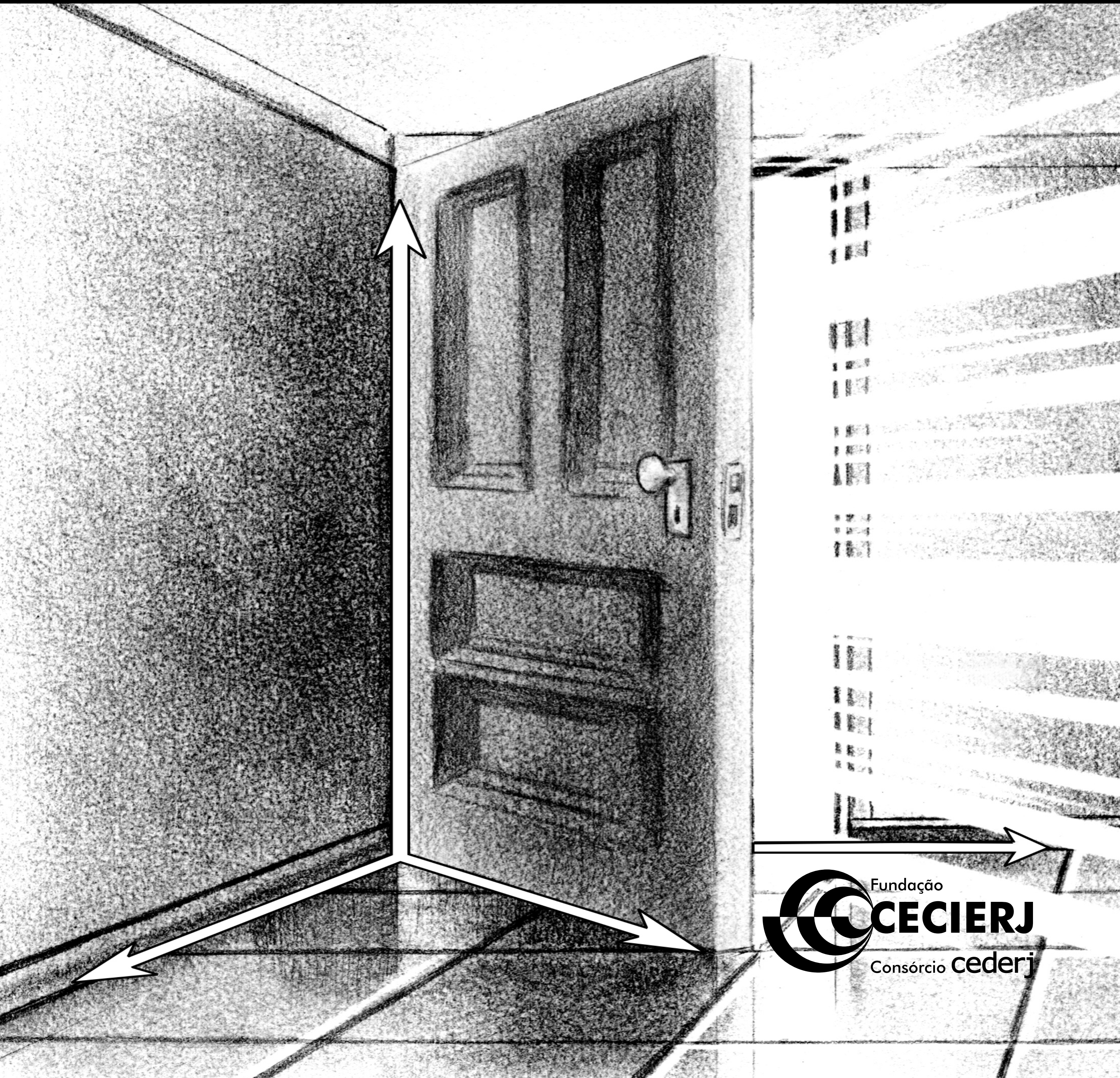
Módulo 1

Volume único

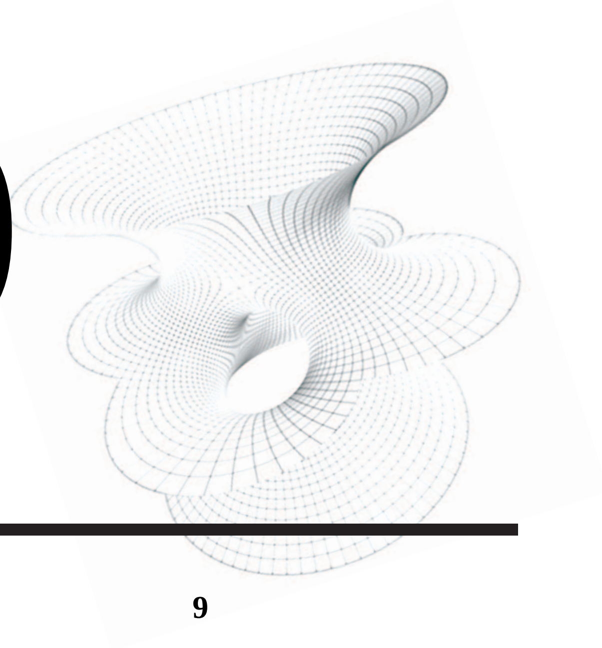
Regina Célia Moreth Bragança

Carderno de Coordenação da Disciplina Álgebra Linear II



Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Capítulo 0



LINE1
LINE2

INTRODUÇÃO

Caros alunos, este livro é uma forma de me aproximar de vocês, e isso é muito bom! Fui coordenadora de Álgebra Linear II por mais de três anos e, ao longo deste tempo, para que o curso se desenvolvesse bem, facilitando o estudo de vocês, fizemos muitos exercícios programados, os nossos EPs. Deixei a coordenação da disciplina, no primeiro semestre de 2007, quando assumi o cargo de vice-coordenadora do curso de Matemática a distância. Decidi então juntar todo material dos Exercícios Programados e formar este caderno de exercícios.

É muito importante, para um matemático, o estudo de Álgebra Linear. O conteúdo estudado neste curso, como Autovetores e Autovalores, será usado também no estudo de equações diferenciais e em sistemas dinâmicos. Para estudar esta disciplina, você deve, em primeiro lugar, ler as aulas no módulo, acompanhando a programação do professor, depois tente fazer todos os exercícios propostos, se tiver alguma dúvida, procure no seu pólo os tutores ou os seus amigos que estão inscritos nesta disciplina. Somente depois disso você deve fazer os exercícios contidos aqui, neste Caderno de Exercícios de Álgebra Linear II.

Espero que vocês aproveitem bem esse material!

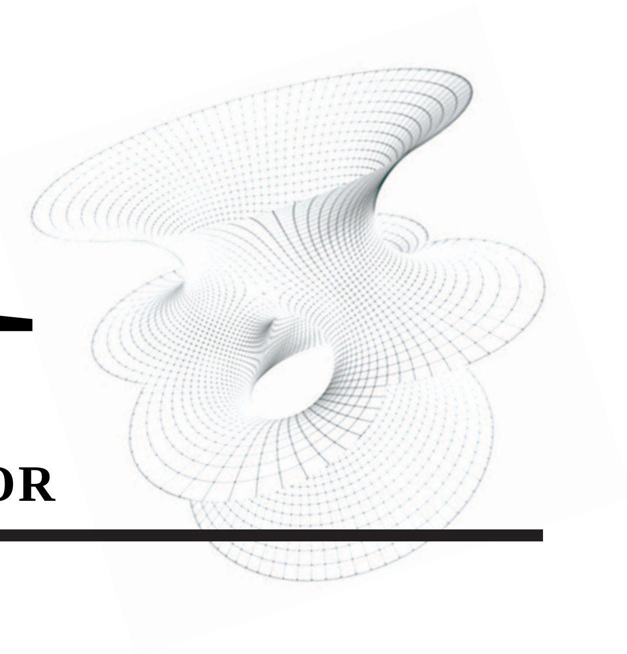
Na resolução dos exercícios, neste livro, coloquei algumas observações, dentro de boxes, para, desta forma, ajudar vocês neste caminho do aprender.

Vamos começar dividindo o nosso curso em quatro capítulos e um apêndice. O Capítulo 1 contém os exercícios referentes a Autovetor e Autovalor (Aulas de 1 a 8); o Capítulo 2, exercícios sobre Matrizes Ortogonais, Transformações Lineares – Planas e Espaciais (Aulas 9 a 21); o Capítulo 3 sobre Matrizes Simétricas, Teorema Espectral e a Decomposição Espectral (Aulas 22 e 23); o Capítulo 4 sobre Operadores Auto-adjuntos, Formas Bilineares, Formas Quadráticas, Cônicas, Quádricas e Autovalor Complexo (Aulas 24 a 29). Por fim, no Apêndice, colocaremos exercícios sobre toda a matéria.

Desejo a vocês um bom estudo!

Regina Moreth

Capítulo 1



Autovetor e Autovalor

É muito importante para um matemático o estudo de Autovetores e Autovalores, pois esses conceitos serão usados também no estudo de equações diferenciais e em sistemas dinâmicos. É importante para o estudo de Álgebra Linear II que você leia o módulo com atenção e faça todos os exercícios propostos.

Neste primeiro capítulo, os exercícios aqui envolvidos fazem parte das oito primeiras aulas do Módulo de Álgebra Linear II. Começamos com exercícios simples que dependem somente da compreensão da definição deste assunto, logo depois passamos para o cálculo dos autovetores e autovalores, a diagonalização de matrizes e a diagonalização dos operadores lineares.

Agora, vamos lá. Ao estudo!

Exercícios

1. Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, o número real λ é chamado de autovalor de A se existe um vetor não-nulo v (chamado de autovetor) tal que $Av = \lambda v$. Verifique em cada caso:

a) se v é um autovetor da matriz A. Caso seja, determine o autovalor associado a este autovetor.

1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}, \quad v = (1,2)$

2) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad v = (1,1)$

3) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad v = (1,1)$

4) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad v = (1,-2)$

5) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad v = (0,1)$

6) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad v = (2,-1,1)$

b) se λ é um autovalor de A. Caso seja, determine um autovetor associado a este autovalor.

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 3$

2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 1$

3) $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 6$

4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -1$

2. Dada a matriz A, determine os autovalores e bases para os auto-espaços correspondentes das matrizes a seguir e determine as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor encontrado:

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

   c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

3. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule os autovalores das matrizes A^2 e A^3.

4. Seja A matriz de ordem n. Prove que A e sua transposta A^t têm o mesmo polinômio característico.

5. Mostre que se A e B são semelhantes então $\det A = \det B$.

6. Dada a matriz A, determine: (a) os polinômios característicos da matriz A; (b) os autovalores de A; (c) uma base para cada auto-espaço próprio de A; (d) as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor encontrado:

   a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

7. Mostre, em cada caso, que as matrizes a seguir são diagonalizáveis e determine uma matriz diagonal D e uma matriz P tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

8. Verifique se as matrizes a seguir são diagonalizáveis.

   a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

   b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

9. Verifique se as matrizes do exercício 6 são diagonalizáveis, justifique sua resposta.

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

10. Verifique se as matrizes a seguir são diagonalizáveis. Caso sejam, determine uma matriz diagonal D e uma matriz P, que representa a base dos autovetores, tais que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

    a) $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

    b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

11. Em cada caso, verifique se o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é diagonalizável. Caso seja, determine sua representação diagonal $D \in M_3(\mathbb{R})$ e a matriz P que representa a base dos autovetores correspondente.

    a) $T(x,y,z) = (z,y,x)$

    b) $T(x,y,z) = (2x+y, y-z, 2y+4z)$

    c) $T(x,y,z) = (x-2z, 0, -2x+4y)$

12. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(v) = Av$, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Mostre que $v_1 = (1,1)$ é autovetor de T e que o operador linear T não é diagonalizável.

Agora é sua vez. Mãos à obra!

Soluções

1. Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, o número real λ é chamado de autovalor de A se existe um vetor não-nulo v (chamado de autovetor) tal que $Av = \lambda v$. Verifique em cada caso:

a) se v é um autovetor da matriz A. Caso seja, determine o autovalor associado a este autovetor.

1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}, \quad v = (1,2)$

Solução: Verificamos que:

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Resposta: Logo, $v = (1,2)$ é autovetor da matriz A, e o autovalor associado a este autovetor é $\lambda = 3$.

2) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad v = (1,1)$

Solução: Verificamos que:

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resposta: Logo, $v = (1,1)$ é autovetor da matriz A, e o autovalor associado a este autovetor é $\lambda = 4$.

3) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad v = (1,1)$

Solução: Verificamos que:

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resposta: Logo, $v = (1,1)$ é autovetor da matriz A, e o autovalor associado a este autovetor é $\lambda = 3$.

4) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad v = (1,-2)$

Solução: Verificamos que:

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Resposta: Logo, $v = (1,-2)$ é autovetor da matriz A, e o autovalor associado a este autovetor é $\lambda = -2$.

5) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad v = (0,1)$

Solução: Verificamos que:

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ para qualquer número real λ.

Resposta: Logo, $v = (0,1)$ não é autovetor da matriz A.

6) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad v = (2,-1,1)$

Solução: Verificamos que:

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resposta: Logo, $v = (2,-1,1)$ é autovetor da matriz A, e o autovalor associado a este autovetor é $\lambda = 3$.

b) se λ é um autovalor de A. Caso seja, determine um autovetor associado a este autovalor.

!

Para que λ seja autovalor, devemos determinar um vetor não-nulo v tal que:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

A partir daí, temos que: $(A - \lambda I) \cdot v = 0$ (Lembre-se de que neste caso o 0 é o vetor nulo). Logo, em cada item devemos encontrar uma solução para este sistema linear.

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 3.$

Solução: Como $(A - 3I_2) \cdot v = 0$, temos que:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema:

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array} \right\rangle L_2 \leftarrow L_2 + L_1(2) \left\langle \begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

Daí, $-x+2y=0$, ou seja, $x=2y$. Logo,

$$S = \{(x,y)\,|\,x=2y\} = \{(2y,y)\,|\,y \in \mathbb{R}\}.$$

Ou seja, $S = [(2,1)]$.

> **!**
>
> Lembre-se de que S é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$ de dimensão 1 (uma reta) que é gerado pelo vetor $v=(2,1)$.

Como $A \cdot v = \lambda \cdot v$, então:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resposta: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $v=(2,1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 3$.

2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $\quad \lambda = 1$.

Solução: Como $(A - 1I_2)\cdot v = 0$, temos que:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema:

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{array} \right\rangle L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \left\langle \begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

Daí, $-x+4y=0$, ou seja, $x=4y$. Logo,

$$S=\{(x,y)\mid x=4y\}=\{(4y,y)\mid y\in\mathbb{R}\}.$$

Ou seja, $S=[(4,1)]$.

> **!**
>
> Lembre-se de que S é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$ de dimensão 1 (uma reta) e é gerado pelo vetor $v=(4,1)$.

Como $A\cdot v=\lambda\cdot v$, então:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resposta: Dada a matriz $A=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $v=(4,1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda=1$.

c) $A=\begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda=6$

Solução: Como $(A-(6)I_3)\cdot v=0$, temos que:

$$\left(\begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right\rangle L_2 \leftarrow L_2 + L_1(3)$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right\rangle L_3 \leftarrow L_3 + L_1(-2) \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

Daí, $x+y-2z=0$, ou seja, $x=-y+2z$.

Logo, $S=\{(-y+2z,y,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = [(-1,1,0),(2,0,1)]$.

!

S é o auto-espaço associado ao autovalor $\lambda = 6$. Vemos que este subespaço é gerado pelos vetores $v_1 = (-1,1,0)$ e $v_2 = (2,0,1)$ e, sendo linearmente independentes, formam uma base para o subespaço S. Geometricamente, o subespaço S representa um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem e é gerado por estes autovetores v_1 e v_2. Logo, temos dois autovetores associados a este autovalor.

Como $A \cdot v = \lambda \cdot v$, então:

$$A \cdot v = (6) \cdot v = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{e, } A \cdot v = (6) \cdot v = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resposta: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, temos que $v_1 = (-1,10)$ e $v_2 = (2,0,1)$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda = 6$.

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -1.$

Solução: Como $(A-(-1)I)\cdot v = 0$, temos que:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema:

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right\rangle L_3 \leftarrow L_3 + L_1(-1) \left\langle\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\rangle$$

$$L_1 \leftarrow \left(\tfrac{1}{2}\right) L_1 \left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\rangle L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\rangle L_2 \leftarrow L_2\left(\tfrac{1}{2}\right) \left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\rangle$$

Daí, $x+z=0$ e $y+z=0$, ou seja, $x=-z$ e $y=-z$.

Logo, $S = \{(-z,-z,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = [(-1,-1,1)]$.

!

S é o auto-espaço associado ao autovalor $\lambda = -1$. Vemos que este subespaço é gerado pelo vetor $v = (-1,-1,1)$, e forma uma base para o subespaço S. Geometricamente, o subespaço S representa uma reta de $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem e é gerada pelo autovetor v.

Como, $A\cdot v = \lambda \cdot v$ então, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resposta: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $v = (1,1,-1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = -1$.

2. Dada a matriz A, determine os autovalores e bases para os auto-espaços correspondentes das matrizes a seguir e determine as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor encontrado:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Solução: Pelo Teorema 1 da aula 2, sabemos que os autovalores de uma matriz triangular (superior ou inferior) são os elementos de sua diagonal principal.

Logo, os autovalores da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ são $-1, 1$ e 3.

Devemos agora calcular os autovetores.

Sabemos também que pela definição de autovetor $A \cdot v = \lambda \cdot v$, ou seja: $(A-(\lambda)I)\cdot v = 0$.

- Se $\lambda = -1$ temos:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema:

$$\left\langle \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ L_2 \leftarrow L_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \end{array} \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$\begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 + L_1(-1) \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1(2) \end{array} \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle \begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 + L_2(-1) \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2(-1) \end{array}$$

$$\left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle L_3 \leftarrow L_3 \left(\frac{1}{4}\right) \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + L_3(-2) \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

Para qualquer valor de w, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. A solução deste sistema nos leva a um subespaço $S = \{(0,0,0,w)\ |w \in \mathbb{R}\} = [(0,0,0,1)]$ e temos então que $\{(0,0,0,1)\}$ é uma base deste auto-espaço S, logo, $v = (0,0,0,1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = -1$.

- Se $\lambda = 1$ temos:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema:

$$\left\langle \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right\rangle L_4 \leftarrow L_4 + L_3(2) \left\langle \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 0 \end{array} \right\rangle$$

Temos então que $x + y + 2z = 0$ e $3y + 6z - 2w = 0$.

Logo, $x = -y - 2z$ e $w = \frac{3}{2}y + 3z$.

A solução deste sistema nos leva a um subespaço $S=\{(x,y,z,w)|x=-y-2z,\ w=\frac{3}{2}y+3z$ e $x,y,z,w\in\mathbb{R}\}=\{(-y-2z,\ y,\ z,\ \frac{3}{2}y+3z)\mid x,\ y,\ z\in\mathbb{R}\}=[(-2,\ 2,\ 0,\ 3),(-2,0,1,3)]$. Temos então que $\{(-2,2,0,3),(-2,0,1,3)\}$ é uma base deste auto-espaço S, logo, $v_1=(-2,2,0,3)$ e $v_2=(-2,0,1,3)$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda=1$.

- Se λ = 3 temos:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema temos que:

$$\left\langle\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} L_1\leftarrow L_1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ L_2\leftarrow L_2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \end{array} \left\langle\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right\rangle$$

$$\begin{array}{l} L_3\leftarrow L_3+L_1(-1) \\ L_4\leftarrow L_4+L_1(2) \end{array} \left\langle\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} L_3\leftarrow L_3+L_2(-1) \\ L_4\leftarrow L_4+L_2(-1) \end{array}$$

$$\left\langle\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right\rangle L_4\leftarrow L_4(2) \left\langle\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right\rangle$$

Logo: $x=0$, $y=0$ e $y=2z$.

A solução deste sistema nos leva a um subespaço $S=\{(0,0,2z,z)\mid z\in\mathbb{R}\}=[(0,0,2,1)]$. Temos então que $\{(0,0,2,1)\}$ é uma base deste auto-espaço S, logo, $v_3=(0,0,2,1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda=3$.

Resposta: Os autovalores são -1, 1, 3. Os autovalores -1 e 3 têm multiplicidades geométricas e algébricas iguais a 1, e o autovalor 1 tem multiplicidade geométrica e algébrica igual a 2. Para o autovalor -1 a base encontrada foi $\{(0,0,0,1)\}$. Para o autovalor 1 a base encontrada foi $\{(-2,2,0,3),(-2,0,1,3)\}$. Para o autovalor 3 a base encontrada foi $\{(0,0,2,1)\}$.

b) $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

Solução: O polinômio característico de A é dado por:

$$p(x) = \det(x\,I_2 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ 2 & x-6 \end{vmatrix} = (x-1)(x-6)+6$$

$$p(x) = x^2 - 7x + 12 = (x-4)(x-3)$$

Logo, as raízes do polinômio característico são 4 e 3, ou seja, os autovalores de A são 4 e 3.

Como $(\lambda I_2 - A)v = 0$, temos:

- Se $\lambda = 4$, temos: $\begin{bmatrix} 4-1 & -3 \\ 2 & 4-6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Daí: $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Resolvendo esse sistema encontramos $x - y = 0$, ou seja, $x = y$. A solução deste sistema nos leva a um subespaço $S = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1,1)]$. Uma base do auto-espaço é $\{(1,1)\}$, logo, $v = (1,1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 4$.

- Se $\lambda = 3$, temos: $\begin{bmatrix} 3-1 & -3 \\ 2 & 3-6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Daí: $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Resolvendo esse sistema, temos que: $2x - 3y = 0$, ou seja, $2x = 3y$, logo $x = \frac{3}{2}y$. A solução deste sistema nos leva a um subespaço $S = \{\left(\frac{3}{2}y, y\right) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Uma base do auto-espaço é $\{(3,2)\}$, logo, $(3,2)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 3$.

Resposta: Os autovalores de A são 4 e 3. Para o autovalor 4 a base do auto-espaço é $\{(1,1)\}$, para o autovalor 3 a base do auto-espaço é $\{(3,2)\}$. A multiplicidade algébrica dos dois autovalores é 1, e a multiplicidade geométrica (dimensão dos dois subespaços) também é 1.

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Solução: O polinômio característico de A é dado por:

$$\begin{aligned} p(x) &= det(x\,I_3 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x+2 & -1 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

$$p(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$$

Logo, as raízes do polinômio característico são 1, -2 e 3, ou seja, os autovalores de A são 1, -2 e 3.

