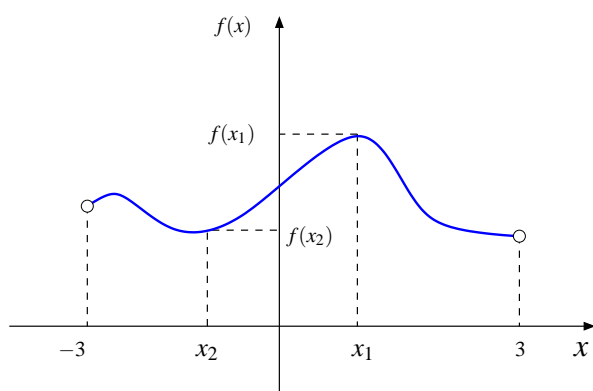


Figura 11.1: Pontos de máximo e mínimo de função.

Dentro deste contexto, um valor x^* é um ponto de máximo global para a função, se todo valor x verificar

$$f(x^*) \geq f(x).$$

Do mesmo modo, x^* é ponto de mínimo global para a função se para todo valor x verificar

$$f(x^*) \leq f(x).$$

Veja no gráfico, representado na **Figura 11.2**, que os pontos x_1 e x_2 são pontos de mínimo, onde apenas x_1 é mínimo global. Também, x_3 e x_4 são pontos de máximo, no entanto, apenas x_4 é máximo global.

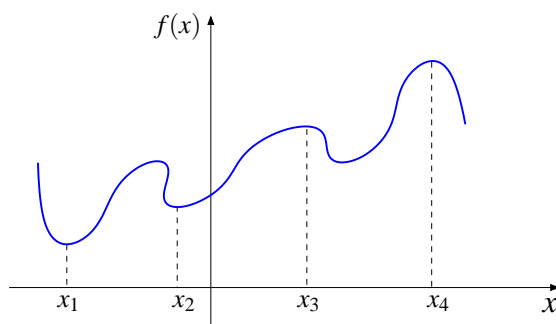


Figura 11.2: Extremos locais e globais.

DOIS RESULTADOS IMPORTANTES PARA LOCALIZAR PONTOS CRÍTICOS

Observe que a definição introduzida para caracterizar pontos de máximo ou mínimo não exige nenhuma qualidade para a função, como continuidade ou diferenciabilidade. No entanto, as técnicas existentes produzem resultados importantes quando as funções são diferenciáveis.

O primeiro destes resultados diz respeito ao importante Teorema do Valor Médio, cujo conteúdo, com comentários e uma prova geométrica, é apresentado a seguir.

TEOREMA 11.1

Teorema do Valor Médio (funções diferenciáveis)

Considere uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida num intervalo fechado, onde $a < b$, e de modo que f é diferenciável em todo ponto do intervalo aberto (a, b) . Então existe um ponto θ , $a < \theta < b$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\theta).$$

Demonstração

Não faremos uma demonstração analítica deste teorema para não fugir do foco da disciplina. Mas faremos uma interpretação geométrica do resultado, o que em si convence como uma prova do resultado.

Veja a **Figura 11.3**, que representa o gráfico de uma função f , dentro das hipóteses do Teorema. Note que a reta r que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ tem como coeficiente angular exatamente,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

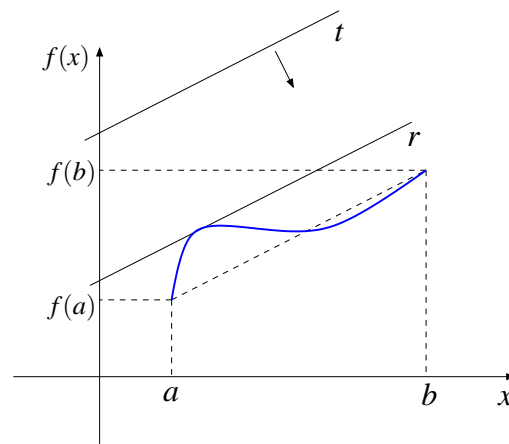


Figura 11.3: O Teorema do Valor Intermediário.

Por outro lado, para todo $a < \theta < b$, $f'(\theta)$ representa a inclinação da tangente ao gráfico da função no ponto $(\theta, f(\theta))$. Portanto, se queremos encontrar θ tal que a igualdade seja verdadeira, deveremos encontrar uma reta tangente ao gráfico da função que seja paralela à reta r que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Veja no gráfico que o ponto $(\theta, f(\theta))$ que resolve o problema foi encontrado tomando como ponto de partida uma reta t , situada longe do gráfico, e paralela à reta r . A seta representada na **Figura 11.3** indica o deslocamento paralelo da reta t em direção à reta r . O ponto $(\theta, f(\theta))$ é identificado como o primeiro ponto do gráfico da função que é tocado pelo deslocamento paralelo da reta t .

CONSEQÜÊNCIAS DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Considere uma função diferenciável, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida num intervalo aberto I então:

Se $f'(x) > 0$ para todo x no intervalo I então a função é crescente;

Se $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo I então a função é decrescente.

Veja por que estas propriedades são conseqüências do Teorema do Valor Médio. De fato, considere dois números x_1 e x_2 no intervalo I , de modo que $x_1 < x_2$. O Teorema do Valor Médio

garante que existe θ no intervalo fechado $[x_1, x_2]$, de modo que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\theta) \cdot (x_2 - x_1) \quad (11.1)$$

Assim, na hipótese em que $f'(x) > 0$ para todo x no intervalo I , em particular $f'(\theta) > 0$ e então o segundo membro da igualdade em (11.1) é positivo. Isso implica que também $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Portanto, acabamos de provar que:

Se $f'(x) > 0$ para todo x no intervalo I e $x_1 < x_2$ então $f(x_2) > f(x_1)$.

Isto comprova que a função é crescente.

Do mesmo modo, na hipótese em que $f'(x) < 0$, para todo x no intervalo I , em particular $f'(\theta) < 0$, então o segundo membro da igualdade em (11.1) é negativo. Isto implica que $f(x_2) - f(x_1) < 0$. Este argumento prova que:

Se $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo I e $x_1 < x_2$ então $f(x_2) < f(x_1)$.

Portanto, a função é decrescente.

PRIMEIRO CRITÉRIO PARA LOCALIZAR PONTOS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS

As conseqüências que acabamos de tirar do Teorema do Valor Médio permitem construir o primeiro critério para localizar pontos de máximo ou mínimo de funções.

De modo totalmente similar podemos estabelecer um critério para mínimo local.

PRIMEIRO CRITÉRIO PARA MÁXIMO LOCAL

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, uma função diferenciável definida num intervalo aberto I , um ponto $a \in I$ e um número $\varepsilon > 0$, tal que o intervalo fechado $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ está contido em I e além disso $f'(x) > 0$ para todo x no intervalo semi-aberto $[a - \varepsilon, a)$ e $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo semi-aberto $(a, a + \varepsilon]$. Então, o ponto $x = a$ é um ponto onde a função assume um máximo local $f(a)$.

Justificativa: De acordo com o que vimos como consequência do Teorema do Valor Médio, a função é crescente em $[a - \varepsilon, a)$ e decrescente em $(a, a + \varepsilon]$. Portanto, a função assume um máximo local no ponto $a \in I$.

PRIMEIRO CRITÉRIO PARA MÍNIMO LOCAL

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, uma função diferenciável definida num intervalo aberto I , um ponto $a \in I$ e um número $\varepsilon > 0$, tal que o intervalo fechado $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ está contido em I e além disso $f'(x) < 0$, para todo x no intervalo semi-aberto $[a - \varepsilon, a)$ e $f'(x) > 0$ para todo x no intervalo semi-aberto $(a, a + \varepsilon]$. Então, o ponto $x = a$ é um ponto onde a função assume um mínimo local $f(a)$.

Justificativa: De acordo com o que vimos como consequência do Teorema do Valor Médio, a função é decrescente em $[a - \varepsilon, a)$ e crescente em $(a, a + \varepsilon]$. Portanto, a função assume um valor de mínimo local no ponto $a \in I$.

Exemplo 11.1

Considere a função $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$. Vamos mostrar que:

- a função é crescente no intervalo $(-\infty, -1)$ e no intervalo $(1, \infty)$;
- a função é decrescente no intervalo $(-1, 1)$;
- os pontos $a = -1$ e $b = 1$ são, respectivamente, pontos de máximo e de mínimo locais para a função.

Solução: Temos que $f'(x) = x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1)$. Veja na **Figura 11.4** a seguir a representação do sinal da derivada, obtido a partir da equação da função $f'(x)$, quando x percorre os números reais \mathbb{R} . A variação de sinal explicitada comprovam os resultados das partes a) e b).

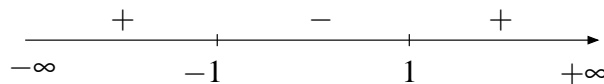


Figura 11.4: O sinal de $f'(x) = (x - 1)(x + 1)$.

Por outro lado, considere agora os intervalos fechados $[-2, 0]$ e $[0, 2]$, contendo respectivamente, os pontos $a = -1$ e $b = 1$. Veja que

$f'(x) > 0$ para todo x no intervalo semi-aberto $[-2, -1)$ e $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo semi-aberto $(-1, 0]$. Portanto, pelo Primeiro Critério, temos que $a = -1$ é um ponto de máximo local.

Do mesmo modo, $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo semi-aberto $[0, 1)$ e $f'(x) > 0$ para todo x no intervalo semi-aberto $(1, 2]$. Portanto, pelo Primeiro Critério temos que $b = 1$ é ponto de um mínimo local.

Veja no gráfico da função, representado na **Figura 11.5** a seguir, a comprovação geométrica do que acabamos de concluir.

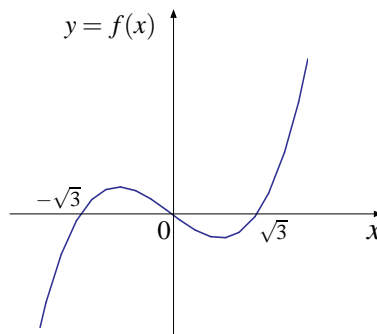


Figura 11.5: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$.

Exercício 11.1

Encontre intervalos de crescimento e de decrescimento, bem como os pontos de máximo e mínimo locais das seguintes funções:

a) $f : (-3, 3) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \log(\sqrt{x^2 - 9}).$

b) $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{7}{4}\log(x).$

c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{x^2 - 8x + 17}.$

A partir destes primeiros critérios para a localização de pontos extremos para uma função, surge a primeira pista sobre uma importante característica destes pontos. Este é o conteúdo do nosso próximo resultado.



Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida num intervalo aberto I e um ponto $a \in I$, onde f assume um máximo local ou um mínimo local. Então $f'(a) = 0$.

Veja por que vale o resultado em destacado anterior. Vamos considerar o caso que o ponto a é um máximo local. O caso de mínimo tem tratamento totalmente similar.

Como $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $a \in I$ e $f'(a)$ é o valor da derivada neste ponto, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

De acordo com a idéia de limite, uma vez que a expressão $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tem limite quando $x \rightarrow a$ e este ponto pode ser aproximado pela variável tanto pela esquerda, $x \rightarrow a_-$, quanto pela direita $x \rightarrow a_+$, temos a seguinte situação:

Em primeiro lugar, no caso da aproximação pela esquerda, $x \rightarrow a_-$, temos que sempre $x < a$ e como a é um ponto de máximo local $f(x) \leq f(a)$. Com estes dados da situação, temos que

$$x < a \quad \text{e} \quad f(x) \leq f(a) \quad \text{implica} \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

Como a última expressão escrita tem para limite $f'(a)$, quando $x \rightarrow a_-$, então

$$f'(a) \geq 0.$$

Em segundo lugar, no caso da aproximação pela direita, $x \rightarrow a_+$, temos que sempre $x > a$, e a é um ponto de máximo local $f(x) \leq f(a)$. Portanto, nesta situação temos que

$$x > a \quad \text{e} \quad f(x) \leq f(a) \quad \text{implica} \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

Como a última expressão escrita tem para limite $f'(a)$, quando $x \rightarrow a_+$, então

$$f'(a) \leq 0.$$

Estes resultados $f'(a) \leq 0$ e $f'(a) \geq 0$ obrigam a nulidade da derivada em a . Ou seja, $f'(a) = 0$.

Vamos colocar em destaque o que acabamos de provar, acerca das propriedades da derivada em pontos de máximo ou mínimo local.

Para uma função diferenciável, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$,

Se $a \in I$ é máximo ou mínimo local então $f'(a) = 0$.

A frase escrita pode ser lida também com a seguinte lógica: “ $f'(a) = 0$ é uma condição necessária para que um ponto $a \in I$ seja máximo ou mínimo local”. No entanto, como podemos atestar com exemplos, a condição $f'(a) = 0$ não é suficiente para garantir máximo ou mínimo locais. Acompanhe um exemplo que elucida esta questão.

Exemplo 11.2

A função $f(x) = x^3$ tem por domínio os números reais \mathbb{R} . Temos que $f'(x) = 2x^2$ e $f'(0) = 0$. No entanto, $a = 0$ não é ponto de máximo ou mínimo de f . Na verdade, esta função é crescente em todo o conjunto dos números reais \mathbb{R} . Veja o gráfico destacado na **Figura 11.6**.

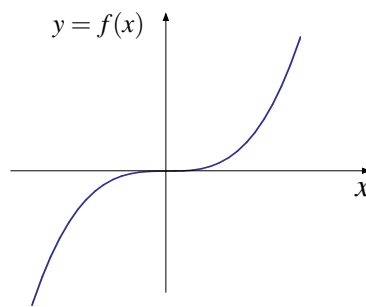


Figura 11.6: A função $f(x) = x^3$.

Exemplo 11.3

Considere a função $f(x) = 4x^3 + x^2 - 2x$.

- Identificar os subconjuntos da reta onde a função é crescente;

- b) Identificar os subconjuntos da reta onde a função é decrescente;
- c) Encontrar pontos de máximo e mínimo locais para a função.

Solução: Calculando a derivada da função em estudo, encontramos que

$$f'(x) = 12x^2 + 2x - 2 = 12 \left(x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} \right).$$

Resolvendo a equação do segundo grau, encontramos que

$$x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{1}{3} \right) = 0.$$

Portanto,

$$f'(x) = 12x \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{1}{3} \right).$$

Esta expressão indica que,

$$f'(x) > 0 \text{ se } -\infty < x < -\frac{1}{2} \text{ ou } \frac{1}{3} < x < \infty \text{ e}$$

$$f'(x) < 0 \text{ se } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}.$$

Os sinais para a derivada permitem organizar as respostas dos itens da questão.

Em relação ao item (a), concluímos que a função é crescente no conjunto $\left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty \right)$.

Em relação ao item (b), encontramos que a função é decrescente no intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)$.

Finalmente, em relação ao item (c), identificamos que o ponto $x = -\frac{1}{2}$ como um máximo local e o ponto $x = \frac{1}{3}$ como um mínimo local. De fato, para o ponto $x = -\frac{1}{2}$, temos à esquerda do ponto que $f'(x) > 0$ e à direita do ponto que $f'(x) < 0$. Igualmente, à esquerda do ponto $x = \frac{1}{3}$ temos que $f'(x) < 0$ e à direita do ponto que $f'(x) > 0$.

Como informação suplementar, observe que nenhum dos pontos é um extremo global, já que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (4x^3 + x^2 - 2x) = \infty \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 + x^2 - 2x) = -\infty.$$

Veja na **Figura 11.7**, o gráfico da função $f(x)$, para verificar os resultados encontrados.

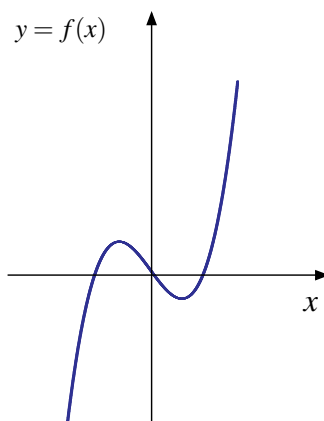


Figura 11.7: Gráfico da função $f(x) = 4x^3 + x^2 - 2x$.

Exercício 11.2

Para cada uma das funções $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ e $g(x) = -x^3 + 2$:

- Identifique os subconjuntos da reta onde a função é crescente;
- Identifique os subconjuntos da reta onde a função é decrescente;
- Encontre pontos de máximo e mínimo locais para a função.

CONCAVIDADES LOCAIS DE FUNÇÕES

A noção de concavidade oferece técnica importante para determinar pontos de máximo e mínimo locais de funções. Do ponto de vista geométrico, a definição deste conceito pode ser realizado para funções que são apenas diferenciáveis. No entanto, para o estudo de pontos extremos, esta noção torna-se ferramenta eficaz quando trabalhada para funções que possuem pelo menos duas derivadas.

Considere uma função diferenciável $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, onde I é um intervalo aberto e para um ponto $a \in I$ a reta t_a é a reta tangente ao gráfico da função neste ponto. Como esta reta passa pelo ponto $p = (a, f(a))$ e $f'(a)$ é seu coeficiente angular, temos que

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a).$$

A função é côncava localmente para baixo no ponto $a \in I$ se existir um intervalo $J \subset I$ e centrado no ponto a , de modo que

$$\text{para todo } x \in J, x \neq a \Rightarrow f(x) < f'(a) \cdot (x - a) + f(a).$$

A função é côncava para cima localmente no ponto $a \in I$ se existir um intervalo $J \subset I$ e centrado no ponto a , de modo que

$$\text{para todo } x \in J, x \neq a \Rightarrow f(x) > f'(a) \cdot (x - a) + f(a).$$

A função tem uma inflexão no ponto $a \in I$ se existir um intervalo $J \subset I$ e centrado no ponto a , de modo que

para quaisquer dois pontos x_1 e x_2 do intervalo J tais que $x_1 < a < x_2$, vale que

$$[f(x_1) - f'(a) \cdot (x_1 - a) - f(a)] \cdot [f(x_2) - f'(a) \cdot (x_2 - a) - f(a)] < 0.$$

Veja que é simples a interpretação do porquê do sinal negativo na expressão anterior para indentificar um ponto de inflexão. Como se trata de um produto de dois fatores, duas coisas devem acontecer de modo exclusivo: ou à esquerda do ponto $a \in I$ o valor da função está abaixo da tangente, e à direita o valor da função está acima da tangente ou, ao contrário, à esquerda do ponto $a \in I$ o valor da função está acima da tangente, e à direita o valor da função está abaixo da tangente.

A interpretação geométrica destes conceitos, concavidade local para baixo, concavidade local para cima e inflexão aparecem nas **Figuras 11.8, 11.9 e 11.10** apresentadas na sequência.

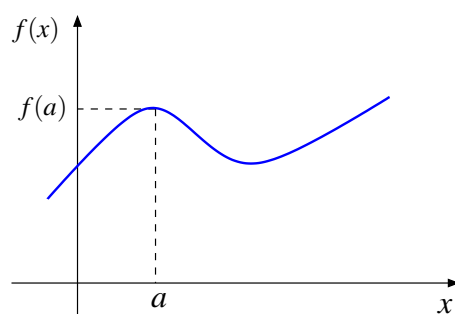


Figura 11.8: Função côncava para baixo no ponto a .

Note que na situação de concavidade local para baixo, todos os valores da função no intervalo J estão estritamente abaixo da reta tangente, exceto o próprio ponto $(a, f(a))$ que pertence à reta tangente t_a .

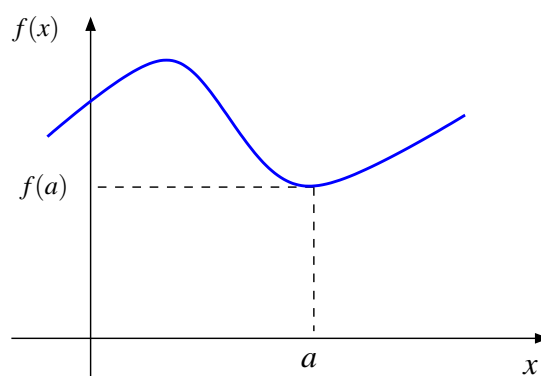


Figura 11.9: Função côncava para cima no ponto a .

Note que na situação de concavidade local para cima, todos os valores da função no intervalo J estão estritamente acima da reta tangente, exceto o próprio ponto $(a, f(a))$ que pertence à reta tangente t_a .

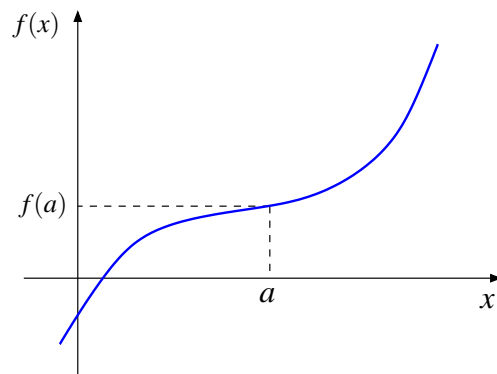


Figura 11.10: Função com inflexão no ponto a .

Note que na representação de um ponto a de inflexão como na **Figura 11.10**, temos que

$$f(x_1) - [(f'(a) \cdot (x_1 - a) + f(a))] < 0 \quad \text{e}$$

$$f(x_2) - [(f'(a) \cdot (x_2 - a) + f(a))] > 0,$$

resultando que o produto destes fatores é negativo.

Exercício 11.3

Considere a função $f(x) = 4x^3 + x^2 - 2x$.

- Mostre que $x = -\frac{4}{3}$ é um ponto onde a função é localmente côncava para cima;
- Mostre que $x = \frac{3}{2}$ é um ponto onde a função é localmente côncava para baixo.

Exercício 11.4

Considere a função $f(x) = x^5$ possui, no ponto $a = 0$ uma inflexão.

Aula 12

DERIVADAS – MÁXIMOS E MÍNIMOS (CONTINUAÇÃO)

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 conhecer e utilizar técnicas para garantir existência de máximo e mínimo locais;
- 2 aplicar as técnicas de cálculo de máximo e mínimo para problemas de maximização de lucros.

Na aula anterior, identificamos uma condição necessária para que uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, que possui derivada contínua num intervalo aberto I , admita um ponto $x_0 \in I$, como ponto de máximo ou mínimo. Vamos relembrar este resultado.

Se $x_0 \in I$ é um ponto de máximo ou mínimo então $f'(x_0) = 0$.

Nesta aula, vamos avançar um pouco mais e encontrar condições suficientes para garantir que um ponto x_0 é ponto de máximo ou mínimo. Para definir estas condições necessitaremos que, pelo menos, a primeira e a segunda derivadas da função estejam definidas num pequeno intervalo centrado em x_0 e que a derivada segunda seja contínua neste pequeno intervalo. Essas condições admitidas, o teorema a seguir dá conta deste resultado.

TEOREMA 12.1

Seja uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$ um ponto do intervalo aberto I tal que $f'(x_0) = 0$. Valem as seguintes propriedades:

- (a) se $f''(x_0) > 0$ então x_0 é um ponto de mínimo local para f ;
- (b) se $f''(x_0) < 0$ então x_0 é um ponto de máximo local para f .

Demonstração

Considere um possível gráfico da função, como expresso na **Figura 12.1**. Veja que como $f'(x_0) = 0$, então a reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x_0, f(x_0))$ é horizontal.

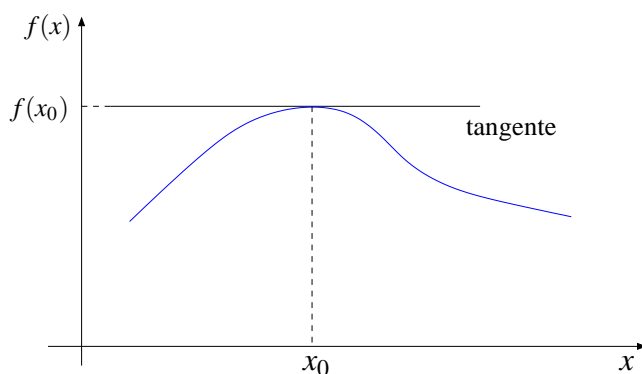


Figura 12.1: Tangente ao gráfico num ponto onde $f'(x_0) = 0$.

Vamos examinar separadamente cada um dos casos (a) e (b).

Demonstração do caso (a):

Como $f''(x_0) > 0$ e $f'(x_0) = 0$ podemos tirar algumas conclusões da expressão

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h} > 0 \quad (12.1)$$

Por um lado, a última desigualdade que aparece na expressão (12.1) anterior mostra um limite positivo. Isso significa que para valores $h < 0$, e portanto com valores $x_0 + h$ à esquerda de x_0 , temos que $f'(x_0 + h) < 0$. Isto implica que a função é decrescente à esquerda do ponto x_0 . Portanto, para valores h muito pequenos e positivos, valem os seguintes resultados:

se $x = x_0 + h < x_0$ é função decrescente então $f(x) > f(x_0)$.

Por outro lado, ainda partindo da expressão (12.1), e considerando a última desigualdade em (12.1), encontramos que para valores $h > 0$ e portanto com valores $x_0 + h$ à direita de x_0 , temos que $f'(x_0 + h) > 0$. Isso significa que a função é crescente à direita do ponto x_0 . Portanto, para valores h muito pequenos e positivos, valem os seguintes resultados:

se $x = x_0 + h > x_0$ é função crescente então $f(x) > f(x_0)$.

Como a função decresce à esquerda de x_0 e cresce à direita de x_0 , então no ponto x_0 a função passa por um mínimo local.

Isso encerra a prova do teorema no caso (a). A prova do caso (b) segue um raciocínio muito parecido. Você poderia tentar individualmente, ou com seu grupo de estudo, ou com ajuda do tutor, escrever a prova deste caso (b).

CQD

Com apoio do Teorema que acabamos de estudar, podemos enunciar um procedimento para localizar pontos de máximos e mínimos locais para funções que possuem a segunda derivada contínua.

CRITÉRIO PARA PESQUISA DE MÁXIMOS E MÍNIMOS

Dada a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ para localizar pontos de máximos e mínimos:

1º passo:

Procuramos todos os possíveis candidatos a máximo ou mínimo. Equivale a determinar todos os pontos $x_0 \in I$ tais que $f'(x_0) = 0$.

2º passo:

Para cada um dos pontos $x_0 \in I$ encontrados no 1º passo, calculamos $f''(x_0)$.

Se $f''(x_0) > 0$ então x_0 é ponto de mínimo local;

Se $f''(x_0) < 0$ então x_0 é ponto de máximo local;

Se $f''(x_0) = 0$ nada se pode garantir a priori.

✎ No caso em que ocorre $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$ não é possível garantir a natureza do ponto x_0 do ponto de vista de máximo ou mínimo. Nesta situação, se a função possui derivadas de ordem superior a dois podemos continuar a pesquisa. Denotando por $f^{(n)}(x_0)$ a derivada de ordem n da função no ponto x_0 , o resultado geral, que não iremos provar aqui, garante que:

Se $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$ e $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ então:

Se n é ímpar e $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ então x_0 é ponto de máximo;

Se n é ímpar e $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ então x_0 é ponto de mínimo;

Se n é par então x_0 não é ponto de mínimo nem de ponto de máximo.

Exemplo 12.1

Determine os pontos de máximo e mínimo para a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 3x^2 + 6x - 1 \end{aligned}$$

Solução: Para encontrar os pontos de máximo e mínimo procedemos como no Critério para Pesquisa de Máximos e Mínimos.

1º passo:

Procuramos todos os pontos $x_0 \in I$ tais que $f'(x_0) = 0$. Calculando, temos que:

$$f'(x) = 6x + 6.$$

Logo:

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1.$$

2º passo:

Para o ponto $x_0 = -1$, encontrado no 1º passo, calculamos $f''(x_0)$. Como $f''(-1) = 6 > 0$, então o ponto $x_0 = -1$ é um ponto de mínimo.

Veja a **Figura 12.2** para confirmar graficamente que a função $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$ possui um mínimo local em $x_0 = -1$. Note que o valor mínimo local da função é $f(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) - 1 = -4$. Além disso, note que coincidentemente o único mínimo local é na realidade um mínimo global, uma vez que temos $f(x) = 3x^2 + 6x - 1 \geq f(-1) = -4$.

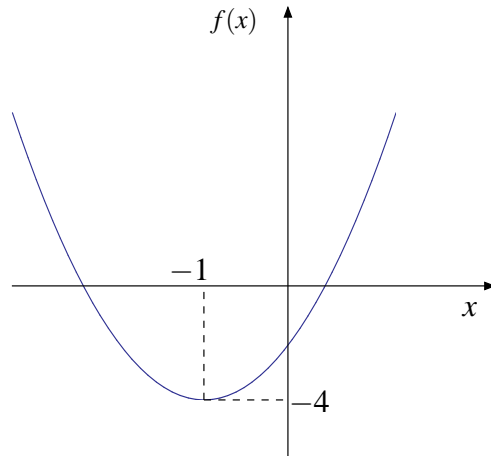


Figura 12.2: Tangente ao gráfico num ponto onde $f'(x_0) = 0$.

Exercício 12.1

Prove analiticamente que $f(x) = 3x^2 + 6x - 1 \geq f(-1) = -4$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 12.2

Determine os pontos de máximo local e de mínimo local da função

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = e^{-x^2+3x} \end{aligned}$$

Solução: Em primeiro lugar devemos determinar todos os valores x_0 para os quais $f'(x_0) = 0$. Encontramos que

$$f'(x) = (-2x + 3)e^{-x^2+3x}.$$

Como a função e^{-x^2+3x} é sempre positiva para todo valor de x , encontramos que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (-2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \frac{3}{2}.$$

Precisamos agora calcular a derivada segunda. Temos que:

$$f''(x) = -2e^{-x^2+3x} + (-2x + 3)^2 e^{-x^2+3x} = (4x^2 - 12x + 7)e^{-x^2+3x}.$$

Agora um cálculo direto mostra que:

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = -2e^{9/4} < 0.$$

Este resultado mostra que o valor $x_0 = 3/2$ é um ponto de máximo local para a função. Veja a comprovação gráfica desses fatos na **Figura 12.3**.

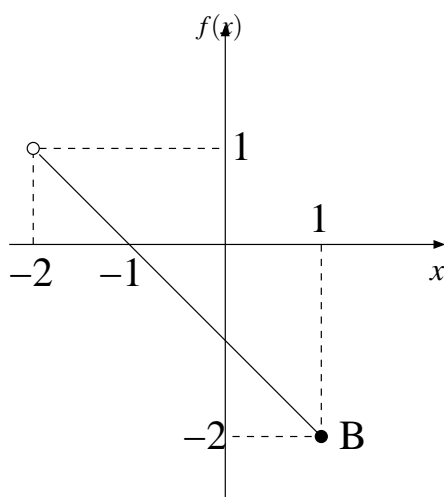


Figura 12.3: Ponto de máximo para $f(x) = e^{-x^2+3x}$.

Exemplo 12.3

Determine os pontos de máximo local e de mínimo local da função

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Solução: Em primeiro lugar devemos determinar todos os valores x_0 para os quais $f'(x_0) = 0$. Encontramos que

$$f'(x) = \frac{(x^2 + \frac{1}{3})(3x^2) - 2x(x^3 - 1)}{(x^2 + \frac{1}{3})^2} = \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^2 + \frac{1}{3})^2}.$$

Note que o denominador do último termo se escreve como

$$x^4 + 3x^2 + 2x = x(x^3 + 3x + 2) = x(x+1)(x^2 - x + 2).$$

Portanto, como o denominador da expressão anterior é sempre positivo, concluímos que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 3x^2 + 2x = x(x^3 + 3x + 2) = 0,$$

ou seja:

$$x(x^3 + 3x + 2) = x(x+1)(x^2 - x + 2) = 0.$$

Note que o primeiro membro da última igualdade é um produto de fatores, onde cada um dos fatores se anula, respectivamente, para

$x_0 = 0$ e $x_1 = -1$. Com esta informação, podemos escrever a igualdade que representa a anulação da primeira derivada. Assim, encontramos que

$$f'(x) = \frac{x(x+1)(x^2-x+2)}{(x^2+\frac{1}{3})^2}.$$

Além disso, como o denominador da última expressão é uma função positiva, encontramos que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \quad \text{ou} \quad x_1 = -1.$$

Para determinar a natureza (máximo ou mínimo) dos pontos $x_0 = 0$ e $x_1 = -1$, necessitamos da derivada segunda da função $f(x)$. Temos que:

$$f'(x) = \frac{x(x+1)(x^2-x+4)}{(x^2+\frac{1}{3})^2} = \frac{x^4+3x^2+4x}{(x^2+\frac{1}{3})^2}.$$

Assim,

$$f''(x) = \frac{(4x^3+6x+4)(x^2+\frac{1}{3})^2 - 4x(x^2+\frac{1}{3})(x^4+3x^2+4x)}{(x^2+\frac{1}{3})^4}.$$

Agora um cálculo direto mostra que

$$f''(0) = 2.916 > 0 \text{ e que } f''(-1) = -\frac{27}{8} < 0.$$

Estes resultados mostram que $x_0 = 0$ é um ponto de mínimo e $x_1 = -1$ é um ponto de máximo para a função. Veja a comprovação gráfica destes fatos na **Figura 12.4**.

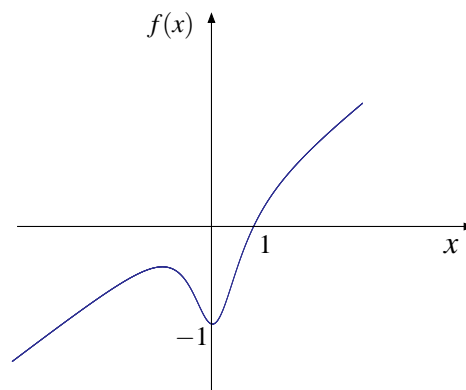


Figura 12.4: Máximo e mínimo para $f(x) = \frac{x^3-1}{3x^2+1}$.

APLICAÇÕES: LUCRO TOTAL E LUCRO MARGINAL

Nesta sessão vamos estudar funções que representam o lucro total obtido em um negócio. Representado por $L(x)$, o lucro total é definido como a diferença entre a receita total, $R(x)$, e o custo total, $C(x)$. Isto é,

$$L(x) = R(x) - C(x) \quad (12.2)$$

Por derivação da equação anterior, encontramos a função $L'(x)$ dita a **função lucro marginal**,

$$L'(x) = R'(x) - C'(x) \quad (12.3)$$

Como se trata da produção e da comercialização de um bem, em cada instante a variável x assume um valor inteiro positivo $x = k$. Portanto, o valor da função lucro marginal num instante $x = k$, isto é, $L'(k)$, é o lucro aproximado obtido da $(k + 1)$ -ésima unidades após terem sido produzidas e vendidas k unidades.