- Se $\lambda = 1$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1-1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolvendo esse sistema, teremos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para qualquer valor de x, temos $y = 0$ e $z = 0$. A solução deste sistema nos leva a um subespaço $S = \{(x,y,z) \mid y = z = 0\} = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1,0,0)]$. Uma base para este espaço é $\{(1,0,0)\}$, logo $(1,0,0)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$.

- Se $\lambda = -2$, temos:

$$\begin{bmatrix} -2-1 & -1 & 0 \\ 0 & -2+2 & -1 \\ 0 & 0 & -2-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí, $\begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolvendo o sistema, temos que $z = 0$ e $-3x - y = 0$, ou seja, $y = -3x$ e $z = 0$. A solução deste sistema nos leva a um subespaço $S = \{(x,y,z) \mid y = -3x \text{ e } z = 0\} = \{(x,-3x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1,-3,0)]$. Uma base para este subespaço é $\{(1,-3,0)\}$, logo $(1,-3,0)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = -2$.

- Se $\lambda = 3$, temos:

$$\begin{bmatrix} 3-1 & -1 & 0 \\ 0 & 3+2 & -1 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí, $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolvendo o sistema, temos que $2x - y = 0$ e $5y - z = 0$, ou seja, $y = 2x$ e $z = 10x$. A solução deste sistema nos leva a um subespaço $S = \{(x,y,z) \mid y = 2x \text{ e } z = 10x\} = \{(x, 2x, 10x) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1,2,10)]$. Uma base para este subespaço é $\{(1,2,10)\}$, logo $(1,2,10)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 3$.

Resposta: Os autovalores são 1, -2 e 3. Para o autovalor 1 a base do auto-espaço é $\{(1,0,0)\}$, para o autovalor -2 a base do auto-espaço é $\{(1,-3,0)\}$ e para o autovalor 3 a base do auto-espaço é $\{(1,2,10)\}$. A multiplicidade algébrica dos três autovalores é 1, e a multiplicidade geométrica (dimensão dos subespaços) dos três autovalores também é 1.

3. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule os autovalores das matrizes A^2 e A^3.

!

Pelo Teorema 3 da aula 2 temos que se λ é um autovalor de uma matriz A, então λ^k é autovalor da matriz A^k para todo k natural e diferente de zero.

Solução: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, como A é diagonal, pelo teorema 2, os autovalores de A são -1, 2 e 1.

Resposta: Os autovalores de A^2 são: $(-1)^2 = 1$, $(2)^2 = 4$ e $(1)^2 = 1$. Os autovalores de A^3 são: $(-1)^3 = -1$, $(2)^3 = 8$ e $(1)^3 = 1$.

4. Seja A matriz de ordem n. Prove que A e sua transposta A^t têm o mesmo polinômio característico.

!

Nas questões deste tipo sobre demonstração ou prova de algum resultado, muitos alunos erram, pois, no lugar de tomar uma matriz A qualquer de ordem n, tentam provar que o resultado vale para uma certa matriz (ou seja, mostram que vale para somente um caso), e isso é errado. Devemos aprender a fazer provas genéricas. Observe bem esse exercício.

Demonstração

Seja A uma matriz de ordem n. Seja λ autovalor de A. Logo sabemos, pela definição, que existe um autovetor v tal que: $A \cdot v = \lambda v$. Daí, $(A - \lambda I)v = 0$.

Mas $(A - \lambda I)$ é também uma matriz quadrada e pela operação de transposição:

$$(A - \lambda I)^t = (A^t - \lambda I^t) = (A^t - \lambda I).$$

Como uma matriz e sua transposta têm o mesmo determinante, logo:

$$|A - \lambda I| = |(A - \lambda I)^t| = |A^t - \lambda I^t| = |A^t - \lambda I| = 0.$$

Daí, A e A^t têm o mesmo polinômio característico.

Outra maneira de mostrar este mesmo resultado:

Seja A matriz de ordem n. O polinômio característico de A é dado por: $\det(xI - A)$.

Sabemos que $\det(xI - A) = \det((xI - A)^t) = \det(x(I)^t - A^t) = \det(xI - A^t)$.

Como o polinômio característico de A^t é dado por: $\det(xI - A^t)$, temos que A e A^t têm o mesmo polinômio característico.

CQD

5. Mostre que se A e B são semelhantes então $\det A = \det B$.

Demonstração

Sejam A e B matrizes semelhantes.

Pela definição 1 da aula 5, temos que duas matrizes A e B são semelhantes se existe uma terceira matriz invertível P tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Se $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$, então $\det(B) = \det(P^{-1} \cdot A \cdot P)$.

Porém, $\det(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \det(P^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(P)$.

Mas $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$.

Daí, temos que: $\det(B) = \dfrac{\det(A) \cdot \det(P)}{\det(P)} = det(A)$.

Logo, $\det(B) = \det(A)$.

CQD

---

6. Dada a matriz A, determine: (a) os polinômios característicos da matriz A; (b) os autovalores de A; (c) uma base para cada auto-espaço próprio de A; (d) as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor encontrado:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Solução: O polinômio característico de A é dado por:

$$p(x) = \det(x\, I_3 - A) = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & -1 \\ -3 & x & 3 \\ -1 & 0 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$p(x) = (x+1)(x(x+1)) - 1(x) = (x)((x+1)(x+1) - 1)$$

$$\begin{aligned} p(x) &= (x)(x^2 + 2x + 1 - 1) = (x)(x^2 + 2x) = \\ &= (x)(x)(x+2) = x^2(x+2) \end{aligned}$$

Logo, as raízes do polinômio característico são 0 e -2, ou seja, os autovalores de A são 0 e -2.

- Se $\lambda = 0$, temos:

$$\begin{bmatrix} 0+1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ou seja, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolvendo o sistema, temos que: para qualquer y, $x - z = 0$, ou seja, $x = z$ para qualquer valor de y. A solução deste sistema nos leva ao subespaço $S = \{(x,y,x) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = [(1,0,1)(0,1,0)]$. Logo, $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda = 0$.

> **!**
>
> A multiplicidade algébrica do autovetor 0 é 2, e a multiplicidade geométrica é 2.

- Se $\lambda = -2$, temos:

$$\begin{bmatrix} -2+1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -2+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí, $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolvendo o sistema:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right\rangle L_3 \leftarrow L_3 + L_1(-1) \left\langle \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1(-3) \left\langle \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle L_2 \leftarrow L_2 \left(\frac{1}{2}\right) \left\langle \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

Ou seja, $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Daí, $-x - z = 0$ e $-y + 3z = 0$.

Logo, $x = -z$ e $y = 3z$.

$S = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R},\ x = -z \text{ e } y = 3z\} = \{(-z,3z,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = [(-1,3,1)]$, logo $(-1,3,1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = -2$.

Resposta:

(a) O polinômio característico é $x^2(x+2)$.

(b) Os autovalores são 0 e -2.

(c) Para o autovalor 0 a base do auto-espaço é $[(1,0,1),(0,1,0)]$, para o autovalor -2 a base do auto-espaço é $[(-1,3,1)]$.

(d) A multiplicidade algébrica do autovalor 0 é 2, e a geométrica é 2. A multiplicidade algébrica de -2 é 1, e a multiplicidade geométrica é 1.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Solução: O polinômio característico de A é dado por:

$$p(x) = \det(x\,I_3 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 \\ 1 & x+1 & -1 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$p(x) = (x-1)((x+1)(x-1)-1) + 2(x-1) =$$
$$= (x-1)((x^2-1)-1) + 2(x-1) = ((x-1)(x^2-2)) + 2(x-1)$$
$$p(x) = (x-1)(x^2-2+2) = (x)^2(x-1)$$

Logo, as raízes do polinômio característico são 0 e 1, ou seja, os autovalores de A são 0 e 1. O autovetor 0 com multiplicidade algébrica igual a 2 e o autovetor 1 com multiplicidade algébrica igual a 1.

- Se $\lambda = 0$, temos:

$$\begin{bmatrix} 0-1 & -2 & 0 \\ 1 & 0+1 & -1 \\ 0 & -1 & 0-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí, $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolvendo esse sistema, teremos:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right\rangle L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \left\langle \begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_3(-1) \left\langle \begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right\rangle$$

Logo, $x = -2y$ e $z = -y$.

$S = \{(x,y,z) \mid x = -2y \text{ e } z = -y\} = \{(-2y, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\} = [(-2,1,-1)]$, logo o vetor $(-2,1,-1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 0$.

!

Neste caso a multiplicidade algébrica do autovalor 0 é 2, e a multiplicidade geométrica é 1.

- Se $\lambda = 1$, temos

$$\begin{bmatrix} 1-1 & -2 & 0 \\ 1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí, $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolvendo esse sistema, temos:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle L_2 \quad \leftarrow L_2 + L_1 \left\langle \begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_3(-2) \left\langle \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

Logo, $y = 0$ e $x = z$.

$S = \{(x,y,z) \mid y = 0 \text{ e } x = z\} = \{(x,0,x) \mid y \in \mathbb{R}\} = [(1,0,1)]$, logo (1, 0, 1) é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$.

Resposta:

(a) O polinômio característico é $x^2(x-1)$.

(b) Os autovalores são 0 e 1.

(c) Para o autovalor 0 a base do auto-espaço é $[(-2,1,-1)]$, para o autovalor 1 a base do auto-espaço é $[(1,0,1)]$.

(d) A multiplicidade algébrica de 0 é 2, e a geométrica é 1. A multiplicidade algébrica de 1 é 1, e a multiplicidade geométrica é 1.

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

Solução: O polinômio característico de A é dado por:

$$p(x) = \det(x\, I_3 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 2 & -5 & x+3 \end{vmatrix}$$

$$p(x) = (x-1)((x-1)(x+3)+5) - 1(-2)$$

$$p(x) = (x-1)(x^2+2x-3+5)+2 = (x-1)(x^2+2x+2)+2$$

$$p(x) = x^3 + x^2 - 2 + 2 = x^3 + x^2 = x^2(x+1)$$

Logo, a raiz do polinômio característico é 0 e -1, ou seja os autovalores de A são 0 e 1.

- Se $\lambda = 0$, temos:

$$\begin{bmatrix} 0-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0-1 & 1 \\ 2 & -5 & 0+3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí, $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolvendo o sistema, temos que:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{array} \right\rangle L_2 \leftarrow L_2 + L_1(2) \left\langle \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2(-3) \left\langle \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

Logo, $x = y$ e $y = z$.

$S = \{(x,y,z) \mid x = y = z\} = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1,1,1)]$, logo $(1,1,1)$ é autovetor associado ao autovalor $\lambda = 0$.

> **!**
>
> A multiplicidade algébrica do autovalor 0 é 2, e a multiplicidade geométrica é 1.

- Se $\lambda = -1$, temos:

$$\begin{bmatrix} -1-1 & 1 & 0 \\ 0 & -1-1 & 1 \\ 2 & -5 & -1+3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí, $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolvendo o sistema, temos que:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \end{array} \right\rangle L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \left\langle \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2(-2) \left\langle \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

Logo, $x = \frac{1}{2}y$ e $z = 2y$.

$S = \{(x,y,z) \mid x = \frac{1}{2}y \text{ e } z = 2y\} = \{\left(\frac{1}{2}y, y, 2y\right) \mid y \in \mathbb{R}\} = [(1,2,4)]$, logo $(1,2,4)$ é o autovetor associado ao autovalor $\lambda = -1$.

Resposta:

(a) O polinômio característico é $x^2(x+1)$.

(b) Os autovalores são 0 e -1.

(c) Para o autovalor 0 a base do auto-espaço é $[(1,1,1)]$, para o autovalor 1 a base do auto-espaço é $[(1,2,4)]$.

(d) A multiplicidade algébrica de 0 é 2, e a geométrica é 1. A multiplicidade algébrica de -1 é 1, e a multiplicidade geométrica é 1.

7. Mostre, em cada caso, que as matrizes a seguir são diagonalizáveis e determine uma matriz diagonal D e uma matriz P tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

!

i. Aula 5: Pela definição 2, temos que uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonalizável se A é semelhante a uma matriz diagonal D. Pelo Teorema 1, se A e B são matrizes semelhantes, então A e B têm o mesmo polinômio característico. Pelo Teorema 2, se uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ tem n autovalores distintos, então ela é diagonalizável.

ii. Aula 6: Pelo Teorema 1, uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonalizável se e somente se a matriz A tem n autovetores linearmente independentes (esses autovetores formam uma base de $\mathbb{R}^n$).

Logo, em cada caso, devemos determinar os autovalores e autovetores da matriz A. A matriz diagonal D é semelhante à matriz A e será formada pelos autovalores de A em sua diagonal principal. A matriz P é formada pelas componentes do k-ésimo autovetor v_k da base dos autovetores.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Solução: O polinômio de A é dado por:

$$p(x) = \det(x\,I_3 - A) =$$
$$= \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x+2 & -1 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)(x+2)(x-3)$$

!

A é matriz diagonal, logo o determinante de $x\,I_3 - A$ é igual ao produto da diagonal principal.

Os autovalores são 1, -2 e 3, todos com multiplicidade algébrica igual a 1. Como os três autovalores são distintos então, pelo Teorema 2, A é diagonalizável.

Devemos agora determinar os autovetores associados aos autovalores encontrados. Como já sabemos que A é diagonalizável, os autovetores serão linearmente independentes, ou seja, os autovetores formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

a) Se $\lambda = 1$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1-1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí, $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolvendo o sistema, temos que:

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right\rangle L_2 \leftarrow L_2 + L_1(3) \left\langle\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right\rangle$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2(-2) \left\langle\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\rangle$$

Logo, para qualquer valor de x, $-y = 0$ e $-z = 0$.

Daí, $S = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Portanto, $v_1 = (1,0,0)$ é o autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$.

- Se $\lambda = -2$ temos:

$$\begin{bmatrix} -2-1 & -1 & 0 \\ 0 & -2+2 & -1 \\ 0 & 0 & -2-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí, $\begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolvendo o sistema, temos que:

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right\rangle L_3 \leftarrow L_3 + L_2(-5) \left\langle\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\rangle$$

Logo, $y = -3x$ e $-z = 0$.

Daí, $S = \{(x,-3x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Portanto, $v_2 = (1,-3,0)$ é o autovetor associado ao autovalor $\lambda = -2$.

- Se $\lambda = 3$ temos:

$$\begin{bmatrix} 3-1 & -1 & 0 \\ 0 & 3+2 & -1 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolvendo o sistema, temos que:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle L_2 \leftarrow L_2 + L_1(5) \left\langle \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

Logo, $y = 2x$ e $z = 10x$.

Daí, $S = \{(x, 2x, 10x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Portanto, $v_3 = (1, 2, 10)$ é o autovetor associado ao autovalor $\lambda = 3$.

Resposta: Se os autovalores de A são 1, -2 e 3 (distintos), então A é diagonalizável e para os autovalores:

$$\begin{cases} \lambda = 1 & \text{determinamos} \quad v_1 = (1,0,0) \\ \lambda = -2 & \text{determinamos} \quad v_2 = (1,-3,0) \\ \lambda = 3 & \text{determinamos} \quad v_3 = (1,2,10) \end{cases}$$

A matriz diagonal D, semelhante a matriz A, é dada por:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Enquanto a matriz P tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Observe que se $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$, então $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{-5}{30} \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{30} \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

!

Faça esta conta! Veja no módulo de Álgebra Linear I como se determina a matriz inversa!

Logo, se $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$, então

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{-5}{30} \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{30} \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{-5}{30} \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{30} \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Solução: O polinômio característico de A é dado por:

$$p(x) = \det(x\,I_3 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & -1 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)((x-1)(x)-1) - 1(x-1) =$$

$$= (x-1)(x^2-x-1) - (x-1) =$$

$$= (x-1)(x^2-x-1-1) = (x-1)(x^2-x-2)$$

$$p(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$$

Logo, os autovalores são 1, -1 e 2, todos com multiplicidade algébrica igual a 1.

!

Como os autovalores são distintos já sabemos que A é diagonalizável. Lembre-se de que para determinar os autovetores da matriz A, para cada autovalor λ teremos que resolver o sistema $(\lambda I_3 - A)v = 0$.

- Se $\lambda = 1$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 & -1 \\ 0 & 1-1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Daí, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolvendo o sistema temos:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right\rangle L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \left\langle \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1(-1) \left\langle \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

Logo, $-z = 0$ e $x = -y$.

Daí, $S = \{(x,y,z) \mid -z = 0 \text{ e } x = -y\} = \{(-y,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\} = [(-1,1,0)]$.

Portanto, o autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$ é $v_1 = (-1,1,0)$.

- Se $\lambda = -1$ temos que:

$$\begin{bmatrix} -1-1 & 0 & -1 \\ 0 & -1-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí, $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolvendo o sistema temos:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right\rangle L_1 \leftarrow L_1 + L_3(-1) \left\langle \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_3(-1) \left\langle \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right\rangle L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right\rangle L_3 \leftarrow L_3 L_1(-1) \left\langle \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right\rangle$$

Logo, $x = y$ e $z = -2y$.

$$S = \{(x,y,z) \mid x = y \text{ e } z = -2y\} = \{(y,y,-2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = [(1,1,-2)].$$

Portanto, o autovetor associado ao autovalor $\lambda = -1$ é $v_2 = (1,1,-2)$.

- Se λ= 2, temos:

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 0 & -1 \\ 0 & 2-1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolvendo o sistema temos:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right\rangle L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

Logo, $x = z$ e $y = z$.

Daí, $S = \{(x,y,z) \mid x = z \text{ e } y = z\} = \{(z,z,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = [(1,1,1)]$.

Portanto, o autovetor associado ao autovalor $\lambda = 2$ é $v_3 = (1,1,1)$.

Resposta: Concluímos que o conjunto de autovetores $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente, ou seja, A é diagonalizável.

> **!**
>
> Se você esqueceu a definição de base ou não se lembra de quando os vetores são LI, pegue seus módulos de Álgebra Linear I e reveja esses conceitos.

Temos então que para

$$\begin{cases} \lambda = 1 & \text{determinamos} & v_1 = (-1,1,0) \\ \lambda = -1 & \text{determinamos} & v_1 = (1,1,-2) \\ \lambda = 2 & \text{determinamos} & v_1 = (1,1,1) \end{cases}$$

A matriz diagonal D, semelhante à matriz A, é dada por:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Enquanto a matriz P tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Logo,

$$D = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Solução: O polinômio característico de A é dado por:

$$p(x) = \det(x\, I_3 - A) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} =$$

$$p(x) = (x-2)((x)(x-2)+1) - 1(-1(x-2)-1) + 1(1-x) =$$
$$= (x-2)((x)(x-2)+1) + x - 2 + 1 + 1 - x =$$
$$= (x-2)((x)(x-2)+1) = (x-2)(x^2-2x+1) =$$
$$p(x) = (x-2)(x-1)^2$$

Os autovalores são 1 e 2, o autovalor 2 tem multiplicidade algébrica igual a 1, e o autovalor 1 tem multiplicidade algébrica igual a 2, logo esse autovalor deverá estar associado a dois autovetores.

!

Para que possamos analisar se A é diagonalizável, precisamos verificar se os seus autovetores são linearmente independentes, ou seja, se os autovetores formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

- Se $\lambda = 1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolva você mesmo esse sistema! Você verá que a solução é:
$x = y + z$.

Daí, a solução S é da forma:

$$S = \{(x,y,z) \mid x = y+z\} = \{(y+z,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\} = [(1,1,0),(1,0,1)].$$

Portanto, para $\lambda = 1$, determinamos $v_1 = (1,1,0)$ e $v_2 = (1,0,1)$, dois autovetores linearmente independentes associados a este autovalor.

- Se $\lambda = 2$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema é equivalente a: $x = y$ e $z = -y$, logo todas as soluções são da forma:

$$S = \{(x,y,z) \mid x = y \text{ e } z = -y\} = \{(y,y,-y) \mid y \in \mathbb{R}\} = [(1,1,-1)]$$

Portanto, $v_3 = (1,1,-1)$ é o autovetor associado a $\lambda = 2$.

Resposta: Pelo Teorema 4 da aula 2, os autovetores associados a autovalores distintos são LI. Daí, concluímos que o conjunto de autovetores $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente, ou seja, A é diagonalizável.

Temos então que para

$$\begin{cases} \lambda = 1 & \text{determinamos} & \begin{cases} v_1 = (1,1,0) \\ v_2 = (1,0,1) \end{cases} \\ \lambda = 2 & \text{determinamos} & v_3 = (1,1,-1) \end{cases}$$

A matriz diagonal D, semelhante à matriz A, é dada por:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz P tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Verifique se as matrizes a seguir são diagonalizáveis:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Solução: O polinômio característico da matriz A é dado por:

$$p(x) = \det(x\,I_2 - A) = \begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)(x+1)+3 =$$

$$= x^2 - 2x + x - 2 + 3 = x^2 - x + 1$$

Não existem números reais a e b tal que $x^2 - x + 1 = (x-a)(x-b)$.

> **!**
>
> Na aula 5 temos que: Pela definição 2, temos que uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonalizável se A é semelhante a uma matriz diagonal D.

Resposta: Como a matriz diagonal D, equivalente a matriz A, não existe, então dizemos que a matriz A não é diagonalizável.

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Solução: O polinômio característico da matriz A é dado por:

$$p(x) = \det(x\, I_3 - A) = \begin{vmatrix} x-4 & 0 & 0 \\ -1 & x-4 & 0 \\ 0 & 0 & x-5 \end{vmatrix} = (x-5)(x-4)^2$$

Os autovalores são 5 e 4. O autovalor 5 tem multiplicidade algébrica igual a 1, e o autovalor 4 tem multiplicidade algébrica igual a 2, então o autovetor 4 deve gerar dois autovetores linearmente independentes.

!

Para analisar se A é ou não diagonalizável, precisamos verificar se os seus autovetores são linearmente independentes, ou seja, se os autovetores formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

- Se $\lambda = 4$, temos que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo esse sistema temos que para qualquer valor de y, $x = 0$ e $z = 0$, logo todas as soluções são da forma: $S = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} = [(0,1,0)]$.

Portanto, $v_1 = (0,1,0)$ é o único autovetor associado a este autovalor. Mas, como ele tem multiplicidade algébrica igual a 2, deveria ter associado a ele *dois* autovetores. Daí, nem precisamos continuar os cálculos, pois não será possível determinar uma base de autovetores para $\mathbb{R}^3$.

Resposta: Pelo Teorema 1, da aula 6, esta matriz *não é diagonalizável*.

Observamos que apesar de termos determinado dois autovalores 5 e 4, o autovalor 4 tem multiplicidade algébrica igual a 2 e multiplicidade geométrica igual a 1.