- i. A equação (12.2) mostra que para existir lucro é preciso que $R(x) > C(x)$. Ou seja, que a receita obtida com a venda de x unidades do bem supere o custo de produção dos mesmos bens;
- ii. Veja que a equação (12.3) expressa que o lucro marginal é a diferença entre a receita marginal $R'(x)$ e o custo marginal $C'(x)$;
- iii. Note que numa situação hipotética, uma empresa produz e vende k unidades de um certo produto cujo lucro total é regido por uma conhecida equação do tipo (12.2). Nesta situação, pode se perguntar para qual nível k de produção o lucro é máximo. Do que conhecemos, podemos garantir que o lucro será máximo na situação em que

$$L'(k) = 0 \quad \text{e} \quad L''(k) < 0.$$

Exemplo 12.4

Suponha que o custo total $C(x)$, para uma empresa produzir x unidades de um certo bem popular, e a receita total $R(x)$ alcançada com a venda das unidades x sejam dados, respectivamente, por

$$C(x) = \frac{10^{-3}}{2}x^2 + 10^8x - \frac{9 \cdot 10^3}{x} \quad \text{e} \quad R(x) = \left(10^8 + \frac{4}{10}\right)x.$$

Assim, o lucro total $L(x)$ é dado por

$$L(x) = R(x) - C(x) = \frac{4}{10}x - \frac{10^{-3}}{2}x^2 + \frac{9 \cdot 10^3}{x}.$$

Note a partir da fórmula que define a função lucro total $L(x)$ que se $x = 1$ então

$$L(1) = \frac{4}{10} - \frac{10^{-3}}{2} + 9 \cdot 10^3 > 0.$$

Também podemos comprovar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = -\infty.$$

Portanto, a partir de certa quantidade de unidades produzidas, cessa o lucro.

Agora estamos interessados em determinar qual é a quantidade x produzida e comercializada que permite um lucro máximo. Temos que

$$L'(x) = \frac{4}{10} - 10^{-3}x - \frac{9 \cdot 10^3}{x^2}.$$

Assim,

$$L'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 10^{-2}x^3 - 9 \cdot 10^4 = 0.$$

Ou seja, os valores x que anulam a derivada, isto é $L'(x) = 0$, são exatamente as raízes da equação do terceiro grau

$$10^{-2}x^3 - 4x^2 + 9 \cdot 10^4 = 0.$$

Como se trata de equação polinomial, candidatos a possíveis raízes são os divisores do termo independente $9 \cdot 10^4$. Fazendo tentativas neste sentido, encontramos que

$$x = 3 \cdot 10^2 \text{ é uma raiz.}$$

De fato, verifique que

$$10^{-2} \cdot 27 \cdot 10^6 - 4 \cdot 9 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^4 = 0.$$

Uma vez identificada uma raiz, podemos decompor a equação do terceiro grau e ainda procurar outras raízes, resolvendo então uma equação do segundo grau.

No entanto, vamos, neste momento, para fins de melhor compreensão didática, nos concentrar na raiz identificada $x = 10^2$ e tirar conclusões. Temos que

$$L''(x) = -10^{-3} + \frac{18 \cdot 10^3}{x^3}.$$

Como

$$L''(3 \cdot 10^2) = -10^{-3} + \frac{18 \cdot 10^3}{27 \cdot 10^6} < 0$$

então $x = 3 \cdot 10^2$ é um ponto de máximo local. Isso significa que no regime de produção, este é o ponto de produção que resulta num lucro máximo.

Exercício 12.2

1. Suponha que uma empresa tem o custo total $x^3 - 9.600x + 5.000$ para a produção diária de x unidades de computadores. Suponha que cada unidade do produto é vendida no mercado a um preço de R\$ 1.200,00 por unidade. Ache o número de unidades que a empresa deveria produzir para obter o maior lucro diário possível.
2. Determine os intervalos de números reais nos quais as funções são crescentes, decrescentes e os possíveis pontos de máximo ou mínimo.

a) $f(x) = \frac{x-4}{x^2+9}$

b) $g(x) = \frac{x^5}{5} - x^4 + 15$

Aula 13

O CONCEITO DE INTEGRAL – INTEGRAL INDEFINIDA

O b j e t i v o s

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 compreender o conceito de integral como uma operação inversa da derivação;
- 2 calcular as integrais de funções elementares;
- 3 utilizar o método de integração por partes.

O cálculo diferencial e Integral é uma das mais importantes ferramentas da Matemática com ampla aplicação nas áreas afins, como física, economia, administração, biologia, etc. Nas aulas anteriores desenvolvemos a parte correspondente ao conceito de derivada de funções e as propriedades de máximo e mínimo, cobrindo conteúdo relevante do cálculo diferencial. Nesta aula, começando com a introdução do conceito de integral, vamos avançar sobre algumas técnicas importantes do cálculo integral.

Em Matemática lidamos com conjuntos, propriedades de conjuntos, operações entre elementos de conjuntos e funções. De modo geral, dada qualquer operação em um conjunto, temos o conceito de operação inversa. Assim, a adição é inversa da subtração, a multiplicação da divisão, a radiciação da exponenciação e assim por diante.

A derivada de uma função pode ser entendida como uma operação num conjunto apropriado de funções. Dada uma função f aplicamos a derivada para encontrar outra função f' . A operação inversa da derivação é referida como integração. Uma integral de uma função g é uma função f tal que $f' = g$.

Veja, através de um exemplo, como estas questões aparecem com naturalidade nos problemas.

Na aula passada ao trabalharmos com a função custo total C encontramos através da operação derivada, a função custo marginal C' . Veja que a situação poderia ser diferente, em que outro problema seria fornecido exatamente o custo marginal e é imposta a necessidade de encontrar a função custo total. Nesta situação é dada uma função derivada e pede-se a função ou as funções que dão origem a esta derivada.

Veja a definição precisa de integral indefinida.

Definição 13.1

Dada a função real contínua $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida num intervalo aberto I , a integral indefinida da função g é toda função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f' = g$. Ou seja, $f'(x) = g(x)$, para todo $x \in I$. Usamos o símbolo

$$f(x) = \int g(x) \, dx,$$

para representar a operação de integração. O símbolo \int é dito símbolo de integração ou sinal de integração.

Veja alguns exemplos que ajudam a esclarecer o conceito de integral indefinida, onde inclusive você encontrará a justificativa para o adjetivo *indefinida*.

Exemplo 13.1

Encontre a integral indefinida da função

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = 6x^2 + 4x - 3 \end{aligned}$$

Solução: Precisamos encontrar funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f'(x) = g(x)$, para todo número real x . Simbolicamente devemos resolver a equação

$$f(x) = \int g(x) \, dx = \int (6x^2 + 4x - 3) \, dx.$$

Note que a função

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x$$

é uma solução para o problema, uma vez que $f'(x) = g(x)$. No entanto, para qualquer número real C fixado, a função $f_c(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x + C$, também possui como derivada a função $g(x)$.

Assim podemos expressar todas as funções que são integrais indefinidas da função $g(x)$ pela equação

$$\int (6x^2 + 4x - 3) \, dx = 2x^3 + 2x^2 - 3x + C,$$

onde C é um número real, e portanto uma constante.

Antes de avançarmos mais precisamos de alguns resultados básicos sobre integral.

TEOREMA 13.1

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real definida num intervalo aberto I e tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$. Então a função é constante.

Demonstração

O enunciado do teorema assegura que se uma função $f(x)$ é tal que $f'(x) = 0$, para todo x então existe um número real k com $f(x) = k$. Em outras palavras, a função é constante. Vamos provar isto com auxílio do Teorema do Valor Intermediário (TVI).

Considere um ponto x_0 do intervalo aberto I e defina uma constante k por $f(x_0) = k$ e considere dois pontos quaisquer a e b do intervalo I , tais que $a < x_0 < b$. Agora volte a ler o enunciado do TVI para recordar com podemos utilizá-lo aqui.

Usando duas vezes o Teorema do Valor Intermediário encontramos pontos θ_1 e θ_2 no intervalo aberto I , tal que $\theta_1 \in [a, x_0]$, $\theta_2 \in [x_0, b]$ e tais que $f(x_0) - f(a) = f'(\theta_1)(a - x_0)$ e $f(b) - f(x_0) = f'(\theta_2)(b - x_0)$.

Como $f'(x) = 0$, para todo valor da variável x então $f'(\theta_1) = f'(\theta_2) = 0$. Além disso, como $(a - x_0) > 0$ e $(b - x_0) > 0$, encontramos que $f(x_0) - f(a) = 0$ e $f(b) - f(x_0) = 0$. Isto implica que $f(b) = f(a) = f(x_0) = k$.

Como os pontos a e b foram selecionados aleatoriamente no intervalo I , isto comprova que a função é constante. Isto é, $f(x) = k$, para todo x , e finaliza a prova.

CQD

COROLÁRIO 13.1

Considere duas funções reais $f(x)$ e $g(x)$ definidas num mesmo intervalo aberto I e tais que, para todo valor da variável x ,

$$f'(x) = g'(x).$$

Então as funções diferem por uma constante. Ou seja, existe uma constante real k tal que

$$f(x) = g(x) + k.$$

Demonstração

Defina uma nova função $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ por $h(x) = f(x) - g(x)$. De acordo com os dados na hipótese do corolário, $h(x)$ tem derivada nula. De fato,


$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Assim, o teorema que acabamos de provar anteriormente, mostra que existe uma constante real k tal que $h(x) = k$. Ou seja,

$$h(x) = f(x) - g(x) = k \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x) + k$$

completando a prova do corolário.

CQD

 Usando o corolário concluímos que se uma função $f(x)$ é a **integral indefinida** de uma função $g(x)$ então para toda constante real k vale

$$\int g(x) dx = f(x) + k.$$

O fato que a integral de uma função dá como resultado infinitas funções, uma função distinta para cada valor do parâmetro real C , é responsável pelo nome Integral Indefinida.

Com o objetivo de calcular integrais indefinidas de funções que fazem parte de nosso universo de trabalho, como funções polinomiais, logaritmos e exponenciais, vamos enunciar as principais propriedades da integração.

PROPRIEDADES PARA INTEGRAIS INDEFINIDAS

Nas propriedades enunciadas a seguir k e C são números reais, $f(x)$, $g(x)$, são funções reais contínuas definidas num intervalo aberto I e n , m são números inteiros.

1. A integral de uma função constante é, a menos de constante, a função linear. Ou seja,

$$\int k dx = kx + C.$$

$$2. \int \sqrt[n]{x^n} dx = \frac{m}{n+m} \cdot x^{\frac{m+n}{m}} + C, \quad m > 0 \text{ e } \frac{n}{m} \neq -1.$$

$$3. \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad n \neq -1.$$

$$4. \int a f(x) dx = a \int f(x) dx.$$

5. A integral da soma de duas funções é a soma das integrais das funções:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

6. Se $f(x)$ e $g(x)$ tem derivadas contínuas então

$$\int [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)] dx = f(x) \cdot g(x) + C.$$

Todas estas propriedades podem ser demonstradas com auxílio da definição e das propriedades das derivadas. Basta derivar o segundo membro em cada uma das igualdades para encontrar a função que está sob o símbolo de integração. Por exemplo, vamos provar a validade da propriedade (ii):

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C.$$

Considere a função $g(x) = \frac{m}{n+m} \cdot x^{\frac{m+n}{m}}$, com $m > 0$ e $\frac{n}{m} \neq -1$. Então, de acordo com o que estudamos na Aula 9 acerca da derivada de potências de funções e da derivada de funções compostas podemos escrever

$$g'(x) = \frac{m}{n+m} \cdot \frac{m+n}{m} \cdot x^{\frac{m+n}{m}-1} = x^{\frac{n}{m}}.$$

Este resultado mostra a validade de propriedade 2.

Note que a propriedade 3 é um caso particular da propriedade 2, onde $m = 1$.

Exemplo 13.2

Calcule as seguintes integrais indefinidas:

$$1. \int \sqrt{x} dx$$

$$2. \int \sqrt[3]{x} dx$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$4. \int (t+1)(2t^3-2) dt$$

$$5. \int \left(\sqrt{x^3} - \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$$

Solução: A primeira integral

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

pode ser calculada usando a propriedade 2 com o valores, $m = 2$ e $n = 1$. As contas mostram que

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x \sqrt{x}.$$

A segunda integral pode ser calculada de modo análogo, usando a propriedade 2 com $m = 3$ e $n = 1$. Assim,

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x}.$$

Para o cálculo da terceira integral, desenvolvemos a função que aparece sob o símbolo de integral para encontrar que

$$(t+1)(2t^3-2) = 2t^4 + 2t^3 - 2t - 2.$$

Agora, usando as propriedades 4 e 5, enunciadas anteriormente para as integrais, encontramos que

$$\int (t+1)(2t^3-2) dt = \int (2t^4 + 2t^3 - 2t - 2) = \frac{2t^5}{5} + \frac{t^4}{2} - t^2 - 2t.$$

Para o cálculo da quinta integral é preciso antes trabalhar um pouco a forma da função. Acompanhe as contas.

$$\sqrt{x^3} - \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{3/2} - x \cdot x^{-2/3} = x^{3/2} - x^{1/3}.$$

Agora, usando as mesmas propriedades anteriores obtemos que:

$$\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx = \int (x^{3/2} - x^{1/3}) dx = \frac{1}{3/2+1} x^{3/2+1} - \frac{1}{1/3+1} x^{1/3+1}.$$

Ou seja,

$$\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx = \frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{3}{4} x^{4/3} = \frac{2}{5} \sqrt{x^5} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4}.$$

Exercício 13.1

Calcule as seguintes integrais

a) $\int \sqrt[4]{x} \, dx$

b) $\int (x^3 + 2)x^2 \, dx$

A INTEGRAL DA FUNÇÃO EXPONENCIAL E DA FUNÇÃO LOGARÍTMO

Na Aula 9 trabalhamos com derivadas envolvendo funções exponenciais e funções logarítmicas.

Vimos que se $f(x)$ é uma função que possui derivada então

$$g(x) = e^{f(x)} \Rightarrow g'(x) = f'(x)e^{f(x)}.$$

Também, se além disso, se $f(x) > 0$, então

$$g(x) = \log(f(x)) \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

As expressões derivadas que acabamos de escrever permitem encontrar integrais indefinidas de funções exponenciais e logarítmicas.

Se $f(x)$ é uma função que possui derivada contínua então acabamos de comprovar com as formulas anteriores que

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} \, dx = e^{f(x)} + C \quad (13.1)$$

Além disso, se $f(x) > 0$, também

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \log(f(x)) + C \quad (13.2)$$

Usando as expressões integrais que acabamos de escrever, obtemos que se $f(x) = 1$ é uma função constante, então

$$\int e^x \, dx = e^x + C.$$

Também, se $f(x)$ é a função $f(x) = x$, e $x > 0$ então

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x + C.$$

Exemplo 13.3

Usando as fórmulas (13.1) e (13.2) realizamos diretamente o cálculo das seguintes integrais:

$$a) \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \log(x^2 + 1) + C.$$

$$b) \int \frac{x^3+x}{x^4+2x^2} dx = \int \frac{4(x^3+x)}{4(x^4+2x^2)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3+4x}{x^4+2x^2} dx = \frac{1}{4} \log(x^4 + 2x^2).$$

$$c) \int (2x+1)e^{x^2+x} dx = e^{x^2+x} + C.$$

O MÉTODO DE INTEGRAÇÃO POR PARTES

São muito relevantes as técnicas que permitem resolver integrais. Nesta aula, vamos tratar da técnica denominada Método de Integração por Partes.

Recorde da Aula 9 que se $u(x)$ e $v(x)$ são funções definidas num mesmo intervalo aberto e possuem derivadas então a função $g(x) = u(x) \cdot v(x)$ possui derivada e

$$g'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Assim podemos escrever que $u'(x) \cdot v(x) = g'(x) - u'(x) \cdot v(x)$, onde $g(x) = u(x) \cdot v(x)$.

Então,

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = \int g'(x) dx - \int u'(x) \cdot v(x) dx.$$

Portanto,

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx + C,$$

que é a fórmula que representa o Método de Integração por Partes.

Exemplo 13.4

Use o Método de Integração por Partes para resolver as integrais:

a) $\int x e^x dx$

b) $\int x^2 e^x dx$

c) $\int \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx, x > 0.$

Solução: Para cada uma das integrais devemos definir apropriadas funções $u(x)$ e $v'(x)$ de modo a utilizar a fórmula fornecida pelo Método de Integração por Partes.

Assim para a primeira integral, temos que $u(x) = x$ e $v'(x) = e^x$ implicam $u'(x) = 1$ e $v(x) = e^x$.

Agora usando a fórmula da Integração por partes, encontramos que

$$\int x e^x dx = \int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

ou

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx + C = x e^x - e^x + C = (x - 1) e^x + C.$$

Igualmente, para resolver a segunda integral, definimos $u(x) = x^2$ e $v'(x) = e^x$ implicam $u'(x) = 2x$ e $v(x) = e^x$.

Assim,

$$\int x^2 e^x dx = \int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx.$$

Então

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2(x - 1) e^x + C.$$

Ou ainda,

$$\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x + C.$$

Para a última integral definimos $u(x) = \log x$ e $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$ implicam $u'(x) = \frac{1}{x}$ e $v(x) = 2\sqrt{x}$. Assim,

$$\int \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx = \int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx,$$

ou

$$\int \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \log x - \int \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \log x - 4\sqrt{x} + C.$$

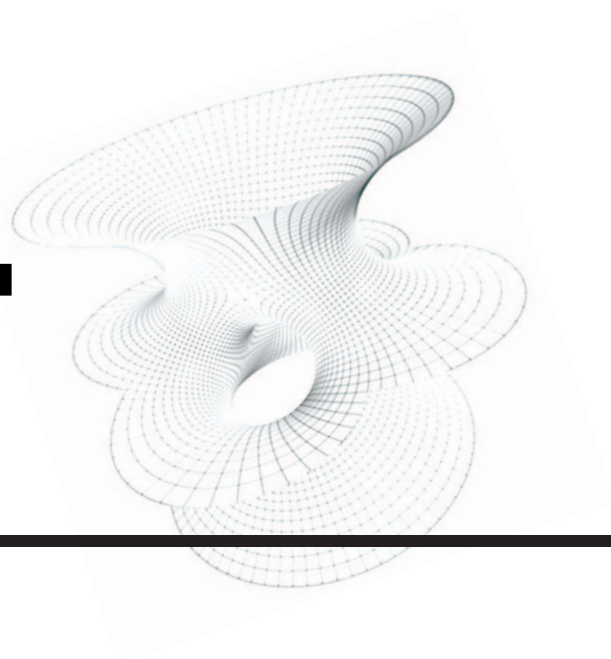
Exercício 13.2

1. Resolver as integrais indefinidas.

- a) $\int (1 - 2x)^4 dx$
- b) $\int x(1 + 2x^2) dx$
- c) $\int x \log x dx, x > 0.$
- d) $\int x^3 e^x dx.$

Aula 14

INTEGRAL DEFINIDA



O b j e t i v o s

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- 1 compreender o conceito de integral definida de uma função contínua;
- 2 poderá calcular área determinadas por gráficos de funções contínuas.

Você lembra que nas aulas anteriores estudamos integral indefinida como uma operação inversa da derivação?

Naquela ocasião, vimos que se $f(x)$ é uma função diferenciável e $g(x)$ é a função derivada de $f(x)$, então é correto escrever que

$$g(x) = f'(x) \text{ e } f(x) = \int g(x) dx.$$

Estas expressões caracterizam derivada e integral indefinida como operações inversas, ou seja, g é a função derivada de f , enquanto que f é uma função primitiva de g .

Nesta aula, nosso objetivo é trabalhar o conceito de integral definida e colocar essa ferramenta a sua disposição para resolver problemas.

Você possivelmente já deve estar se perguntando: o que tem a ver esta nova integral definida com a integral indefinida estudada na Aula 26. Pois! Você verá que estes conceitos de integral são intrinsecamente relacionados. Sem mais adiamento, vamos ao conceito!

A INTEGRAL DEFINIDA DE UMA FUNÇÃO

Considere uma função contínua $f(x)$ cujo domínio é um intervalo $[a, b]$. Para facilitar o entendimento do conceito integral definida, vamos supor duas hipotéticas possibilidades de gráfico para $f(x)$, conforme representado na **Figura 14.1**.

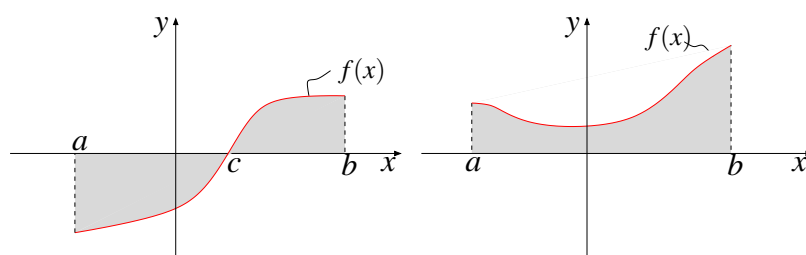


Figura 14.1: Gráficos da função $f(x)$.

Leia atentamente a definição destacada a seguir:

Definição 14.1

A **integral definida** da função contínua $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ é a **área algébrica** determinada pelo gráfico da função $f(x)$ no eixo x . Usamos a notação

$$\int_a^b f(x) dx,$$

para representar a integral definida da função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$.



- i. Os parâmetros a e b que aparecem na definição de integral definida são denominados **extremos de integração**.
- ii. A definição que acaba de ser exposta identifica a integral definida de uma função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ com a **área algébrica** que o gráfico da função deixa no eixo x . A denominação **área algébrica** quer dizer o seguinte: áreas acima do eixo x têm valores positivos, e áreas situadas abaixo do eixo x têm valores negativos.
- iii. De acordo com o que o foi definido, é correto escrever que

$$\text{Área} = \int_a^b f(x) dx,$$

onde na igualdade aparece à direita o símbolo da integral definida e à esquerda temos o valor algébrico da área do gráfico da função em relação ao eixo x .

- iv. De acordo com a definição, temos que, para uma função $f(x)$ cujo gráfico seja como representado à esquerda na **Figura 14.1**, verifica:

$$\text{Área} = \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \int_c^b f(x) dx,$$

enquanto que uma função $f(x)$ cujo gráfico seja como representado à direita na **Figura 14.1**, temos que:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x) dx > 0.$$

O CÁLCULO DE ÁREAS

Uma vez estabelecido o conceito de integral definida de uma função $f(x)$ através da área algébrica que o gráfico determina sobre o eixo x , tem lugar, imediatamente, a seguinte pergunta: como calcular tais áreas?

Um modo clássico de fazer esse cálculo é utilizando limite, onde a área é calculada por um método chamado de exaustão. O processo da exaustão é um método de força bruta, um pouco como vencer pela cansaça. Você compreenderá esse método com o desenvolvimento da idéia conforme vamos agora apresentar.

Em primeiro lugar, em auxílio ao cálculo por exaustão da área do gráfico que uma função contínua, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, determina no eixo x , precisamos do conceito de partição de $[a, b]$.

Uma partição do intervalo fechado $[a, b]$ é qualquer coleção finita e ordenada de pontos deste intervalo e que incluem os pontos extremos. Por exemplo,

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b \quad (14.1)$$

é uma partição do intervalo $[a, b]$.

Uma partição determina subintervalos, isto é, são os n pequenos intervalos

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, b] \quad (14.2)$$

Vamos denominar por P a partição definida em (14.1) e (14.2).

Finalmente, definimos o comprimento da partição P , ΔP , como o máximo entre todos os comprimentos dos pequenos intervalos definidos em (14.2). Note que o comprimento do intervalo $[x_1, x_2]$ é $x_2 - x_1$. Assim, a partição P e seu comprimento ΔP são dados por

$$P = \{a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b\}$$

e

$$\Delta P = \max \{x_1 - a, x_2 - x_1, \cdots, b - x_{n-1}\}.$$

Exemplo 14.1

Veja representada na **Figura 14.2** a partição $P = \left(1, \frac{5}{4}, 2, \frac{9}{4}, 3\right)$ do intervalo $[1, 3]$.

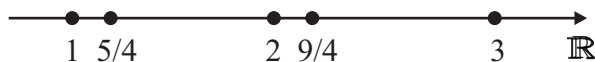


Figura 14.2: Partição P do intervalo $[1, 3]$.

Os intervalos da partição são $\left[1, \frac{5}{4}\right]$, $\left[\frac{5}{4}, 2\right]$, $\left[2, \frac{9}{4}\right]$ e $\left[\frac{9}{4}, 3\right]$, cujos comprimentos são, respectivamente $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$. Selecionando o máximo valor, encontramos que $\Delta P = \frac{3}{4}$ é o comprimento da partição P .

Exercício 14.1

Dado o intervalo $[-1, 1]$, calcule o comprimento da partição P onde

$$P = \left\{-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, 0, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, 1\right\}.$$

Agora estamos em condição de calcular a área que o gráfico de uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ determina sobre o eixo x . Suponha que o gráfico seja como representado na **Figura 14.3**, onde temos também determinada uma certa partição P . O objetivo é calcular $\text{Área}(f)$, a área que a função determina no eixo x . Note que o valor $\text{Área}(f)$ é um número próximo do número $I_P(f)$, este calculado com ajuda da partição P e determinado por

$$I_P(f) = (x_1 - a) \cdot f(x_1) + (x_2 - x_1) \cdot f(x_2) + \cdots + (b - x_n) \cdot f(b).$$

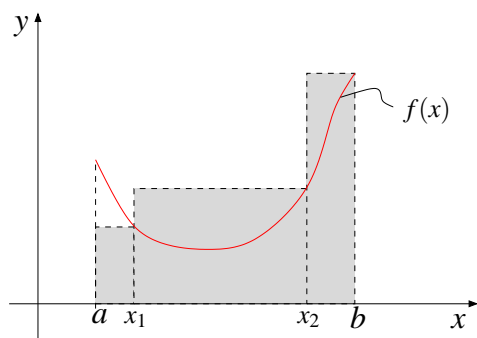


Figura 14.3: Aproximação para a $\text{Área}(f)$.

Este número $I_P(f)$ representa a soma das áreas de um número finito de retângulos, conforme representado na **Figura 14.3**, e é uma aproximação do valor $\int_a^b f(x) dx$. Observe que na **Figura 14.3**, para simplificar, adotamos uma partição com quatro pontos. Estas áreas parciais $I_P(f)$ são denominadas de **somas de Riemann para a função f** .

Você deve manter em mente que $\int_a^b f(x) dx$ representa a área que o gráfico da função determina sobre o eixo x , e este valor é a integral definida da função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Além disso, você pode deduzir examinando o que foi realizado na **Figura 14.3**, que partições P com comprimento muito pequeno determinam valores $I_P(f)$ muito próximos da integral definida, $\text{Área}(f) = \int_a^b f(x) dx$. Volte a examinar a **Figura 14.3** para os detalhes disto que estamos discutindo.

Recorde mais uma vez que $\text{Área}(f) = \int_a^b f(x) dx$ é a integral definida da função f no intervalo $[a, b]$. Também, mais uma vez com apoio da **Figura 14.3**, podemos concluir que valores $I_P(f)$ para a soma de Riemann e $\text{Área}(f)$ podem ser tornados tão próximos quanto se queira através da utilização de partições de comprimento ΔP muito pequenos. Podemos assim pensar em um processo de limite, onde partições P de comprimento ΔP cada vez menores gerariam somas de Riemann $I_P(f)$ cada vez mais próximos de $\text{Área}(f) = \int_a^b f(x) dx$. Esse processo de passagem ao limite caracteriza o método de exaustão e permite o cálculo de integrais definidas. Assim podemos escrever que

$$\lim_{n \rightarrow \infty, \Delta P \rightarrow 0} I_P(f) = \text{Área}(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Exemplo 14.2

Considere a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + x$ e duas partições $P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ e $Q = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$.

Solução: Vamos calcular as somas de Riemann $I_P(f)$ e $I_Q(f)$ relativas a estas partições e assim encontrar valores aproximados da área que o gráfico da função determina no eixo x . De acordo com a **Figura 14.4** temos que

$$I_P(f) = \left(\frac{1}{2} - 0\right) f\left(\frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) f(1).$$

Como $f(x) = x^2 + x$, então

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \text{ e } f(1) = (1)^2 + 1 = 2.$$

Assim,

$$I_P(f) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} + 2\right) = \frac{11}{8} \cong 1,375.$$

Por outro lado,

$$I_Q(f) = \left(\frac{1}{2} - 0\right) f\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) f\left(\frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) f(1).$$

Ou seja,

$$I_Q(f) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4} f(1).$$

Usando dados anteriores e o fato que

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{21}{16}$$

encontramos que

$$I_Q(f) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{21}{16} + \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{77}{64} \cong 1,2.$$

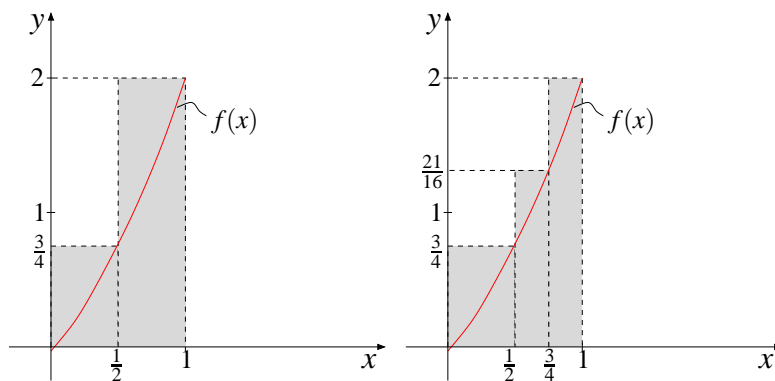



Figura 14.4: Somas parciais de Rieman para $f(x) = x^2 + x$.

 Você pode perceber, através do exame direto na **Figura 14.4**, que entre as duas somas parciais de Rieman calculadas, $I_Q(f) \cong 1,2$, esta mais próxima do valor exato da área determinada pelo gráfico da função no eixo x .

Exemplo 14.3

Calcular $\text{Área}(f) = \int_0^1 f(x) dx$ onde $f(x) = x^2$.

Solução: Para cada $n = 1, 2, 3, \dots$, vamos definir uma partição P_n ,

$$P_n = \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n\},$$

onde

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, x_3 = \frac{3}{n}, \dots, x_{n-1} = 1 - \frac{1}{n}, x_n = 1.$$

Denominando por $I_n(f)$ a soma de Riemann

$$I_n(f) = (x_1 - x_0)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1})f(x_n),$$

encontramos que

$$I_n(f) = \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right).$$

Ou seja que

$$I_n(f) = \frac{1}{n} \left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \frac{3^2}{n^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2} \right).$$

Ou ainda que

$$I_n(f) = \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2).$$

Agora a soma que aparece entre parênteses na expressão anterior é a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais. Você conhece o resultado para esta soma? Pois bem, o resultado conhecido é o seguinte:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Levando este resultado na soma de Riemann anterior, encontramos que

$$I_n(f) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}.$$

Agora fazendo n muito grande, teremos sobre o intervalo $[0, 1]$ uma partição P_n de comprimento muito pequeno e a soma de Riemann $I_n(f)$ estará muito próxima da área que desejamos calcular. Levando o processo ao limite, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, concluímos que

$$\text{Área}(f) = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}.$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO E AVALIAÇÃO DE INTEGRAIS DEFINIDAS


O método da exaustão, ou somas parciais de Riemann, não oferece uma maneira operacional para encontrar o valor da integral definida de uma função $f(x)$. Esse cálculo pode ser realizado com o auxílio do teorema fundamental do cálculo. Este teorema permite lançar uma ponte entre as operações inversas derivação e integração indefinida e a interpretação geométrica da integral definida. Como foge aos nossos objetivos não vamos dar demonstração deste teorema fundamental, ficando com seu enunciado e sua operatividade.

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Seja $F(x)$ uma função diferenciável tal que $F'(x) = f(x)$, onde $f(x)$ é uma função contínua. Então,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

em todo intervalo fechado $[a, b]$, onde as funções estiverem definidas.

 Para uma certa função f , o Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma ligação entre integral indefinida $\int f(x) dx$ e a integral definida $\int_a^b f(x) dx$. Veja que as hipóteses do teorema garantem que $F(x) = \int f(x) dx$. E assim para calcular $\int_a^b f(x) dx$, basta calcular a integral indefinida e avaliar a função encontrada nos extremos de integração.

Para melhor expressar a integral definida de uma função, uma vez encontrada a integral indefinida da função, usamos a notação

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b,$$

onde

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Veja através dos exemplos a seguir como o Teorema Fundamental do Cálculo, junto com o que sabemos sobre derivadas, permite calcular integrais definidas e de quebra calcular as áreas relacionadas aos gráficos das funções.

Exemplo 14.4

Calcular as integrais definidas, identificando as áreas relacionadas dos gráficos das funções.

a) $\int_0^2 x dx$

b) $\int_0^2 x^2 dx$

c) $\int_{-1}^2 (4x^3 + 4) dx$

d) $\int_{-3}^2 (4x^3 + 4) dx$

e) $\int_{-1}^2 e^{3x+2} dx$

Solução:

a) Como

$$\int x dx = \frac{x^2}{2},$$

então

$$\int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 2.$$

Veja o gráfico da função e observe a área destacada.

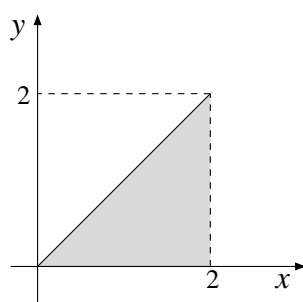


Figura 14.5: Área = $\int_0^2 x \, dx = 2$.

b) Temos que

$$\int_0^2 x^2 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}.$$

Veja a representação gráfica da função e a área que expressa a integral.

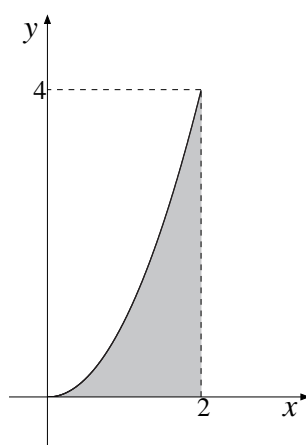


Figura 14.6: Área = $\int_0^2 x^2 \, dx = \frac{8}{3}$.

c) Temos que

$$\int_{-1}^2 (4x^3 + 4) \, dx = x^4 + 4x \Big|_{-1}^2 = [(2)^4 + 4(2)] - [(-1)^4 + 4(-1)] = 27.$$

Veja a representação gráfica da função e a área que expressa a integral.