9. Verifique se as matrizes do exercício 6 são diagonalizáveis, justifique sua resposta.

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

As multiplicidades algébrica e geométrica dos autovalores são iguais.

Resposta: A matriz A é diagonalizável.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

A multiplicidade algébrica do autovalor 0 é 2, mas a multiplicidade geométrica é 1.

Resposta: A matriz A não é diagonalizável.

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

A multiplicidade algébrica do autovalor 0 é 2, mas a multiplicidade geométrica é 1.

Resposta: A matriz A não é diagonalizável.

10. Verifique se as matrizes a seguir são diagonalizáveis. Caso sejam, determine uma matriz diagonal D e uma matriz P, que representa a base dos autovetores, tais que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$. (Observação: Siga os passos da aula 7.)

!

Para que você não tenha dúvidas, vamos detalhar cada um dos passos sugeridos na aula 7.

a) $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

Solução: <u>PASSO 1</u>: Determinar os autovetores da matriz A.

!

Como a matriz A não é triangular, devemos calcular seu polinômio característico para obter os autovalores de A.

O polinômio característico é dado por:

$$p(x) = \det(x\, I_3 - A) = \begin{vmatrix} x-7 & 2 & 0 \\ 2 & x-6 & 2 \\ 0 & 2 & x-5 \end{vmatrix}$$

$$p(x) = (x-7)((x-6)(x-5)-4) - 2(2(x-5)) =$$
$$= (x-3)(x-6)(x-9)$$

Logo, os autovalores de A são: $\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 6 \\ \lambda_3 = 9 \end{cases}$, todos os autovalores têm multiplicidade algébrica igual a 1.

<u>PASSO 2</u>: Determinar uma base de autovetores da matriz A.

- Se $\lambda_1 = 3$, temos:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo esse sistema:

$$S = \{(x,y,z) \mid y = 2x \text{ e } z = 2x\} = \{(x,2x,2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1,2,2)].$$

Logo, o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 3$ é $v_1 = (1,2,2)$.

- Se $\lambda_2 = 6$, temos

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo esse sistema:

$$S=\left\{(x,y,z)\mid z=-x \text{ e } y=\frac{1}{2}x\right\}=\left\{\left(x,\frac{1}{2}x,-x\right)\ \mid x\in\mathbb{R}\right\}=[(2,1,-2)].$$

Logo, o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2=6$ é $v_2=(2,1,-2)$.

- Se $\lambda_3=9$, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo esse sistema:

$$S=\left\{(x,y,z)\mid y=-x \text{ e } z=\frac{1}{2}x\right\}=\left\{\left(x,-x,\frac{1}{2}x\right)\ \mid x\in\mathbb{R}\right\}=[(2,-2,1)].$$

Logo, o autovetor associado ao autovalor $\lambda_3=9$ é $v_2=(2,-2,1)$.

PASSO 3: Montar a matriz diagonalizada D.

A matriz diagonal D, semelhante à matriz A, é dada por:

$$D=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

PASSO 4: Montar a matriz diagonalizante P.

A matriz P tal que $D=P^{-1}\cdot A\cdot P$ é dada pelos autovalores:

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resposta: A é diagonalizável, sua matriz diagonal é $D=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, e a matriz diagonalizante, base dos autovetores de A, é dada por $P=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Solução: PASSO 1: Determinar os autovetores da matriz A.

O polinômio característico é dado por:

$$p(x) = \det(x\,I_3 - A) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-2)((x)(x-2)+1) - 1(-1(x-2)-1) + 1(1-x) =$$

$$= (x-2)((x)(x-2)+1) + x-2+1+1-x =$$

$$= (x-2)((x)(x-2)+1) = (x-2)(x^2-2x+1) =$$

$$p(x) = (x-2)(x-1)^2$$

Logo, os autovalores de A são: $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$, o autovalor 1 com multiplicidade algébrica igual a 2 e o autovalor 2 com multiplicidade algébrica igual a 1.

PASSO 2: Determinar uma base de autovetores da matriz A.

- Se $\lambda_1 = 1$, temos

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo esse sistema, encontramos que $x = y+z$. $S = \{(y+z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$.

Temos então dois autovetores, ou seja, $v_1 = (1,1,0)$ e $v_2 = (1,0,1)$.

- Se $\lambda_2 = 2$, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo esse sistema, $x = y$ e $z = -y$. Daí, podemos determinar o autovetor, ou seja, $v_3 = (1,1,-1)$.

<u>PASSO 3</u>: Montar a matriz diagonalizada D.

A matriz diagonal D, semelhante à matriz A, é dada por:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

<u>PASSO 4</u>: Montar a matriz diagonalizante P.

A matriz P tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ é dada pelos autovetores associados aos autovalores determinados:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Resposta: A é diagonalizável, sua matriz diagonal é $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, e a matriz P que representa a base dos autovetores é dada por $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

11. Em cada caso, verifique se o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é diagonalizável, caso seja, determine sua representação diagonal $D \in M_3(\mathbb{R})$ e a matriz P que representa a base dos autovetores correspondente.

a) $T(x,y,z) = (z,y,x)$.

Solução: Seja $T(x,y,z) = (z,y,x)$, logo, $A = [T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

!

Para determinar a representação diagonal de T, ou seja, para determinar D, devemos encontrar os autovalores de $[T]$.

$$p(x) = \det(x\,I_3 - A) = \begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= (x^2(x-1)) - 1(x-1) = (x-1)(x^2-1)$$

$$= (x-1)^2(x+1)$$

Logo, os autovalores de A são: $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$.

Agora iremos determinar os autovetores de A que são associados a estes autovalores encontrados.

- Seja $\lambda = 1$, temos

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\rangle.$$

Logo, para todo valor de y, temos que $x = z$. $S = \{(x,y,x)\ |x,y \in \mathbb{R}\}$.

Daí, podemos determinar dois autovetores associados a este autovalor:

$v_1 = (1,0,1)$ e $v_2 = (0,1,0)$.

- Seja $\lambda = -1$, $\left\langle \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right\rangle$

Logo, temos que $x = -z$ e $y = 0$. $S = \{(-z,0,z)\ |z \in \mathbb{R}\}$.

Daí, podemos determinar o autovetor, ou seja, $v_3 = (1,0,-1)$.

Resposta: T é diagonalizável, sua representação diagonal é

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, a base dos autovetores é $\{(1,0,1),(0,1,0),(1,0,-1)\}$,

logo, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $T(x,y,z) = (2x+y, y-z, 2y+4z)$.

Solução: Seja $T(x,y,z) = (2x+y, y-z, 2y+4z)$,

logo, $A = [T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Para determinar a representação diagonal de T, ou seja, para determinar D, devemos encontrar os autovalores de $[T]$.

$$\det(x\,I_3 - A) = \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & -2 & x-4 \end{vmatrix}$$

$$det(x\,I_3 - A) = (x-2)((x-1)(x-4)+2) = (x-2)^2(x-3)$$

Logo, os autovalores de A são: $\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$

Agora iremos determinar os autovetores de A que são associados a esses autovalores encontrados.

- Seja $\lambda = 3$, temos: $\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right\rangle$

Logo, temos que $x = y$ e $z = -2y$. $S = \{(y, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Daí, podemos determinar o autovetor, $v_3 = (1, 1, -2)$.

- Seja $\lambda = 2$, temos $\left\langle \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right\rangle$

Logo, para todo valor de x, temos que $y = z = 0$. $S = (x, 0, 0 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Daí, podemos determinar o autovetor, $v_1 = (1, 0, 0)$.

!

Encontramos aqui um grande problema... A multiplicidade algébrica do autovalor 2 é dois, pois $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 2$, logo deveríamos determinar *dois* autovetores para este autovalor. Como isso não foi feito, esse operador T não é diagonalizável, a multiplidade geométrica deste autovalor é 1.

Resposta: T não é diagonalizável.

c) $T(x, y, z) = (x - 2z, 0, -2x + 4z)$.

Solução: Seja $T(x,y,z) = (x-2z, 0, -2x+4z)$, logo $A = [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

$$\det(x\,I_3 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & x-4 \end{vmatrix} = (x-1)(x(x-4)) + 2(-2x)$$

$$p(x) = (x-1)(x(x-4)) - 4x = x((x-1)(x-4)-4) = x(x-5x)$$

$$p(x) = (x)^2(x-5) = (x-0)^2(x-5)$$

Logo, os autovalores de A são: $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 5 \end{cases}$

Agora iremos determinar os autovetores de A.

- Seja $\lambda = 0$, temos $\left\langle \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right\rangle$

Logo, para todo valor de y, temos que $x = 2z$. $S = \{(2z, y, z)\ |y, z \in \mathbb{R}\}$. Logo, determinamos dois autovetores, ou seja, $v_1 = (2,0,1)$ e $v_2 = (0,1,0)$.

> **!**
>
> Observe que diferente do exemplo anterior, neste caso, temos $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$, porém temos como resultado *dois* autovetores. Ou seja, a multiplicidade algébrica deste autovalor é dois, e a multiplicidade geométrica também é dois.

- Seja $\lambda = 5$, temos $\left\langle \begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\rangle$

Logo, temos que $z = -2x$ e $y = 0$. $S = \{(x, 0, -2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Daí, podemos determinar o autovetor $v_3 = (1, 0, -2)$.

Resposta: O operador T é diagonalizável, sua representação diagonal é dada por $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, a base dos autovetores é $\{(2,0,1), (0,1,0), (1,0,-2)\}$, logo, a matriz que representa a base dos autovetores é $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

12. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(v) = Av$, sendo $A =$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Mostre que $v_1 = (1,1)$ é autovetor de T e que o operador linear T não é diagonalizável.

Solução: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(v) = Av$, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, temos então que para qualquer vetor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que:

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x+y, -x+3y)$$

Logo, $A = [T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Para determinar a representação diagonal de T, ou seja, para determinar a matriz diagonal D, devemos encontrar os autovalores de $[T]$.

$$\begin{aligned} p(x) = \det(x\, I_3 - A) &= \begin{vmatrix} x-1 & x-1 \\ x+1 & x-3 \end{vmatrix} = \\ &= (x-1)(x-3) - ((x+1)(x-1)) \\ p(x) &= (x-4)(x-1) \end{aligned}$$

Logo, os autovalores de A são: $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$.

Iremos determinar os autovetores de A associados a estes dois autovalores.

- Seja $\lambda = 1$, $\left\langle \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \right\rangle$

Ou seja, $x = y$. Daí, podemos determinar o autovetor $v = (1,1)$.

- Seja $\lambda = 4$, temos que:

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{array} \right\rangle L_1 \leftarrow L_2(-3) + L_1 \left\langle \begin{array}{cc|c} -12 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{array} \right\rangle L_1 \leftarrow L_1\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{array} \right\rangle L_2 \leftarrow L_1(-5) + L_2 \left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right\rangle$$

Logo, a solução deste sistema é $x = 0$ e $y = 0$.

Porém $v = (0,0)$ não pode ser autovetor. Logo, T não é diagonalizável.

Resposta: T não é diagonalizável, pois T tem os dois autovalores. Para o autovalor $\lambda = 1$ determinamos o autovetor $v = (1,1)$ mas para o autovalor $\lambda = 4$, não existe autovetor não-nulo.

Capítulo 2

Matrizes Ortogonais e Transformações Lineares Planas e Espaciais

Neste capítulo, os exercícios correspondem a 12 aulas do Módulo de Álgebra Linear II, ou seja, da aula 9 até a aula 21. Os assuntos desenvolvidos são: matrizes ortogonais e as transformações lineares planas e espaciais, quer dizer, rotações, reflexões e projeções tanto em $\mathbb{R}^2$ quanto em $\mathbb{R}^3$, ou seja, no plano e no espaço.

Vamos lá! Ao trabalho!

Exercícios

1. Determine o valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que os vetores $u = (1, -2, k, 3)$ e $v = (3, k, 8, -5)$ sejam ortogonais.

2. Dado $u = (2, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Determine **uma** base de $\mathbb{R}^3$ que contenha u e que seja um conjunto ortogonal de vetores.

   (b) Transforme este conjunto ortogonal encontrado no item anterior numa base ortonormal.

3. Determine quais conjuntos S de vetores (bases de $\mathbb{R}^3$) são ortogonais e tansforme os conjuntos ortogonais encontrados em conjuntos ortonormais, ou seja, em bases ortonormais.

   (a) $S_1 = \{(-3, 1, 2), (2, 4, 1), (1, -1, 2)\}$

   (b) $S = \{(4, 2, -5), (-1, 2, 0), (2, 1, -1)\}$

   (c) $S = \{(3, 1, -1), (-1, 2, 1), (2, -2, 4)\}$.

4. Determine uma matriz ortogonal cuja primeira coluna tenha a direção do vetor:

   (a) $u_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

   (b) $u_1 = (1,2,1)$.

5. Prove que:

   (a) Se A e $B \in M_n(\mathbb{R})$ são matrizes ortogonais, então o produto AB é também ortogonal.

   (b) Se A e $B \in M_n(\mathbb{R})$ são matrizes ortogonais, então $A\left(A^T + B^T\right)B = A + B$.

6. Verifique quais das matrizes abaixo são ortogonais. Obtenha a matriz inversa das ortogonais somente.

   (a) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

   (b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

   (c) $C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

7. Encontre as matrizes canônicas das Transformações Lineares em $\mathbb{R}^2$ formadas por:

   (a) Uma rotação, no plano, de 60° no sentido anti-horário em torno da origem.

   (b) Uma rotação, no plano, de 30° no sentido horário em torno da origem.

8. Determine a imagem do retângulo de vértices $v_0 = (0,0)$, $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (1,3)$ e $v_3 = (0,3)$.

   (a) Após a rotação, no plano de 30°, no sentido anti-horário.

   (b) Após a rotação, no plano de 60° no sentido anti-horário.

   (c) Após a rotação, no plano, de 90° no sentido anti-horário.

9. Obtenha a matriz E que representa, no plano, a reflexão na reta $y = 2x$ e determine a imagem dos pontos $P_1(3,6)$ e $P_2(1,3)$ por essa reflexão.

10. Obtenha a matriz E que representa, no plano, a reflexão na reta $L : 3x+2y = 0$ e determine a imagem do ponto $P(-2,1)$ por essa reflexão.

11. Verifique que, no plano, toda matriz de reflexão B_φ pode ser escrita como o produto de uma matriz de reflexão no eixo x por uma matriz de rotação A_ϕ.

12. Determine a imagem dos vértices de uma figura após uma reflexão, no plano, com respeito à reta $y = -x$, seguida de uma rotação de $\dfrac{\pi}{4}$ radianos. Os vértices da figura são: $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (4,1)$, $v_3 = (4,3)$, $v_4 = (3,3)$, $v_5 = (3,2)$ e $v_6 = (1,2)$.

13. Determine a matriz que representa no espaço a rotação, (no sentido anti-horário) de $\dfrac{\pi}{2}$ radianos em torno da reta L, que passa pela origem, e é paralela ao vetor $v = (1,-1,2)$.

14. Determine a matriz que representa uma reflexão no plano $\pi : x+y-z = 0$, com respeito à base canônica.

15. Determine a matriz que representa, em $\mathbb{R}^3$, a reflexão no plano $\pi : 2x+3y-z = 0$, com respeito à base canônica.

16. Determine a matriz que representa em $\mathbb{R}^2$ a projeção ortogonal sobre a reta $y = \sqrt{3}x$ com respeito à base canônica.

17. Determine a matriz que representa no espaço a projeção ortogonal sobre o plano $\pi : x-z = 0$, com respeito à base canônica do $\mathbb{R}^3$.

18. Determine a matriz que representa, em $\mathbb{R}^3$, a projeção ortogonal sobre o plano gerado pelos vetores $(1,1,0)$ e $(-1,1,1)$, com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^3$.

Agora é sua vez. Mãos à obra!

Soluções

1. Determine o valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que os vetores $u = (1,-2,k,3)$ e $v = (3,k,8,-5)$ sejam ortogonais.

Solução: Para que os vetores u e v sejam ortogonais é necessário que o produto interno entre eles seja nulo, ou seja: $\langle u,v \rangle = 0$.

$$\langle u,v \rangle = \langle (1,-2,k,3),(3,k,8,-5) \rangle = 3-2k+8k-15 = 0$$

Resolvendo o sistema, encontramos: $6k-12 = 0$, logo $k = 2$.

Resposta: $k = 2$

2. Dado $u = (2,-1,2) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Determine **uma** base de $\mathbb{R}^3$ que contenha u e que seja um conjunto ortogonal de vetores.

!

Nesta questão foi pedida *uma* base ortogonal. Logo, várias respostas são possíveis.

Solução: Seja $u = (2,-1,2)$, vamos determinar o vetor $v = (a,b,c)$ ortogonal a u. Mas, para que u e v sejam ortogonais, o produto interno entre eles é nulo, ou seja, $\langle u,v \rangle = 0$. Temos então que: $\langle (2,-1,2),(a,b,c) \rangle = 2a-b+2c = 0$.

Determinamos o plano $\pi : 2a-b+2c = 0$ que é ortogonal ao vetor u dado. Ou seja, qualquer vetor deste plano π é ortogonal ao vetor $u = (2,-1,2)$.

Seja $b = 2a+2c$, assim todo vetor da forma $v = (a,2a+2c,c) = a(1,2,0)+b(0,2,1)$ (com a, $b \in \mathbb{R}$, sendo a ou $b \neq 0$) é ortogonal ao vetor u.

Em particular, podemos escolher $a=1$ e $c=0$. Logo, $b=2$.

Obtemos então o vetor $v=(1,2,0)$.

Considerando os vetores u e v, devemos determinar o vetor $w=(d,e,f)$ ortogonal a estes dois outros vetores. Assim, temos que:

$$\langle u,w\rangle = \langle (2,-1,2)\cdot(d,e,f)\rangle = 0$$

$$\langle v,w\rangle = \langle (1,2,0)\cdot(d,e,f)\rangle = 0$$

Logo temos que: $\begin{cases} 2d-e+2f=0 \\ d+2e=0 \end{cases}$. Daí, $\begin{cases} e=2d+2f \\ d=-2e \end{cases}$

Logo, $\begin{cases} e=2(-2e)+2f \\ d=-2e \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 5e=2f \\ -2e=d \end{cases}$ $\quad \begin{cases} f=\dfrac{5}{2}e \\ d=-2e \end{cases}$

Todo vetor $w=\left(-2e,e,\frac{5}{2}e\right)$ é ortogonal a u e v (para qualquer $e\in\mathbb{R}$, sendo $e\neq 0$). Seja $e=2$, teremos: $\begin{cases} f=5 \\ d=-4 \end{cases}$

logo, $w=(-4,2,5)$.

Resposta: Considerando $u=(2,-1,2)$, determinamos $v=(1,2,0)$ e $w=(-4,2,5)$ e formamos o conjunto ortogonal $S=\{(2,-1,2),(1,2,0),(-4,2,5)\}$.

(b) Transforme este conjunto ortogonal encontrado no item anterior numa base ortonormal.

Solução: Considerando $u=(2,-1,2)$, $v=(1,2,0)$ e $w=(-4,2,5)$, temos somente que normalizar esses vetores. Assim:

$$\begin{cases} \|u\| = \sqrt{2^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{9} = 3 \\ \|v\| = \sqrt{1^2+(2)^2} = \sqrt{5} \\ \|w\|\sqrt{(-4)^2+(2)^2+5^2} = \sqrt{45} \end{cases}.$$

Logo, $\begin{cases} \widehat{u} = \left(\frac{2}{3},\frac{-1}{3},\frac{2}{3}\right) \\ \widehat{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},0\right) \\ \widehat{w} = \left(\frac{-4}{\sqrt{45}},\frac{2}{\sqrt{45}},\frac{5}{\sqrt{45}}\right) \end{cases}$

Resposta: A base ortonormal será:

$$\left\{\left(\frac{2}{3},\frac{-1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},0\right),\left(\frac{-4}{\sqrt{45}},\frac{2}{\sqrt{45}},\frac{5}{\sqrt{45}}\right)\right\}.$$

3. Determine quais conjuntos S de vetores (bases de $\mathbb{R}^3$) são ortogonais e tansforme os conjuntos ortogonais encontrados em conjuntos ortonormais, em bases ortonormais.

   (a) $S_1 = \{(-3,1,2),(2,4,1),(1,-1,2)\}$

   Solução: Seja $u_1 = (-3,1,2)$, $u_2 = (2,4,1)$ e $u_3 = (1,-1,2)$

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle (-3,1,2) \cdot (2,4,1) \rangle = 0$$

$$\langle u_1, u_3 \rangle = \langle (-3,1,2) \cdot (1,-1,2) \rangle = 0$$

$$\langle u_2, u_3 \rangle = \langle (2,4,1) \cdot (1,-1,2) \rangle = 0.$$

   Logo, u_1, u_2 e u_3 são realmente vetores ortogonais e formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Para transformar esse conjunto ortogonal num conjunto ortonormal, devemos somente normalizar os vetores dados, ou seja, determinar $\widehat{u} = \dfrac{u}{\|u\|}$.

   Como:

   $\|u_1\| = \sqrt{(-3)^2+(1)^2+(2)^2} = \sqrt{14}$. Logo, $\widehat{u}_1 = \left(\frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right)$

   $\|u_2\| = \sqrt{(2)^2+(4)^2+(1)^2} = \sqrt{21}$. Logo, $\widehat{u}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$

   $\|u_3\| = \sqrt{(1)^2+(-1)^2+(2)^2} = \sqrt{6}$. Logo, $\widehat{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

   > **!**
   >
   > Um conjunto ortonormal de vetores que é uma base, esta base é dita *base ortonormal*, e a matriz formada por esta base é dita *matriz ortogonal*.

   Resposta: Temos que $S = \{(-3,1,2),(2,4,1),(1,-1,2)\}$ forma um conjunto ortogonal e é uma base, e $S' = \left\{\left(\frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$ é um conjunto ortonormal e uma base, logo é uma base ortonormal.

   (b) $S = \{(4,2,-5),(-1,2,0),(2,1,-1)\}$

   Solução: Seja $u_1 = (4,2,-5)$, $u_2 = (-1,2,0)$ e $u_3 = (2,1,-1)$

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle (4,2,-5) \cdot (-1,2,0) \rangle = 0$$

$$\langle u_1, u_3 \rangle = \langle (4,2,-5) \cdot (2,1,-1) \rangle \neq 0$$

$$\langle u_2, u_3 \rangle = \langle (-1,2,0) \cdot (2,1,-1) \rangle = 0.$$

Logo, u_1, u_2 e u_3 **não** são ortogonais.

Resposta: Temos que: $S = \{(4,2,-5),(-1,2,0),(2,1,-1)\}$ não é um conjunto ortogonal.

(c) $S = \{(3,1,-1),(-1,2,1),(2,-2,4)\}$.

Solução: Seja $u_1 = (3,1,-1)$, $u_2 = (-1,2,1)$ e $u_3 = (2,-2,4)$.

$$\langle u_1,u_2\rangle = \langle (3,1,-1)\cdot(-1,2,1)\rangle \neq 0$$

$$\langle u_1,u_3\rangle = \langle (3,1,-1)\cdot(2,-2,4)\rangle = 0$$

$$\langle u_2,u_3\rangle = \langle (-1,2,1)\cdot(2,-2,4)\rangle = 0.$$

Logo, u_1, u_2 e u_3 **não** são ortogonais.

Resposta: Temos que: $S = \{(3,1,-1),(-1,2,1),(2,-2,4)\}$ não é um conjunto ortogonal.

4. Determine **uma** matriz ortogonal cuja primeira coluna tenha a direção do vetor:

> **!**
>
> Devemos determinar *uma* base ortonormal, logo, isso significa que podemos encontrar várias bases ortogonais que tenham esse vetor na primeira coluna.

(a) $u_1 = \left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

Solução: O vetor u_1 é unitário, ou seja, $\|u_1\| = 1$, logo não precisaremos normalizá-lo.

> **!**
>
> Para determinar esta matriz ortogonal, sendo sua primeira coluna o vetor dado $u_1 = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, devemos, na verdade, determinar os vetores u_2 e u_3 tal que esses vetores sejam *unitários* e $\langle u_1,u_2\rangle = 0$, $\langle u_1,u_3\rangle = 0$ e $\langle u_2,u_3\rangle = 0$.

Seja $u_2 = (a,b,c)$, tal que $\langle u_1,u_2\rangle = 0$, ou seja:

$$\left\langle \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),(a,b,c)\right\rangle = 0, \text{ daí, } a+2b+2c = 0$$

Logo, podemos dizer que: $a = -2b - 2c$, ou seja, as soluções para este sistema são vetores da forma $(-2b - 2c, b, c) = b(-2,1,0) + c(-2,0,1)$, sendo $b, c \in \mathbb{R}$ e b ou $c \neq 0$. Tomemos então $b = 1$ e $c = -1$, temos então que $a = 0$, logo: $u_2 = (0,1,-1)$, daí, $\widehat{u}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

Seja $u_3 = (d,e,f)$, temos que além de ser um vetor unitário, também deve ser ortogonal a u_1 e u_2. Ou seja:

$\langle u_1, u_3 \rangle = 0$, daí, $\left\langle \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot (d,e,f) \right\rangle = 0$, logo, $d + 2e + 2f = 0$.

$\langle u_2, u_3 \rangle = 0$, daí, $\left\langle \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (d,e,f) \right\rangle = 0$, logo, $e = f$.

Ou seja: $d = -4e$ e $f = e$.

Seja $e = -1$, teremos $f = -1$ e $d = 4$, ou seja, $u_3 = (4,-1,-1)$. Daí, $\widehat{u}_3 = \left(\frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{-1}{\sqrt{18}}, \frac{-1}{\sqrt{18}}\right) = \left(\frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{-1}{3\sqrt{2}}, \frac{-1}{3\sqrt{2}}\right)$

Resposta: $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(b) $u_1 = (1,2,1)$

Solução: Seja $u_1 = (1,2,1)$, daí, $\widehat{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

> **!**
>
> Observe que u_1 não é unitário, logo não precisamos normalizá-lo.

Devemos determinar u_2 e u_3 tal que esses vetores sejam ortogonais e **unitários**. Logo, $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$, $\langle u_1, u_3 \rangle = 0$ e $\langle u_2, u_3 \rangle = 0$.

Logo, seja $u_2 = (a,b,c)$ tal que $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$:

$\langle (1,2,1), (a,b,c) \rangle = 0$, daí, $a + 2b + c = 0$.

Logo, podemos dizer que: $a = -2b - c$, ou seja, u_2 é da forma $(2b - c, b, c)$ para qualquer b e $c \in \mathbb{R}$ e b ou $c \neq 0$. Tomemos $b = -1$ e $c = 1$, então temos $a = 1$, logo, $u_2 = (1,-1,1)$, daí, $\widehat{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Seja $u_3 = (d,e,f)$, temos que além de ser um vetor unitário, também deve ser ortogonal com u_1 e u_2. Ou seja:

$\langle u_1, u_3 \rangle = 0$ daí, $\langle (1,2,1) \cdot (d,e,f) \rangle = 0$, logo, $d + 2e + f = 0$.

$\langle u_2, u_3 \rangle = 0$ daí, $\langle (1,-1,1) \cdot (d,e,f) \rangle = 0$, logo, $d - e + f = 0$.

Logo, $e = 0$ e $d = -f$.

Seja $d = 1$, logo, $f = -1$, ou seja, $u_3 = (1,0,-1)$. Logo, $\widehat{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

> **!**
>
> Para determinar u_3 podemos simplesmente determinar o produto vetorial entre u_1 e u_2.

Resposta: $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

> **!**
>
> Observe que: (i) Existem várias respostas pra essa questão, dependendo das opções que fazemos para escolher os vetores ortogonais ao vetor dado; (ii) o vetor da primeira coluna $\widehat{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ tem a mesma direção do vetor $v = (1,2,1)$.

5. Prove que:

   (a) Se A e $B \in M_n(\mathbb{R})$ são matrizes ortogonais, então o produto AB é também ortogonal.

   Solução: Sejam A e $B \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonais.
   Se A e B são ortogonais, então $A^T\ A = I_n$ e $B^T\ B = I_n$.

   > **!**
   >
   > Para concluir que AB é ortogonal, devemos mostrar que $(AB)^T\ AB = I_n$.

   Temos que:

   $$(AB)^T\ (AB) = \left(B^T\ A^T\right)\ (AB) = B^T\ A^T\ A\,B = B^T\ \left(A^T\ A\right)\ B =$$
   $$B^T\ I_n\ B = B^T\ B = I_n$$

!

Mostramos que este resultado é válido para qualquer matriz ortogonal. Um erro muito comum é o aluno pegar um exemplo e mostrar que o resultado vale para aquele exemplo, ou seja, que o produto entre duas matrizes ortogonais dadas é também ortogonal. Neste caso, no entanto, o aluno estará mostrando somente para *um* caso especial e não mostrado que o resultado vale para qualquer matriz.

(b) Se A e $B \in M_n(\mathbb{R})$ são matrizes ortogonais, então $A\left(A^T+B^T\right)\ B = A+B$.

Solução: Sabendo que A e B são matrizes ortogonais, então $A^{-1}=A^T$ e $B^{-1}=B^T$.

Logo, $A\,A^T = A\,A^{-1} = I$ e $B^T\ B = B^{-1}\ B = I$.

Temos então que:

$A\left(A^T+B^T\right)\ B = A\,A^T\ B + A\,B^T\ B = \left(A\,A^T\right)\ B + A\left(B^T\ B\right) = I\cdot A + I\,B = A+B.$

Logo, $A\left(A^T+B^T\right)\ B = A+B.$

6. Verifique quais das matrizes abaixo são ortogonais. Obtenha a matriz inversa somente das matrizes ortogonais.

!

Pelo teorema 2 da aula 9 temos que uma matriz é ortogonal se suas colunas formam um conjunto de n vetores ortonormais e, portanto, formam uma base ortonormal.

(a) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$

Solução: Seja $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $v_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ os vetores formados pelas colunas da matriz A.

$$\langle v_1, v_2\rangle = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle = 0$$

Logo v_1 e v_2 são ortogonais e ortonormais também. Logo, a matriz A é ortogonal.

$$A^{-1} = A^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Resposta: A é ortogonal e $A^{-1} = A^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Solução: Seja $v_1 = (0,1,0)$, $v_2 = (1,0,0)$ e $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle (0,1,0),(1,0,0) \rangle = 0$$
$$\langle v_1, v_3 \rangle = \left\langle (0,1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = 1$$
$$\langle v_2, v_3 \rangle = \left\langle (1,0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Logo, esses vetores não são ortogonais. Assim a matriz B não é ortogonal.

Resposta: A matriz B não é ortogonal.

(c) $C = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

Solução: Seja $v_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ e $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \left\langle \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right\rangle = 0$$
$$\langle v_1, v_3 \rangle = \left\langle \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\rangle = 0$$
$$\langle v_2, v_3 \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\rangle = 0$$

Logo v_1, v_2 e v_3 são ortogonais, mas como eles são ortonormais, dizemos que a matriz C é ortogonal.

$$C^{-1} = C^T = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Resposta: A matriz C é ortogonal (esta é também ortonormal) e

$$C^{-1} = C^T = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

7. Encontre as matrizes canônicas das Transformações Lineares em $\mathbb{R}^2$ formadas por:

   (a) Uma rotação, no plano, de 60° no sentido anti-horário em torno da origem.

   Solução: A matriz rotação é dada por:

$$A_{60^\circ} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\operatorname{sen} 60^\circ \\ \operatorname{sen} 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

   Resposta: $A_{60^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

   (b) Uma rotação, no plano, de 30° no sentido horário em torno da origem.

   Solução: A matriz rotação é dada por:

$$A_{-30^\circ} = \begin{bmatrix} \cos -30^\circ & -\operatorname{sen} -30^\circ \\ \operatorname{sen} -30^\circ & \cos -30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

   Resposta: $A_{-30^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

8. Determine a imagem do retângulo de vértices $v_0 = (0,0)$, $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (1,3)$ e $v_3 = (0,3)$.

   (a) Após a rotação, no plano de 30°, no sentido anti-horário:

   Solução: A matriz rotação é dada por:

$$A_{30^\circ}=\begin{bmatrix}\cos 30^\circ & -\operatorname{sen} 30^\circ\\ \operatorname{sen} 30^\circ & \cos 30^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

A imagem destes pontos é dada por:

$$A_{30^\circ}\cdot D=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&3&3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-3+\sqrt{3}}{2} & \frac{-3}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1+3\sqrt{3}}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

Resposta: $v_0'=(0,0)$, $v_1'=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$, $v_2'=\left(\frac{\sqrt{3}-3}{2},\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right)$ e $v_3'=\left(\frac{-3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

(b) Após a rotação, no plano de 60° no sentido anti-horário:

Solução: A matriz rotação é dada por:

$$A_{60^\circ}=\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & -\operatorname{sen} 60^\circ\\ \operatorname{sen} 60^\circ & \cos 60^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

A imagem destes pontos é dada por:

$$C=A_{30^\circ}\cdot D=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&3&3\end{bmatrix}=$$

$$C=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1-3\sqrt{3}}{2} & \frac{-3\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}+3}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

Resposta: $v_0'=(0,0)$, $v_1'=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $v_2'=\left(\frac{1-3\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}+3}{2}\right)$ e $v_3'=\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$

(c) Após a rotação, no plano, de 90° no sentido anti-horário:

Solução: A matriz rotação é dada por:

$$A_{90^\circ}=\begin{bmatrix}\cos 90^\circ & -\operatorname{sen} 90^\circ\\ \operatorname{sen} 90^\circ & \cos 90^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

A imagem destes pontos é dada por:

$$C=A_{30^\circ}\cdot D=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&3&3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&-3&-3\\0&1&1&0\end{bmatrix}$$

Resposta: $v'_0 = (0,0)$, $v'_1 = (0,1)$, $v'_2 = (-3,1)$ e $v'_3 = (-3,0)$.

9. Obtenha a matriz E que representa no plano, a reflexão na reta $y = 2x$, e determine a imagem dos pontos $P_1(3,6)$ e $P_2(1,3)$ por esta reflexão.

Solução: O vetor unitário tangente à reta $y = 2x$ é $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

!

O vetor v_1 é unitário, ou seja: $\|v_1\| = 1$, poderíamos considerar que um vetor tangente a esta reta é $v = (1,2)$, pois a reta é $y = 2x$, mas temos que usar o vetor unitário.

O vetor unitário normal à reta $y = 2x$ é $w_1 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

!

O vetor w_1 é ortogonal ao vetor v_1, neste caso a mesma coisa: um vetor ortogonal a esta reta é $w = (-2,1)$, mas vamos usar o vetor unitário, pois queremos determinar uma base ortonormal.

Seja a base $\beta = \{v_1, w_1\}$.

Daí, temos a matriz ortogonal: $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

Logo, $A^T = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

Seja F a matriz que representa a reflexão no eixo x, logo: $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Logo, temos que: $E = A \cdot F \cdot A^{-1}$.

A matriz E, que representa, no plano, a reflexão na reta $y = 2x$ é dada por:

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Dado o ponto $P_1(3,6)$. A imagem deste ponto pela transformação E é:

$$E(3,6) = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

!

O ponto $P_1(3,6)$ pertence a reta $y = 2x$, logo a reflexão não muda o valor do ponto.

Dado o ponto $P_1(1,3)$. A imagem deste ponto pela transformação E é:

$$E(1,3) = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{13}{5} \end{bmatrix}$$

Resposta: A matriz E que representa, no plano, a reflexão na reta $y = 2x$, é dada pela matriz $E = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$. A imagem, por essa reflexão do ponto $P_1(3,6)$, é o ponto $(3,6)$, e a imagem do ponto $P_2(1,3)$ é o ponto $\left(\frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right)$.

10. Obtenha a matriz E que representa, no plano, a reflexão na reta $L : 3x + 2y = 0$ e determine a imagem do ponto $P(-2,1)$ por essa reflexão.

Solução: O vetor unitário, tangente à reta $3x + 2y = 0$, é $v_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$.

!

O vetor v_1 é unitário, ou seja: $\|v_1\| = 1$, poderíamos considerar que um vetor tangente a esta reta é $v = (2,-3)$, pois a reta é $3x + 2y = 0$, mas devemos usar o vetor unitário.

O vetor unitário, normal à reta $3x + 2y = 0$, é $v_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

!

O vetor unitário v_2 é ortogonal ao v_1 e $\|v_2\| = 1$. Neste caso, como a observação anterior, um vetor ortogonal a esta reta é $w = (3,2)$, mas vamos usar o vetor unitário, pois queremos determinar uma base ortonormal.

Seja a base $\beta = \{v_1, v_2\}$.

Daí obtemos a matriz ortogonal $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{-3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$

Logo, $A^{-1} = A^t = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$

A matriz F que representa, no plano, a reflexão no eixo OX é representada por: $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Sabemos que: $E = A \cdot F \cdot A^{-1}$.

A matriz que representa essa reflexão na reta $L : 3x + 2y = 0$ é dada por:

$$E = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{-3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} =$$

$$E = \begin{bmatrix} \frac{-5}{13} & \frac{-12}{13} \\ \frac{-12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$$

A imagem do ponto $P(-2, 1)$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{-5}{13} & \frac{-12}{13} \\ \frac{-12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{13} \\ \frac{29}{13} \end{bmatrix}$$

Resposta: A matriz que representa, no plano, a reflexão na reta $L : 3x + 2y = 0$ é $E = \begin{bmatrix} \frac{-5}{13} & \frac{-12}{13} \\ \frac{-12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$. A imagem do ponto $P(-2, 1)$ por essa reflexão é o ponto $\left(\frac{-2}{13}, \frac{29}{13}\right)$.

11. Verifique que, no plano, toda matriz de reflexão B_φ pode ser escrita como o produto de uma matriz de reflexão no eixo x por uma matriz de rotação A_ϕ.

> **!**
>
> Primeiro iremos desenvolver a matriz de reflexão B_φ. Sabemos que B_φ é a reflexão com respeito à reta que forma um ângulo de $\frac{\varphi}{2}$ com o eixo OX.

Solução: O vetor unitário desta reta é da forma $u_1 = \left(\cos\frac{\varphi}{2}, \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right)$, e o vetor unitário ortogonal a esse é:

$$u_2 = \left(-\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}, \cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Daí, $B_\varphi = A_\phi \cdot L_{ox} \cdot A_\phi = A_{\frac{\varphi}{2}} \cdot L_{ox} \cdot A_{\frac{-\varphi}{2}}$.

$$B_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} \\ -\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} =$$

$$B_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Mas $B_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix} = A_\phi \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Sabemos que $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Logo,

$$B_\varphi = A_\phi \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Ou seja, a matriz reflexão B_φ pode ser escrita como o produto de uma matriz de reflexão no eixo x por uma matriz de rotação.

12. Determine a imagem dos vértices de uma figura após uma reflexão, no plano, com respeito à reta $y = -x$, seguida de uma rotação de $\dfrac{\pi}{4}$ radianos. Os vértices da figura são: $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (4,1)$, $v_3 = (4,3)$, $v_4 = (3,3)$, $v_5 = (3,2)$ e $v_6 = (1,2)$.

Solução: Usando o exercício anterior, a matriz reflexão, no plano, com respeito à reta $y = -x$, forma um ângulo de $\frac{-\pi}{4}$ radianos com o eixo dos x, logo, pelo exercício anterior, a matriz que representa essa reflexão é dada por:

$$B_{\frac{-\pi}{2}} = \begin{bmatrix} \cos\frac{-\pi}{2} & \operatorname{sen}\frac{-\pi}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{-\pi}{2} & -\cos\frac{-\pi}{2} \end{bmatrix}$$

A rotação de $\frac{\pi}{4}$ radianos é dada por:

$$A_{\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

Porém, a reflexão, no plano, com respeito à reta $y = -x$, seguida de uma rotação de $\frac{\pi}{4}$ radianos = $B_{\frac{-\pi}{2}}$ seguida pela $A_{\frac{\pi}{4}} = B_{\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{4}} = B_{\frac{-\pi}{4}}$.

$$B_{\frac{-\pi}{4}} = \begin{bmatrix} \cos\frac{-\pi}{4} & \operatorname{sen}\frac{-\pi}{4} \\ \operatorname{sen}\frac{-\pi}{4} & -\cos\frac{-\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Vamos agora aplicar essa matriz $B_{\frac{-\pi}{4}}$ à matriz formada pelos vértices, ou seja:

$$B_{\frac{-\pi}{4}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-2\sqrt{2}}{2} & \frac{-5\sqrt{2}}{2} & \frac{-7\sqrt{2}}{2} & \frac{-6\sqrt{2}}{2} & \frac{-5\sqrt{2}}{2} & \frac{-3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Resposta: As imagens dos vértices são da forma:

$$I(v_1) = I(1,1) = \left(0, \frac{-2\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$I(v_2) = I(4,1) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{-5\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$I(v_3) = I(4,3) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-7\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$I(v_4) = I(3,3) = \left(0, \frac{-6\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$I(v_5) = I(3,2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-5\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$I(v_6) = I(1,2) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$$

13. Determine a matriz que representa no espaço a rotação, (no sentido anti-horário) de $\frac{\pi}{2}$ radianos em torno da reta L, que passa pela origem e é paralela ao vetor $v = (1,-1,2)$.

> **!**
>
> Seja $v_3 = (1,-1,2)$ o vetor que determina a reta em torno da qual faremos a rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos, sentido positivo desta rotação.
> Temos que construir uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ contendo esse vetor. Os outros dois vetores desta base, v_1 e v_2, pertencem ao plano π que passa pela origem e cujo vetor normal é v_3. Logo, este plano é descrito pela equação: $\pi : x - y + 2z = 0$.

Solução: O vetor v_1, pode ser qualquer vetor que pertença a esse plano $\pi : x - y + 2z$, por exemplo, seja $v_1 = (-1,1,1)$.

Vamos determinar o vetor $v_2 = (a,b,c)$ ortogonal a v_3 e a v_1. Logo, v_2 é ortogonal a v_1 e pertence ao plano π. Daí:

$$\langle v_3, v_2\rangle = 0, \text{ isto é: } a - b + 2c = 0$$

$$\langle v_1, v_2\rangle = 0, \text{ isto é: } -a + b + c = 0$$

A partir daí temos que: $c = 0$ e $a = b$.

Logo, tomando $a = 1$, temos: $v_2 = (1,1,0)$.

Portanto, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e é um conjunto ortogonal de vetores ortogonal. Normalizando esta base, obtemos a base ortogonal formada pelos vetores:

$$u_1 = \left(\tfrac{-1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\ u_2 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \text{ e } u_3 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{-1}{\sqrt{6}}, \tfrac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Esses formam uma base ortogonal $B = \{u_1, u_2, u_3\}$.

A matriz que representa esta rotação na base B é escrita como:

$$A_B[v]_B = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & 0 \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Com respeito à base canônica esta matriz é escrita como: $A = P \cdot A \cdot P^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-1+2\sqrt{6}}{6} & \frac{2+\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-1-2\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1+\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2+\sqrt{6}}{6} & \frac{-2-2\sqrt{6}}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix}$$

Resposta: $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-1+2\sqrt{6}}{6} & \frac{2+\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-1-2\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1+\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2+\sqrt{6}}{6} & \frac{-2-2\sqrt{6}}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix}$

14. Determine a matriz que representa uma reflexão no plano $\pi : x+y-z=0$, com respeito à base canônica.

Solução: Dado o plano $\pi : x+y-z=0$, o vetor $v_3=(1,1,-1)$ é um normal a este plano.

> **!**
>
> Devemos construir uma base (ortonormal) contendo a direção do vetor v_3, de forma que $\{v_1,v_2,v_3\}$ forme uma base ortogonal. Logo, os vetores v_1 e v_2 são vetores de π e devem ser ortogonais entre si.

Seja v_1 um vetor arbitrário de $\pi : v_1=(1,0,1)$.

Devemos determinar o vetor $v_2=(a,b,c)$ ortogonal a v_1 e a v_3. Ou seja:

$$\langle v_2,v_3\rangle = 0, \text{ isto é: } a+b-c=0$$

$$\langle v_2,v_1\rangle = 0, \text{ isto é } a+c=0$$

Logo, resolvendo o sistema encontramos: $b=-2a$ e $c=-a$.

Tomando $a=1$, temos: $v_2=(1,-2,-1)$.

Determinamos então $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ uma base e um conjunto ortogonal. Agora para determinar a base ortonormal precisamos normalizar esses vetores, ou seja, dividir cada vetor pelo seu módulo. Assim, a base ortonormal será formada pelos vetores:

$$u_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ u_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}}\right) \text{ e } u_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

A matriz reflexão no espaço é dada por:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sabemos que $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, e

$$P^{-1}=P^T=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Daí, a reflexão com respeito à base canônica é determinada pelo produto $P \cdot A \cdot P^{-1}$. Assim teremos:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} =$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Resposta: A reflexão é dada pela matriz $R = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

15. Determine a matriz que representa, em $\mathbb{R}^3$, a reflexão no plano $\pi : 2x+3y-z=0$, com respeito à base canônica.