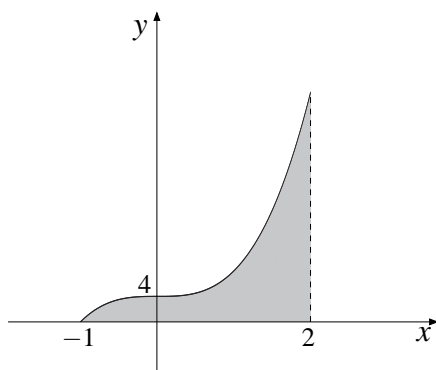


Figura 14.7: Área = $\int_{-1}^2 (4x^3 + 4) dx = 27$.

d) Temos que

$$\begin{aligned} \int_{-3}^2 (4x^3 + 4) dx &= \int_{-3}^{-1} (4x^3 + 4) dx + \int_{-1}^2 (4x^3 + 4) dx \\ \int_{-3}^{-1} (4x^3 + 4) dx &= x^4 + 4x \Big|_{-3}^{-1} = (1 - 4) - (81 - 12) = \\ &= -3 - 69 = -72 \end{aligned}$$

Logo, a área entre o gráfico da função f e o eixo \overrightarrow{Ox} de $x = -3$ a $x = -1$ é igual ao $\left| \int_{-3}^{-1} (4x^3 + 4) dx \right| = |-72| = 72$.

Do item (c), $\int_{-1}^2 (4x^3 + 4) dx = 27$.

Portanto, a área entre o gráfico de f e o eixo \overrightarrow{Ox} de $x = -3$ e $x = 2$ é igual a 99.

Veja a representação gráfica da função e a área que expressa a integral.

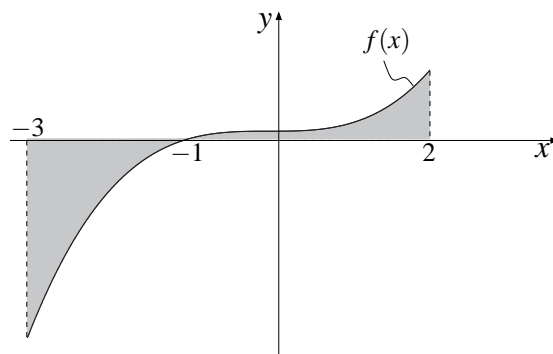


Figura 14.8: Área = $\left| \int_{-3}^{-1} (4x^3 + 4) dx \right| + \int_{-1}^2 (4x^3 + 4) dx = 99$.

e) Note que se $g(x) = e^{3x+2}$ então, $g'(x) = 3e^{3x+2}$. Portanto, $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+2}$ é uma função primitiva para e^{3x+2} . Logo,

$$\int_{-1}^2 e^{3x+2} dx = \frac{1}{3}e^{3x+2} \Big|_{-1}^2 = \frac{1}{3}e^8 - \frac{1}{3}e^{-1}.$$

Ou seja,

$$\int_{-1}^2 e^{3x+2} dx = \frac{1}{3e}(e^9 - 1).$$

Exercício 14.2

Calcule as seguintes integrais:

a) $\int_{-1}^2 \left(\frac{1}{3}x^5 + 2x^5 + 1 \right) dx$

b) $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$

c) $\int_0^4 (x + e^{2x}) dx$

Aula 15

COLETÂNEA DE EXERCÍCIOS

Objetivo

Apresentar uma coletânea de exercícios para uma revisão geral da teoria estudada. Tente fazê-los os exercícios e depois consulte as respostas comentadas.

PARTE I: LOGARITMO E EXPONENCIAL**Exercício**

1. Resolva as equações em \mathbb{R} :
 - (a) $3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x = -3$
 - (b) $\log_5(x+1) + \log_5(x-3) = 1$
2. Determine o domínio da função: $f(x) = \log_x(x^2 + x - 30)$.
3. Resolva em \mathbb{R} : $\log(x+2) + \log(x-2) = \log 3x$.

PARTE II: DOMÍNIO, LIMITES, CONTINUIDADE E ASSÍNTOTAS

4. Seja $f(x) = \frac{4x-3}{2x+4}$.
 - (a) Determine o domínio de f .
 - (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.
 - (c) A reta $x = -2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f ?
 - (d) f possui assíntotas horizontais?
5. Seja $f(x) = \frac{8}{-x^2+4}$.
 - (a) Determine o domínio de f .
 - (b) Determine as assíntotas verticais da função.
 - (c) f possui assíntotas horizontais?
6. Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-7x+10}{x-5}, & x \neq 5 \\ 3, & x = 5 \end{cases}$. Determine:
 - (a) Domínio.
 - (b) f é contínua em todo domínio?
 - (c) f possui assíntotas verticais?

(d) f possui assíntotas horizontais?

7. Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4}, & x \neq \pm 2 \\ \frac{1}{4}, & x = 2 \end{cases}$. Determine:

- (a) Domínio.
- (b) f é contínua em todo domínio?
- (c) f possui assíntotas verticais?
- (d) f possui assíntotas horizontais?

PARTE III: DIFERENCIABILIDADE

8. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{para } x < 1 \\ 2x - 1, & \text{para } x \geq 1 \end{cases}$.

- (a) $f(x)$ é contínua em $x = 1$? Justifique sua resposta.
- (b) $f(x)$ é diferenciável $x = 1$? Justifique sua resposta.

9. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{para } x \geq 2 \\ x, & \text{para } x < 2 \end{cases}$.

- (a) $f(x)$ é contínua em $x = 2$? Justifique sua resposta.
- (b) $f(x)$ é diferenciável $x = 2$? Justifique sua resposta.

10. Calcule a derivada das funções abaixo, determinando o domínio da f e de sua derivada f' :

(a) $f(x) = -\frac{20}{x+2} - \frac{x}{2} + 8$.

(b) $f(x) = \ln(5 - x^2)$.

(c) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

(d) $f(x) = e^{2x} \cdot (2x - 5)$.

(e) $f(x) = \frac{x+10}{x+1}$.

(f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

$$(g) f(x) = \frac{2x}{3} - \sqrt{x}.$$

$$(h) f(x) = (x+1) \cdot \ln(x^3 - 4x).$$

11. Para cada uma das funções abaixo, calcular a derivada nos pontos indicados e interpretar o resultado.

$$(a) f(x) = \frac{x-1}{x+1}, x_0 = 1.$$

$$(b) f(x) = x \cdot \ln x, x_0 = e.$$

PARTE IV: APLICAÇÕES DA DERIVADA – OTIMIZAÇÃO

12. O lucro de uma empresa é expresso pela função $L(x) = -x^3 + 45x^2$, onde x representa a quantidade produzida e vendida pela empresa. Determine:

- (a) Domínio.
- (b) Derivada primeira.
- (c) Derivada segunda.
- (d) Estudo do sinal da derivada primeira, pontos críticos, intervalos de crescimento e decrescimento.
- (e) Estudo do sinal da derivada segunda, concavidade.
- (f) A quantidade que maximiza o lucro e o lucro máximo.

13. A Cia. Alfa Ltda. produz determinado artigo e vende-o a um preço unitário de R\$ 303,00. Estima-se que o custo total CT para produzir mensalmente q unidades seja dado por $CT = q^3 + 3q + 128$, $q \geq 0$. Supondo que toda a produção seja absorvida pelo mercado consumidor, temos que o lucro da empresa é expresso pela função $L(q) = 303q - (q^3 + 3q + 128)$, $q \geq 0$.

Determine:

- (a) Derivada primeira.
- (b) Derivada segunda.
- (c) Os pontos críticos e os intervalos de crescimento e decrescimento de f , fazendo o estudo do sinal da derivada primeira.

- (d) Os intervalos em que o gráfico tem concavidade voltada para cima e os intervalos em que o gráfico tem concavidade voltada para baixo, fazendo o estudo do sinal da derivada segunda.
 - (e) A quantidade que deverá ser produzida mensalmente para se ter lucro máximo.
 - (f) O lucro máximo.
14. Considere a função $f(x) = x^3 - 3x + 4$, determine:
- (a) Domínio.
 - (b) Derivada primeira.
 - (c) Derivada segunda.
 - (d) Estudo do sinal da derivada primeira, pontos críticos, intervalos de crescimento e decrescimento.
 - (e) Estudo do sinal da derivada segunda, concavidade.
 - (f) Máximo, mínimo e ponto de inflexão f (se houver).
15. Considere a função $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 12x + 20$. Determine:
- (a) Derivada primeira.
 - (b) Derivada segunda.
 - (c) Os pontos críticos e os intervalos de crescimento e decrescimento de f , fazendo o estudo do sinal da derivada primeira.
 - (d) Os intervalos em que o gráfico tem concavidade voltada para cima e os intervalos em que o gráfico tem concavidade voltada para baixo, fazendo o estudo do sinal da derivada segunda.
 - (e) Máximos, mínimos e ponto de inflexão, se houver.

PARTE V: INTEGRAL INDEFINIDA

16. Calcule:

- (a) $\int (2t + 15) dt$
- (b) $\int (x^2 + 5x - 7) dx$
- (c) $\int (3t^2 + 8t - 10) dt$
- (d) $\int \left(\frac{2}{x^2} + 1 \right) dx$

17. Usando o método de substituição de variáveis, calcule as integrais indefinidas:

(a) $\int (t+15)^3 dt$

(b) $\int x \cdot \sqrt{x^2 + 10} dx$

(c) $\int 2xe^{x^2} dx$

(d) $\int \frac{1}{x-40} dx$

PARTE VI: INTEGRAL DEFINIDA E CÁLCULO DE ÁREAS

18. Determine a área entre o gráfico de $f(x) = x^3$ e o eixo Ox , de $x = 0$ e $x = 2$.
19. Determine a área entre o gráfico de $f(x) = x^3 + 9$ e o eixo Ox , de $x = 0$ e $x = 2$.
20. Determine a área entre os gráficos das funções $f(x) = x^2 - 4x + 5$ e $g(x) = -x^2 + 4x - 1$.
21. Calcule a área delimitada pela função $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ no intervalo $[0, 1]$.

RESPOSTAS COMENTADAS

PARTE I: LOGARITMO E EXPONENCIAL

1. Resolva as equações em \mathbb{R} :

(a) $3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x = -3$

(b) $\log_5(x+1) + \log_5(x-3) = 1$

Solução: (a) $3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x = -3 \Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$

Substituindo 3^x por y , temos:

$$3y^2 - 10y + 3 = 0$$

$$y = \frac{10 \pm 8}{6} \Rightarrow y_1 = 3 \text{ e } y_2 = \frac{1}{3}$$

$$y_1 = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$y_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -1$$

Logo, o conjunto solução é dado por $S = \{-1, 1\}$

$$(b) \log_5(x+1) + \log_5(x-3) = 1$$

Condição de existência:

$$(I) x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$(II) x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

Fazendo $(I) \cap (II)$, temos $x > 3$.

Utilizando as propriedades do logaritmo, obtemos

$$\log_5(x+1) \cdot (x-3) = 1$$

$$(x+1) \cdot (x-3) = 5 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = 4 \text{ e } x_2 = -2.$$

Logo, $S = \{4\}$.

2. Determine o domínio da função: $f(x) = \log_x(x^2 + x - 30)$.

Solução: Temos que considerar as condições para a existência da base, isto é, $x > 0$ e $x \neq 1$, e a condição de existência do logaritmo $x^2 + x - 30 > 0$.

$$\Delta = 1 + 120 = 121$$

$$x = \frac{-1 \pm 11}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -6 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

$-\infty$		-6	0	5	$+\infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	
$x^2 + x - 30$	$+$	$-$	$-$	$+$	

Fazendo a interseção, concluímos que o domínio da função é dado por $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 5\}$.

3. Resolva em \mathbb{R} : $\log(x+2) + \log(x-2) = \log 3x$.

Solução: Condição de existência:

$$(I) x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

$$(II) x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

Fazendo $(I) \cap (II)$, temos $x > 2$.

Utilizando as propriedades do logaritmo, obtemos

$$\log(x+2) \cdot (x-2) = \log 3x$$

$$(x+2) \cdot (x-2) = 3x$$

$$x^2 - 4 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = 4 \text{ e } x_2 = -1.$$

Logo, $S = \{4\}$.

PARTE II: DOMÍNIO, LIMITES, CONTINUIDADE E ASSÍNTOTAS

4. Seja $f(x) = \frac{4x-3}{2x+4}$.

- (a) Determine o domínio de f .
- (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
- (c) A reta $x = -2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f ?
- (d) f possui assíntotas horizontais?

Solução: (a) O domínio de f , $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$.

(b) Dos limites,

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4x-3}{2x+4} = \frac{-11}{0^+} = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4x-3}{2x+4} = \frac{-11}{0^-} = \infty$$

temos que f não admite limite quando x tende a -2 .

(c) Sim, devido aos limites anteriores.

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-3}{2x+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot (4 - \frac{3}{x})}{x \cdot (2 + \frac{4}{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{4}{x}} = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-3}{2x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot (4 - \frac{3}{x})}{x \cdot (2 + \frac{4}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{4}{x}} = 2;$$

logo, a reta $y = 2$ é uma assíntota horizontal de f .

5. Seja $f(x) = \frac{8}{-x^2+4}$.

- (a) Determine o domínio de f .
- (b) Determine as assíntotas verticais da função.
- (c) f possui assíntotas horizontais?

Solução: (a) O domínio de f é dado por

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 + 4 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}.$$

7. Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4}, & x \neq \pm 2 \\ \frac{1}{4}, & x = 2 \end{cases}$. Determine:

- (a) Domínio.
- (b) f é contínua em todo domínio?
- (c) f possui assíntotas verticais?
- (d) f possui assíntotas horizontais?

Solução: (a) $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

(b) Temos que verificar a continuidade em $x = 2$, isto é, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$. Como

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{(x-2) \cdot (x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x-2) \cdot (x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} = f(2).$$

Logo, f é contínua em $x = 2$. Como f é o quociente de funções contínuas, temos que f é contínua em todo seu domínio.

$$(c) \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-2}{(x-2) \cdot (x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-2}{(x-2) \cdot (x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty.$$

Dos limites anterior, concluímos que f possui uma assíntota vertical em $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = 0$$

(d) e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+2} = 0.$$

Logo, f possui uma assíntota horizontal em $y = 0$.

PARTE III: DIFERENCIABILIDADE

8. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{para } x < 1 \\ 2x - 1, & \text{para } x \geq 1 \end{cases}$.

(a) $f(x)$ é contínua em $x = 1$? Justifique sua resposta.

(b) $f(x)$ é diferenciável em $x = 1$? Justifique sua resposta.

Solução: (a) A função f está definida em $x = 1$ e $f(1) = 1$.

Calculando os limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 1 = 1.$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$, e portanto f é contínua em $x = 1$.

(b) Para saber se f é diferenciável em $x = 1$ temos que usar a definição de derivada, isto é se o $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ existe, então

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

Calculando os limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 1 = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2.$$

Como os limites laterais são iguais, f é diferenciável em $x = 1$

$$\text{e } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2.$$

9. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{para } x \geq 2 \\ x, & \text{para } x < 2 \end{cases}$.

(a) $f(x)$ é contínua em $x = 2$? Justifique sua resposta.

(b) $f(x)$ é diferenciável em $x = 2$? Justifique sua resposta.

Solução: (a) A função f está definida em $x = 2$ e $f(2) = 4 - 2 = 2$.

Calculando os limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 2) = 4 - 2 = 2$$

obtemos $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 = f(2)$ e portanto, f é contínua em $x = 2$.

(b) Para usar a definição de derivada em $x = 2$ calculamos os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{x - 2} = 1.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2 - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x + 2) \cdot (x - 2)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4. \end{aligned}$$

Como os limites laterais são diferentes, f não é diferenciável em $x = 2$.