> **!**
>
> Assim como no item anterior, vamos determinar a matriz que representa esta reflexão, depois escreveremos esta matriz em função da base canônica.

Solução: Dado o plano $\pi : 2x+3y-z=0$, o vetor $v_3 = (2,3,-1)$ é um vetor normal a este plano. Determinaremos agora os vetores v_1 e v_2 (que formam uma base contendo esse vetor v_3 e tal que seja um conjunto ortogonal de vetores) que são vetores de π e devem ser ortogonais entre si. Vamos então escolher $v_1 = (x,y,z)$ um vetor arbitrário de π que seja ortogonal ao v_3. Logo $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$, ou seja: $\langle (x,y,z),(2,3,-1) \rangle = 0$

$$2x+3y-z=0$$

Logo, $z = 2x+3y$.

Tomando $x=-1$ e $y=1$, teremos: $v_1 = (-1,1,1)$.

Devemos determinar o vetor $v_2 = (a,b,c)$ ortogonal a v_1 e a v_3 (pertence a π). Ou seja:

$$\langle v_2 \cdot v_3 \rangle = 0, \text{ ou seja: } 2a+3b-c=0$$

$$\langle v_2 \cdot v_1 \rangle = 0, \text{ ou seja: } -a+b+c=0$$

Logo, resolvendo o sistema determinamos: $a = -4b$ e $c = -5b$.

Sendo $b = -1$, teremos: $v_2 = (4, -1, 5)$.

Determinamos então $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base que é um conjunto ortogonal de vetores. Agora para determinar a base ortogonal precisamos normalizar os vetores (ou seja, dividir cada vetor pelo seu módulo). Assim, a base ortogonal será formada pelos vetores:

$u_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $u_2 = \left(\frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}\right)$ e $u_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}\right)$

A reflexão com respeito a esta base ortonormal, em relação a u_3, será:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sabemos que $P = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{42}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{42}} & \frac{-1}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}$, e

$$P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{\sqrt{42}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{5}{\sqrt{42}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{-1}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}$$

Daí, a reflexão com respeito à base canônica é determinada pelo produto $P \cdot A \cdot P^{-1}$.

Assim teremos:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{42}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{42}} & \frac{-1}{\sqrt{14}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{\sqrt{42}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{5}{\sqrt{42}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{-1}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{18}{42} & \frac{-36}{42} & \frac{12}{42} \\ \frac{-36}{42} & \frac{-12}{42} & \frac{18}{42} \\ \frac{12}{42} & \frac{18}{42} & \frac{36}{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}.$$

Resposta: A reflexão é dada pela matriz $R = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$.

16. Determine a matriz que representa em $\mathbb{R}^2$ a projeção ortogonal sobre a reta $y = \sqrt{3}x$ com respeito à base canônica.

Solução: O vetor tangente à reta $y = \sqrt{3}x$ é da forma $v_1 = \left(1, \sqrt{3}\right)$.

Seja T o operador linear definido pela projeção ortogonal desta reta. T é definido como: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que

$$T(x,y) = \frac{\langle (x,y), v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = \frac{x+\sqrt{3}y}{4}\left(1, \sqrt{3}\right).$$

$$T(x,y) = \left(\tfrac{x+\sqrt{3}y}{4}, \tfrac{\sqrt{3}x+3y}{4}\right)$$

Ou seja: $[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.

Resposta: A projeção ortogonal é dada pela matriz $[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.

Outra solução:

Uma nova maneira de fazer esse exercício é a partir da reta dada $y = \sqrt{3}$. Consideramos a base formada pelo vetor tangente à reta $v_1 = \left(1, \sqrt{3}\right)$ e pelo vetor ortogonal a este vetor $v_2 = \left(-\sqrt{3}, 1\right)$. Logo, a base ortogonal é $B = \left\{\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}), (\tfrac{-\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right\}$.

Temos então que $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Mas: $T\left(1, \sqrt{3}\right) = \left(1, \sqrt{3}\right)$ e $T\left(\sqrt{3}, 1\right) = (0,0)$.

Logo, $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Assim como vale a igualdade: $[T] = B \cdot [T]_B \cdot B^{-1}$, logo:

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Resposta: A projeção ortogonal é dada pela matriz $[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.

17. Determine a matriz que representa no espaço a projeção ortogonal sobre o plano $\pi : x - z = 0$, com respeito à base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Solução: Seja v_3 o vetor normal ao plano π, $v_3 = (1,0,-1)$. O vetor unitário normal ao plano é $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

Vamos determinar os vetores de π, v_1 e v_2, de tal forma que $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme uma base e um conjunto ortogonal.

Faça você mesmo a sua conta ...

Seja $v_1 = (0,1,0)$ e $v_2 = (1,0,1)$. Determinamos os vetores unitários, ou seja, $u_1 = (0,1,0)$, $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que para qualquer vetor v do $\mathbb{R}^3$, $T(v) = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2$.

Assim

$T(v) = \langle (x,y,z), (0,1,0) \rangle (0,1,0) + \left\langle (x,y,z), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$T(v) = (0,y,0) + \left(\frac{x+z}{2}, 0, \frac{x+z}{2}\right) = \left(\frac{x+z}{2}, y, \frac{x+z}{2}\right)$

Logo, $[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Resposta: A projeção ortogonal é dada pela matriz $[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Outra solução: Outra forma interessante pra se resolver essa questão é conhecendo a base ortonormal B formada pelos vetores u_1, u_2 e $u_{3,}$ descritos anteriormente.

Temos que:

$$T(u_1) = \langle u_1, u_1 \rangle u_1 + \langle u_1, u_2 \rangle u_2 = 1u_1 + 0u_2 + 0u_3$$
$$T(u_2) = \langle u_2, u_1 \rangle u_1 + \langle u_2, u_2 \rangle u_2 = 0u_1 + 1u_2 + 0u_3$$
$$T(u_3) = \langle u_3, u_1 \rangle u_1 + \rangle u_3, u_2 \rangle u_2 = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3$$

Logo, a matriz que representa no $\mathbb{R}^3$ a projeção é dada por:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que é exatamente a matriz da projeção ortogonal no plano xy.

Para determinar agora $[T]$, teríamos que fazer a mudança de base, ou seja:

$$[T] = B[T]_B \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} =$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Resposta: A projeção ortogonal é dada pela matriz $[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

18. Determine a matriz que representa em $\mathbb{R}^3$ a projeção ortogonal sobre o plano gerado pelos vetores $(1,1,0)$ e $(-1,1,1)$, com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^3$.

!

Os vetores $v_1 = (1,1,0)$ e $v_2 = (-1,1,1)$ são ortogonais. Logo, temos somente que determinar o vetor v_3 ortogonal a estes dois vetores, ou seja, o vetor que é normal ao plano formado por v_1 e v_2.

Solução: Seja $v_3 = (a,b,c)$, temos que: $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$ e $\langle v_2, v_3 \rangle = 0$.

Daí, $\begin{cases} a+b=0 \\ -a+b+c=0 \end{cases}$. Tomando $a = 1$ determinamos $v_3 = (1,-1,2)$.

Normalizando esses vetores encontramos a base ortogonal (um conjunto ortogonal que é uma base de $\mathbb{R}^3$).

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

Logo temos que:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Sabemos também que a projeção em torno de u_3 com respeito à base B é da forma:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo a projeção com respeito à base canônica é dada por: $[T] = B \cdot [T]_B \cdot B^T$.

Assim:

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Resposta: A projeção ortogonal é dada pela matriz $[T] = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Capítulo 3

Matrizes Simétricas, o Teorema Espectral e Operadores Auto-adjuntos

Este será um capítulo bem pequeno, pois estaremos tratando somente de três tópicos que são Matrizes Simétricas, o Teorema Espectral e Operadores Auto-adjuntos.

No próximo capítulo, veremos as formas quadráticas e iremos usar os conceitos estudados aqui sobre a diagonalização das matrizes simétricas. É bom observar que, até aqui, todas as matrizes e vetores têm somente elementos e componentes reais.

Agora vamos lá. Ao estudo!

Exercícios

1. Mostre que se a matriz A é simétrica, então A^2 também é simétrica.

2. Mostre que se a matriz A é diagonalizável por uma matriz ortogonal, então A^2 também é diagonalizável por uma matriz ortogonal.

3. Para cada matriz simétrica dada, determine a matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tal que $A = P \cdot D \cdot P^t$:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Obtenha a decomposição espectral das matrizes:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

5. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Determine uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tal que $A = P \cdot D \cdot P^t$.

6. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, aplique o processo de diagonalização à matriz A, determinando a matriz ortogonal P e a diagonal D tal que $A = P \cdot D \cdot P^t$.

7. Verifique se o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por $T(x,y,z) = (-y-z, -x-z, -x-y)$, é auto-adjunto. Se for, determine uma base ortonormal formada pelos autovetores deste operador T e a matriz que representa T nesta base.

8. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador auto-adjunto com autovalores associados $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 4$. Suponha que $v_1 = (1,1,1)$ e $v_2 = (2,0,1)$ são autovetores associados ao $\lambda_1 = 3$. Determine um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 4$ e uma base ortonormal de autovetores de T.

9. Verifique se o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por $T(x,y,z) = (x+y, x+y, z)$ é auto-adjunto. Se for, determine uma base ortonormal de vetores do operador T e a matriz que representa T nesta base.

Agora é a sua vez. Mãos à obra!

Soluções

1. Mostre que se a matriz A é simétrica, então A^2 também é simétrica.

   Solução: Vamos supor que uma matriz A seja simétrica, logo, por definição $A = A^t$

   Assim temos que $\left(A^2\right)^t = (A \cdot A)^t = A^t \cdot A^t = (A^t)^2$

   Mas como A é simétrica, ou seja, $A = A^t$, temos então que: $(A^t)^2 = A^2$

   Logo, $\left(A^2\right)^t = A^2$.

   Ou seja, A^2 é também uma matriz simétrica.

   > **!**
   >
   > Para provar um dado resultado você não deve, simplesmente, mostrar que o resultado é válido para certa matriz (ou certo dado) escolhido por você. Se fizer isso estará somente mostrando o resultado para a matriz escolhida.
   > Nem pode mostrar que vale para as matrizes de certa dimensão (matriz quadrada ou matriz 2×3, por exemplo).
   > A prova deste resultado deve ser genérica, pegando as definições e resultados válidos.
   > A mesma observação vale para a questão a seguir.

2. Mostre que se a matriz A é diagonalizável por uma matriz ortogonal, então A^2 também é diagonalizável por uma matriz ortogonal.

   Solução: Vamos supor que A seja uma matriz diagonalizável, logo existe uma matriz ortogonal P (como P é ortogonal $P^{-1} = P^T$) e uma matriz diagonal D tal que:

   $$A = P \cdot D \cdot P^T.$$

   A matriz $A^2 = A \cdot A$, mas como $A = P \cdot D \cdot P^T$, então, temos que:

   $$A^2 = \left(P \cdot D \cdot P^T\right) \cdot \left(P \cdot D \cdot P^T\right)$$

   Logo, $A^2 = \left(P \cdot D \cdot P^T \cdot P \cdot D \cdot P^T\right)$, mas como $P^T = P^{-1}$, então $P^T \cdot P = I$.

   Daí, $A^2 = \left(P \cdot D \cdot I \cdot D \cdot P^T\right) = \left(P \cdot D \cdot D \cdot P^T\right) = \left(P \cdot D^2 \cdot P^T\right)$.

Como D é uma matriz ortogonal, sabemos que D^2 também é ortogonal, logo,

A^2 é diagonalizável por uma matriz ortogonal D^2.

3. Para cada matriz simétrica dada, determine a matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tal que $A = P \cdot D \cdot P^T$.

   (a) A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

   Solução: Os autovalores da matriz A são as raízes do polinômio característico.

$$p(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = x(x-3)^2$$

Assim, os autovalores de A são 0 e 3.

> **!**
>
> A multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda_1 = 0$ é 1, e a multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda = 3$ é 2.

Se $\lambda_1 = 0$, então $S_0 = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, daí, $v_1 = (1,1,1)$ e $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
Se $\lambda = 3$, então $S_3 = \{(x, x-z, z) \mid x,z \in \mathbb{R}\}$, daí,

$$v_2 = (1,-2,1) \text{ e } u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$
$$v_3 = (1,0,-1) \text{ e } u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

> **!**
>
> A multiplicidde geométrica de $\lambda_1 = 0$ é 1, e a multiplicidade geométrica de $\lambda = 3$ é 2. Ou seja, as multiplicidades geométrica e algébrica se confundem para quase autovalor.

Podemos observar que $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormal de autovetores de A.

Resposta: Dada a matriz simétrica A, determinamos a matriz ortogonal $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ e a matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ de modo que $A = P \cdot D \cdot P^T$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solução: Os autovalores da matriz A são as raízes do polinômio característico.

$$p(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ -1 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = x(x-1)(x-2)$$

Os autovalores de A são 0, 1 e 2.

Se $\lambda = 0$ então $S_0 = \{(-y,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\}$, daí, $v_1 = (-1,1,0)$, logo $u_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Se $\lambda = 1$ então $S_1 = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, daí, $v_2 = (0,0,1)$, logo $u_2 = (0,0,1)$

Se $\lambda = 2$ então $S_2 = \{(x,x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, daí, $v_3 = (1,1,0)$, logo $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Resposta: Dada a matriz simétrica A, determinamos a matriz ortogonal $P = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e a matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ de modo que $A = P \cdot D \cdot P^T$.

4. Obtenha a decomposição espectral das matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Solução: A é uma matriz simétrica. O polinômio característico de A é dado por:

$$p(x) = \det(xI_2 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -2 & x-4 \end{vmatrix} =$$
$$(x-1)(x-4) - 4 = (x-0)(x-5)$$

Assim os autovalores de A são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$.

Se $\lambda_1 = 0$ então $S_0 = \{(x,y) \mid x+2y = 0\}$, daí $v_1 = (-2,1)$ e $u_1 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Se $\lambda_2 = 5$ então $S_5 = \{(x,y) \mid -2x+y = 0\}$, daí $v_2 = (1,2)$ e $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

A decomposição espectral de A é dada por: $A = 0\,u_1\,u_1{}^t + 5\,u_2\,u_2{}^t$

$$u_1\,u_1{}^t = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$u_2\,u_2{}^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Resposta: A decomposição espectral de A é dada por:

$$A = 0 \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Solução: A é uma matriz simétrica. O polinômio característico de A é dado por:

$$p(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-6 & 2 & 1 \\ 2 & x-6 & 1 \\ 1 & 1 & x-5 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-8)(x-6)(x-3)$$

Assim os autovalores de A são $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 6$ e $\lambda_3 = 3$.

Se $\lambda_1 = 8$ então $S_8 = \{(x,y,z) \mid x = -y \text{ e } z = 0\}$, daí $v_1 = (-1,1,0)$ e $u_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Se $\lambda_2 = 6$ então $S_6 = \left\{(x,y,z) \mid x = y = \frac{-1}{\sqrt{2}}z\right\}$, daí $v_2 = (-1,-1,2)$ e $u_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Se $\lambda_3 = 3$ então $S_3 = \{(x,y,z) \mid x = y = z\}$, daí $v_3 = (1,1,1)$ e $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

A decomposição espectral de A é dada por: $A = 8u_1 u_1{}^t + 6u_2 u_2{}^t + 3u_3 u_3{}^t$

$$u_1 u_1{}^t = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 u_2{}^t = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{-2}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix}$$

$$u_3 u_3{}^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Resposta: A decomposição espectral de A é dada por:

$$A = 8\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{-2}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Solução: A é uma matriz simétrica. O polinômio característico de A é dado por: $p(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-3 & 2 & -4 \\ 2 & x-6 & -2 \\ -4 & -2 & x-3 \end{vmatrix} = (x-7)^2(x+2)$.

Assim os autovalores de A são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 7$.

!

Os autovalores de uma matriz simétrica A são números reais e, além disso, autovetores de auto-espaços diferentes são ortogonais. Isso nós já observamos nos exemplos a e b. Agora no item c, a matriz A tem só dois autovalores um com multiplicidade algébrica 1 e outro com multiplicidade algébrica 2. Assim, devemos encontrar para o autovalor $\lambda_2 = 7$ dois autovetores que sejam ortogonais.

Se $\lambda_1 = -2$ então $S_{-2} = \{(x,y,z)\,|\, x = 2y \text{ e } z = -2y\}$, daí $v_1 = (2,1,-2)$ e $u_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$.
Se $\lambda_2 = 7$ então $S_7 = \{(x,y,z) \mid 2x+y-2z = 0\}$.

Para se obter uma base ortogonal, neste caso, devemos determinar os vetores ortogonais que pertencem ao plano $\pi : 2x+y-2z = 0$.

Seja $v_2 = (1,0,1)$, v_2 pertence ao plano π. Agora devemos determinar outro vetor que pertença a π e que seja ortogonal a v_2.

Seja $v_3 = (a,b,c)$ tal que: $\begin{cases} 2a+b+2c = 0 \\ a+c = 0 \end{cases}$. Resolvendo o sistema determinamos $v_3 = (-1,4,1)$.

Assim temos:

$v_2 = (1,0,1)$ logo $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$v_3 = (-1,4,1)$ logo $u_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{18}}, \frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right)$.

A decomposição espectral de A é dada por: $A = -2\,u_1\,{u_1}^t + 7\,u_2\,{u_2}^t + 7\,u_3\,{u_3}^t$

$$u_1\,{u_1}^t = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$$u_2\,{u_2}^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$u_3\,{u_3}^t = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{18}} \\ \frac{4}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{18}} & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{18} \\ \frac{-2}{9} & \frac{8}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{18} & \frac{2}{9} & \frac{1}{18} \end{bmatrix}$$

Resposta: A decomposição espectral da matriz A é dada por:

$$A=-2\begin{bmatrix}\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-4}{9}\\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-2}{9}\\ \frac{-4}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{4}{9}\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix}\frac{1}{18} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{18}\\ \frac{-2}{9} & \frac{8}{9} & \frac{2}{9}\\ \frac{1}{18} & \frac{2}{9} & \frac{1}{18}\end{bmatrix}$$

5. Dada a matriz $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & -1\\ -2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 5\end{bmatrix}$, determine uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tal que $A=P\cdot D\cdot P^t$.

Solução: Como A é uma matriz simétrica, temos, pelo Teorema 3, que A é diagonalizável por matriz ortogonal.

O polinômio característico de A é dado por $p(x)=\det(xI_3-A)$, logo teremos:

$$p(x)=\begin{vmatrix}x-2 & 2 & 1\\ 2 & x-2 & -1\\ 1 & -1 & x-5\end{vmatrix}=(x-0)(x-3)(x-6)$$

Os autovalores de A são 0, 3 e 6.

Se $\lambda=0$, teremos: $\left\langle\begin{array}{ccc|c}-2 & 2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -5 & 0\end{array}\right\rangle$ usando as operações elementares obtemos $\left\langle\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{array}\right\rangle$.

Daí, temos que $S_0=\{(x,y,z)\mid x=y \text{ e } z=0\}$, logo, $v_1=(1,1,0)$ e $u_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

Se $\lambda=3$, teremos: $\left\langle\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -2 & 0\end{array}\right\rangle$ usando as operações elementares obtemos $\left\langle\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right\rangle$

Daí, temos que $S_3=\{(x,y,z)\mid x=-y \text{ e } z=-y\}$, logo, $v_2=(-1,1,-1)$ e $u_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

Se $\lambda=6$, teremos: $\left\langle\begin{array}{ccc|c}4 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 4 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\end{array}\right\rangle$ usando as operações elementares obtemos $\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\rangle$

Daí, temos que $S_6 = \{(x,y,z) \mid y = -x \text{ e } z = -2x\}$, logo, $v_3 = (1,-1,-2)$ e $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$.

Resposta: $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

6. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, aplique o processo de diagonalização à matriz A, determinando a matriz ortogonal P e a diagonal D tal que $A = P \cdot D \cdot P^t$.

Solução: Como A é uma matriz simétrica, temos, pelo Teorema 3, que A é diagonalizável por matriz ortogonal.

O polinômio característico de A é dado por $\det(xI_3 - A)$, logo teremos:

$$p(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & 1 \\ -1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = x\,(x-3)^2$$

Os autovalores de A são 0 , 3 e 3.

Se $\lambda = 0$, teremos: $\left\langle \begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & +1 & -2 & 0 \end{array} \right\rangle$ usando as operações elementares obtemos $\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$

Daí, temos que $S_0 = \{(x,y,z) \mid x = -y \text{ e } z = y\}$, ou seja, $v_1 = (-1,1,1)$ e $u_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Se $\lambda = 3$, teremos: $\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\rangle$ usando as operações elementares obtemos $\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$

Daí, temos que $S_3 = \{(x,y,z) \mid x-y-z = 0\}$. Para escolhermos os autovetores ortogonais para $\lambda = 3$, temos que determinar os vetores ortogonais que pertencem ao plano $x-y-z=0$. Facilmente determinamos $v_2=(1,1,0)$, agora para determinar o v_3, temos que encontrar um vetor deste plano que seja ortogonal ao v_2 encontrado. Ou seja, $v_3=(a,b,c)$ tal que $\langle v_3 \cdot v_2\rangle = 0$ e v_3 pertence ao plano, ou seja, $a-b-c=0$.

Logo, temos que: $a-b-c=0$ e $a+b=0$. Daí, obtemos $v_3=(-1,1,-2)$.

Logo, para $\lambda=3$ obtemos $v_2=(1,1,0)$ e $v_3=(1,-1,-2)$. Logo $u_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ e $u_3=\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$.

Resposta: $D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $P=\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

7. Verifique se o operador $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por $T(x,y,z)=(-y-z,-x-z,-x-y)$ é auto-adjunto. Se for, determine uma base ortonormal formada pelos autovetores deste operador T e a matriz que representa T nesta base.

Solução: A matriz que representa o operador T com respeito à base canônica é:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

!

Pelo Teorema 1 da aula 24, temos que um operador é auto-adjunto se e somente se a matriz que o representa com respeito a qualquer base ortonormal é uma matriz simétrica.

Logo, o operador acima é auto-adjunto. Precisamos agora determinar primeiro os autovetores e a partir deles os autovetores de A (que vai ser uma base ortogonal) e a partir desses autovetores vamos determinar a base ortonormal.

O polinômio característico de A é dado por $p(x)=\det(xI_3-A)$, logo teremos:

$$p(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=(x-1)^2(x+2)$$

Os autovalores de A são 1 e -2.

Se $\lambda = 1$, teremos: $\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\rangle$ por meio das operações elementares obtemos $\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$

Daí, temos que $V_1 = \{(x,y,z) \mid x+y+z=0\}$. Para escolhermos os autovetores ortogonais para $\lambda = 1$, temos que determinar os vetores ortogonais que pertencem ao plano $x+y+z=0$. Facilmente determinamos $v_1 = (-1,1,0)$, agora para determinar o v_2 temos que encontrar um vetor deste plano que seja ortogonal ao v_1 encontrado. Ou seja, $v_2 = (a,b,c)$ tal que $\langle v_1 \cdot v_2 \rangle = 0$ e v_2 pertence a V_1.

Logo, temos que: $a+b+c=0$ e $-a+b=0$. Daí obtemos $v_2 = (1,1,-2)$.

Para $\lambda = 1$ obtemos $v_1 = (-1,1,0)$ e $v_2 = (1,1,-2)$. Logo $u_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$.

Se $\lambda = -2$, teremos: $\left\langle \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right\rangle$ por meio das operações elementares obtemos $\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$

Daí, temos que $S_{-2} = \{(x,y,z) \mid x = z \text{ e } y = z\}$, ou seja, $v_3 = (1,1,1)$. Logo $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Resposta: O operador T é auto-adjunto, uma base ortonormal formada pelos autovetores deste operador T é

$$B = \left\{ \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\},$$

e a matriz que representa T nesta base $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

8. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador auto-adjunto com autovalores associados $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 4$. Suponha que $v_1 = (1,1,1)$ e $v_2 = (2,0,1)$ são autovetores associados ao $\lambda_1 = 3$. Determine um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 4$ e uma base ortonormal de autovetores de T.

Solução: Como T é um operador auto-adjunto, o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 4$ vai ser o vetor v_3 que é ortogonal a v_1 e v_2. Logo, $v_3 = (1,1,-2)$.

Podemos observar que v_1 e v_2 não são ortogonais, logo precisamos determinar o vetor w ortogonal a v_1 e v_3. Seja $w = (-1,1,0)$.

Temos a base ortonormal de vetores de T formada pelos vetores: $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $u_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$

Resposta: O autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 4$ é $v_3 = (1,1,-2)$.

A base ortonormal é

$$\beta = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)\right\}.$$

!

Se tomar o vetor w ortogonal a v_2 e v_3, a base será:

$$\beta = \left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$$

9. Verifique se o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por: $T(x,y,z) = (x+y, x+y, z)$ é auto-adjunto. Se for, determine uma base ortonormal de vetores do operador T e a matriz que representa T nesta base.

   Solução: Seja A a matriz que representa este operador na base canônica: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é matriz simétrica, logo o operador T é auto-adjunto.

   Os autovalores de A são 0, 1 e 2.

   Se $\lambda = 0$ então $v_1 = (-1,1,0)$, logo $u_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

   Se $\lambda = 1$ então $v_2 = (0,0,1)$, logo $u_2 = (0,0,1)$.

   Se $\lambda = 2$ então $v_3 = (1,1,0)$, logo $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Resposta: O operador T é auto-adjunto, uma base ortonormal é $B = \left\{ \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), (0,0,1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right\}$ e a matriz que representa T nesta base $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Capítulo 4

FORMAS BILINEARES, FORMAS QUADRÁTICAS, CÔNICAS, QUÁDRICAS, AUTOVALOR COMPLEXO

Este é o último capítulo! Nele estamos tratando os conceitos: Fórmulas Bilineares e Quadráticas, Cônicas, Quádricas e também o Autovalor Complexo.

No primeiro capítulo fizemos todas as contas para determinar autovalores e autovetores, mas aos poucos, nos outros capítulos, deixamos de ter esse cuidado. Agora, neste capítulo, não estamos mais fazendo as contas pois achamos que vocês já estão aptos a fazê-las.

Vamos lá. Ao trabalho!

Exercícios

1. Seja F uma forma bilinear no espaço vetorial V e A a matriz que representa F numa base α de V. Mostre que F é uma forma bilinear simétrica se e somente se A é uma matriz simétrica.

2. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Verifique que a aplicação $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por $F(u,v) = u^t A v$, é uma forma bilinear.

3. Seja $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $F(u,v) = \langle u, v\rangle$, o produto escalar em $\mathbb{R}^3$.

   (a) Determine a matriz A que representa a forma bilinear F com respeito à α, base canônica de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Determine a matriz B que representa a forma bilinear F com respeito à base $\beta = \{(1,1,0), (-1,0,1), (0,2,1)\}$.

4. Seja $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(u,v) = F((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$.

   (a) Determine a matriz A que representa a forma bilinear F com respeito à α, base canônica de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Determine a matriz B que representa a forma bilinear F com respeito à base $\beta = \{(1,0),(1,1)\}$.

   (c) Determine a matriz C que representa a forma bilinear F com respeito à base $\delta = \{(2,1),(1,-1)\}$.

   (d) Determine a matriz mudança de base P, da base β para a base δ, e verifique que $B = P^tCP$.

5. Determine, em cada caso, uma mudança de variável P que transforme as formas quadráticas $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definidas a seguir, dadas na base canônica, em uma forma diagonal. Obtenha também a expressão dessa forma diagonal.

   (a) $q(x_1,x_2,x_3) = 3{x_1}^2 + 5{x_2}^2 + 3{x_3}^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

   (b) $q(x_1,x_2,x_3) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + 2x_2x_3$

6. Em cada caso, aplique o procedimento apresentado na aula 27, simplificando a equação ao máximo e identificando a cônica apresentada.

   - Reescreva a equação da cônica na forma matricial ($v^tAv + Bv + n = 0$). Lembre-se de que v^tAv é a forma diagonal e Bv a forma linear e n é o termo independente.
   - Determine os autovetores (base ortonormal: P) e autovalores da matriz simétrica A. Lembre-se de que P é a matriz que diagonaliza a matriz A, e a matriz diagonal D é composta dos autovalores e $D = P^tAP$.
   - A forma diagonal de q é dada por: $q(x_1,y_1) = [x_1\ y_1]\, D \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$.
   - A forma linear se transforma em $Bv = B\,(P(x_1,y_1))$ – o que vai ser feito aqui é simplesmente uma mudança de base.
   - Reescreva a equação com a forma diagonal e a forma linear.

- Resolva os quadrados perfeitos, e a equação estará simplificada.
- Classifique a cônica.

> **!**
>
> – Se os autovalores forem diferentes de zero: se os autovalores tiverem o mesmo sinal (todos maiores que zero ou menores que zero), teremos uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio; se os autovalores tiverem sinais contrários, a cônica será uma hiperbole ou um par de retas concorrentes.
> – Se um dos autovalores for igual a zero, teremos uma parábola, ou um par de retas paralelas ou uma única reta ou o conjunto vazio.

(a) $7x^2 + y^2 - 8xy - 17\sqrt{5}x + 11\sqrt{5}y + 41 = 0$

(b) $4x^2 + y^2 + 4xy + 5\sqrt{5}x + 10\sqrt{5}y + 5 = 0$

(c) $3x^2 + 3y^2 - 2xy + 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 2 = 0$

7. Em cada caso, aplique o procedimento apresentado na aula 28, simplificando a equação ao máximo e identificando a quádrica apresentada.

   - Reescreva a equação da quádrica na forma matricial $(v^tAv + Bv + p = 0)$.
     – v^tAv é a forma diagonal e Bv a forma linear, e p é o termo independente.

   > **!**
   >
   > Observe agora que A é uma matriz 3×3, e v é um vetor do $\mathbb{R}^3$.

   - Determine os autovetores (base ortonormal: P) e autovalores da matriz simétrica A. Lembre-se de que P é matriz que diagonaliza a matriz A, e a matriz diagonal D é composta dos autovalores e $D = P^tAP$.
   - A forma diagonal de q é dada por $q(x_1, y_1) = [x_1\ y_1\ z_1]\ D \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$.

- A forma linear se transforma em $Bv = B(P(x_1, y_1, z_1))$ – o que vai ser feito aqui é simplesmente uma mudança de base.
- Reescreva a equação com a forma diagonal e a forma linear.
- Resolva os quadrados perfeitos, e a equação da quádrica estará simplificada.
- Classifique a quádrica.

!

– Se os autovalores forem diferentes de zero: se p é diferente de zero, a quádrica é dita ser de centro e será uma elipsóide, se os autovalores tiverem o mesmo sinal teremos uma elipsóide, um ponto ou o conjunto vazio; se os autovalores tiverem sinais contrários, a cônica será uma hiperbolóide de uma folha (com um sinal negativo) ou de duas folhas (com dois sinais negativos); se p é igual a zero, teremos um cone ou um par de retas concorrentes.
– Se um dos autovalores for igual a zero, teremos um parabolóide elíptico ou hiperbólico, um cilindro elíptico ou parabólico, dois planos secantes ou dois planos paralelos.

(a) $2xy - 4\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + z - 9 = 0$

(b) $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z - 9 = 0$

(c) $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z - 24 = 0$

8. Determine os autovalores e uma base para cada auto-espaço das matrizes a seguir:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

9. Calcule os autovalores e autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, onde a e b são números reais tal que a diferente de zero ou b diferente de zero.

Agora é a sua vez. Mãos à obra!

Soluções

1. Seja F uma forma bilinear no espaço vetorial V e A a matriz que representa F numa base α de V. Mostre que F é uma forma bilinear simétrica se e somente se A é uma matriz simétrica.

   Solução: Se F é uma forma bilinear no espaço vetorial V, temos que: $F(u,v) = u^t Av$.

   Observe que $u^t Av$ é um escalar, logo, $u^t Av = (u^t Av)^t$.

   Daí, $F(u,v) = (u^t Av)^t = v^t A^t u$.

   Pela definição 2 temos que se F é bilinear, ou seja, $F(u,v) = F(v,u)$, assim:

   $$v^t Au = F(u,v) = F(v,u) = v^t Au.$$

   Logo,
   $$v^t A^t u = v^t Au$$

   Daí, $A^t = A$, ou seja, A é uma matriz simétrica.

   Reciprocamente, se A é uma matriz simétrica, então A^t = A, então:

   $$F(u,v) = u^t Av = \left(u^t Av\right)^t = v^t A^t u = v^t Au = F(v,u)$$

   Logo, a forma bilinear F também é simétrica.

   !

   Ficou provado então que F é uma forma bilinear simétrica se somente se a matriz A que representa F numa base α do espaço vetorial V é matriz simétrica.

2. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Verifique que a aplicação $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por $F(u,v) = u^t Av$ é uma forma bilinear.

   Solução: Seja u, v, $w \in \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}$.

   $F(u+aw,v) = (u+aw)^t Av = (u^t + aw^t)Av = u^t Av + aw^t Av =$
   $= F(u,v) + aF(w,v)$, ou seja, F é bilinear na primeira variável.

   $F(u,v+aw) = u^t A(v+aw) = (u^t Av) + (u^t Aaw) = (u^t Av) + a(u^t Aw) =$
   $F(u,v) + aF(w,v)$, ou seja, F é bilinear também na segunda variável.

   Logo, F é forma bilinear.

3. Seja $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $F(u,v) = \langle u,v \rangle$, o produto escalar em $\mathbb{R}^3$.

   (a) Determine a matriz A que representa a forma bilinear F com respeito à α, base canônica de $\mathbb{R}^3$.

   Solução: Temos que:
   $F((1,0,0),(1,0,0)) = 1$; $F((0,1,0),(1,0,0)) = 0$; $F((0,0,1),(1,0,0)) = 0$;
   $F((1,0,0),(0,1,0)) = 0$; $F((0,1,0),(0,1,0)) = 1$; $F((0,0,1),(0,1,0)) = 0$;
   $F((1,0,0),(0,0,1)) = 0$; $F((0,1,0),(0,0,1)) = 0$ e $F((0,0,1),(0,0,1)) = 1$

   Logo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   Resposta: A matriz que representa a forma bilinear F com respeito à base canônica é $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) Determine a matriz B que representa a forma bilinear F com respeito à base $\beta = \{(1,1,0),(-1,0,1),(0,2,1)\}$.

   Solução:
   $F((1,1,0),(1,1,0)) = 2$; $F((-1,0,1),(1,1,0)) = -1$; $F((0,2,1),(1,1,0)) = 2$;
   $F((1,1,0),(-1,0,1)) = -1$; $F((-1,0,1),(-1,0,1)) = 2$;
   $F((0,2,1),(-1,0,1)) = 1$;
   $F((1,1,0),(0,2,1)) = 2$; $F((-1,0,1),(0,2,1)) = 1$; e $F((0,2,1),(0,2,1)) = 5$.

   Logo $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

   Resposta: A matriz que representa a forma bilinear F com respeito à base canônica é $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

4. Seja $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por: $F(u,v) = F((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$.

(a) Determine a matriz A que representa a forma bilinear F com respeito à α, base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Solução:

$F((1,0),(1,0)) = 2;\ F((1,0),(0,1)) = -3;$

$F((0,1),(1,0)) = 0;$ e $F((0,1),(0,1)) = 1.$

Logo $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Resposta: A matriz que representa a forma bilinear F com respeito à base canônica é $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Determine a matriz B que representa a forma bilinear F com respeito à base $\beta = \{(1,0),(1,1)\}$

Solução:

$F((1,0),(1,0)) = 2;\ F((1,0),(1,1)) = -1;$

$F((1,1),(1,0)) = 2;\ F((1,1),(1,1)) = 0.$

Logo $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Resposta: A matriz que representa a forma bilinear F com respeito à base canônica é $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) Determine a matriz C que representa a forma bilinear F com respeito à base $\delta = \{(2,1),(1,-1)\}$

Solução:

$F((2,1),(2,1)) = 3;\ F((2,1),(1,-1)) = 9;$

$F((1,-1),(2,1)) = 0;\ F((1,-1),(1,-1)) = 6.$

Logo $C = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

Resposta: A matriz que representa a forma bilinear F com respeito à base canônica é $C = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

(d) Determine a matriz mudança de base P, da base β para a base δ, e verifique que $B = P^tCP$.

Solução: Observe que, neste caso, a matriz P é a matriz mudança de base, da base β para a base δ, que é definida por $\delta^{-1}\beta$ (reveja este conceito no seu livro de Álgebra Linear I).

Temos que:

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \delta = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \quad \delta^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix}$$

Logo $P = \delta^{-1}\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$

Além disso, $P^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$

Logo, $B = P^tCP$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

Resposta: A matriz mudança de base é $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$ e vimos que $B = P^tCP$.

5. Determine, em cada caso, uma mudança de variável P que transforme as formas quadráticas $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definidas a seguir, dadas na base canônica, em uma forma diagonal. Obtenha também a expressão dessa forma diagonal.

   (a) $q(x_1, x_2, x_3) = 3{x_1}^2 + 5{x_2}^2 + 3{x_3}^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

   Solução: Observando os coeficientes de q, podemos observar que a matriz A, que representa q na base canônica, é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

   Diagonalizar a forma quadrática q é equivalente a diagonalizar a matriz simétrica A.

   O polinômio característico de A é dado por:

$$p(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ 1 & x-5 & 1 \\ -1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-2)(x-3)(x-6)$$

   As raízes do polinômio característico são 2, 3 e 6, ou seja, os autovalores de A são 6, 2 e 3.

Se $\lambda = 6$, temos $\begin{bmatrix} 6-3 & 1 & -1 \\ 1 & 6-5 & 1 \\ -1 & 1 & 6-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolvendo o sistema $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

determinamos: $S_6 = \{(x,y,z) \mid x = z \text{ e } y = -2z\} = \{(z,-2z,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = [(1,-2,1)]$.

Logo $v_1 = (1,-2,1)$.

Se $\lambda = 2$, temos $\begin{bmatrix} 2-3 & 1 & -1 \\ 1 & 2-5 & 1 \\ -1 & 1 & 2-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolvendo o sistema, $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

determinamos: $S_2 = \{(x,y,z) \mid y = 0 \text{ e } x = -z\} = \{(-z,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = [(-1,0,1)]$.

Logo $v_2 = (-1,0,1)$.

Se $\lambda = 3$, temos $\begin{bmatrix} 3-3 & 1 & -1 \\ 1 & 3-5 & 1 \\ -1 & 1 & 3-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolvendo o sistema, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

determinamos: $S_3 = \{(x,y,z) \mid z = y \text{ e } x = y\} = \{(y,y,y) \mid y \in \mathbb{R}\} = [(1,1,1)]$.

Logo $v_3 = (1,1,1)$.

A base dos autovetores é $B = \{(1,-2,1),(-1,0,1),(1,1,1)\}$ – que é uma base ortogonal, porém, precisamos determinar a base ortonormal, ou seja,

$$P = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\},$$

ou seja:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Devemos tomar os autovetores de tal forma que $\det P = 1$.

A matriz diagonal correspondente é:

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A expressão na forma diagonal de q é dada por:

$$q(y_1,y_2,y_3) = [y_1\,y_2\,y_3]\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 6{y_1}^2 + 3{y_2}^2 + 2{y_3}^2$$

Resposta: A matriz mudança de variável é

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

e a expresssão desta forma diagonal é

$$q(y_1,y_2,y_3) = 6{y_1}^2 + 3{y_2}^2 + 2{y_3}^2.$$

(b) $q(x_1,x_2,x_3) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + 2x_2x_3$

Solução: Observando os coeficientes de q, podemos observar que a matriz A que representa q na base canônica é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalizar a forma quadrática q é equivalente a diagonalizar a matriz simétrica A.

O polinômio característico de A é dado por:

$$p(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & -1 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-0)(x-1)(x-2)$$

Logo, os autovalores são 0, 1 e 2.

Se $\lambda = 0$, temos que: $(0I_3 - A)v = 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema é equivalente a: $x = 0$ e $z = -y$, logo a solução é da forma: $V_0 = \{(0,y,-y) \mid y \in \mathbb{R}\} = [(0,1,-1)]$.

Portanto, $v_1 = (0,1,-1)$ é o autovetor associado a $\lambda = 0$.

Se $\lambda = 1$, temos que: $(1I_3 - A)v = 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema, **para qualquer valor de** x, é equivalente a $y = 0$ e $z = 0$, logo, todas as soluções são da forma:

$$V_1 = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1,0,0)].$$

Portanto, $v_2 = (1,0,0)$ é o autovetor associado a $\lambda = 1$.

Se $\lambda = 2$, temos que: $(2I_3 - A)v = 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema é equivalente a: $x = 0$ e $z = y$, logo, todas as soluções são da forma:

$$V_2 = \{(0,y,y) \mid y \in \mathbb{R}\} = [(0,1,1)].$$

Portanto, $v_3 = (0,1,1)$ é o autovetor associado a $\lambda = 2$.

A base dos autovetores é $B = \{(0,1,-1),(1,0,0),(0,1,1)\}$ – que é uma base ortogonal, porém, precisamos determinar a base ortonormal, ou seja,

$$P = \left\{(1,0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\},$$

ou seja:

> **!**
>
> Observe que mudamos a ordem dos vetores de P para que $\det P = 1$.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \det P = 1$$

A matriz diagonal D, semelhante à matriz A, é dada por:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A expressão na forma diagonal de q é dada por:

$$q(y_1, y_2, y_3) = [y_1\, y_2\, y_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 1{y_1}^2 + 0{y_2}^2 + 2{y_3}^2$$

Resposta: A matriz mudança de variável

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

e a expresssão desta forma diagonal é

$$q(y_1, y_2, y_3) = 1{y_1}^2 + 0{y_2}^2 + 2{y_3}^2.$$

6. Em cada caso, aplique o procedimento apresentado na aula 27, simplificando a equação ao máximo e identificando a cônica apresentada.

   (a) $7x^2 + y^2 - 8xy - 17\sqrt{5}x + 11\sqrt{5}y + 41 = 0$

   Solução: Vamos seguir o procedimento sugerido na aula 27 passo a passo. Ou seja:

   • Reescreva a equação da cônica na forma matricial ($v^t Av + Bv + n = 0$).

$$[x\, y] \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -17\sqrt{5} & 11\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 41 = 0$$

   • Determine os autovetores (base ortonormal – P) e autovalores da matriz simétrica A. Lembre-se de que P é a matriz que diagonaliza a matriz A, e a matriz diagonal D é composta dos autovalores e $D = P^t AP$.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

   Os autovalores de A são: 9 e -1.

   !

   A cônica pode ser uma hipérbole.

Se $\lambda_1 = 9$, temos que $v_1 = (2, -1)$, logo $u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$
Se $\lambda_2 = -1$, temos que $v_1 = (1, 2)$, logo $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
$D = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$, com $\det P = 1$

• A forma diagonal de q é dada por $q(x_1, y_1) = [x_1\ y_1] D \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

$$q(x_1, y_1) = [x_1\ y_1] \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

• A forma linear se transforma em $Bv = B(P(x_1, y_1))$ – o que vai ser feito aqui é simplesmente uma mudança de base.

$$Bv = \left[-17\sqrt{5}\ \ 11\sqrt{5}\right] \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

• Reescreva a equação com a forma diagonal, a forma linear e o termo independente.

$$[x_1\ y_1] \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \left[-17\sqrt{5}\ \ 11\sqrt{5}\right] \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 41 = 0$$

• Resolva a equação e os quadrados perfeitos, e a equação estará simplificada.

$$9{x_1}^2 - {y_1}^2 - 45x_1 + 5y_1 + 41 = 0$$

$$9\left({x_1}^2 - 5x_1\right) - \left({y_1}^2 - 5y_1\right) = -41$$

$$9\left(x_1 - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(y_1 - \frac{5}{2}\right)^2 = -41 + 9\left(\frac{25}{4}\right) - \frac{25}{4} = -41 + 8\left(\frac{25}{4}\right)$$

$$9\left(x_1 - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(y_1 - \frac{5}{2}\right)^2 = -41 + 50 = 9$$

$$9\left(x_1 - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(y_1 - \frac{5}{2}\right)^2 = 9$$

Seja $x_2 = \left(x_1 - \frac{5}{2}\right)$ e $y_2 = \left(y_1 - \frac{5}{2}\right)$.
A equação reescrita será: ${x_2}^2 - \frac{{y_2}^2}{9} = 1$ – que é a equação de uma **hipérbole.**

Resposta: A equação simplificada é ${x_2}^2 - \frac{{y_2}^2}{9} = 1$ que representa uma **hipérbole.**

(b) $4x^2+y^2+4xy+5\sqrt{5}x+10\sqrt{5}y+5=0$.

Solução:

• Reescreva a equação da cônica na forma matricial ($v^tAv+Bv+n=0$).

$$[x\ y]\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\sqrt{5} & 10\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+5=0$$

• Determine os autovetores (base ortonormal – P) e autovalores da matriz simétrica A. Lembre-se de que P é a matriz que diagonaliza a matriz A, e a matriz diagonal D é composta dos autovalores e $D=P^tAP$.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de A são: 0 e 5.

!