10. Calcule a derivada das funções abaixo, determinando o domínio da f e de sua derivada f' :

(a) $f(x) = -\frac{20}{x+2} - \frac{x}{2} + 8.$

(b) $f(x) = \ln(5 - x^2).$

(c) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$

(d) $f(x) = e^{2x} \cdot (2x - 5).$

(e) $f(x) = \frac{x+10}{x+1}.$

(f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$

(g) $f(x) = \frac{2x}{3} - \sqrt{x}.$

(h) $f(x) = (x+1) \cdot \ln(x^3 - 4x).$

Solução: (a) $f(x) = -\frac{20}{x+2} - \frac{x}{2} + 8$

$$u(x) = x+2 \quad u'(x) = 1$$

$$f'(x) = -20 \cdot (-1) \cdot (x+2)^{-2} \cdot 1 - \frac{1}{2} = \frac{20}{(x+2)^2} - \frac{1}{2}.$$

Logo, $f'(x) = \frac{20}{(x+2)^2} - \frac{1}{2}.$

$$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}.$$

$$D(f') = \mathbb{R} - \{-2\}.$$

(b) $f(x) = \ln(5-x^2)$

$$u(x) = 5-x^2 \quad u'(x) = -2x$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{5-x^2}$$

$$D(f) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$$

$$D(f') = (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$$

(c) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

$$u(x) = 2x \quad u'(x) = 2$$

$$v(x) = x^2+1 \quad v'(x) = 2x$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x^2+1) - (2x) \cdot (2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}.$$

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

$$D(f') = \mathbb{R}.$$

(d) $f(x) = e^{2x} \cdot (2x-5)$

$$u(x) = e^{2x} \quad u'(x) = 2 \cdot e^{2x}$$

$$v(x) = 2x-5 \quad v'(x) = 2$$

$$f'(x) = 2e^{2x} \cdot (2x-5) + e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x} \cdot (2x-5+1) = 2e^{2x} \cdot (2x-4).$$

Logo, $f'(x) = 4e^{2x} \cdot (x-2).$

$$D(f) = \mathbb{R} \quad D(f') = \mathbb{R}.$$

$$(e) f(x) = \frac{x+10}{x+1}$$

$$u(x) = x+10 \quad u'(x) = 1$$

$$v(x) = x+1 \quad v'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - (x+10) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x-10}{(x+1)^2} = \frac{-9}{(x+1)^2}.$$

$$D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

$$D(f') = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

$$(f) f(x) = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$u(x) = x^2+1 \quad u'(x) = 2x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2+1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2x = x \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$D(f) = \mathbb{R} \quad D(f') = \mathbb{R}.$$

$$(g) f(x) = \frac{2x}{3} - \sqrt{x} = \frac{2x}{3} - (x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$D(f) = [0, \infty) \quad e \quad D(f') = (0, \infty).$$

$$(h) f(x) = (x+1) \cdot \ln(x^3-4x)$$

$$u(x) = x+1 \quad u'(x) = 1$$

$$v(x) = \ln(x^3-4x) \quad v'(x) = \frac{3x^2-4}{x^3-4x}.$$

A condição de existência do logaritmo

$$x^3 - 4x > 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 4) > 0 \Rightarrow x \cdot (x-2) \cdot (x+2) > 0$$

	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$x \cdot (x-2) \cdot (x+2)$	$-$	$+$	$-$	$+$	

Logo, o domínio de f é $D(f) = (-2, 0) \cup (2, \infty) = D(f')$.

11. Para cada uma das funções a seguir, calcular a derivada nos pontos indicados e interpretar o resultado.

$$(a) f(x) = \frac{x-1}{x+1}, x_0 = 1.$$

$$(b) f(x) = x \cdot \ln x, x_0 = e.$$

Solução: (a) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$$u(x) = x-1 \quad u'(x) = 1$$

$$v(x) = x + 1 \quad v'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

$$f'(x_0) = f'(1) = \frac{2}{(1+1)^2} = \frac{2}{4} = 0,5.$$

O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 0)$ é 0,5.

A tendência da função $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, no ponto $x_0 = 1$ é de crescimento $\frac{1}{2}$.

(b) $f(x) = x \cdot \ln x$

$$u(x) = x \quad u'(x) = 1$$

$$v(x) = \ln x \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x_0) = f'(e) = \ln e + 1 = 1 + 1 = 2.$$

O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto (e, e) é 2.

A tendência da função $f(x) = x \ln x$, no ponto $x_0 = e$ é de crescimento 2.

PARTE IV: APLICAÇÕES DA DERIVADA – OTIMIZAÇÃO

12. O Lucro de uma empresa é expresso pela função $L(x) = -x^3 + 45x^2$, onde x representa a quantidade produzida e vendida pela empresa. Determine:
- Domínio.
 - Derivada primeira.
 - Derivada segunda.
 - Estudo do sinal da derivada primeira, pontos críticos, intervalos de crescimento e decréscimo.
 - Estudo do sinal da derivada segunda, concavidade.
 - A quantidade que maximiza o lucro e o lucro máximo.

Solução: (a) $D(L) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Para a análise, temos que considerar $x > 0$.

(b) $L'(x) = -3 \cdot x^2 + 45 \cdot 2x = -3x^2 + 90x$.

(c) $L'(x) = -6x + 90$.

(d) Estudo do sinal da primeira derivada:

$$L'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 90x = 0 \Leftrightarrow 3x \cdot (-x + 30) = 0.$$

Pontos críticos: $x = 0$ e $x = 30$.

	$-\infty$	0	30	$+\infty$
$L'(x) = -3x^2 + 90x$	—	+-	—	
$L(x)$	↓	↑	↓	

Logo, do estudo anterior, podemos concluir que L é decrescente em $(30, \infty)$ e é crescente em $(0, 30)$.

(e) Estudo do sinal da segunda derivada:

$$L''(x) = -6x + 90$$

$$L''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{90}{6} = 15$$

	0	15	$+\infty$
$L''(x) = -6x + 90$	+	—	
$L(x)$	∪	∩	

Do estudo anterior, f possui um ponto de inflexão em $(15, f(15)) = (15, 3375)$. A função é côncava no intervalo $(15, +\infty)$ e é convexa no intervalo $(0, 15)$.

(f) L possui um máximo local em $x = 30$, dado por $L(30) = 13.500$.

13. A Companhia Alfa Ltda. produz determinado artigo e vende-o a um preço unitário de R\$ 303,00. Estima-se que o custo total CT para produzir mensalmente q unidades seja dado por $CT = q^3 + 3q + 128$, $q \geq 0$. Supondo que toda a produção seja absorvida pelo mercado consumidor, temos que o Lucro da empresa é expresso pela função $L(q) = 303q - (q^3 + 3q + 128)$, $q \geq 0$.

Determine:

- (a) Derivada primeira.
- (b) Derivada segunda.
- (c) Os pontos críticos e os intervalos de crescimento e decrescimento de f , fazendo o estudo do sinal da derivada primeira.
- (d) Os intervalos em que o gráfico tem concavidade voltada para cima e os intervalos em que o gráfico tem concavidade voltada para baixo, fazendo o estudo do sinal da derivada segunda.
- (e) A quantidade que deverá ser produzida mensalmente para se ter lucro máximo.
- (f) O lucro máximo.

Solução: (a) $L(q) = -q^3 + 300q - 128$.

$$L'(q) = -3 \cdot q^2 + 300.$$

(b) $L''(q) = -6q$.

(c) Estudo do sinal da primeira derivada:

$$L'(q) = 0 \Leftrightarrow -3q^2 + 300 = 0 \Leftrightarrow 3q^2 = 300 \Leftrightarrow q^2 = 100 \Leftrightarrow q = \pm 10$$

	$-\infty$	-10	10	$+\infty$
$L'(q) = -3q^2 + 300x$	$-$	$+$	$-$	
$L(q)$	\downarrow	\uparrow	\downarrow	

Como $q \geq 0$, do estudo anterior podemos concluir que L é crescente em $(0, 10)$ e decrescente em $(10, \infty)$. Além disso, temos que $q = 10$ é um ponto crítico da função Lucro.

(d) Estudo do sinal da segunda derivada:

$$L''(q) = -6q \Leftrightarrow L''(q) = 0 \Leftrightarrow q = 0$$

	0	$+\infty$
$L''(q) = -6q$	$+$	$-$
$L(q)$	\cup	\cap

Do estudo anterior, L possui um ponto de inflexão em $(0, L(0)) = (0, -128)$ e a função é côncava no intervalo $(0, +\infty)$.

(e) L possui um máximo local em $q = 10$.

$$(f) L(10) = -(10)^3 + 300 \cdot 10 - 128 = -1000 + 3000 - 128 = 2000 - 128 = 1.872.$$

O lucro máximo é R\$ 1872,00.

14. Considere a função $f(x) = x^3 - 3x + 4$, determine:

- (a) Domínio.
- (b) Derivada primeira.
- (c) Derivada segunda.
- (d) Estudo do sinal da derivada primeira, pontos críticos, intervalos de crescimento e de decrescimento.
- (e) Estudo do sinal da derivada segunda, concavidade.
- (f) Máximo, mínimo e ponto de inflexão f (se houver).

Solução: (a) $D(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$$(b) f'(x) = 3 \cdot x^2 - 3.$$

$$(c) f''(x) = 6x.$$

(d) Estudo do sinal da primeira derivada:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(x-1) \cdot (x+1) = 0$$

Pontos críticos: $x = -1$ e $x = 1$.

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x) = 3x^2 - 3$		+	-	+
$f(x)$		↑	↓	↑

Logo, do estudo anterior podemos concluir que f é crescente em $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ e f é decrescente em $(-1, 1)$.

(e) Estudo do sinal da segunda derivada:

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

	0	$+\infty$
$f''(x) = 6x$	-	+
$f(x)$	∩	∪

Do estudo feito anteriormente, f possui um ponto de inflexão em $(0, f(0)) = (0, 4)$.

A função é côncava no intervalo $(-\infty, 0)$ e a função é convexa no intervalo $(0, \infty)$.

(f) f possui um máximo local em $x = -1$, dado por $f(-1) = 6$.

f possui um mínimo local em $x = 1$, dado por $f(1) = 2$.

15. Considere a função $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 12x + 20$. Determine:

- (a) Derivada primeira.
- (b) Derivada segunda.
- (c) Os pontos críticos e os intervalos de crescimento e de decrescimento de f , fazendo o estudo do sinal da derivada primeira.
- (d) Os intervalos em que o gráfico tem concavidade voltada para cima e os intervalos em que o gráfico tem concavidade voltada para baixo, fazendo o estudo do sinal da derivada segunda.
- (e) Máximos, mínimos e ponto de inflexão, se houver.

Solução: Consideremos a função $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 12x + 20$, cujo domínio é $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

(a) $f'(x) = 3 \cdot \frac{x^2}{3} - \frac{7}{2} \cdot 2x + 12 \cdot 1 + 0 = x^2 - 7x + 12 = (x-4) \cdot (x-3)$.

(b) $f''(x) = 2x - 7$.

(c) Pontos críticos: $f'(x) = 0 \rightarrow (x-3) \cdot (x-4) = 0 \rightarrow x = 3$ ou $x = 4$.

	$-\infty$	3	4	$+\infty$
$f'(x) = x^2 - 7x + 12$	+	+	-	+
$f(x)$	↑	↑	↓	↑

Logo, do estudo do sinal anterior podemos concluir que:

f é crescente em $(-\infty, 3) \cup (4, \infty)$ e f é decrescente em $(3, 4)$.

(d) Estudo do sinal da segunda derivada:

$$f''(x) = 2x - 7$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} = 3,5$$

	$-\infty$	$3,5$	$+\infty$
$f''(x) = 2x - 7$	$-$		$+$
$f(x)$	\cap		\cup

A função é côncava no intervalo $(-\infty, 3.5)$ e a função é convexa no intervalo $(3.5, +\infty)$.

(e) f possui um ponto de inflexão em $(3.5, f(3.5)) = (3.5, 33.4166)$.

f possui um máximo local em $x = 3$, dado por $f(3) = \frac{67}{2} = 33.5$.

f possui um mínimo local em $x = 4$, dado por $f(4) = \frac{100}{3} = 33.3$.

PARTE V: INTEGRAL INDEFINIDA

16. Calcule:

(a) $\int (2t + 15) dt$

(b) $\int (x^2 + 5x - 7) dx$

(c) $\int (3t^2 + 8t - 10) dt$

(d) $\int \left(\frac{2}{x^2} + 1 \right) dx$

Solução: (a) $\int (2t + 15) dt = \int 2t dt + 15 \cdot \int dt = t^2 + 15t + C$.

(b) $\int (x^2 + 5x - 7) dx = \int x^2 dx + \int 5x dx - 7 \int dx = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - 7x + C$.

(c) $\int (3t^2 + 8t - 10) dt = 3 \cdot \int t^2 dt + 8 \cdot \int t dt - 10 \int dt = 3 \cdot \frac{t^3}{3} + 8 \cdot \frac{t^2}{2} - 10t + C$.

Logo, $\int (3t^2 + 8t - 10) dt = t^3 + 4t^2 - 10t + C$.

$$(d) \int \left(\frac{2}{x^2} + 1 \right) dx = \int (2 \cdot x^{-2} + 1) dx = 2 \cdot \int x^{-2} dx + \int dx = 2 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + x + C.$$

$$\text{Assim, } \int \left(\frac{2}{x^2} + 1 \right) dx = -2x^{-1} + x + C.$$

17. Usando o método de substituição de variáveis, calcule as integrais indefinidas:

(a) $\int (t+15)^3 dt$

(b) $\int x \cdot \sqrt{x^2 + 10} dx$

(c) $\int 2xe^{x^2} dx$

(d) $\int \frac{1}{x-40} dx$

Solução: (a) Para resolver, vamos fazer uma substituição de variáveis. Seja

$$u(t) = t + 15$$

$$\frac{du}{dt} = 1 \leftrightarrow du = dt.$$

Fazendo a substituição de variáveis na integral, obtemos:

$$\int (t+15)^3 dt = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(t+15)^4}{4} + C.$$

(b) $\int x \cdot \sqrt{x^2 + 10} dx = \int x \cdot (x^2 + 10)^{\frac{1}{2}}.$

Seja $u(x) = x^2 + 10$ $\frac{du}{dx} = 2x \leftrightarrow \frac{du}{2} = x dx.$

Utilizando a substituição de variáveis na integral, obtemos

$$\begin{aligned} \int x(x^2 + 10)^{\frac{1}{2}} dx &= \int u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \cdot \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 3 \cdot u^{\frac{3}{2}} + C = 3 \cdot (x^2 + 10)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

(c) Para resolver, vamos fazer uma substituição de variáveis. Seja

$$u(x) = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \leftrightarrow du = 2x dx$$

Fazendo a substituição de variáveis na integral, obtemos:

$$\int 2xe^{x^2} dx = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C.$$

(d) Seja

$$u(x) = x - 40$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \leftrightarrow du = dx,$$

fazendo a substituição de variáveis na integral, obtemos:

$$\int \frac{1}{x-40} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |x-40| + C.$$

Note que a primitiva só é determinada para valores de $x \in (40, \infty)$.

PARTE VI: INTEGRAL DEFINIDA E CÁLCULO DE ÁREAS

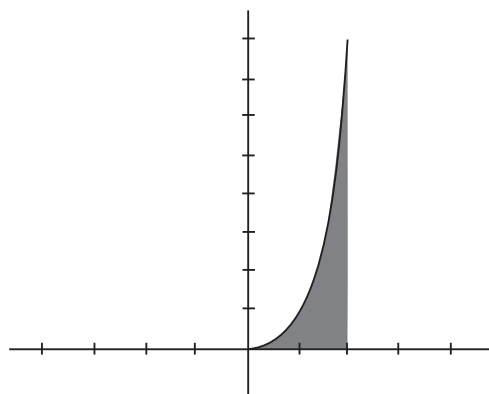
18. Determine a área entre o gráfico de $f(x) = x^3$ e o eixo Ox , de $x = 0$ e $x = 2$.

Solução: Como f é positiva no intervalo $[0, 2]$, a área desejada é dada pela integral definida $\int_0^2 (x^3) dx = F(2) - F(0)$, onde F é a primitiva da função $f(x) = x^3$.

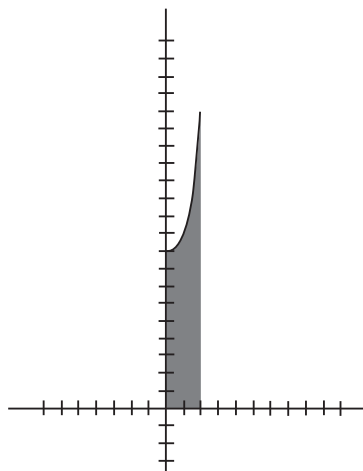
$$\text{Calculando, } F(x) = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

Logo, a área desejada é dada por:

$$\int_0^2 x^3 dx = F(2) - F(0) = \left[\left(\frac{2^4}{4} \right) - \left(\frac{(0)^4}{4} \right) \right] = 4 \text{ u.a.}$$



19. Determine a área entre o gráfico de $f(x) = x^3 + 9$ e o eixo Ox , de $x = 0$ e $x = 2$.



Solução: Como f é positiva no intervalo $[0, 2]$, a área desejada é dada pela integral definida $\int_0^2 (x^3 + 9) dx = F(2) - F(0)$, onde F é a primitiva da função $f(x) = x^3 + 9$.

Calculando, $F(x) = \int (x^3 + 9) dx = \int x^3 dx + 9 \cdot \int dx = \frac{x^4}{4} + 9 \cdot x + C$. Logo, $F(x) = \frac{x^4}{4} + 9x + C$. A área desejada é dada por

$$\int_0^2 (x^3 + 9) dx = F(2) - F(0) = \left[\left(\frac{2^4}{4} + 9 \cdot 2 \right) - \left(\frac{0^4}{4} + 9 \cdot 0 \right) \right] = 4 + 18 = 22 \text{ u.a.}$$

20. Determine a área entre os gráficos das funções $f(x) = x^2 - 4x + 5$ e $g(x) = -x^2 + 4x - 1$.

Solução: O primeiro passo é achar os pontos de interseção entre os gráficos das funções para identificar o intervalo de integração, isto é, resolver $f(x) = g(x)$.