A cônica pode ser uma parábola.

Se $\lambda_1=0$, temos que $v_1=(1,-2)$, logo $u_1=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$.
Se $\lambda_2=5$, temos que $v_1=(2,1)$, logo $u_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.
$D=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ com $\det P=1$.

• A forma diagonal de q é dada por $q(x_1,y_1)=[x_1\ y_1]D\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

$$q(x_1,y_1)=[x_1\ y_1]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

• A forma linear se transforma em $Bv=B(P(x_1,y_1))$ – o que vai ser feito aqui é simplesmente uma mudança de base.

$$Bv=\begin{bmatrix}5\sqrt{5} & 10\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

• Reescreva a equação com a forma diagonal, a forma linear e o termo independente.

$$[x_1\ y_1]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5\sqrt{5} & 10\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+5=0$$

• Resolva a equação e os quadrados perfeitos, e a equação estará simplificada.

$$5{y_1}^2-15x_1+20y_1+5=0$$
$$\left(5{y_1}^2+20y_1\right)=15x_1-5 \text{ (dividindo por 5)}$$
$$\left({y_1}^2+4y_1\right)=3x_1-1$$
$$(y_1+2)^2=3x_1-1+4$$
$$(y_1+2)^2=3x_1+3=3\,(x_1+1)$$
$$(y_1+2)^2=3\,(x_1+1)$$

Seja $x_2=(x_1+1)$ e $y_2=(y_1+2)$

A equação reescrita será: ${y_2}^2=3x_2$ – que é a equação de uma **parábola**.

Resposta: A equação simplificada é ${y_2}^2=3x_2$ que representa uma **parábola**.

(c) $3x^2+3y^2-2xy+2\sqrt{2}x-6\sqrt{2}y+2=0$

Solução:

• Reescreva a equação da cônica na forma matricial $(v^tAv+Bv+n=0)$.

$$[x\ y]\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -6\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+2=0$$

• Determine os autovetores (base ortonormal – P) e autovalores da matriz simétrica A. Lembre-se de que P é a matriz que diagonaliza a matriz A, e a matriz diagonal D é composta dos autovalores e $D=P^tAP$.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de A são: 4 e 2.

!

Esta cônica pode ser uma elipse.

Se $\lambda_1 = 4$, temos que $v_1 = (1, -1)$, logo $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$
Se $\lambda_2 = 2$, temos que $v_1 = (1, 1)$, logo $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

• A forma diagonal de q é dada por $q(x_1, y_1) = [x_1\, y_1] D \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

$$q(x_1, y_1) = [x_1 \;\; y_1] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

• A forma linear se transforma em $Bv = B(P(x_1, y_1))$ – o que vai ser feito aqui é simplesmente uma mudança de base.

$$Bv = \begin{bmatrix} -17\sqrt{5} & 11\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

• Reescreva a equação com a forma diagonal, a forma linear e o termo independente.

$$[x_1 \;\; y_1] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -6\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 2 = 0$$

• Resolva a equação e os quadrados perfeitos, e a equação estará simplificada.

$$4{x_1}^2 + 2{y_1}^2 + 8x_1 - 4y_1 + 2 = 0$$

$$4\left({x_1}^2 + 2x_1\right) + 2\left({y_1}^2 - 2y_1\right) = -2$$

$$4(x_1 + 1)^2 + 2(y_1 - 1)^2 = -2 + 4 + 2 = 4$$

$$(x_1 + 1)^2 + \frac{(y_1 - 1)^2}{2} = 1$$

Seja $x_2 = (x_1 + 1)$ e $y_2 = \left({y_1}^2 - 1\right)$.

A equação reescrita será: $x_2{}^2 + \frac{y_2{}^2}{2} = 1$ – que é a equação de uma **elipse**.

Resposta: A equação simplificada é $x_2{}^2 + \frac{y_2{}^2}{2} = 1$ que representa uma elipse.

7. Em cada caso, aplique o procedimento apresentado na aula 28, simplificando a equação ao máximo e identificando a quádrica apresentada.

 (a) $2xy - 4\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + z - 9 = 0$

Solução:

• Reescreva a equação da cônica na forma matricial ($v^tAv + Bv + n = 0$).

$$[x\ y\ z]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 9$$

• Determine os autovetores (base ortonormal – P) e autovalores da matriz simétrica A. Lembre-se de que P é a matriz que diagonaliza a matriz A, e a matriz diagonal D é composta dos autovalores e $D = P^tAP$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de A são: 0, 1 e -1.

!

A quádrica pode ser um parabolóide elíptico ou hiperbólico, um cilindro elíptico ou parabólico, dois planos secantes ou dois planos paralelos.

Se $\lambda_1 = 0$, temos que $v_1 = (0,0,1)$, logo $u_1 = (0,0,1)$.
Se $\lambda_2 = 1$, temos que $v_2 = (1,1,0)$, logo $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.
Se $\lambda_3 = -1$, temos que $v_3 = (-1,1,0)$, logo $u_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.
Observe que a partir deste exercício estamos deixando as contas por conta de vocês.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ com } \det P = 1.$$

• A forma diagonal de q é dada por $q\,(x_1, y_1, z_1) = [x_1\ y_1\ z_1]\,D \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$

$$q(x_1, y_1, z_1) = [x_1\ y_1\ z_1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

• A forma linear se transforma em $Bv = B\,(P(x_1, y_1, z_1))$ – o que vai ser feito aqui é simplesmente uma mudança de base.

$$Bv = \begin{bmatrix} -4\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

• Reescreva a equação com a forma diagonal, a forma linear e o termo independente.

$$[x_1\ \ y_1\ \ z_1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = 9$$

• Resolva a equação e os quadrados perfeitos, e a equação estará simplificada.

$$y_1{}^2 - z_1{}^2 + x_1 - 2y_1 + 6z_1 = 9$$

$$x_1 + \left(y_1{}^2 - 2y_1\right) - \left(z_1{}^2 - 6z_1\right) = 9$$

$$x_1 + (y_1 - 1)^2 - (z_1 - 3)^2 = 9 + 1 - 9 = 1$$

$$x_1 + (y_1 - 1)^2 - (z_1 - 3)^2 = 1$$

Seja $x_2 = x_1$, $y_2 = (y_1 - 1)$ e $z_2 = (z_1 - 3)$.

A equação reescrita será: $x_2 + y_2{}^2 - z_2{}^2 = 1$. A quádrica é **um parabolóide hiperbólico**.

Resposta: A equação simplificada é $x_2 + y_2{}^2 - z_2{}^2 = 1$ que representa um parabolóide hiperbólico.

(b) $2xy+2xz+2yz-6x-6y-4z-9=0$

Solução:

• Reescreva a equação da cônica na forma matricial ($v^tAv+Bv+n=0$).

$$[x\ y\ z]\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}[-6\ -6\ -4]\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=9$$

• Determine os autovetores (base ortonormal – P) e autovalores da matriz simétrica A. Lembre-se de que P é a matriz que diagonaliza a matriz A, e a matriz diagonal D é composta dos autovalores e $D=P^tAP$.

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

Os autovalores de A são: 1 e -2.

A quádrica pode ser um hiperbolóide de duas folhas.

Se $\lambda_1=1$, <u>temos que determinar dois autovetores ortogonais associados a este autovalor</u>. Como $S_1=\{(x,y,z)\mid x+y+z=0\}$, temos que determinar dois vetores ortogonais pertencentes a este espaço.

Seja $v_1=(1,-1,0)$ e $v_2=(1,1,-2)$, v_1 e v_2 são elementos de S_1 e são vetores ortogonais. Logo, $u_1=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ e $u_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$.

Se $\lambda_2=-2$, temos que $v_3=(1,1,1)$, logo $u_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$.

Daí,

$$D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\text{ e }P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{-2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\text{ com }\det P=1.$$

• A forma diagonal de q é dada por $q(x_1,y_1,z_1)=[x_1\ y_1\ z_1]D\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}$

$$q(x_1,y_1,z_1)=[x_1\ \ y_1\ \ z_1]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}$$

• A forma linear se transforma em $Bv = B(P(x_1, y_1, z_1))$ – o que vai ser feito aqui é simplesmente uma mudança de base.

$$Bv = [-6 \ \ -6 \ \ -4]\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

• Reescreva a equação com a forma diagonal, a forma linear e o termo independente.

$$[x_1 \ y_1 \ z_1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + [-6 \ \ -6 \ \ -4]\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = 9$$

• Resolva a equação e os quadrados perfeitos, e a equação estará simplificada.

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 - 2z_1{}^2 + 0x_1 - \frac{4}{\sqrt{6}}y_1 - \frac{16}{\sqrt{3}}z_1 = 9$$

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 - 2z_1{}^2 - \frac{4}{\sqrt{6}}y_1 - \frac{16}{\sqrt{3}}z_1 = 9$$

$$x_1{}^2 + \left(y_1{}^2 - \frac{4}{\sqrt{6}}y_1\right) - 2\left(z_1{}^2 + \frac{8}{\sqrt{3}}z_1\right) = 9$$

$$x_1{}^2 + \left(y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 - 2\left(z_1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = 9 + \frac{2}{3} - \frac{32}{3} = 9 - \frac{30}{3} = 9 - 10$$

$$x_1{}^2 + \left(y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 - 2\left(z_1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = -1$$

Seja $x_2 = x_1$, $y_2 = \left(y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ e $z_2 = \left(z_1 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$.

A equação reescrita será: $x_2{}^2 + y_2{}^2 - 2z_2{}^2 = -1$. A quádrica é **um hiperbolóide de duas folhas**.

Resposta: A equação simplificada é $x_2{}^2 + y_2{}^2 - 2z_2{}^2 = -1$ que representa um hiperbolóide de duas folhas.

(c) $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z - 24 = 0$

Solução:

• Reescreva a equação da cônica na forma matricial ($v^tAv+Bv+n=0$).

$$[x\,y\,z]\begin{bmatrix} 7 & -1 & -2\\ -1 & 7 & 2\\ -2 & 2 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}+[-12\;\;12\;\;60]\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}=24$$

• Determine os autovetores (base ortonormal: P) e autovalores da matriz simétrica A. Lembre-se de que P matriz que diagonaliza a matriz A, e a matriz diagonal D é composta dos autovalores e $D=P^tAP$.

$$A=\begin{bmatrix} 7 & -1 & -2\\ -1 & 7 & 2\\ -2 & 2 & 10\end{bmatrix}$$

Os autovalores de A são: 6 e 12.

> **!**
>
> A quádrica pode ser um elipsóide, um ponto ou o conjunto vazio.

Se $\lambda_1=6$, <u>temos que determinar dois autovetores ortogonais associados a este autovalor</u>. Como $S_6=\{(x,y,z)\mid x-y-2z=0\}$, temos que considerar $v_1=(1,1,0)$, então $v_2=(1,-1,1)$, logo $u_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ e $u_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.
Se $\lambda_2=12$, temos que $v_3=(-1,1,2)$, logo $u_3=\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

Daí, $D=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 12\end{bmatrix}$ e $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$ com $\det P=1$.

• A forma diagonal de q é dada por $q(x_1,y_1,z_1)=[x_1\;y_1\;z_1]\,D\begin{bmatrix} x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}$

$$q(x_1,y_1,z_1)=[x_1\;\;y_1\;\;z_1]\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}$$

• A forma linear se transforma em $Bv=B\left(P(x_1,y_1,z_1)\right)$ – o que vai ser feito aqui é simplesmente uma mudança de base.

$$Bv = [-12 \ \ 12 \ \ 60] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

• Reescreva a equação com a forma diagonal, a forma linear e o termo independente.

$$[x_1 \ y_1 \ z_1] \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + [-12 \ \ 12 \ \ 60] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = 24$$

• Resolva a equação e os quadrados perfeitos, e a equação estará simplificada.

$$6{x_1}^2 + 6{y_1}^2 + 12{z_1}^2 - \frac{36}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{144}{\sqrt{6}}z_1 = 24$$

$$6{x_1}^2 + 6\left({y_1}^2 - \frac{6}{\sqrt{3}}y_1\right) + 12\left({z_1}^2 + \frac{12}{\sqrt{6}}z_1\right) = 24$$

$$6{x_1}^2 + 6\left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2 + 12\left(z_1 - \frac{6}{\sqrt{6}}\right)^2 = 24 + 18 + 72 = 114$$

$$6{x_1}^2 + 6\left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2 + 12\left(z_1 - \frac{6}{\sqrt{6}}\right)^2 = 114 \quad \text{(dividindo por 6)}$$

$${x_1}^2 + \left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left(z_1 - \frac{6}{\sqrt{6}}\right)^2 = 19$$

Seja $x_2 = x_1$, $y_2 = \left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ e $z_2 = \left(z_1 - \frac{6}{\sqrt{6}}\right)$.

A equação reescrita será: ${x_2}^2 + {y_2}^2 + 2{z_2}^2 = 19$. A quádrica é **um elipsóide**.

Resposta: A equação simplificada é ${x_2}^2 + {y_2}^2 + 2{z_2}^2 = 19$ que representa um elipsóide.

8. Determine os autovalores e uma base para cada auto-espaço das matrizes a seguir:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Solução: Determinando os autovalores de A, temos:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} = ((x-1)(x-3))+2 = x^2-4x+5$$

Logo, os autovalores de A são: $2+i$ e $2-i$.

Determinando os autovetores, temos:

Se $\lambda_1 = 2+i$, teremos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2+i-1 & 2 & 0 \\ -1 & 2+i-3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1+i & 2 & 0 \\ -1 & -1+i & 0 \end{array}\right]$$

Multiplicando a segunda linha por $1+i$ e somando este resultado na primeira linha, encontraremos:

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1+i & 0 \end{array}\right]$$

Logo, $-x+(-1+i)y = 0$, ou seja: $x = (-1+i)y$.

A solução para esse sistema $S_{2+i} = \{((-1+i)y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = [(-1+i, 1)]$.

Ou seja: se $\lambda_1 = 2+i$, então o autovetor $v_1 = (-1+i, 1)$.

Se $\lambda_2 = 2-i$, teremos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2-i-1 & 2 & 0 \\ -1 & 2-i-3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1-i & 2 & 0 \\ -1 & -1-i & 0 \end{array}\right]$$

Multiplicando a segunda linha por $1-i$ e somando este resultado na primeira linha, encontraremos:

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1-i & 0 \end{array}\right]$$

Logo, $-x+(-1-i)y = 0$, ou seja: $x = (-1-i)y$.

A solução para esse sistema $S_{2-i} = \{((-1-i)y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = [(-1-i, 1)]$.

Ou seja: se $\lambda_2 = 2-i$, então o autovetor $v_1 = (-1-i, 1)$.

Resposta: Os autovalores de A são $2+i$ e $2-i$, e a base para estes espaços é determinada por $P = \{(-1+i, 1), (-1-i, 1)\}$.

(b) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

Solução:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ -5 & x-2 \end{vmatrix} = ((x+2)(x-2))+5 = x^2+1$$

Os autovalores de A são: $+i$ e $-i$.

Determinando os autovetores, temos:

Se $\lambda_1 = +i$, teremos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} +i+2 & 1 & 0 \\ -5 & +i-2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} +i+2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(Multiplicamos a primeira linha por $-i+2$ e somamos este resultado na segunda linha)

Logo, $(i+2)x+y=0$, ou seja: $y=-(i+2)x$.

A solução para esse sistema $S_{+i} = \{((x,-(i+2)x) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1,-i-2)]$.

Ou seja: se $\lambda_1 = +i$, então o autovetor $v_1 = (1,-i-2)$.

Se $\lambda_2 = -i$, teremos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -i+2 & 1 & 0 \\ -5 & -i-2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -i+2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(Multiplicamos a primeira linha por $i+2$ e somamos este resultado na segunda linha)

Logo, $(-i+2)x+y=0$, ou seja: $y=-(-i+2)x$.

A solução para esse sistema $S_{-i} = \{((x,(i-2)x) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1,i-2)]$.

Ou seja: se $\lambda_2 = -i$, então o autovetor $v_2 = (1,i-2)$.

Resposta: Os autovalores são $+i$ e $-i$, e a base dos autovetores é determinada por $P = \{(1,-i-2),(1,i-2)\}$.

9. Calcule os autovalores e autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, onde a e b são números reais tal que a diferente de zero ou b diferente de zero.

Solução:

$$\begin{vmatrix} x-a & b \\ -b & x-a \end{vmatrix} = (x-a)^2+b^2 = x^2-2ax+(a^2+b^2)$$

Os autovalores de A são: $a+bi$ e $a-bi$.

Determinando os autovetores temos:

Se $\lambda_1 = a+bi$, teremos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a+bi-a & b & 0 \\ -b & a+bi-a & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} +bi & b & 0 \\ -b & bi & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} +bi & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(Multiplicamos a primeira linha por $-i$ e somamos este resultado na segunda linha)

Logo, $bix+by=0$, dividindo essa equação por $b \neq 0$, encontramos: $y=-ix$.

A solução para esse sistema $S_{+i} = \{(x,-ix) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1,-i)]$.

Ou seja: se $\lambda_1 = a+bi$, então o autovetor $v_1 = (1,-i)$.

Se $\lambda_2 = a-bi$, teremos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a-bi-a & b & 0 \\ -b & a-bi-a & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -bi & b & 0 \\ -b & -bi & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -bi & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(Multiplicamos a primeira linha por i e somamos este resultado na segunda linha)

Logo, $-bix+by=0$, dividindo essa equação por $b \neq 0$, encontramos: $y=ix$.

A solução para esse sistema $S_{+i} = \{(x,ix) \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1,i)]$.

Ou seja: se $\lambda_2 = a-bi$ então o autovetor $v_2 = (1,i)$.

Resposta: Os autovetores são $a+bi$ e $a-bi$. Os autovetores são $\{(1,-i),(1,+i)\}$.

Apêndice

Já tinha acabado de formatar todo este livro, mas continuava buscando mais exercícios e encontrei algumas provas. Assim, decidi fazer este apêndice como se fosse uma grande prova. São 20 questões envolvendo toda a matéria.

Fica então como sugestão para vocês, ao final do estudo de Álgebra Linear II, resolver mais esses exercícios. Caso você consiga, pode se sentir preparado para qualquer prova com o conteúdo estudado aqui.

Vamos lá! Eis aqui a prova dos nove!

Exercícios

1. Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$. Verifique se:

   (i) $v = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$. Caso seja, determine o autovalor correspondente.

   (ii) $\lambda = 6$ é um autovalor de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Caso seja, determine um autovetor associado a este autovalor.

2. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é diagonalizável e determine a matriz diagonal D e uma matriz P tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

3. Considere o operador linear T de $\mathbb{R}^3$ definido por:

   $$T(x,y,z) = (2x+2y+z, x+3y+z, x+2y+2z).$$

   Verifique se é diagonalizável. Caso seja, determine sua representação diagonal $D \in M_3(\mathbb{R})$ e a matriz P que representa a base dos autovetores correspondente.

4. Mostre que o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por:

$$T(x,y,z) = (3x+y+z, 2x+4y+2z, x+y+3z)$$

é diagonalizável. Caso seja, determine sua representação diagonal $D \in M_3(\mathbb{R})$ e o conjunto P que representa a base dos autovetores correspondentes.

5. Determine uma matriz ortogonal cuja primeira coluna tenha a direção do vetor $v = (1,1,1)$.

6. Obtenha uma matriz ortogonal cuja primeira coluna tenha a direção do vetor $v = (1,2,-1)$.

7. Mostre que: Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é ortogonal então $\det(A) = \pm 1$.

8. Obtenha:

   (a) Uma matriz A que representa em $\mathbb{R}^2$ uma reflexão na reta $y = \sqrt{2}x$.

   (b) Uma matriz B que representa em $\mathbb{R}^2$ uma rotação de $\frac{\pi}{6}$ radianos.

   (c) A matriz que representa a reflexão (do item a) seguida da rotação (do item b).

9. Determine a matriz rotação de $\frac{\pi}{3}$ radianos em torno da reta L que passa pela origem e é paralela ao vetor $v = (-1,2,1)$.

10. Determine a matriz que representa a reflexão no plano $\Pi : x - 2y + z$ com respeito à base canônica do $\mathbb{R}^3$.

11. Determine a matriz que representa a projeção ortogonal sobre o plano $\Pi : x+y+z = 0$, com respeito à base canônica do $\mathbb{R}^3$.

12. Determine:

    (a) A matriz que representa a projeção ortogonal dos pontos $P_1 = (1, 0, -1)$ e $P_2 = (1, 1, 0)$ sobre o plano $\Pi : x + y - z = 0$.

    (b) A matriz que representa a reflexão sobre o plano $\Pi : 2x + y + z = 0$.

13. Represente a matriz E, que representa em $\mathbb{R}^3$, uma reflexão no plano Π_1 gerado pelos vetores $v = (1, 0, 1)$ e $w = (1, 1, 2)$.

14. Obtenha a composição espectral de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

15. Obtenha a decomposição espectral da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

16. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador auto-adjunto com autovalores associados $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 4$. Suponha que $v_1 = (1, 1, 1)$ e $v_2 = (2, 0, 1)$ são autovetores associados ao $\lambda_1 = 3$. Determine um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 4$ e uma base ortonormal de autovetores de T.

17. Seja a forma bilinear $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por:

$$F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_1y_1$$

    (a) Determine a matriz A que representa F com respeito à base canônica $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

    (b) Determine a matriz B que representa F com respeito à base $\beta = \{(2, 0), (1, -1)\}$.

18. Identifique a cônica representada pela equação:

$$11x^2 - 24xy + 4y^2 + 20x - 40y - 20 = 0$$

19. Identifique a quádrica representada pela equação a seguir. Determine a matriz diagonal, que diagonaliza a forma quadrática e a equação da quádrica no novo sistema.

$$2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz - 10x - 6y - 2z = 7$$

20. Determine os autovalores e uma base para cada auto-espaço da matriz
$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Mãos à obra! Tente fazer essas questões antes de ler as soluções apresentadas aqui.

Boa sorte!

Soluções

1. Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$. Verifique se:

   (i) $v = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$.
   Caso seja, determine o autovalor correspondente.

   Solução: Pela definição temos que: se v é autovetor da matriz A, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A \cdot v = \lambda v$. Assim

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Resposta: $v = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é autovetor da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$,
   e o autovalor correspondente é $\lambda = 2$.

(ii) $\lambda = 6$ é um autovalor de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Caso seja, determine um autovetor associado a este autovalor.

Solução: Pela definição temos que λ é autovalor de A, existe vetor não-nulo v tal que $av = \lambda v$. Assim:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x \\ 6y \\ 6z \end{bmatrix}$$

Reescrevendo como sistema:

$$\begin{cases} 3x + y + z = 6x \\ 2x + 4y + 2z = 6y \\ x + y + 3z = 6z \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = x \\ y = 2x \end{cases}$$

A solução deste sistema determina $S = \{(x,y,z) \mid z = x \text{ e } y = 2x\} = [(1,2,1)]$. Logo, qualquer vetor de S é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 6$.