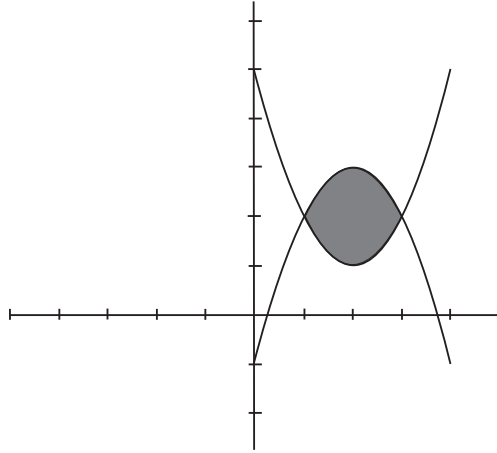
$$x^2 - 4x + 5 = -x^2 + 4x - 1$$

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) = 0 \rightarrow x_1 = 1 \text{ ou } x_2 = 3$$

Logo, as funções se encontram em $x = 1$ e $x = 3$.

O próximo passo é fazer um esboço do gráfico para identificarmos a área desejada.



Do gráfico, obtemos que a área desejada é dada por

$$A = \int_1^3 g(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$$

O próximo passo é calcular cada uma das integrais definidas utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo. Denotemos por A_1 a área abaixo do gráfico de g e por A_2 a área abaixo do gráfico de f .

$A_1 = \int_1^3 g(x) dx = G(3) - G(1)$, onde G é uma primitiva de $g(x) = -x^2 + 4x - 1$. Determinando G :

$$G(x) = \int (-x^2 + 4x - 1) dx = -\int x^2 dx + 4 \cdot \int x dx - \int dx = -\frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} - x + C, \text{ logo } G(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - x + C.$$

$$\begin{aligned} \text{Daí, } \int_1^3 g(x) dx &= G(3) - G(1) = \\ &= \left[\left(-\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 - 3 \right) - \left(-\frac{(1)^3}{3} + 2 - 1 \right) \right] = \\ &= -9 + 18 - 3 - 1 + \frac{1}{3} = 5 + \frac{1}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

$$A_1 = \int_1^3 g(x) dx = \frac{8}{3}.$$

Além disso, $A_2 = \int_1^3 f(x) dx = F(3) - F(1)$, onde F é uma primitiva de $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Determinando F :

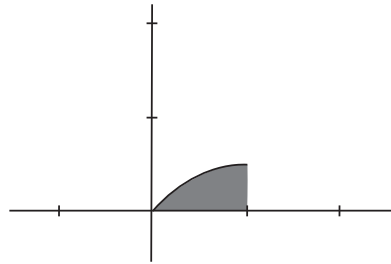
$$F(x) = \int (x^2 - 4x + 5) dx = \int x^2 dx - 4 \cdot \int dx + 5 \int dx = \\ = \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x + C, \text{ logo } F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x + C.$$

$$\text{Daí, } A_2 = \int_1^3 f(x) dx = F(3) - F(1) = \\ = \left[\left(\frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3^2 + 15 \right) - \left(\frac{(1)^3}{3} - 2 + 5 \right) \right] = \\ = 9 - 18 + 15 - 3 - \frac{1}{3} = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}.$$

$$A_2 = \int_1^3 f(x) dx = \frac{8}{3}.$$

$$\text{Com isso, } A = \int_1^3 g(x) dx - \int_1^3 f(x) dx = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ u.a.}$$

21. Calcule a área delimitada pela função $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ no intervalo $[0, 1]$.



Solução: A área é dada pela integral definida $A = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = F(1) - F(0)$, onde $F(x) = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx$. Considere a mudança de variáveis

$$u = x^2 + 1 \\ \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow \frac{du}{2} = 2x dx,$$

a integral pode ser escrita como

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C.$$

$$\text{Então, } A = \frac{1}{2} \ln|1^2 + 1| - \frac{1}{2} \ln|0^2 + 1| = \frac{1}{2} \ln 2 \text{ u.a.}$$



Respostas

Aula 1

Exercício 1.1

1. No intervalo $(-\infty, -2]$: $g'(x) = 2x$, logo g é crescente.
No intervalo $(-2, 2]$: $g'(x) = 0$, logo g é constante.
No intervalo $(2, \infty)$: $g'(x) = -1$, logo g é decrescente.

2. $f(x) = x^2 - 1$ $g(x) = 2x$

(a) $f \circ g(x) = 4x^2 - 1$

(b) $f \circ f(x) = x^4 - 2x^2$

(c) $g \circ f(x) = 2x^2 - 2$

(d) $g \circ g(x) = 4x$

3. $f^{-1}(3) = 5$

4. $f^{-1}(x) = \frac{4x+3}{2-x}$ opção (c)

5. (a) $(f \circ f)(x) = x$

(b) $f^{-1}(x) = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \neq 1$

6. $a = 1$ e $b = \frac{1}{2} = 0,5$

7. $f(f(2)) = -1$

8. $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$ opção (b)

9. $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow f^{-1}(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

Aula 2**Exercício 2.1**

2. (a) $4^x - 3^x = 0 \rightarrow 4^x = 3^x \rightarrow x = 0$ $D(f) = \mathbb{R}^*$

(b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x - 3^x \geq 0 \rightarrow D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

Exercício 2.2

1. (a) -3 (b) $\frac{3}{2}$ (c) -1 (d) 0 (e) $-\frac{1}{2}$

2. $f(g(2)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$

3. 81

4. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$

5. 6

6. (a) $3,4771$ (b) $-2,5229$ (c) $-0,0916$

7. $\log_{0,04} 125 = \frac{3}{2}$

8. $x = 6561$ e $a = 9$

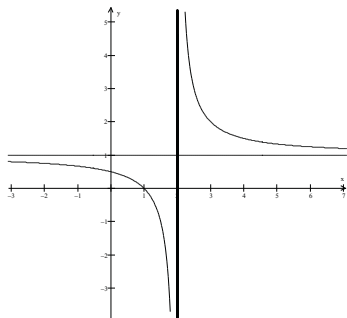
9. $\log_3 x$

Aula 3**Exercício 3.1**

$$Im(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

Exercício 3.2

$$D(f) = (-2, 1]$$

Exercício 3.3**Exercício 3.4**

1. (a) $D(f) = (-\infty, 2] \cup (1, 3]$

(b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

(c) $D(f) = \{t \in \mathbb{R} \mid 2 \leq t < 5\}$

$$3. \quad a_m(t) = t - 3 \quad \cdot \text{ Para } t = 2, \text{ temos } a_m(t) = \frac{v(t) - v(2)}{t - 2} = t - 2$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} (t - 3) = -2 \quad \lim_{t \rightarrow 2} (t - 2) = 0$$

4. $C(1001) - C(1000) = 0,9805$

$$\lim_{x \rightarrow 1000} \frac{C(x) - C(1000)}{x - 1000} = 0,98$$

5. (a) 6 (b) -4 (c) 2 (d) $-2\sqrt{2}$

Aula 4**Exercício 4.1**

(a) $f(-2) = 4$ (b) $f(0) = 4$ (c) $f(2) = 2$

$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} = 4 \text{ logo, } f \text{ não admite limite quando } x \text{ tende a } -2$$

(e) 4 (f) 2

Exercício 4.2

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x}+1 = 2$$

Exercício 4.3

(a) $(-1, 5)$ (b) $[-3, -1]$ (c) $(1, 9)$ (d) $\mathbb{R} - (-7, -1)$

Exercício 4.4

1. (a) $\frac{5}{8}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $-\infty$ (d) 3 (e) $\frac{1}{8}$ (f) 3

2. $a = 1$

3. $a = 2$ ou $a = 0$

4. Funções descontínuas, com saltos, em $x = 1$.

5. (a) f não admite limite quando x tende a -2 .

(b) 2 (c) -2 (d) 2 (e) $g(-2) = 0$ (f) $g(2) = 2$

Aula 5

Exercício 5.1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{9-x}}{x^2 - 6x + 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2 - \sqrt{9-x}) \cdot (2 + \sqrt{9-x})}{(x-1) \cdot (x-5) \cdot (2 + \sqrt{9-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{(x-1) \cdot (x-5) \cdot (2 + \sqrt{9-x})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-1) \cdot (2 + \sqrt{9-x})} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Exercício 5.2

Sabendo-se que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2$ $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 4$, calcule:

(a) -16 (b) 7 (c) $-\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$

Exercício 5.3

1. (a) -2 (b) 5 (c) -1 (d) 2
2. (a) V
(b) F, pois f não pode ser contínua em $x = 3$.
(c) F, pois f não pode ser contínua em $x = 3$.
(d) V
3. (a) 0 (b) 16 (c) 0 (d) 1 (e) 6 (f) 2
4. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 1) = 3$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4x + 5) = 1$, logo f não admite limite quando x tende a 2 .
5. $a = 0$ ou $a = 4$.

Aula 6

Exercício 6.1

- (a) $+\infty$ (b) $-\infty$ (c) $-\infty$ (d) $+\infty$ (e) $+\infty$
 (f) $+\infty$ (g) não existe o limite (h) $-\infty$ (i) $+\infty$

Exercício 6.2

1. (a) $+\infty$ (b) $-\infty$ (c) $+\infty$ (d) -2 (e) $-\infty$
 (f) $-\infty$ (g) -1 (h) $-\infty$ (i) -3 (j) $+\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$
 Logo, $x = 2$ e $x = -2$ são assíntotas verticais de f
3. $D(g) = \mathbb{R} - \{-1, 1, 2\}$ $g(x) = \frac{-1}{(x-2) \cdot (x+1)}$
 Logo, $x = 2$ e $x = -1$ são assíntotas verticais de g
4. $D(f) = \mathbb{R} - \mathbb{N}$ $f(x) = \frac{1}{x-n}, \quad x \in (n-1, n)$
5. $a = 2$

Aula 7

Exercício 7.1

$$\frac{3}{x+2} + \frac{k}{x^2-4} = \frac{3 \cdot (x-2) + k}{x^2-4} = \frac{3x-6+k}{(x-2) \cdot (x+2)}$$

$$3x-6+k = 3 \cdot (x+2) \rightarrow k = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \left[\frac{3}{x+2} + \frac{12}{x^2-4} \right] = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3(x+2)}{(x-2) \cdot (x+2)} = -\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left[\frac{3}{x+2} + \frac{12}{x^2-4} \right] = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3(x+2)}{(x-2) \cdot (x+2)} = -\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left[\frac{3}{x+2} + \frac{12}{x^2-4} \right] = -\frac{3}{4}$$

Para $k = 0$, temos $3x-6+k = 3x-6 = 3 \cdot (x-2)$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \left[\frac{3}{x+2} + \frac{0}{x^2-4} \right] = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3}{(x+2)} = \frac{3}{0^-} = -\infty.$$

Exercício 7.2

(a) $+\infty$ (b) $-\infty$ (c) $-\infty$ (d) $+\infty$ (e) $+\infty$ (f) $+\infty$

Exercício 7.3

1. (a) $-\infty$ (b) ∞ (c) ∞ (d) $-\infty$ (e) -1 (f) $\frac{1}{3}$
 (g) 0 (h) ∞ (i) $-\infty$ (j) $\sqrt{2}$ (l) $\frac{2}{3}$ (m) ∞ (n) ∞
2. (a) assíntota vertical: $x = 3$; assíntota horizontal: $y = 0$
 (b) assíntota vertical: $x = 5$; assíntota horizontal: $y = 3$
 (c) assíntota vertical: $x = 0$
 (d) assíntota vertical: $x = 1$ e $x = -1$; assíntota horizontal: $y = 0$
 (e) assíntota vertical: $x = 3$ e $x = -2$; assíntota horizontal: $y = 0$
 (f) assíntota horizontal: $y = 0$
 (g) assíntota horizontal: $y = -\sqrt{7}$

(h) assíntota vertical: $x = 2$; assíntota horizontal: $y = \frac{1}{2}$
e $y = -\frac{1}{2}$

3. (a) 0 (b) 0 (c) ∞ (d) 0 (e) 0 (f) 0

4. (a) $a > 0; n \geq 3$ (b) $a < 0; n \geq 3$ (c) $a = 1; n = 2$
(d) $a = -1; n = 2$ (e) $a \neq 0; n < 2$

5. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2$

Aula 8

Exercício 8.1

(a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x^2 - 1| - 3}$

Para determinar o domínio de f , precisamos estudar o sinal de $|x^2 - 1|$. Feito isso, obtemos que $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ quando $x \geq 1$ ou $x \leq -1$ e $|x^2 - 1| = -x^2 + 1$ quando $-1 < x < 1$.

$$\text{Logo, } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}, & x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1 \text{ com } x \neq \pm 2 \\ \frac{x^2 - 1}{-x^2 - 2}, & -1 < x < 1 \end{cases} \quad \text{e } f$$

é contínua em todo o domínio $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

(b) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 8x + 12)$ seu domínio $\mathbb{R} - \{0, 2, 6\}$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{-x^2 - 2} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{-x^2 - 2} = \frac{0}{-3} = 0.$$

Como $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$, temos que f é contínua em todo o seu domínio.

Exercício 8.2

$$x^3 - x^2 - x = x \cdot (x^2 - x - 1) = 0$$

$$1. \quad (a) \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Logo, f é contínua em seu domínio $D(f) = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \infty\right)$.

(b) f é contínua em seu domínio $D(f) = (-\infty, 2) \cup (6, \infty)$.

(c) f é contínua em seu domínio $D(f) = (-\infty, 2) \cup (6, \infty) - \{0\}$.

$$2. \quad (a) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1-x-1}{x-2} = \frac{-x}{x-2}, & x \leq 1 \\ \frac{-1-x-1}{x-2} = 1, & x > 1 \text{ e } x \neq 2 \end{cases} \quad \text{logo, } f \text{ é contínua em } \mathbb{R} - \{2\}.$$

(b) $f(x) = 3x + 4$, para $x \neq 1$, logo, f é contínua em $\mathbb{R} - \{1\}$.

(c) f é contínua em seu domínio $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{3}\right\}$.

Aula 9

Exercício 9.1

$f'(x) = 3x^2 - 1$
 $f'(-1) = 3 - 1 = 2$ então, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(-1, -1)$ tem coeficiente angular 2. Sua equação é dada por $y = 2x + 1$.

Exercício 9.2

$$(a) \quad f(6) = \frac{215}{37} \quad f(-2) = -\frac{9}{5}$$

$$\Delta y = f(6) - f(-2) = \frac{215}{37} - \left(-\frac{9}{5}\right) = \frac{1408}{185}$$

$$\Delta x = 6 - (-2) = 8$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{176}{185}$$

$$(b) f(6) = \sqrt[3]{215} \quad f(-2) = \sqrt[3]{-9}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{215} - \sqrt[3]{-9}}{8}$$

Exercício 9.3

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} =$$

$$= 3x_0^2 + 3x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x_0^2 + 3x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] = 3x_0^2.$$

$$\text{Logo, } f'(x) = 3x^2.$$

Exercício 9.4

$$(a) D(f) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x^2 - x$$

$$(b) D(g) = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$$

$$g'(x) = \frac{(-4x^3 + 2) \cdot (x^3 - x) - (-x^4 + 2x - 1) \cdot (3x^2 - 1)}{(x^3 - x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-x^6 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1}{(x^3 - x)^2}$$

Exercício 9.5

$$(a) C_{Me} = \frac{f(6)}{6} = \frac{5}{716}$$

$$(b) f(10) = \frac{100 - 10}{1000 + 500} = \frac{9}{150} = \frac{3}{50}$$

$$\Delta y = f(10) - f(6) = \frac{3}{50} - \frac{15}{358} = \frac{1715}{1790} = \frac{343}{358}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{343}{358} \cdot \frac{1}{4} = \frac{343}{1422}$$

$$(c) \quad f'(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - 1000x + 500}{(x^3 + 500)^2}$$

$$f'(5) = \frac{5^4 - 2 \cdot 5^3 - 1000 \cdot 5 + 500}{(5^3 + 500)^2} = -\frac{1}{625}$$

Aula 10

Exercício 10.1

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \cdot (x^2 - 1) = x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \frac{5}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

Exercício 10.2

$$f(x) = h(g(x)), \text{ onde } g(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \text{ e } h(x) = e^x, f'(x) = g'(x) \cdot h'(g(x))$$

$$g'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - (x + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2}{(x^2 + 1)^2}, \quad h'(x) = e^x, \quad \text{logo,}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2}{(x^2 + 1)^2} \cdot e^{\frac{x+1}{x^2+1}}.$$

Exercício 10.3

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2\sqrt{x} - 2x > 0\} = (1, \infty)$$

$$f'(x) = \frac{1 - 2\sqrt{x}}{2x(1 - \sqrt{x})}$$

Para determinarmos a segunda derivada, sejam

$$u(x) = 1 - 2\sqrt{x} \quad u'(x) = -x^{-\frac{1}{2}}$$

$$v(x) = 2x(1 - \sqrt{x}) \quad v'(x) = 2 - 3x^{\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{-x^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x - 2x^{\frac{3}{2}}) - (1 - 2\sqrt{x}) \cdot (2 - 3x^{\frac{1}{2}})}{4x^2(1 - \sqrt{x})^2} =$$

$$= \frac{-2x^{-\frac{1}{2}} + 4x - 2 + 3x^{\frac{1}{2}} + 4\sqrt{x} - 6x}{4x^2(1 - \sqrt{x})^2} =$$

$$= \frac{5\sqrt{x} - 2x - 2}{4x^2(1 - \sqrt{x})^2}.$$

Exercício 10.4

$$\begin{aligned} 1. \quad (a) \quad f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln(x^2 - 1) + x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2x}{x^2 - 1} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \cdot \ln(x^2 - 1) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2x}{x^2 - 1} + \\ &\quad x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \cdot \ln(x^2 + 1) + x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} + x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad f'(x) &= \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} \\ f''(x) &= \frac{-4x \cdot (x^2 + 1)^2 - (-2x^2 + 2) \cdot 4x \cdot (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} = \\ &= \frac{-4x \cdot (x^2 + 1) \cdot [x^2 + 1 - 2x^2 + 2]}{(x^2 + 1)^4} = \\ &= \frac{-4x \cdot (-x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad (a) \quad D(f) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 4x \geq 0 \text{ e } x^2 + 3x + 2 \neq 0\} = \\ &= (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup [2, \infty). \\ f'(x) &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (x^3 - 4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 - 4) \cdot (x^2 + 3x + 2) - (x^3 - 4x)^{\frac{1}{2}} \cdot (2x + 3)}{(x^2 + 3x + 2)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (x^3 - 4x)^{-\frac{1}{2}} [3x^4 - 4x^2 + 9x^3 - 12x + 6x^2 - 8 - 2x^4 + 8x^2 - 3x^3 + 12x]}{(x^2 + 3x + 2)^2} \\ f'(x) &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (x^3 - 4x)^{-\frac{1}{2}} [x^4 + 10x^2 + 6x^3 - 8]}{(x^2 + 3x + 2)^2}. \end{aligned}$$

Para determinar f'' , temos que calcular as derivadas do numerador e do denominador e depois utilizar a regra do quociente.

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2}(x^3 - 4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot [x^4 + 10x^2 + 6x^3 - 8] \\ u'(x) &= -\frac{1}{4}(x^3 - 4x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (3x^2 - 4) [x^4 + 10x^2 + 6x^3 - 8] + \\ &\quad \frac{1}{2}(x^3 - 4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot [4x^3 + 20x + 18x^2] \\ v(x) &= (x^2 + 3x + 2)^2 \quad v'(x) = 2 \cdot (x^2 + 3x + 2) \cdot (2x + 3) \end{aligned}$$

$$(b) D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 4x > 0 \text{ e } x \neq -1\} = (-2, 0) \cup (2, \infty).$$

$$f(x) = \frac{\log(x^3 - 4x)}{x + 1}$$

$$u(x) = \log(x^3 - 4x) \quad u'(x) = \frac{3x^2 - 4}{\ln 10 \cdot (x^3 - 4x)}$$

$$v(x) = x + 1 \quad v'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{\frac{3x^2 - 4}{\ln 10 \cdot (x^3 - 4x)} \cdot (x + 1) - \log(x^3 - 4x)}{(x + 1)^2}$$

Para determinar f'' , temos que calcular as derivadas do numerador e denominador e depois utilizar a regra do quociente.

$$f'(x) = \frac{\frac{3x^2 - 4}{\ln 10 \cdot (x^3 - 4x)} \cdot (x + 1) - \log(x^3 - 4x)}{(x + 1)^2}$$

$$u(x) = \frac{3x^3 - 4x + 3x^2 - 4}{\ln 10 \cdot (x^3 - 4x)} \cdot (x + 1) - \log(x^3 - 4x)$$

$$u'(x) = \frac{(9x^2 - 4 + 6x) \cdot \ln 10 \cdot (x^3 - 4x) - (3x^3 - 4x + 3x^2 - 4) \cdot \ln 10 \cdot (3x^2 - 4)}{[\ln 10 \cdot (x^3 - 4x)]^2} -$$

$$\frac{3x^2 - 4}{\ln 10 \cdot (x^3 - 4x)} =$$

$$= \frac{\ln 10 [9x^5 - 4x^3 + 6x^4 - 36x^3 + 16x - 24x^2 - 9x^5 + 24x^3 - 9x^4 + 24x^2 - 16x - 16]}{[\ln 10 \cdot (x^3 - 4x)]^2}$$

$$u'(x) = \frac{\ln 10 [-6x^4 - 16x - 16]}{[\ln 10 \cdot (x^3 - 4x)]^2}$$

$$v(x) = (x + 1)^2 \quad v'(x) = 2x + 2$$

$$f''(x) = \frac{\frac{\ln 10 [-6x^4 - 16x - 16]}{[\ln 10 \cdot (x^3 - 4x)]^2} \cdot (x + 1)^2 - \left[\frac{3x^3 - 4x + 3x^2 - 4}{\ln 10 \cdot (x^3 - 4x)} - \log(x^3 - 4x) \right] \cdot (2x + 2)}{(x + 1)^4}$$

Aula 11

Exercício 11.1

(a) $f(x) = \log(x^2 - 9)^{\frac{1}{2}}$ a função não está definida no intervalo em questão, pois seu domínio é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9 > 0\} = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

(b) $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{7}{4}\ln x$

$$g'(x) = x + 4 + \frac{7}{4x}$$

$$g'(x) = 0 \leftrightarrow x + 4 + \frac{7}{4x} = 0 \leftrightarrow \frac{4x^2 + 16x + 7}{4x} = 0 \leftrightarrow 4x^2 + 16x + 7 = 0$$

$$\Delta = 256 - 112 = 144$$

$$x = \frac{-16 \pm 12}{8} \begin{cases} x_1 = \frac{-16 + 12}{8} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}; \\ x_2 = \frac{-16 - 12}{8} = \frac{-28}{8} = \frac{-7}{2} \end{cases}$$

Através das raízes podemos estudar o sinal da primeira derivada:

$$g'(x) = x + 4 + \frac{7}{4x} = \frac{4x^2 + 16x + 7}{4x}$$

$$g'(x) > 0 \leftrightarrow x \in \left(\frac{-7}{2}, \frac{-1}{2}\right) \cup (0, \infty)$$

$$g'(x) < 0 \leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{-7}{2}\right) \cup \left(\frac{-1}{2}, 0\right)$$

Como o domínio de g é $(0, \infty)$, temos que g é crescente em todo domínio e não possui pontos críticos. Note que as raízes são fundamentais para o estudo do sinal de uma função.

$$(c) \ h(x) = \frac{1}{x^2 - 8x + 17} = (x^2 - 8x + 17)^{-1}$$

$$h'(x) = -1 \cdot (x^2 - 8x + 17)^{-2} = \frac{-1}{(x^2 - 8x + 17)^2},$$

$$h'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, h é decrescente em todo o seu domínio e não possui pontos críticos e, portanto, máximos e mínimos locais.

Exercício 11.2

$$f(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$D(f) = [-1, 1]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 - x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$$

(a) f' é crescente em $(-\infty, 0)$.

(b) f' é decrescente em $(0, \infty)$.

- (c) f possui um máximo local em $x = 0$ e o valor máximo de f é $f(0) = 1$.

Considerando a função g , temos

$$g(x) = -x^3 + 2$$

$$g'(x) = -3x^2$$

$$g'(x) = 0 \leftrightarrow -3x^2 = 0 \leftrightarrow x = 0$$

Através do estudo do sinal da primeira derivada de g , obtemos que g é decrescente em $\mathbb{R} - \{0\}$ e que g não possui máximos e mínimos locais.

Exercício 11.3

$$f(x) = 4x^3 + x^2 - 2x$$

$$f'(x) = 12x^2 + 2x - 2$$

$$f''(x) = 24x + 2$$

$$(a) \quad f''\left(-\frac{4}{3}\right) = 24 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 2 = -32 + 2 = -30.$$

$$(b) \quad f''\left(\frac{3}{2}\right) = 24 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 2 = 36 + 2 = 38.$$

Exercício 11.4

$$f(x) = x^5$$

$$f'(x) = 5x^4$$

$$f''(x) = 20x^3$$

$$f''(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$$

$$f''(x) > 0 \leftrightarrow x > 0$$

$$f''(x) < 0 \leftrightarrow x < 0$$

Logo, como $f''(0) = 0$, e a segunda derivada mudou de sinal em $x = 0$; isto implica a curva mudar de concavidade em $x = 0$, logo, $(0, 0)$ é um ponto de inflexão de f .

Aula 12

Exercício 12.1

Note que

$$3x^2 + 6x - 1 \geq -4 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0.$$

Agora,

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0,$$

o que observamos é uma expressão verdadeira.

Exercício 12.2

1. O **custo de produção** $C(x)$ e a receita de vendas do produto $R(x)$ são dadas pelas equações

$$C(x) = x^3 + 12.000x + 5.000 \text{ e } R(x) = 1.200x.$$

O lucro total $L(x)$ é dado por $L(x) = R(x) - C(x)$. Assim,

$$L(x) = 1.200x - (x^3 + 12.000x + 5.000) = -x^3 + 10.800x - 5.000.$$

Para encontrar o nível de produção que determina um lucro máximo, devemos encontrar um valor x_0 tal que $L'(x_0) = 0$ e $L''(x_0) < 0$.

Temos que

$$L'(x) = -3x^2 + 10.800 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{10.800}{3} = 3.600 \Leftrightarrow x = \pm 60.$$

Como só interessa o resultado positivo, temos que $x_0 = 60$. Além disso, como

$$L''(x_0) = -6x_0 = -360 < 0,$$

então, a produção de 60 unidades diárias representa o estágio de lucro máximo.

2. Para os itens a) e b), precisamos calcular as derivadas das funções.

(a) Temos que

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 9) - 2x(x - 4)}{(x^2 + 9)^2} = -\frac{-x^2 + 8x + 9}{(x^2 + 9)^2} = -\frac{(x - 9)(x + 1)}{(x^2 + 9)^2}.$$

Assim, temos que:

$f'(x) > 0$ se $x \in (-1, 9)$. Então, $f(x)$ é crescente neste intervalo;

$f'(x) < 0$ se $x \in (-\infty, -1) \cup (9, +\infty)$. Então, $f(x)$ é decrescente nesta união de intervalos.

Por outro lado, $f'(x) = 0$ se $x = -1$ ou $x = 9$ e

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x^2 + 9)^2(-2x + 8) - 4x(x^2 + 9)(-x^2 + 8x + 9)}{(x^2 + 9)^4} \\ &= \frac{2x^3 - 28x^2 - 54x + 72}{(x^2 + 9)^3}. \end{aligned}$$

Como $f''(-1) = \frac{31}{100} > 0$ e $f''(9) = -\frac{1.124}{2.025} < 0$, isto implica que $x = -1$ é ponto de mínimo local e $x = 9$ é ponto de máximo local.

Veja na figura a seguir a representação gráfica da função.

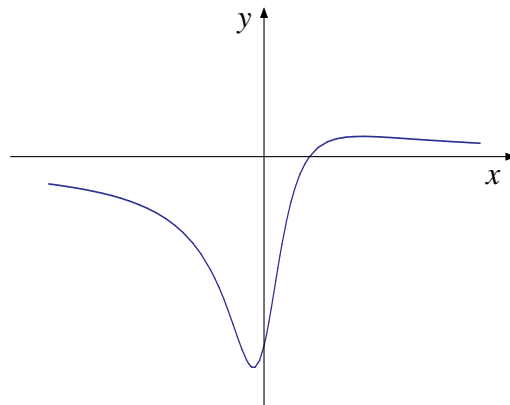


Gráfico da função $f(x) = \frac{x-4}{x^2+9}$.

(b) Temos que

$$g'(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x - 4).$$

Portanto,

$g'(x) < 0$ se $x \in (0, 4)$. Então, $g(x)$ é decrescente neste intervalo;

$g'(x) > 0$ se $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Então, $g(x)$ é crescente nesta união de intervalos abertos.

Por outro lado, $g'(x) = 0$ se $x = 0$ ou $x = 4$ e

$$g''(x) = 4x^3 - 12x^2.$$

Como

$$g''(0) = 0 \text{ e } g''(4) = 64 > 0,$$

podemos garantir a princípio que $x = 4$ é um ponto de mínimo. Para o ponto $x = 0$, precisamos continuar calculando derivadas.

Temos que

$$g'''(x) = 12x^2 - 24x \text{ e } g''''(x) = 24x - 24.$$

Assim, temos que

$$g'(0) = g''(0) = g'''(0) = 0 \text{ e } g''''(0) > 0$$

garantindo que $x = 0$ é um ponto de mínimo local para a função $g(x)$. Veja na figura a seguir a representação gráfica da função.

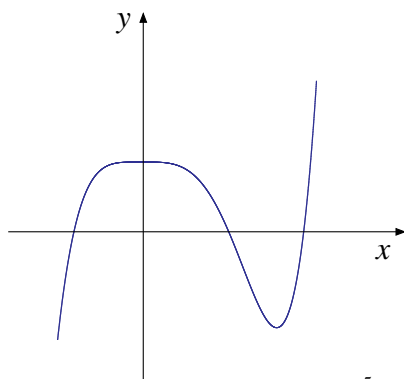


Gráfico do polinômio $g(x) = \frac{x^5}{5} - x^4 + 15$.

Aula 13

Exercício 13.1

$$(a) \int \sqrt[4]{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{4}} \, dx = \frac{1}{\frac{1}{4} + 1} x^{\frac{1}{4} + 1} + C = \frac{4}{5} \sqrt[4]{x^5} + C.$$

$$(b) \int (x^3 + 2)x^2 dx = \int (x^5 + 2x^2) dx = \frac{x^6}{6} + \frac{2x^3}{3} + C.$$

Exercício 13.2

a) Como

$$(1 - 2x)^4 = 1 - 8x + 24x^2 - 32x^3 + 16x^4,$$

então,

$$\int (1 - 2x)^4 dx = x - 4x^2 + 8x^3 - 8x^4 + \frac{16}{5}x^5 + C.$$

b) Podemos, como no item anterior, desenvolver o produto e integrar termo a termo. Outro modo de resolver a integral é definindo a função

$$f(x) = (1 + 2x^2) \Rightarrow f'(x) = 4x.$$

Logo, a integral que precisamos calcular se escreve como

$$\int x(1 - 2x^2) dx = \frac{1}{2} \int 2f'(x) \cdot f(x) dx.$$

Mas,

$$\int 2f'(x) \cdot f(x) dx = \frac{1}{2}f^2(x) + C.$$

Assim:

$$\int x(1 - x^2) dx = \frac{1}{2}f^2(x) + C = \frac{1}{2}(1 - 2x^2)^2 + C.$$

c) Devemos realizar o cálculo da integral pelo Método de Integração por Partes. Assim definindo

$$u'(x) = x \text{ e } v(x) = \log(x) \text{ implicam } u(x) = \frac{x^2}{2} \text{ e } v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Assim,

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v'(x) dx = \frac{x^2}{2}\log(x) - \int \frac{x^2}{2}x dx.$$

Logo,

$$\int x\log(x) dx = \frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^4}{8} + C.$$

- d) De novo usando o Método de Integração por Partes definimos

$$u'(x) = e^x \text{ e } v(x) = x^3 \text{ implicam } u(x) = e^x \text{ e } v'(x) = 3x^2.$$

Assim,

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v'(x) dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x dx$$

e podemos escrever que

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3I_1 \text{ onde } I_1 = \int x^2 e^x dx.$$

Para continuar, precisamos calcular a integral I_1 . De novo usando o Método de Integração por Partes definimos

$$u'(x) = e^x \text{ e } v(x) = x^2 \text{ implicam } u(x) = e^x \text{ e } v'(x) = 2x.$$

Assim,

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v'(x) dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$$

e podemos escrever que

$$I_1 = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2I_2, \text{ onde } I_2 = \int xe^x dx.$$

E mais uma vez, para continuar, precisamos calcular a integral I_2 . De novo usando o Método de Integração por Partes definimos

$$u'(x) = e^x \text{ e } v(x) = x \text{ implicam } u(x) = e^x \text{ e } v'(x) = 1.$$

Assim,

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v'(x) dx = xe^x - \int e^x dx$$

e podemos escrever que

$$I_2 = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Como

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3I_1 = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2I_2) = (x^3 - 3x^2)e^x + 6I_2.$$

Também,

$$\int x^3 e^x dx = (x^3 - 3x^2)e^x + 6(x-1)e^x + C.$$

Finalmente

$$\int x^3 e^x dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C.$$

Aula 14

Exercício 14.1

Os intervalos da partição são $\left[-1, -\frac{2}{3}\right]$, $\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\right]$, $\left[-\frac{1}{6}, 0\right]$, $\left[0, \frac{3}{8}\right]$, $\left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right]$, $\left[\frac{5}{8}, 1\right]$ cujos comprimentos são, respectivamente, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{8}$. Selecionando o máximo valor, encontramos que $\Delta P = \frac{1}{2}$ é o comprimento da partição.

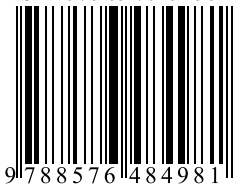
Exercício 14.2

$$(a) \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{3}x^5 + 2x^5 + 1 \right) dx = \frac{7x^6 + 18x}{19} \Big|_{-1}^2 = \frac{153}{6}.$$

$$(b) \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^3 = \ln 3.$$

$$(c) \int_0^4 (x + e^{2x}) dx = \frac{x^2 + e^{2x}}{2} \Big|_0^4 = \frac{15 + e^8}{2}.$$

ISBN 978-85-7648-498-1



9 788576 484981



UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense



Universidade Federal Fluminense



Provedora de acesso à Cidadania



FAPERJ

Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro



**GOVERNO DO
Rio de Janeiro**

SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA



**UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL**

Ministério
da Educação