Resposta: $\lambda = 6$ é um autovalor de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, e um autovetor associado é $v = (1,2,1)$.

2. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é diagonalizável e determine a matriz diagonal D e uma matriz P tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Solução: A equação característica de A é determinada por:

$$p(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-4 & 0 & -1 \\ 2 & x-1 & 0 \\ 2 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x-3)$$

Portanto, os autovalores da matriz A são 1, 2 e 3. Todos com multiplicidade algébrica 1.

Temos que: $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \Rightarrow v_1 = (0,1,0) \\ \lambda_2 = 2 \Rightarrow v_2 = (1,-2,-2) \\ \lambda_3 = 3 \Rightarrow v_3 = (1,-1,-1) \end{cases}$

Resposta: A matriz A é diagonalizável. Sua representação diagonal é dada por $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

3. Considere o operador linear T de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$T(x,y,z) = (2x+2y+z, x+3y+z, x+2y+2z).$$

Verifique se é diagonalizável. Caso seja, determine sua representação diagonal $D \in M_3(\mathbb{R})$ e a matriz P que representa a base dos autovetores correspondente.

Solução: A matriz determinada por T é:

$$A = [T] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A equação característica de A é dada por:

$$p(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -1 \\ -1 & x-3 & -1 \\ -1 & -2 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)(x-1)(x-5)$$

Portanto, os autovalores da matriz A são 1 e 5.

Temos que: $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \Rightarrow v_1 = (-2,1,0) \text{ e } v_2 = (-1,0,1) \\ \lambda_3 = 5 \Rightarrow v_3 = (1,1,1) \end{cases}$

Resposta: O operador linear T é diagonalizável, sua matriz diagonal é dada por: $D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, e $P=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz que representa a base dos autovetores correspondentes.

4. Mostre que o operador $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por:

$$T(x,y,z) = (3x+y+z, 2x+4y+2z, x+y+3z)$$

é diagonalizável. Caso seja, determine sua representação diagonal $D \in M_3(\mathbb{R})$ e o conjunto P que representa a base dos autovetores correspondentes.

Solução: A matriz determinada por T é

$$A = [T] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Autovalores: 2 e 6.

Autovetores: $\lambda_1 = 2 \Rightarrow S_2 = \{(x,y,z) \mid x = -y-z\} \Rightarrow v_1 = (-1,1,0)$ e $v_2 = (-1,0,1)$.

$\lambda_2 = 6 \Rightarrow S_6 = \{(x,y,z) \mid x = z \text{ e } 2 = 2z\} \Rightarrow v_3 = (1,2,1)$

Resposta: T é diagonalizável. A representação diagonal é dada por $D=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, e o conjunto que representa a base dos autovetores é $P = \{(-1,1,0), (-1,0,1), (1,2,1)\}$.

5. Determine uma matriz ortogonal cuja primeira coluna tenha a direção do vetor $v = (1,1,1)$.

Solução: Seja $u = (x,y,z)$. Para que u seja ortogonal a $v = (1,1,1)$, o produto interno entre eles é zero, ou seja, $\langle u,v\rangle = 0$, daí: $\langle (1,1,1),(x,y,z)\rangle = 0$.

Ou seja, $x+y+z = 0$.

Logo, $x = -y-z$.

Assim, todo vetor da forma: $u = (-y-z,y,z) = y(-1,1,0) + z(-1,0,1)$ com y, $z \in \mathbb{R}$ e tal que ou $y \neq 0$ ou $z \neq 0$ é ortogonal ao vetor $v = (1,1,1)$.

Tomemos $y = 1$ e $z = 0$. Obtemos $u = (-1,1,0)$ ortogonal ao vetor v.

Seja o vetor $w = (a,b,c)$ ortogonal aos vetores $u = (-1,1,0)$ e $v = (1,1,1)$.

Logo, $\begin{cases} \langle v,w \rangle = 0 \\ \langle u,w \rangle = 0 \end{cases}$

Daí: $\begin{cases} \langle (1,1,1),(a,b,c) \rangle = 0 \\ \langle (-1,1,0),(a,b,c) \rangle = 0 \end{cases}$

Ou seja: $\begin{cases} a+b+c = 0 \\ -a+b = 0 \end{cases}$

Resolvendo esse sistema : $\begin{cases} c = -2b \\ a = b \end{cases}$

Assim todo vetor da forma: $w = (b,b,-2b) = b(1,1,-2)$ para qualquer $b \in \mathbb{R}$, tal que $b \neq 0$ é ortogonal aos vetores u e v.

Tomemos $b = 1$, obtemos $w = (1,1,-2)$.

Já temos aqui uma base ortogonal de vetores formada pelos vetores:

$$v = (1,1,1), \;\; u = (-1,1,0) \;\text{ e }\; w = (1,1,-2)$$

Normalizando os vetores:

$$u_1 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$u_2 = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$u_3 = \frac{w}{\|w\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$

Resposta: $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{6} \end{bmatrix}$

6. Obtenha uma matriz ortogonal cuja primeira coluna tenha a direção do vetor $v = (1,2,-1)$.

Solução: Seja $v_1 = (x,y,z)$ tal que $\langle (x,y,z),(1,2,-1) \rangle = 0$. Logo, $x+2y-z = 0$, ou seja, $z = x+2y$.

$S = \{(x,y,z) \mid z = x+2y\} = [(1,0,1),(0,1,2)]$

Tomando $x = 1$ e $y = 0$, obtemos $v_1 = (1,0,1)$.

Seja $v_2 = (a,b,c)$ tal que $\langle (a,b,c),(1,2,-1)\rangle = 0$ e $\langle (a,b,c),(1,0,1)\rangle = 0$, logo, $a+2b-c=0$ e $a+c=0$, ou seja, $c=-a$ e $b=-a$.

$S = \{(a,b,c) \mid c=-a \text{ e } b=-a\} = [(1,-1,-1)]$

Tomando $a=1$, obtemos $v_2 = (1,-1,-1)$.

Assim: $\begin{cases} v = (1,2,-1) \Rightarrow u = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right) \\ v_1 = (1,0,1) \Rightarrow u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ v_2 = (1,-1,-1) \Rightarrow u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \end{cases}$

Resposta: $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

7. Mostre que: se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é ortogonal, então $\det(A) = \pm 1$.

   Solução: Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que A é ortogonal, então $A^t \cdot A = I_n$ e $\det(A^t) = \det(A)$.

   $(\det(A))^2 = \det(A)\cdot\det(A) = \det(A^t)\cdot\det(A) = \det(A^t\cdot A) = \\ = \det(I_n) = 1$

   Se $(\det(A))^2 = 1$, então $\det(A) = \pm 1$.

8. Obtenha:

   (a) Uma matriz E que representa em $\mathbb{R}^2$ uma reflexão na reta $y = \sqrt{2}x$.

   Solução: Se $y = \sqrt{2}x$, então o vetor tangente à reta $v_1 = \left(1, \sqrt{2}\right)$ e $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, e o vetor normal à reta é $v_2 = \left(-\sqrt{2}, 1\right)$ e $u_2 = \left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

   Logo, $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

   $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

   $E = A \cdot F \cdot A^{-1}$

   $E = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Resposta: A matriz $E = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ representa a reflexão na reta $y = \sqrt{2}x$.

(b) Uma matriz A que representa em $\mathbb{R}^2$ uma rotação de $\frac{\pi}{6}$ radianos.

Solução: A matriz que representa a rotação de $\frac{\pi}{6}$ radianos é dada por:

$$A_{\frac{\pi}{6}} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Resposta: $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

(c) A matriz C que representa a reflexão (item a) seguida da rotação (item b).

Solução: Basta multiplicar as matrizes determinadas nos itens anteriores, ou seja:

$$C = A_{\frac{\pi}{6}} \cdot E = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{6}-1}{6} \\ \frac{2\sqrt{6}-1}{6} & \frac{-\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6} \end{bmatrix}$$

Resposta: $C = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{6}-1}{6} \\ \frac{2\sqrt{6}-1}{6} & \frac{-\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6} \end{bmatrix}$

9. Determine a matriz rotação de $\frac{\pi}{3}$ radianos em torno da reta L que passa pela origem e é paralela ao vetor $v = (-1, 2, 1)$.

Solução: Seja $v = v_3 = (-1, 2, 1)$, logo $u_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

O plano ortogonal a v é representado por $\Pi: \ -x + 2y + z = 0$.

Seja $v_1 \in \Pi$, $v_1 = (1, 0, 1)$, logo teremos $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Devemos agora determinar v_2. Seja $v_2 = (a,b,c)$ tal que $v_2 \in \Pi$ e $v_2 \perp v_1$, logo $v_2 = \begin{cases} -a+2b+c=0 \\ a+c=0 \end{cases}$ daí, $\begin{cases} b=-c \\ a=-c \end{cases}$
$v_2 = (-1,-1,1)$

Logo, $u_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Temos assim determinada a matriz P:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Matriz da rotação é representada por:

$$A_B[v]_B = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} & 0 \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Com respeito à base canônica, esta matriz é escrita como: $A = P \cdot A \cdot P^{-1}$.

Resposta:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

10. Determine a matriz que representa a reflexão no plano $\Pi:\ x-2y+z$ com respeito à base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Solução: Vetor ortogonal ao plano Π é o vetor $v_3 = (1,-2,1)$.

Seja $v_1 \in \Pi$, $v_1 = (1,0,-1)$.

Seja $v_2 = (a,b,c)$ tal que $v_2 \in \Pi$, $v_2 \perp v_1$, logo $v_2 = \begin{cases} a-2b+c=0 \\ a-c=0 \end{cases}$ daí, $\begin{cases} b=a \\ c=a \end{cases}$ $v_2 = (1,1,1)$

$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$; $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

A matriz que representa reflexão com respeito a esta base ortonormal, em relação a u_3, será:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ é a reflexão com respeito à base canônica é determinada pelo produto $P \cdot A \cdot P^{-1}$.

Resposta:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} =$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

11. Determine a matriz que representa a projeção ortogonal sobre o plano $\Pi : x+y+z=0$, com respeito à base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Solução: Seja v_3 o vetor normal ao plano, $v_3 = (1,1,1)$.

Seja $v_1 \in \Pi$, $v_1 = (1,-1,0)$.

Seja $v_2 = (a,b,c)$ tal que $v_2 \in \Pi$, $v_2 \perp v_1$, logo $v_2 = \begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b=0 \end{cases}$ daí, $\begin{cases} b=a \\ c=-2a \end{cases}$ e $v_2 = (1,1,-2)$.

Daí, $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$ e $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que para qualquer vetor v do $\mathbb{R}^3$, $T(v) = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2$.

Assim

$T(v) = \left\langle (x,y,z), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \left\langle (x,y,z), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$

$T(v) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}, 0\right) + \left(\frac{x+y-2z}{6}, \frac{x+y-2z}{6}, \frac{-2x-2y+4z}{6}\right)$

$T(v) = \left(\frac{2x-y-z}{3}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3}\right)$

Resposta: $[T] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

Pode ser feito também de outra forma, considerando $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e a base ortonormal B determinada pelos vetores u_1, u_2 e u_3 anteriores.

Assim $[T] = B[T]_B \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

12. Determine:

(a) A matriz que representa a projeção ortogonal dos pontos $P_1 = (1,0,-1)$ e $P_2 = (1,1,0)$ sobre o plano $\Pi : x+y-z = 0$.

Solução: Seja $v_3 = (1,1,-1)$ vetor ortogonal a Π.

$v_1 = (1,0,1)$ e $v_2 = (-1,2,1)$ são vetores de Π ortogonais a v_3.

Assim: $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $u_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ e $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ formam uma base ortogonal.

A matriz que representa a projeção $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Daí

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \text{ e } P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Logo:

$$A = P \cdot B \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

A matriz que representa a projeção ortogonal sobre o plano $\Pi : x+y-z = 0$ é:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

A projeção no ponto $P_1 = (1,0,-1)$ é :

$$A \cdot P_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

A projeção no ponto $P_2 = (1,1,0)$ é:

$$A \cdot P_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Resposta: A matriz projeção $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

A projeção do ponto $P_1(1,0,-1)$ é $\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$, e a projeção do ponto $P_2(1,1,0)$ é $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

(b) A matriz que representa a reflexão sobre o plano $\Pi : 2x + y + z = 0$.

Solução: Seja $v_3 = (2,1,1)$ vetor ortogonal a Π.

$v_1 = (0,1,-1)$ e $v_2 = (-1,1,1)$ são vetores de Π ortogonais a v_3.

Assim: $u_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, $u_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $u_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ formam uma base ortogonal.

A matriz que representa a reflexão $B = [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Logo,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \text{ e } P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Daí:

$$A = P \cdot B \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Resposta: A matriz reflexão é representada por $A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

13. Represente a matriz E que representa em $\mathbb{R}^3$ uma reflexão no plano Π_1 gerado pelos vetores $v = (1,0,1)$ e $w = (1,1,2)$.

Solução: Dado os vetores $v = (1,0,1)$ e $w = (1,1,2)$, devemos determinar um vetor v_3, ortogonal a estes dois vetores. Logo, $\langle v, v_3 \rangle = 0$ e $\langle w, v_3 \rangle = 0$.

$v_3 = (1,1,-1)$

Logo, o plano gerado pelos vetores v e w é $\Pi_1 : x+y-z$.

Como v e w não são ortogonais, devemos ainda determinar um vetor v_2 de Π_1 ortogonal a $v = (1,0,1)$. Daí, $v_2 = (1,-2,-1)$.

Daí, $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,-2,-1)$ e $v_3 = (1,1,-1)$.

Logo, $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$ e $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$, formam uma base ortogonal.

Temos, então que a reflexão com respeito a esta base ortonormal, em relação a u_3, será: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Temos ainda que:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \text{ e } P^{-1} = P^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

A reflexão é determinada pelo produto $P \cdot A \cdot P^{-1}$. Assim teremos:

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Resposta: A matriz que representa a reflexão é dada por

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

14. Obtenha a composição espectral de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução:

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz simétrica.

Os autovalores de A são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 3$.

Os autovetores de A são:

Se $\lambda_1 = 0$, então $v_1 = (1,1,1)$ e $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Se $\lambda = 3$, então $v_2 = (1,-2,1)$ e $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$v_3 = (1,0,-1)$ e $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

A decomposição espectral de A é dada por: $A = 8u_1{u_1}^t + 6u_2{u_2}^t + 3u_3{u_3}^t$.

$$u_1{u_1}^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$u_2{u_2}^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-2}{6} & \frac{4}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$u_3{u_3}^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Resposta: A decomposição de A é dada por:

$$A = 0\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-2}{6} & \frac{4}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

15. Obtenha a decomposição espectral da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução: Seja $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, podemos observar que A é uma matriz simétrica.

Os autovalores de A são $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 6$ e $\lambda_3 = 3$.

Se $\lambda_1 = 8$, então $V_8 = \{(x,y,z) \mid x = -y \text{ e } z = 0\}$, daí $v_1 = (-1,1,0)$ e $u_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Se $\lambda_2 = 6$, então $V_6 = \left\{(x,y,z) \mid x = y = \frac{-1}{2}z\right\}$, daí $v_1 = (-1,-1,2)$ e $u_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

Se $\lambda_3 = 3$, então $V_3 = \{(x,y,z) \mid x = y = z\}$, daí $v_1 = (1,1,1)$ e $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

A decomposição espectral de A é dada por: $A = 8u_1{u_1}^t + 6u_2{u_2}^t + 3u_3{u_3}^t$

$$u_1{u_1}^t = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2{u_2}^t = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{-2}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix}$$

$$u_3{u_3}^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Resposta: A decomposição espectral de A é:

$$A=8\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+6\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{-2}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

16. Seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ um operador auto-adjunto com autovalores associados $\lambda_1=3$ e $\lambda_2=4$. Suponha que $v_1=(1,1,1)$ e $v_2=(2,0,1)$ são autovetores associados ao $\lambda_1=3$. Determine um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2=4$ e uma base ortonormal de autovetores de T.

    Solução: Como T é um operador auto-adjunto o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2=4$ vai ser o vetor v_3 que é ortogonal a v_1 e v_2. Logo, $v_3=(1,1,-2)$.

    Mas v_1 e v_2 não são ortogonais, logo, precisamos determinar o vetor w ortogonal a v_1 e v_3. Seja $w=(-1,1,0)$.

    Temos a base ortonormal de vetores de T formada pelos vetores:

    $u_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $u_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ e $u_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$

    Resposta: O autovetor associado ao autovalor $\lambda_2=4$ é $v_3=(1,1,-2)$.

    A base ortonormal é $\beta=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$.

17. Seja a forma bilinear $F:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definido por:

    $$F\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right)=x_1y_2-2x_2y_1+x_1y_1$$

    (a) Determine a matriz A que representa F com respeito à base canônica $\alpha=\{(1,0),(0,1)\}$.

    Solução:

    $F((1,0),(1,0))=1$ $\quad$ $F((1,0),(0,1))=1$

    $F((0,1),(1,0))=-2$ $\quad$ $F((0,1),(0,1))=0$

    Resposta: $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

(b) Determine a matriz B que representa F com respeito à base $\beta = \{(2,0),(1,-1)\}$.

Solução:

$F((2,0),(2,0)) = 4$ $\quad$ $F((2,0),(1,-1)) = 0$

$F((1,-1),(2,0)) = 6$ $\quad$ $F((1,-1),(1,-1)) = 2$

Resposta: $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

18. Identifique a cônica representada pela equação:

$$11x^2 - 24xy + 4y^2 + 20x - 40y - 20 = 0$$

Solução: Escrevendo a equação de forma matricial:

$$[x\ \ y]\begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [20\ \ -40]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 20 = 0$$

Logo,

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de A são: 20 e -5.

A cônica pode ser uma hipérbole.

Se $\lambda_1 = 20$, temos que $v_1 = (4,-3)$, logo $u_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$.

Se $\lambda_2 = -5$, temos que $v_1 = (3,4)$, logo $u_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

$$D = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$[x_1\ \ y_1]\begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + [20\ \ -40]\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - 20 = 0$$

$$20{x_1}^2 - 5{y_1}^2 + 40x_1 - 20y_1 = 20$$

$$4{x_1}^2 - {y_1}^2 + 8x_1 - 4y_1 = 4$$

$$4\left({x_1}^2 + 2x_1\right) - \left({y_1}^2 + 4y_1\right) = 4$$

$$4\left(x_1 + 1\right)^2 - \left(y_1 + 2\right)^2 = 4 + 4 - 4 = 4$$

Seja $x_2 = (x_1 + 1)$ e $y_2 = (y_1 + 2)$.

Resposta: A equação reescrita será: $4{x_2}^2 - {y_2}^2 = 4$ que representa uma **hipérbole**.

19. Identifique a quádrica representada pela equação a seguir. Determine a matriz diagonal que diagonaliza a forma quadrática e a equação da quádrica no novo sistema:

$$2x^2+2y^2+5z^2-4xy-2xz+2yz-10x-6y-2z=7$$

Solução:

$$[x\ \ y\ \ z]\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}+[-10\ \ -6\ \ -2]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=7$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de A são: 6, 3 e 0.

> **!**
>
> A quádrica pode ser um parabolóide elíptico ou hiperbólico, um cilindro elíptico ou parabólico, dois planos secantes ou dois planos paralelos.

Se $\lambda_1=6$, temos que $v_3=(1,-1,-2)$. Logo $u_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$.

Se $\lambda_2=3$, temos que $v_2=(1,-1,1)$. Logo $u_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

Se $\lambda_3=0$, temos que $v_1=(1,1,0)$. Logo $u_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

$$D=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \det P=1.$$

Reescrevendo a equação:

$$[x_1\ \ y_1\ \ z_1]\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}+[-10\ \ -6\ \ -2]\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}=7$$

$$6{x_1}^2+3{y_1}^2+0{z_1}^2+0x_1+\frac{6}{\sqrt{3}}y_1-\frac{16}{\sqrt{2}}z_1=7$$

$$6{x_1}^2+3\left({y_1}^2+\frac{2}{\sqrt{3}}y_1\right)=\frac{16}{\sqrt{2}}z_1+7$$

$$6{x_1}^2+3\left(y_1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{16}{\sqrt{2}}z_1+7+1$$

$$6{x_1}^2+3\left(y_1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{16}{\sqrt{2}}z_1+8=8\left(\sqrt{2}z_1+1\right)$$

$$6{x_1}^2+3\left(y_1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=8\left(\sqrt{2}z_1+1\right)$$

Seja $x_2=(x_1)$, $y_2=y_1+\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $z_2=\sqrt{2}z_1+1$.

Resposta: A equação reescrita será: $6{x_2}^2+3{y_2}^2=8z_2$ que representa um **parabolóide elíptico**.

20. Determine os autovalores e uma base para cada auto-espaço da matriz

$$A=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução:

$\begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ -5 & x-2 \end{vmatrix}=((x+2)(x-2))+5=x^2+1=(x+i)\,(x-i)$

Os autovalores de A são: $+i$ e $-i$.

Se $\lambda_1=+i$, então o autovetor $v_1=(1,-i-2)$, logo $S_{+i}=\{(x,-(i+2)x)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

Se $\lambda_2=-i$, então o autovetor $v_2=(1,i-2)$, logo $S_{-i}=\{((x,(i-2)x)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

Resposta: Os autovalores de A são: $+i$ e $-i$.

$S_{+i}=\{((x,-(i+2)x)\mid x\in\mathbb{R}\}$ e $S_{-i}=\{((x,(i-2)x)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

Referências

ANTON, H., RORRES, C. Álgebra Linear com aplicações. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BEDOYA, H., CAMALIER, R . Álgebra Linear II. 2 ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2004.2V.

BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

DE MAIO, W. Espaços Vetoriais: aplicações lineares e bilineares. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

LANG, S. Álgebra Linear. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1971.

LIPSCHUTZ, S. Álgebra Linear. 2 ed. Pernambuco: McGRAW-Hill, 1978.

POOLE, D. Álgebra Linear. São Paulo: Thomson, 2004.

STEINBRUCH, A., WINTERLE, P. Álgebra Linear. 2 ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

ISBN 978-85-7648-546-9

9 788576 485469

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
UERJ

Universidade Federal Fluminense
uff

UNIVERSIDADE DO BRASIL

Universidade Federal Rural
do Rio de Janeiro

UNIRIO

FUNDAÇÃO
SANTA CABRINI
Provedora de acesso à Cidadania

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro

SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL