# Caderno de Coordenação da Disciplina

# Cálculo I

Mario Olivero

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação

CECIERJ

Consórcio cederj

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

# Cálculo I

**Caderno de Coordenação da Disciplina**

Mario Olivero

GOVERNO DO Rio de Janeiro

SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Apoio:

FAPERJ Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

# Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2299-4565 Fax: (21) 2568-0725





## Material Didático

**ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO**
Mario Olivero

**EDITORA**
Tereza Queiroz

**COORDENAÇÃO EDITORIAL**
Jane Castellani

**COORDENAÇÃO DE DESIGN INSTRUCIONAL**
Cristine Costa Barreto

**COORDENAÇÃO DE REVISÃO**
Maria Angélia Alves

**REVISÃO**
Ana Tereza de Andrade
Anna Maria Osborne
Jane Castellani
Laura da Silveira Paula
Leonardo Villela
Nilce P. Rangel Del Rio

**REVISÃO TIPOGRÁFICA**
Equipe Cederj

**COORDENAÇÃO GRÁFICA**
Jorge Moura

**PROGRAMAÇÃO VISUAL**
Marcelo Freitas

**ILUSTRAÇÃO**
Ana Paula Trece Pires
Rafael Monteiro

**CAPA**
Eduardo de Oliveira Bordoni
Fábio Muniz de Moura

**PRODUÇÃO GRÁFICA**
Andréa Dias Fiães
Fábio Rapello Alencar





O48c

Olivero, Mario.
Cálculo 1: caderno de coordenação da disciplina / Mario Olivero. – Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2007.
47p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN 85-89200-26-4

1. Cálculo. I. Título.

CDD: 515.15

2007/2

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

# Governo do Estado do Rio de Janeiro

**Governador**
Sérgio Cabral Filho

**Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação**
Alexandre Cardoso

## Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**
Reitor: Raimundo Braz Filho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Nival Nunes de Almeida

**UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE**
Reitor: Cícero Mauro Fialho Rodrigues

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO**
Reitora: Malvina Tania Tuttman

## SUMÁRIO

# Aulas 1 a 3

O principal objetivo da primeira semana é apresentar o conceito de limite.

Este conceito é fundamental no curso, pois dará suporte aos conceitos de continuidade, derivabilidade ou diferenciabilidade e, posteriormente, à definição de integral.

Introduzir noções de limite não é tarefa fácil. É preciso lembrar que, historicamente, esse conceito demorou muito para ser estabelecido. Basta pensar nos paradoxos de Zenão, na antiga Grécia, nos cálculos de áreas e volumes feitos por Arquimedes, nas somas infinitas de Alberto da Soxônia e Nicole Oresme, até o surgimento do cálculo diferencial e integral com Newton e Leibniz, por volta de 1670. No entanto, o conceito como é conhecido hoje só foi plenamente estabelecido com os trabalhos de Augustin-Louis Cauchy e Karl Weierstrass, no meio do século XIX.

No entanto, a falta do rigor, estabelecido posteriormente, não impediu que os irmãos Bernoulli, Euler, Lagrange e tantos outros desenvolvessem e usassem o rico ferramental que herdamos e aprendemos nos cursos de cálculo.

Portanto, devemos lançar mão das noções intuitivas de limites que todos nós temos e estabelecer uma sólida base operacional.

As palavras-chave são: nas vizinhanças de, próximo de, tão grande quanto se queira etc.

Importante: é preciso deixar claro que os limites servem para estudar o comportamento das funções em situações extremas, nas quais não temos a informação direta da função.

Ao longo da semana, vocês devem ser capazes de calcular limites do seguinte tipo:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2.$

2. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{x+3} = -4.$

3. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \dfrac{1}{6}.$

4. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{|x|-1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}.$

5. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x-a} = 2a; \quad \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3-a^3}{x-a} = 3a^2; \quad \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^4-a^4}{x-a} = 4a^3.$

Todos esses limites são calculados usando fatoração. Devemos enfatizar que, se duas funções são idênticas numa vizinhança de um ponto, com exceção, possivelmente, do ponto em questão, então elas têm o mesmo limite. Ou seja, o limite indica o comportamento da função nas vizinhanças do ponto, sem levar em conta o que ocorre no ponto. Assim, as funções $f$ e $g$, definidas por $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, para todo $x \neq 1$, e $g(x) = x+1$, para todos os números reais, são coincidentes nos pontos $x \neq 1$. Ou seja, se $x \neq 1$,

$$f(x) \;=\; \frac{x^2-1}{x-1} \;=\; \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \;=\; x+1 \;=\; g(x).$$

Portanto, $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \;=\; \lim_{x\to 1} x+1 \;=\; 2.$

A álgebra nos ajuda a encontrar funções 'mais simples' para as quais sabemos calcular o limite.

Algum cuidado com o exercício 4. Para valores de $x$ próximos de $-1$, mas com $x \neq -1$,

$$\frac{|x|-1}{x^2-1} \;=\; \frac{-x-1}{x^2-1} \;=\; \frac{-x-1}{(x+1)(x-1)} \;=\; \frac{-1}{x-1}.$$

Portanto, $\displaystyle \lim_{x\to -1} \frac{|x|-1}{x^2-1} \;=\; \lim_{x\to -1} \frac{-1}{x-1} \;=\; \frac{1}{2}.$

O exercício 5 indica como será a derivada da função polinomial $f(x) = x^n$. Mas ainda há tempo para chegarmos lá.

6. $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-3x^2+1}{x^3-2} \;=\; 2.$

7. $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3+1} \;=\; 0.$

Esses dois exercícios indicam que ao lidarmos com quocientes de polinômios, o comportamento quando $x \to \infty$ é determinado pela diferença entre os graus do numerador e do denominador. Atenção! Limites infinitos e no infinito serão abordados mais uma vez na próxima semana.

8. $\lim_{x \to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$

9. $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cos x^2 = 0.$

Estes dois exercícios são importantes. Eles são do tipo produto de duas funções: uma é limitada, outra tem limite igual a zero. O limite desse produto é zero.

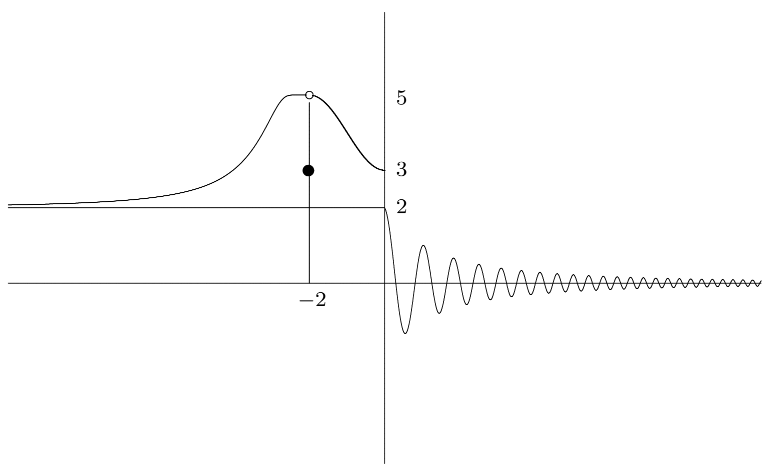
Lembre-se: Uma função $f$ é limitada se existe um número real $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$, para todos os valores de $x$ no domínio da função. As funções trigonométricas $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \text{sen } x$ são exemplos típicos de funções limitadas, pois $\cos x| \leq 1 < 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, por exemplo.

Essa é uma ferramenta poderosa para calcular limites. Aqui está mais um exemplo:

$$\lim_{x \to 1} (\sqrt{x} - 1) \cos\left(\frac{1}{(x-1)^3}\right) = 0.$$

Neste caso, a função cujo limite é igual a zero é $f(x) = \sqrt{x} - 1$ e a função limitada é $g(x) = \cos\left(\frac{1}{(x-1)^3}\right)$.

É bom fazer um exercício geral de interpretação geométrica de limites:




Observando o gráfico de $f$, podemos afirmar que:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2;$ $\lim_{x \to -2} f(x) = 5$, apesar de $f(-2) = 3$;

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 3$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2 \implies \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

Esse exemplo ilustra o que pode ocorrer com o produto de uma função limitada por uma função que tem limite zero, quando $x \to \infty$.

# Aulas 4 a 6

Agenda cheia! Há três temas distintos:

(a) Limite trigonométrico fundamental: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$;

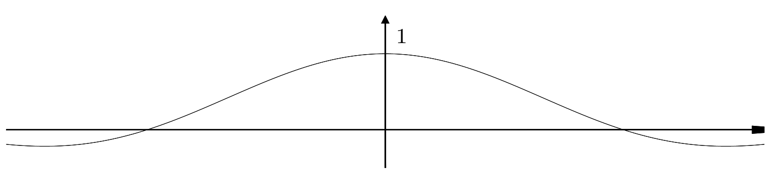
(b) Limites infinitos – assíntotas verticais;

(c) Continuidade.

## Limite trigonométrico fundamental

Os limites servem para determinar o comportamento das funções em situações extremas, onde não há informação direta pela lei de definição da função. Eis aqui um bom exemplo. A função $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x}$ está definida em $\mathbb{R} - \{0\}$ e queremos saber como ela se comporta quando $x$ assume valores mais e mais próximos de zero.

Quando afirmamos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$, estamos dizendo que, para valores próximos de zero, a função $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x}$ assume valores mais e mais próximos de 1. Veja o gráfico da função na figura a seguir.

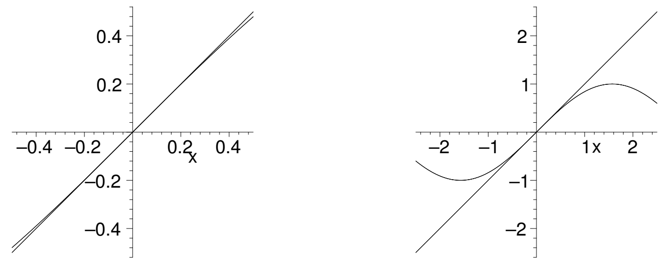



Uma outra interpretação para esse limite é que a função $g(x) = \text{sen } x$ e a função identidade $h(x) = x$ tornam-se cada vez mais parecidas, à medida que os valores assumidos por $x$ pertencem a uma pequena vizinhança de zero. Ou seja, se $x$ assume valores muito próximos de zero, porém é diferente de zero, $\text{sen } x \sim x$ e, portanto, $\dfrac{\text{sen } x}{x} \sim 1$. É claro que a maneira adequada de dizer isso é colocar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

A informação dada pelo limite é de caráter local, isto é, quanto mais próximos do ponto em questão são tomados os valores de $x$, mais precisa será a informação. Ou seja, o limite descreve o comportamneto da função em uma pequena proximidade do ponto em questão.

Veja os gráficos de $g(x) = \text{sen } x$ e de $h(x) = x$ em duas vizinhanças de zero. Uma de raio bem próximo de zero e outra de raio relativamente maior.




Do ponto de vista operacional, espera-se que o você use o limite trigonométrico fundamental para calcular outros limites trigonométricos. Isto é, o limite trigonométrico fundamental faz o papel das fatorações algébricas usadas na semana passada para calcular os limites.

## Alguns exercícios típicos

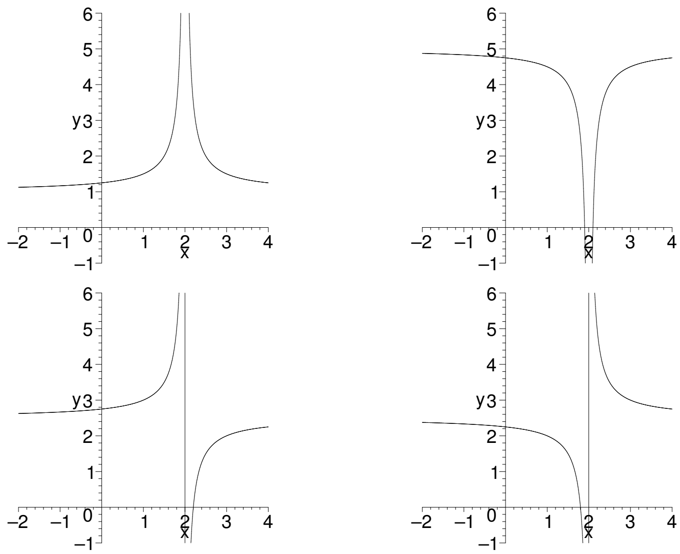
1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 5x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 5 \cdot \dfrac{\text{sen } 5x}{5x} = 5.$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\text{sen}\,(x-1)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\text{sen}\,(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{2}.$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg } x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \text{ sen } x^2}{(\cos x^2)\, x^2} = 0.$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\text{sen } x} = \lim\limits_{x\to 0} 2 \cdot \dfrac{x}{\text{sen } x} = 2.$
5. $\lim\limits_{x\to 0} x \csc 2x = \dfrac{1}{2}.$

Veja o exemplo 4.8 – limite importante!

## Limites infinitos

Limites infinitos (com $x \to a$) ocorrem quando há um quociente, com o limite do numerador sendo um número diferente de zero e o limite do denominador igual a zero.

Geometricamente, esses limites correspondem às assíntotas verticais. Veja aqui quatro possibilidades:




(a) $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$; (b) $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$;

(c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$; e $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$;

(d) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$; e $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

Nos casos (c) e (d), dizemos que não há limite, pois o comportamento da função é diferente nos limites laterais.

Veja também que é possível termos um dos limites laterais sendo infinito e o outro finito. Isso é suficiente para caracterizar uma assíntota vertical.

Do ponto de vista operacional, tudo que temos de fazer é uma análise de sinal, do tipo que você usou no Pré-Cálculo para resolver inequações.

O limite do numerador é positivo? É negativo? E o limite do denominador vai a zero com sinal positivo? Com sinal negativo?

Aqui é importante dar atenção aos limites laterais.

Exemplo: Calcule $\lim_{x \to a^\pm} \dfrac{2x+1}{x^2-2x-3}$, para $a = -1$ e $a = 3$.

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{2x+1}{x^2-2x-3} \;=\; -\infty,$$

pois $\lim_{x \to -1^-} 2x+1 \;= -1$ e $\lim_{x \to -1^-} x^2-2x-3 \;= 0^+$.

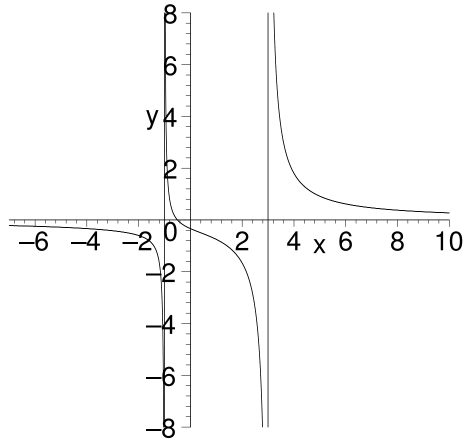
As outras respostas são:

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{2x+1}{x^2-2x-3} \;=\; +\infty,$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x+1}{x^2-2x-3} \;=\; -\infty,$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x+1}{x^2-2x-3} \;=\; +\infty.$$

Veja o gráfico da função.

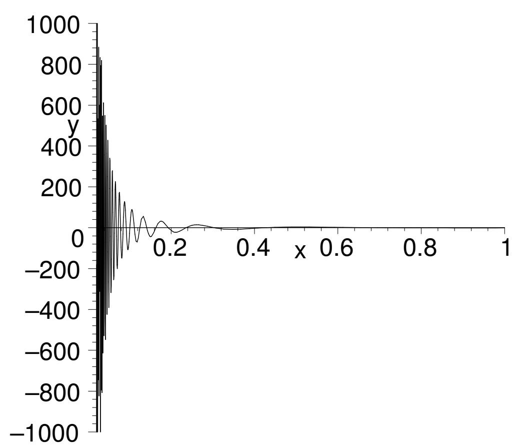



Atenção: $\lim\limits_{x \to \pi/2^+} \text{tg } x = -\infty$.

Veja, em algum livro de cálculo, disponível na bibliotea de seu pólo, por exemplo, o gráfico da função tangente. Note que tg $x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$.

É bom saber da existência de coisas menos comportadas. Por exemplo, há casos de funções não limitadas, quando $x \to a^{\pm}$ e o limite não é do tipo $f(x) \to \infty$ ou $f(x) \to -\infty$.

Aqui está um tal exemplo: $\nexists \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} \cos \dfrac{1}{x}$. O gráfico de $f$ oscila de valores positivos para negativos e vice-versa, tomando valores cada vez mais afastados da origem.



## Continuidade

(Semana intensa!)

Aqui é preciso entender que a continuidade da função só está em questão para os pontos que estão no domínio.

É comum a seguinte dúvida: a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é contínua?

A resposta: SIM!

Note que o único ponto onde algo estranho ocorre é o ponto $x = 0$, que *não pertence ao domínio da função.*

É verdade que ela tem um comportamento totalmente diferente de outras funções, como $g(x) = x^2 + 2x + 3$, por exemplo, que está definida em toda a reta real.

Lembre-se: a regra "$f$ é contínua se pudermos desenhar seu gráfico sem levantar o lápis do papel" é válida *contanto* que o domínio da função seja um intervalo (pode ser aberto, fechado, limitado, não limitado, enfim, qualquer intervalo).

Finalmente, o seguinte tipo de problema é interessante:

Para qual valor de $a$ a função $f$, definida a seguir, é contínua?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}, & x > 2 \\ \\ x - a & x \leq 2. \end{cases}$$

Nestas aulas há muitos conceitos novos e há muito trabalho. Se ao fim da segunda semana (tempo real) você ainda não tiver terminado os estudos das aulas 5 ou 6, não fique aflito. Você pode emprestar um pouco de tempo da terceira semana!!!

Muitos dos conceitos que você está vendo agora tomam um certo tempo para serem amadurecidos. Seria importante ir ao pólo e tentar discuti-los, pelo menos um pouco, com alguns colegas e com o tutor!

Não descuide dos exercícios práticos!

# Aulas 7 a 9

O conteúdo anterior *deve* continuar na pauta de estudos. Há muita informação, especialmente se levarmos em conta a primeira semana. Portanto, se você ainda está vendo material das aulas anteriores, você não está atrasado.

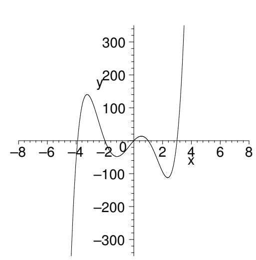
O conteúdo da aula 7 é muito importante, do ponto de vista teórico. São resultados clássicos e serão usados ao longo do curso. No entanto, você deve passar por essa aula com alguma rapidez. Retornaremos a esses temas quando eles forem necessários.

Concentre suas energias no conteúdo da aula 8: limites no infinito e assíntotas verticais.

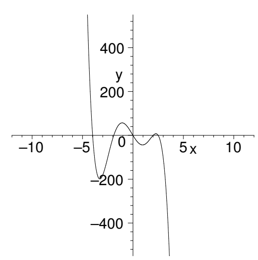
Usamos esses limites quando queremos saber o comportamento de uma dada função quando a variável $x$ assume valores absolutos muito grandes ($x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$).

Esse comportamento, no caso dos polinômios, é completamente determinado pela paridade do grau e pelo sinal do coeficiente do termo de maior grau.

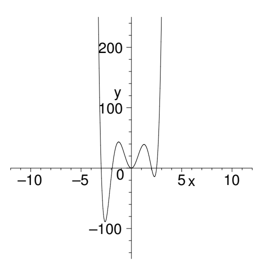
Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ uma função polinomial de grau $n$. Os gráficos, para diferentes valores de $n$, pares ou ímpares, e de $a_n$, positivos ou negativos, têm os seguintes possíveis aspectos:



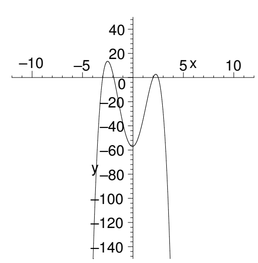

$n$ ímpar, $a_n > 0$




$n$ ímpar, $a_n < 0$




$n$ par, $a_n > 0$




$n$ par, $a_n < 0$

As indeterminações surgem, por exemplo, quando temos quocientes de polinômios. Isto é, qual é o comportamento das funções racionais para valores absolutos de $x$ muito grandes ($x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$)?

Veja com atenção o exemplo 8.8.

Aqui há duas situações relativamente simples. Seja $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ uma função racional com o polinômio $p$, de grau $m$, no numerador e com o polinômio $q$, de grau $n$, no denominador. O comportamento dessa função no infinito é o seguinte:

- Se $m < n$, então o limite é zero. Nesse caso, o eixo $Ox$ é uma assíntota vertical.
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^5 - 4x^2 + 3} \;=\; 0.$$
- Se $m = n$, então o limite é $\dfrac{a}{b}$, onde $a$ e $b$ são os coeficientes dos termos de grau $n$ de $p$ e de $q$, respectivamente. Nesse caso, a reta $y = \dfrac{a}{b}$ é uma assíntota vertical.
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 5x + 2}{2 - x - 2x^3} \;=\; -\frac{1}{2}.$$
- No caso de o grau do numerador ser maior que o grau do denominador, o limite deverá ser $+\infty$ ou $-\infty$. Essa é a indeterminação na qual você deve ter mais cuidado para determinar: escolher entre $+$ ou $-$.

Nesse último caso, como nos anteriores, se você quiser, há uma técnica que pode ajudar. Como queremos saber o comportamento da função para valores grandes da variável $x$, em valor absoluto, podemos multiplicar e dividir o quociente pelo inverso da variável elevada ao maior grau. Veja no exemplo abaixo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4 + 5x^2 - 2}{10 - 2x^3} \;=\; \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4 + 5x^2 - 2}{10 - 2x^3} \cdot \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}} \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{3 + \frac{5}{x^2} - \frac{2}{x^4}}{\frac{10}{x^4} - \frac{2}{x}}.$$

Veja por que isso resolve o problema. O limite do numerador é 3, um número positivo, pois
$$\lim_{x\to\infty} \frac{5}{x^2} - \frac{2}{x^4} \;=\; 0.$$

Agora, o cuidado. O limite do denominador é claramente 0. Mas o comportamento é determinado pelo termo $-\dfrac{2}{x}$, que vai *mais lentamente* para zero. Veja, por exemplo, $\dfrac{10}{10^8} - \dfrac{2}{10^2} = -0,0199999$). Assim,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{10}{x^4} - \frac{2}{x} \;=\; 0^-.$$

Se o limite do numerador é um número positivo (3) e o limite do denominador $0^-$, o limite do quociente é $-\infty$.

Portanto, podemos dizer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4+5x^2-2}{10-2x^3} = -\infty.$$

O exemplo 8.9 mostra que radicais podem surpreender. Não deixe de estudar esse ponto com atenção.

Concentre suas energias nos exercícios 1 (a) até 1 (q).

Bastante atenção com exercícios do tipo 1 (n). Leia a sugestão do material didático atentamente. Esse é outro tipo de indeterminação: a diferença de duas funções cujos limites são infinitos. A álgebra vai ajudar a levantar a indeterminação.

Definitivamente, a aula 9 deve ser deixada para ser estudada na próxima semana. Você já tem muita informação para processar.

Use seu tempo para rever as aulas anteriores, concentrando-se na parte operacional. Aqui vai uma sugestão: Reveja os exercícios e exemplos das seguintes aulas:

- Aula 3 – limites com indeterminações levantadas por fatorações.
- Aula 4 – limites com indeterminações levantadas pelo limite trigonométrico fundamental.
- Aula 5 – limites infinitos – assíntotas verticais.
- Aula 6 – Continuidade.
- Aula 8 – Limites infinitos – assíntotas horizontais.

Falaremos nas derivadas na próxima semana!!!

# Aulas 10 a 12

Os temas desta semana devem ser os conteúdos das aulas 9 (da semana passada) e aula 10:

- Aula 9: Funções diferenciáveis;
- Aula 10: Propriedades de funções diferenciáveis.

A aula 11 é uma aula de exercícios resolvidos. O conteúdo da aula 12 – Regra da Cadeia – deve ser deixado para a próxima semana.

## Derivadas

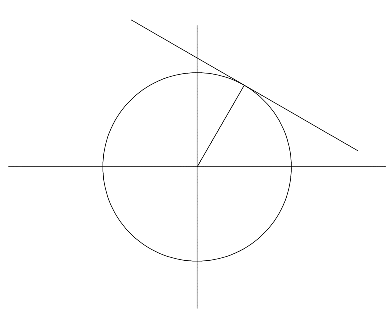
Aqui está o *principal* conceito desta disciplina! O resto do curso se desenvolverá em torno desse tema. Portanto, atenção!

A derivada de uma função $f(x)$ num ponto $x = a$ surgiu como resposta a um problema muito importante: encontrar a reta tangente a uma dada curva, num determinado ponto.

Esse problema aparece em diferentes contextos. Vamos citar apenas dois:

- Na Geometria, exatamente como foi apresentado;
- Na Física, para determinar, por exemplo, a velocidade instantânea de um certo corpo em movimento, num específico instante $t_0$.

O conceito de reta tangente a uma curva é muito intuitivo e o exemplo mais simples, para o qual todos nós sabemos a resposta, é o da reta tangente à circunferência de um círculo num dado ponto. Neste caso, basta considerar a reta perpendicular ao raio em questão.



A noção de velocidade instantânea, isso é, a velocidade de um certo corpo num preciso instante, também faz parte de nossa cultura. Veja a frase: 'o carro cruzou a reta final a 135km/h'.

No entanto, se considerarmos mais atentamente esses problemas, encontraremos algumas dificuldades.

Por exemplo, como determinar a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$?

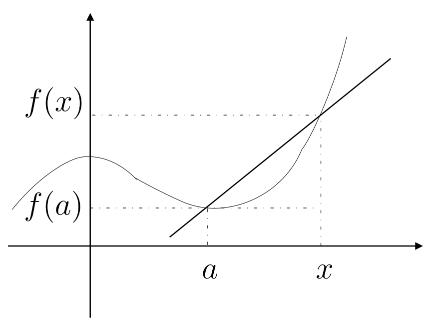
No caso da velocidade, dispomos da fórmula da velocidade média,

$$v_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0},$$

onde $s(t)$ é a posição da partícula em função do tempo $t$, e $t_0$ é o preciso instante no qual queremos determinar a velocidade instantânea.

Uma tentiva ingênua seria, simplesmente, fazer $t = t_0$. No entanto, isso não é possível.

No caso da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$, no ponto $(a, f(a))$, dispomos da fórmula do coeficiente angular das retas 'secantes' ao gráfico e que contêm o ponto $(a, f(a))$.




$$m = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Para calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(a, f(a))$ teríamos de fazer $x = a$, o que, de novo, não é possível.

Note como os problemas são, na verdade, um só. Compare as fórmulas de que dispomos:

$$v_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \quad e \quad m = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Essa fórmula é conhecida como o 'quociente de Newton'.

Veja que esse problema pode ser contornado: dispomos do limite, a ferramenta adequada para analisar o comportamento desse quociente quando $t \to t_0$ ou $x \to a$. Ótimo!

Portanto, sempre que $\lim_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ for um número, dispomos da velocidade instantânea, assim como, se $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ for um número, temos o coeficiente angular da reta tangente e, como o ponto $(a, f(a))$ pertence à reta, podemos calcular sua equação.

Veja o caso de $f(x) = x^2$ no ponto $(1,1)$. Primeiro calculamos o limite do quociente de Newton correspondente, com $a = 1$.

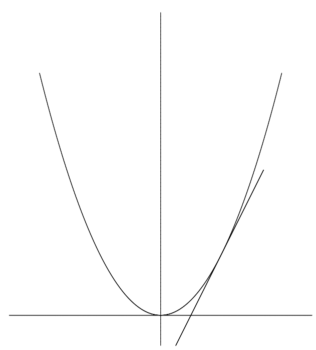
$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \;=\; \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \;=\; \lim_{x \to 1} x + 1 \;=\; 2.$$

Esse limite é um velho conhecido!

A reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(1,1)$ deverá ter a forma $y = 2x + b$. Agora, usando o fato de que $(1,1)$ satisfaz a equação, calculamos $b = -1$. Assim, a resposta para o nosso problema é

$$y = 2x - 1.$$

Veja o gráfico:



Resumindo: A função $y = f(x)$ tem derivada no ponto $x = a$ caso o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

seja um número. Quando isso ocorre, dizemos que a função $f$ é diferenciável no ponto $x = a$ e denotamos o limite por $f'(a)$, que é chamado derivada de $f$ no ponto $a$.

Em certos casos, é preferível usar a seguinte fórmula, equivalente à anterior:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

A interpretação da derivada de uma função $f$ num ponto $x = a$ é, portanto, a que nos motivou inicialmente: $f'(a)$ é a inclinação ou coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(a, f(a))$.

Essa reta pode ser calculada, diretamente, pela fórmula:

$$y - f(a) \;=\; f'(a)(x - a).$$

Note que $a$, $f(a)$ e $f'(a)$ são constantes e as variáveis $x$ e $y$ são usadas para expressar um ponto genérico do plano. Caso $(x, y)$ satisfaça a equação, ele pertence à reta.

Você usará essa fórmula de cálculo da derivada de uma função num ponto, apenas em situações especiais. Por exemplo, caso a função $f$ seja dada por diferentes sentenças abertas, nós a usamos para determinar fórmulas que nos permitem calcular a derivada de certas funções em um ponto genérico.

Por exemplo, se $f(x) = x^2$,

$$f'(a) \;=\; \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \;=\; \lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \;=\; \lim_{x\to a} x + a \;=\; 2a.$$

Assim, introduzimos a noção de *função derivada*. Isto é, uma função que nos dá o valor da derivada de uma dada função $f$, num ponto genérico. Isto é, se trocarmos $a$ por $x$ em $f'(a) = 2a$, obtemos a função derivada de $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = 2x.$$

A partir de agora, sua principal preocupação deve ser aprender a derivar. Isto é, dada uma certa função, calcular sua função derivada. Esse objetivo só será plenamente atingido quando você aprender a lidar bem com a Regra da Cadeia. Mas, tudo a seu tempo.

Veja o que você já deve saber:

- $f(x) = x^n \qquad f'(x) = n\,x^{n-1}$;
- $f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\,\text{sen } x$;
- $f(x) = \text{sen } x \qquad f'(x) = \cos x$.

## Aula 10

Aqui você aprenderá várias propriedades das funções diferenciáveis. Isto é, aquelas para as quais podemos tormar as funções derivadas.

As principais propriedades podem ser resumidas nas seguintes fórmulas:

Sejam $f$ e $g$ funções diferenciáveis e seja $a$ uma constante.

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
- $(a\,f)'(x) = a\,f'(x)$;
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Suponha que, além disso, $g(x) \neq 0$.

- $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{1}{(g(x))^2} \cdot g'(x)$;
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) \; - \; f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$.

Usando essas regras de derivação, você deve ser capaz de derivar as seguintes funções:

- $f(x) = x^2 - 3x + 5$;
- $f(x) = x \cos x$;
- $f(x) = \operatorname{tg} x \; = \; \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$;
- $f(x) = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$;
- $f(x) = (x+3) \operatorname{sen} x \; + \; (x^2 + \pi) \cos x$.

Neste ponto, você já deve ser capaz de resolver problemas do seguinte tipo:

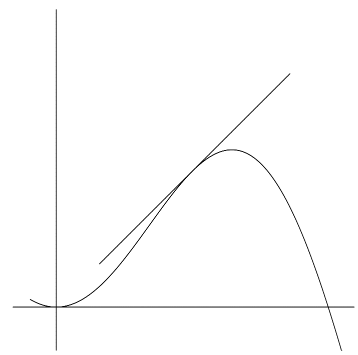
> Calcule a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x \operatorname{sen} x$ no ponto $(\pi/2, \pi/2)$.

O roteiro para a solução deve ser o seguinte:

Primeiro, use as regras de derivação para calcular a função derivada. A resposta deve ser: $f'(x) = \text{sen } x + x \cos x$.

Agora, usamos esta função para determinar a derivada de $f$ no ponto em questão: $f'(\pi/2) = 1$.

Finalmente, usando a fórmula $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, determine a equação da reta tangente pedida no problema. A resposta deve ser $y = x$. Veja o gráfico na figura a seguir.



## Aula 11

Concentre-se nos exercícios de 5 a 10.

## Aula 12

O conteúdo dessa aula será abordado na nossa próxima conversa.

## Considerações finais

O conteúdo que você está estudando é difícil e os progressos só surgirão após algum esforço. Não deixe que as dificuldades lhe abatam o ânimo. Nós estamos fazendo um grande esforço para que o seu trabalho seja produtivo.

Avante!

# Aulas 10 a 12 (continuação)

Toda a sua atenção deve estar voltada para a aula 12 – a Regra da Cadeia.

Esta regra nos ensina a derivar uma função obtida pela composição de outras funções.

## Composição de funções

Considere a seguinte questão: a partir das funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = \cos x$, quantas 'novas' funções podemos criar?

Certamente podemos somá-las, obtendo $y = x^3 + \cos x$.

Além disso, podemos multiplicá-las e dividi-las. Teremos mais variedades ainda se usarmos algumas constantes. Veja algumas dessas funções:

$$
\begin{array}{lll}
y = x^3 \cos x & \qquad & y = 2\,x^3 + 3\cos x \\[2ex]
y = \dfrac{x^3}{\cos x} & & y = \dfrac{\cos x}{5\,x^3} \\[2ex]
y = \dfrac{1}{x^3} + 2\cos x & & y = \dfrac{\pi}{\cos x} - \dfrac{5}{x^3}
\end{array}
$$

Sabendo que $f'(x) = 3x^2$ e $g'(x) = -\operatorname{sen} x$ e usando as regras de derivação apresentadas na aula 10, você é capaz de derivar todas estas funções.

No entanto, há uma outra maneira de gerar 'novas' funções a partir de $f$ e $g$ – a composição de funções.

Você deve ter estudado bem este tema no Pré-Cálculo, mas não custa relembrar as idéias principais.

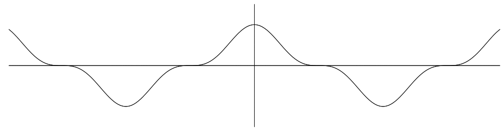
O que é mais surpreendente nessa operação é a sua não comutatividade. Veja, se considerarmos, novamente, $f(x) = x^3$ e $g(x) = \cos x$, obtemos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \cos^3 x$$

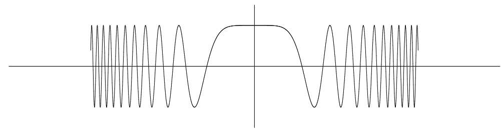
e

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \cos x^3.$$

Isso mostra como a ordem da composição infui no resultado final. Veja o gráfico das funções:



$$y = \cos^3 x$$



$$y = \cos x^3$$

A regra da cadeia nos diz que se $f$ e $g$ são diferenciáveis e a composição pode ser feita, então

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Muito bem, para aplicarmos a fórmula, precisamos saber a ordem em que as funções estão compostas, pois isso é importante na derivação.

Note que, como lemos da esquerda para a direita, ao olharmos para o símbolo $f \circ g$, pensamos em $f$ como sendo a 'primeira' função. Mas, na verdade, a primeira função a atuar na variável $x$ é a função $g$.

A Regra da Cadeia nos diz que 'os últimos serão os primeiros'. Isto é, começamos a derivar pela última função que atua na composição.

Uma maneira segura de descobrir a ordem de composição é tentar calcular a função em algum ponto específico. Veja o caso de $y = \cos^3 x$. Para calcular o valor dessa função no número $\pi/3$, por exemplo, primeiro calculamos $\cos(\pi/3)$, que é $1/2$, e depois elevamos o resultado ao cubo, obtendo $1/8$. Isto é, primeiro calculamos o cosseno e, depois, elevamos o resultado ao cubo.

Vamos derivar!!

Começamos derivando a última função – elevar ao cubo, calculamos o resultado na função que atua primeiro na variável – cosseno, e multiplicamos o resultado pela derivada dessa última função. Aqui está:

$$\begin{aligned} y' &= 3\cos^2 x \cdot (\cos x)' \\ y' &= 3\cos^2 x \cdot (-\operatorname{sen} x) \\ y' &= 3 \operatorname{sen}\ \cos^2 x. \end{aligned}$$

Compare com o uso da fórmula: Se $f'(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$. Assim, $f'(\cos\, x) \;=\; 3\,\cos^2 x$. Como $g'(x) = -\,\text{sen}\; x$, obtemos

$$(f \circ g)'(x) \;=\; 3\,\cos^2 x \cdot (-\,\text{sen}\; x).$$

Veja o que acontece na composição com a ordem invertida:

$$(g \circ f)'(x) \;=\; g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Portanto, se $y \;=\; \cos\, x^3$, obtemos

$$\begin{aligned} y' &= (-\;\text{sen}\; x^3) \cdot (x^3)' \\ y' &= (-\;\text{sen}\; x^3)\, 3x^2 \\ y' &= -\,3x^2\;\text{sen}\; x^3. \end{aligned}$$

Aqui está mais um exemplo. Vamos derivar a função

$$f(x) \;=\; \sqrt{x^2 + \cos\, x},$$

que pode ser vista como

$$f(x) \;=\; (x^2 + \cos\, x)^{1/2}.$$

Aqui temos a função $y = x^2 + \cos\, x$ composta com a função 'alguma coisa elevada a 1/2'. Como esta é a última função na ordem da composição, ela será derivada primeiro:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\,(x^2 + \cos\, x)^{-1/2} \cdot (x^2 + \cos\, x)' \\ f'(x) &= \frac{2x - \text{sen}\; x}{2\,(x^2 + \cos\, x)^{-1/2}}. \end{aligned}$$

Aqui há algumas funções para você derivar:

$$y \;=\; \cos(3x^2 + 2) \qquad\qquad y \;=\; (\cos\, 2x - \text{sen}\; 3x)^6$$

$$y \;=\; \frac{x}{\cos\, 5x^2} \qquad\qquad y \;=\; (x^2 + 2x + 5)^{3/2}$$

Veja também o seguinte problema:

Usando a tabela, calcule as derivadas indicadas.

| $x$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | $g(x)$ | $g'(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | $-2$ | 1 | $-3$ |
| 2 | 0 | 4 | 4 | $-1$ |
| 3 | 2 | 1 | 2 | $-1$ |
| 4 | $-1$ | 2 | 3 | 1 |

(a) $(f \circ g)'(2)$ (b) $(g \circ f)'(1)$

Aqui está a solução de (a):

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(2) &= f'(g(2)) \cdot g'(2) \\ &= f'(4) \cdot g'(2) \\ &= 2 \cdot (-1) \ = \ -2. \end{aligned}$$

Note que a tabela tem mais informações do que realmente precisamos.

Muito bem, você agora tem a "licença" para calcular derivadas!! Pratique seus exercícios e não deixe conteúdo acumulado!

# Aulas 13 a 15

Os principais temas são:

- ∘ derivação implícita;
- ∘ taxa de variação e taxas relacionadas.

O tema da derivação implícita é tecnicamente simples. Você precisará usar a Regra da Cadeia e um pouco de manuseio algébrico para resolver os problemas. Antes de falarmos nisso, vamos aproveitar a ocasião para discutir um pouco mais o conceito de função. Uma função consiste de um conjunto de objetos: o domínio, o contradomínio e sua lei de definição. Por exemplo,

$$f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x-1}.$$

Neste caso, o domínio é $\mathbb{R}-\{1\}$, o contradomínio é $\mathbb{R}$ e a lei de definição é $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Observe que o conjunto imagem é importante mas não é essencial para a descrição da função. O domínio, no entanto, é fundamental na descrição da função. Isso não fica tão evidente no nosso curso, pois usamos a conveniente convenção de que, dada uma lei de definição de uma função, o seu domínio é o maior subconjunto da reta para o qual esta lei faça sentido. Veja, quando apresentamos a função $f(x) = \sqrt{1-x}$, estamos assumindo que seu domínio é $[-\infty, 1]$, que é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ no qual esta lei de definição faz sentido. O próximo exemplo mostrará como o papel do domínio é importante na definição de uma função.

Considere as funções

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty) \qquad \text{e} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

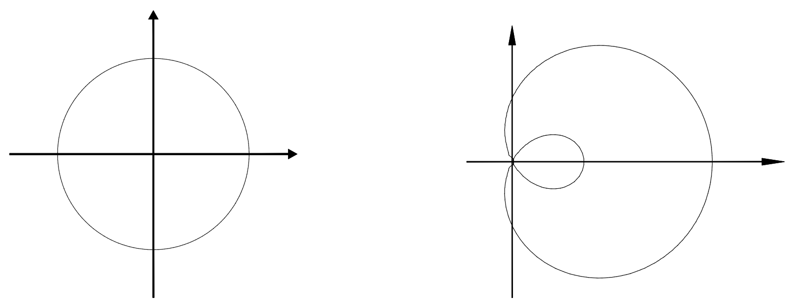
definidas por

$$f(x) = x^2 \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^2.$$

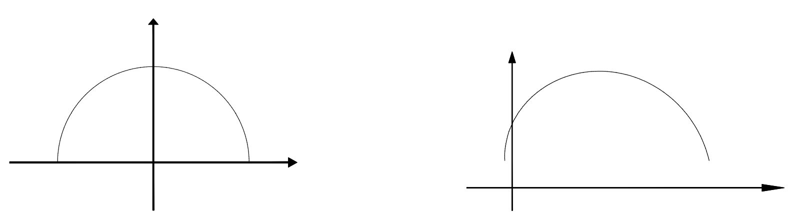
Elas têm a mesma lei de definição, a mesma imagem, porém são muito diferentes. Por exemplo, $f$ é inversível enquanto $g$ não é inversível. Vamos, agora, falar de funções definidas implicitamente.

Quando pensamos em uma função, em geral, pensamos numa lei de definição explícita, mas essa não é a única maneira de apresentar uma função.

Em geral, uma equação do tipo $f(x, y) = c$ define uma curva no plano. Por exemplo, as equações $x^2 + y^2 = 1$ e $(x^2 + y^2 - 3x)^2 - 2(x^2 + y^2) = 0$ definem as seguintes curvas:



Em geral, as curvas obtidas desta forma não são gráficos de funções, pois apresentam pontos múltiplos e auto-interseções. Basta lembrar do teste da reta vertical para verificar quando uma curva é, ou não, o gráfico de uma função. No entanto, se considerarmos partes das curvas, de maneira adequada, elas se tornam gráficos de funções. Por exemplo, se considerarmos o semicírculo superior ou parte da curva definida pela equação $(x^2 + y^2 - 3x)^2 - 2(x^2 + y^2) = 0$:



Portanto, quando olhamos para uma equação do tipo $f(x, y) = c$, sabemos que, feitas as devidas escolhas e restrições, ela define, por exemplo, $y$ como uma função de $x$.

Isto é, tomando um domínio adequado, a equação $f(x, y) = c$ permite estabelecer uma função $y$ de $x$. Vamos a mais um exemplo.

Se tomarmos como domínio o intervalo $[-1, 1]$ e acrescentarmos a informação $y \geq 0$, a equação $x^2 + y^2 = 1$ define $y$ como uma função de $x$. O gráfico desta função é o semicírculo apresentado na figura anterior. Neste caso, a sua lei de definição pode ser explicitada por

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Isto, em geral, não é possível fazer. Veja a segunda equação:

$$(x^2 + y^2 - 3x)^2 - 2(x^2 + y^2) = 0.$$

Quando atribuímos um valor específico para $x$, ganhamos uma equação de grau 4 em $y$. Por exemplo, para $x = 1$, teremos $(y^2 - 2)^2 = 2(1 + y^2)$. Veja que estas equações poderão ter 4 soluções, 3, 2, 1 ou nenhuma.

Portanto, sabemos que dada uma equação $f(x, y) = c$, sob certas restrições, ela define $y$ como uma função de $x$. O que queremos fazer é calcular as derivadas dessas funções. Isto permitirá, por exemplo, calcular retas tangentes a essas curvas.

Para isso, usamos a Regra da Cadeia. Ou seja, derivamos normalmente, levando em conta que $y$ é uma função de $x$.

Veja o caso $x^2 + y^2 = 1$. A derivada de $x^2$ em relação a $x$ é $2x$. A derivada de $y^2$ em relação a $x$ é $2y\dfrac{dy}{dx}$. É aqui que usamos a Regra da Cadeia. Finalmente, a derivada da constante 1 em relação a $x$ é zero.

Colocando tudo isso junto, obtemos que a derivação implícita de $x^2 + y^2 = 1$ em relação a $x$ é

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Assim, obtemos informação sobre $\dfrac{dy}{dx}$, isto é, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$.

Neste exemplo, podemos explicitar $y$ como função de $x$, digamos, em torno do ponto $(0, 1)$. Neste exemplo, temos uma oportunidade de confrontar a versão implícita com a versão explícita Resolvendo $x^2 + y^2 = 1$ na variável $y$, obtemos

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Como queremos $y(0) = 1$, estamos escolhendo a fórmula $y = \sqrt{1 - x^2}$. Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{(-2x)}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

Vamos agora abordar, rapidamente, o outro tema.

## Taxa de variação e taxas relacionadas

A derivada de uma função num dado ponto mede a variação da variável dependente em relação à variável independente.

O exemplo típico é a velocidade, que mede a variação da posição em relação ao tempo.

Os exercícios mais interessantes sobre este tema são chamados de taxas relacionadas. O esquema geral é o seguinte: temos uma situação que relaciona duas grandezas, como uma área e uma largura ou um volume e uma distância. Estas grandezas estão variando em função de algum parâmetro, que é a variável independente. O exemplo típico é tempo. Em geral, as questões fornecem uma taxa de variação de uma das grandezas, e pede a taxa correspondente da outra grandeza. A ferramenta usada para relacionar as duas taxas é um tipo de derivação implícita. Veja um exemplo.

Um recipiente na forma cilíndrica, com raio $1m$, está sendo enchido com água. Sabendo que o volume de água que está sendo despejado no recipiente é de 10 litros por segundo, calcule a velocidade com que o nível da água está subindo quando ele está a 1 metro de altura.

Sabemos que $V = \pi r^2 h = \pi h$.

Derivando em relação a $t$ a equação $V = \pi h$, obtemos $\dfrac{dV}{dt} = \pi \dfrac{dh}{dt}$.

Portanto, $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{1}{\pi}\; m/s$.

# Aulas 16 a 21

Pelo meus cálculos, você acaba de fazer a primeira avaliação presencial desta disciplina. Espero que seus esforços tenham dado frutos. Você já venceu uma grande etapa do curso. Veja quantas coisas você já aprendeu: limites, a noção de continuidade, derivadas...

Cada um desses itens demandou atenção e muito trabalho. No entanto, o domínio deste conteúdo faz sentido, especialmente, quando aplicado para fazer outras coisas. Muito bem, é chegada a hora de usar essas novidades.

A maior parte do módulo 2, que você deverá começar a estudar *imediatamente*, é dedicada aos seguintes temas gerais:

- esboço de gráficos;
- problemas de otimização – máximos e mínimos.

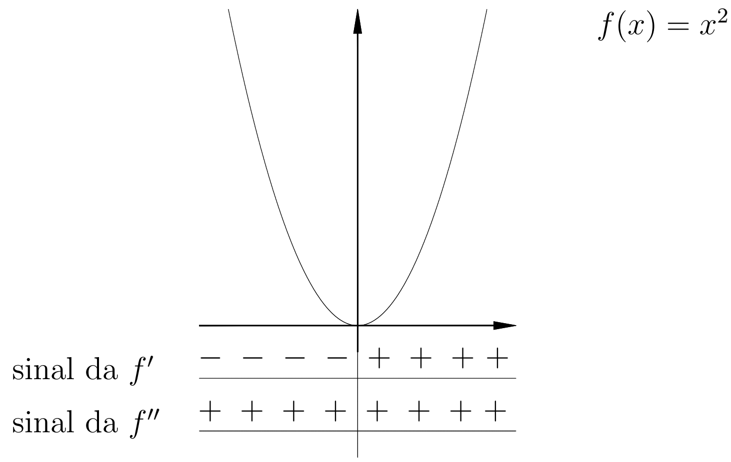
Faça uma leitura rápida da aula 16 – o teorema do valor médio – e avance na leitura da aula 17 em diante.

Em linhas gerais, o sinal da derivada nos dará informações sobre a forma do gráfico da função. Mais ainda, o sinal da derivada da função derivada, chamada de derivada segunda, dará informações sobre como o gráfico se curva.

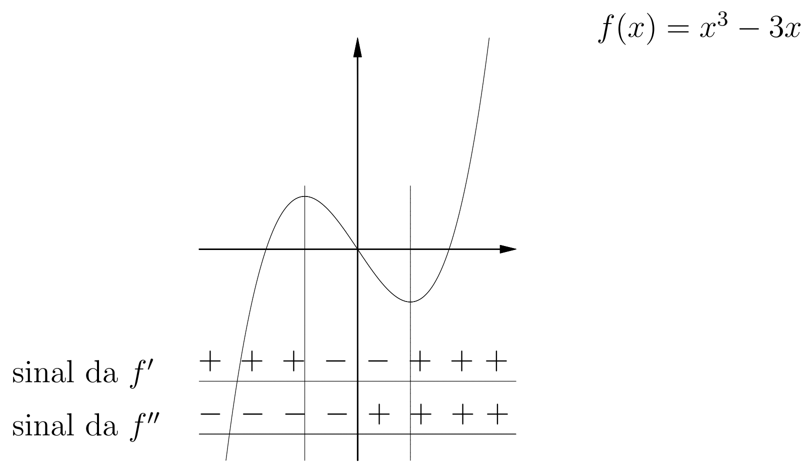
Veja alguns exemplos.

A função $f(x) = x^2$ tem derivada $f'(x) = 2x$, que é positiva no intervalo $(-\infty, 0)$ e é negativa no intervalo $(0, \infty)$. Esta informação 'algébrica' corresponde à seguinte informação 'geométrica': sobre o intervalo $(-\infty, 0)$ o gráfico da função $f(x) = x^2$ é uma curva descendente, enquanto sobre o intervalo $(0, \infty)$ o gráfico da função é uma curva ascendente. Veja que isso é muito razoável: sobre o intervalo $(0, \infty)$ a derivada é sempre positiva, indicando que as retas tangentes ao gráfico têm coeficiente angular positivo, indicando a ascendência.

Além disso, a derivada segunda de $f$, denotada por $f''$, é a derivada da função derivada: $f''(x) = 2$. Note que o sinal desta função é sempre positivo. Isso quer dizer que o gráfico da função está sempre 'curvado para cima'. Veja o gráfico da função com os sinais das derivadas.




Veja outro exemplo. Aqui está o gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x$, cuja derivada é $f'(x) = 3x^2 - 3$ e cuja derivada segunda é $f''(x) = 6x$. Note como os sinais da derivada e da segunda derivada correspondem à forma do gráfico.




Você pode completar a figura determinando os pontos onde o gráfico intersecta os eixos $Ox$ e $Oy$. Determine também os pontos onde a derivada $f'(x)$ e a segunda derivada mudam de sinal. Estes pontos são muito importantes. Há uma completa nomenclatura para eles. Você aprenderá tudo isso nas próximas aulas.

Resumindo:

- Aula 17 – Aborda a interpretação do sinal da derivada da função. As palavras-chave serão: crescimento e decrescimento. Os pontos onde a derivada é igual a zero são especiais. São os chamados ponto *críticos*. Para descobrir o que está acontecendo num ponto crítico isolado, será necessário interpretar o sinal da derivada em torno dele. Lembre-se: a derivada corresponde à velocidade.

- Aulas 18 e 19 – Interpretação do sinal da segunda derivada – a palavra-chave aqui é concavidade. Aqui você aprenderá o que é um ponto de *inflexão*. Isto é, um ponto no qual a função muda a sua concavidade. No caso de $f(x) = x^2$, tal ponto não existe, pois a segunda derivada não muda de sinal. Isto é, a função é sempre *côncava para cima*. No caso de $f(x) = x^3 - 3x$, o ponto $(0, 0)$ é um ponto de inflexão, pois a derivada segunda, $f''(x) = 6x$ muda de sinal, de negativo para positivo, indicando que houve uma inversão de concavidade: de *côncava para baixo* ela passa a ser *côncava para cima*.

- Aula 20 – Aula de exercícios.

- 21 – Máximos e mínimos relativos ou locais – são aqueles pontos nos quais a função passa de crescente para decrescente e vice-versa. Como detectá-los? O que acontece com a derivada da função em tais pontos, caso a função seja diferenciável nestes pontos tão especiais? Bem, você descobrirá tudo isso é muito mais nos próximos dias. Vá em frente!

# Alguns teoremas do Cálculo I

Chegou a hora de darmos atenção aos teoremas apresentados na aula 7 – teorema de Weierstrass e teorema do valor intermediário – e na aula 16 – teorema do valor médio e teorema de Rolle.

Estes teoremas têm um papel fundamental no curso, pois eles dão toda a sustentação teórica para os procedimentos que aqui aprendemos, particularmente nas aplicações das derivadas – tema que você deve estar focalizando nos seus estudos neste momento.

Por exemplo, você deve ter percebido que se duas funções $f$ e $g$, definidas num mesmo intervalo aberto $I$, são diferenciáveis e tais que $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in I$, então $f$ e $g$ diferem por uma constante. Por exemplo, seja $f(x) = \text{sen}^2\, x$ e $g(x) = -\cos^2 x$. Note que, neste exemplo, o intervalo $I$ é toda a reta real ($I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$).

Realmente, $f'(x) = 2\,\text{sen}\,x\,\cos x$ e $g'(x) = -2\,(\cos x)\,(-\,\text{sen}\,x) = 2\cos x\,\text{sen}\,x$. Ora, então $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Veja que, devido à identidade trigonométrica fundamental,

$$\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1,$$

podemos escrever $\text{sen}^2\, x = 1 - \cos^2 x$. Ou seja, $f(x) = g(x) + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Como podemos provar que isso é verdade sem usar a identidade trigonométrica? Ou ainda, como podemos provar a identidade trigonométrica usando o Cálculo? Realmente, se provarmos a afirmação feita para as funções $f$ e $g$, estaremos provando que a identidade trigonométrica é válida.

Lembre-se de que em Matemática queremos saber fazer, mas, principalmente, queremos ter a certeza de que o que estamos fazendo está correto.

Este é o papel destes teoremas.

## Os teoremas do valor intermediário e de Weierstrass

Vamos começar com um exemplo. Sabemos que toda equação do primeiro grau, de uma variável, tem solução. Por exemplo, $2x + 3 = x - 6$ tem solução $x = -9$. No entanto, não podemos dar essa mesma garantia quando lidamos com equações de segundo grau. Por exemplo, $x^2 + 4x + 5 = 0$ não tem solução (pelo menos não no conjunto dos números reais, que é o nosso contexto).

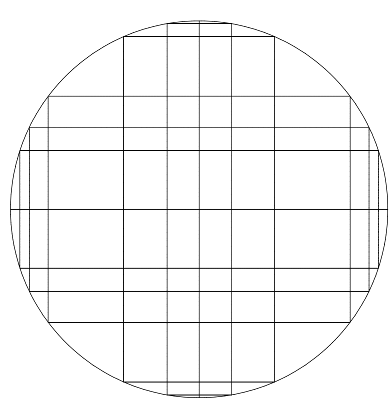
Em geral, dada uma equação $f(x) = c$, saber se ela admite, ou não, solução, é um problema difícil. No caso de quações de segundo grau, da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, temos um critério que permite determinar se a equação admite, ou não, solução. Basta calcular o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ e comparar com 0. Mas, e os outros casos? Não estamos falando apenas de equações polinomiais, como $x^3 + 3x^2 - 5x + 7 = 4$ ou $x^4 - 3x + 8 = \sqrt{2}$. Estamos levando em conta, também, as funções chamadas transcendentais, como $x + \ln x = \text{sen } 2x$. Veja, o enfoque não é determinar a solução, mas saber se existe alguma. Interessante, não é?

Uma ferramenta que nos permite atacar este problema é o chamado teorema do valor intermediário, enunciado na aula 7 como o teorema 7.2. Por exemplo, este teorema nos diz que, se uma função $f$ definida num intervalo $[a, b]$ é contínua e tal que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, então existe um número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Consideremos a última equação: $x + \ln x = \text{sen } 2x$. Podemos reescrevê-la da seguinte maneira:

$$x + \ln x - \text{sen } 2x = 0.$$

Considere a função $f(x) = x + \ln x - \text{sen } 2x$. A equação terá solução se, e somente se, existir um número $c$ tal que $f(c) = 0$. Note que o domínio de $f$ é o intervalo aberto $(0, \infty)$, onde ela é contínua (pois é soma de funções contínuas). Como $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, podemos tomar um número $a > 0$, próximo de 0, tal que $f(a) = a + \ln(a) - \text{sen } 2a < 0$. Além disso, $\lim\limits_{x \to \infty} (x + \ln x) = \infty$ e, portanto, existe um número $b > a$ tal que $f(b) = b + \ln(b) - \text{sen } 2b > 0$. Assim, podemos aplicar o teorema do valor intermediário na função $f$ restrita ao intervalo $[a, b]$. O teorema afirma que entre $a$ e $b$ há um ponto $c$ tal que $f(c) = c + \ln(c) - \text{sen } 2c = 0$. Assim, o número $c$ é uma solução para $x + \ln x - \text{sen } 2x = 0$. Use uma calculadora para encontrar uma aproximação da raiz. Busque algo em torno de 1.

Agora, outro cenário. Vamos considerar o problema de encontrar o retângulo de maior área que pode ser inscrito num dado círculo.



A figura mostra que se tentarmos aumentar bastante um dos lados, o outro tornar-se-á, necessariamente, muito pequeno, fazendo com que a área também seja pequena. Isso nos leva a colocar todas as nossas esperanças no quadrado inscrito no círculo, não é mesmo?

Pois bem, no entanto, devemos considerar, primeiramente, a questão da existência da solução. Muito bem, organizemo-nos!

Vamos considerar a família de retângulos cujos lados são verticais ou horizontais. Assim, podemos falar de altura e largura. Veja que, como dissemos antes, quanto mais largo, mais baixo será o retângulo, enquanto se tomarmos retângulos cujas alturas estejam próximas do diâmetro vertical, as áreas também serão pequenas. Logo, se a solução existir, não se encontrará nos extremos.

Além disso, se tomarmos retângulos muito baixos e formos aumentando sua altura, apesar de a altura estar diminuindo, a área estará aumentando. Prosseguimos assim até uma certa altura 'limite' quando, apesar de a altura continuar a crescer, a área passará a diminuir.

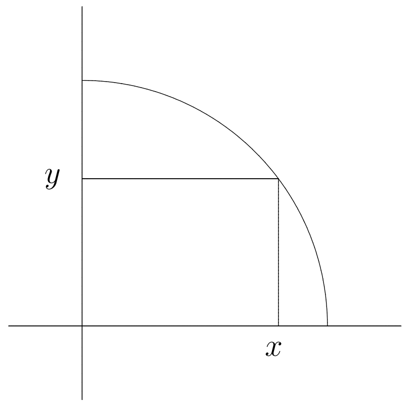
Essa descrição do problema nos leva crer no seguinte:

- O problema tem solução. Isto é, tal altura 'limite' existe.
- Nossa cultura platônica nos leva crer que a resposta é o quadrado. Isto é, a maior área ocorre quando a altura é igual à largura.

Estamos certos nas duas instâncias! A primeira afirmação é verdadeira porque podemos reformulá-la de maneira matemática e usar o teorema de Weierstrass, que está enunciado na aula 7 como o teorema 7.1, para garantir a existência de um retângulo com maior área do que todos os outros.

Vejamos como isso é possível. Para facilitar um pouco, vamos considerar apenas o quarto do círculo, que será considerado de raio 1 e centrado na origem do sistema cartesiano, com os respectivos quartos de retângulos que estão no primeiro quadrante. Se resolvermos este problema, a resposta do problema original também estará resolvido, bastando quadruplicar tudo.

Agora, denotaremos a largura do retângulo por $x$ e a sua altura por $y$. Veja a figura:




Usando a equação do círculo, $x^2 + y^2 = 1$, obtemos $y = \sqrt{1 - x^2}$ e, portanto, a área do quarto do retângulo é

$$A(x) \; = \; x\,\sqrt{1 - x^2}.$$

Veja que $x \in [0, 1]$. Queremos saber se a função $A(x) = x\,\sqrt{1 - x^2}$, definida no intervalo $[0, 1]$, tem um valor máximo. Ora, tal função é contínua e o teorema de Weierstrass se aplica. Veja o teorema:

**Teorema:**

*Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$, então existem $x_1$ e $x_2 \in [a, b]$ tais que*

$$f(x_1) \;\leq\; f(x) \;\leq f(x_2)$$

*para todo $x \in [a, b]$.*

Assim, em $x_1$ a função assume seu menor valor e em $x_2$ assume seu maior valor.

No caso que estamos estudando, $f(x) = A(x)$, $a = 0$ e $b = 1$. Note que, como $A$ é uma área obtida do produto de duas grandezas positivas, ($x \in [0, 1]$ e $\sqrt{1 - x^2} \in [0, 1]$) vale $A(x) \geq\; 0$. Portanto, podemos tomar para $x_1$ tanto 0 como 1:

$$0 \;=\; A(0) \;=\; A(1) \;\leq\; A(x),\; \forall x \in [0, 1].$$

O teorema nos diz que existe um número $x_2$, contido no interior de $[0, 1]$, no qual $A$ assume seu maior valor. A existência de tal valor $x_2$ corresponde à existência do retângulo de maior área, inscrito no círculo.

No entanto, o teorema não nos dá uma indicação do paradeiro de tal ponto.

Para detectá-lo, precisamos de mais informações. É nesse ponto que deixamos a matemática grega e mudamo-nos, de armas e bagagens, para o século XVII, para os dias de Leibniz e Newton. Com isso, vamos para a aula 16, na qual são apresentados o teorema do valor médio (teorema 16.1) e o seu alter ego, o teorema de Rolle (teorema 16.2).

## Teorema do valor médio e teorema de Rolle

Estes dois teoremas diferem bastante dos dois teoremas apresentados anteriormente: as suas hipóteses são mais restritivas – eles se aplicam apenas quando as funções são *diferenciáveis*, enquanto os teoremas anteriores requerem apenas continuidade das funções.

Você deve lembrar-se de que toda função diferenciável é contínua, mas nem toda função contínua é diferenciável. O exemplo mais comum é a função valor absoluto $f(x) = |x|$, que é contínua, mas não é diferenciável, pois não admite derivada no ponto $x = 0$.

Você sabia que Weierstrass foi o primeiro matemático a apresentar um exemplo de uma função contínua que não tem derivada em *nenhum* de seus pontos? Espantoso, não é? Bem, essa é uma outra história e ficará para outro dia.

O teorema de Rolle nos diz que, sob certas condições, uma certa função $f$ admite um ponto crítico. Isto é, um ponto $c$ tal que $f'(c) = 0$.

### Teorema de Rolle

*Se* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua em* $[a, b]$ *e diferenciável em* $(a, b)$ *com* $f(a) = f(b)$*, então existe pelo menos um ponto* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$*.*

O teorema do valor médio parece mais complicado mas, na verdade, é equivalente ao teorema de Rolle. Uma vez provada esta equivalência, para provarmos ambos os teoremas basta que provemos um deles.

### Teorema do valor médio

*Se* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua em* $[a, b]$ *e diferenciável em* $(a, b)$*, então existe pelo menos um ponto* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Se soubermos que o teorema do valor médio é verdadeiro e acrescentarmos a informação de que $f(a) = f(b)$, obtemos a prova do teorema de Rolle, pois

$$f'(c) \;=\; \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \;=\; 0.$$

Veja, agora, como é possível provar o teorema do valor médio supondo que o teorema de Rolle é verdadeiro.

Assumindo as hipóteses do teorema do valor médio, consideramos a função

$$g(x) \;=\; f(x) \;-\; f(a) \;-\; \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a).$$

A função $g$ é contínua e/ou diferenciável onde $f$ é contínua e/ou diferenciável. Além disso, $g(a) = g(b) = 0$, como você pode constatar facilmente. Portanto, o teorema de Rolle aplica-se à função $g$ e concluímos que existe um número $c \in (a, b)$, tal que $g'(c) = 0$. Agora, a derivada de $g$ é dada por

$$g'(x) \;=\; f'(x) \;-\; \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Como $g'(c) \;=\; 0$, podemos observar que $f'(c) \;=\; \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, como queríamos.

A uma primeira vista, a função $g$ parece tirada da cartola, mas não é bem assim. Na verdade, a função $g$ é a diferença entre a função $f$ e a função cujo gráfico é a reta que contém os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e, portanto, tem coeficiente angular $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Realmente, se colocarmos $m \;=\; \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, a função definida por

$$r(x) \;=\; m\,(x - a) + f(a)$$

é uma função cujo gráfico é uma reta de coeficiente angular $m$. Além disso,

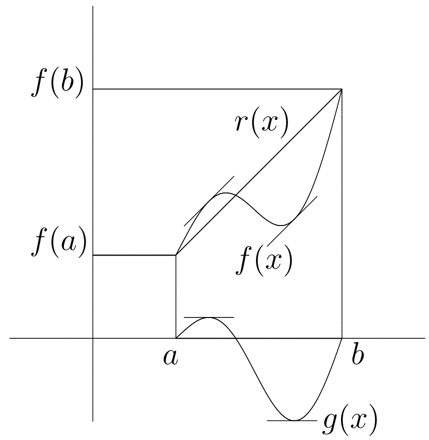
$$r(a) = m\,(a - a) + f(a) = f(a)$$

e

$$r(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(b - a) + f(a) = f(b) - f(a) + f(a) = f(b).$$

Isto é, a reta $r$ é definida pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

A função $g(x)$ é a diferença entre a função $f(x)$ e a reta $r(x)$. Nos pontos onde as retas tangentes ao gráfico de $g$ são horizontais (teorema de Rolle), as retas tangentes ao gráfico de $f$ serão paralelas à reta $r(x)$ e, portanto, têm derivada $m \;=\; \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Veja a figura:




Para provar o teorema de Rolle, usamos o teorema de Weierstrass. Você pode dar uma olhada em como isso é feito, por exemplo, no livro *Um curso de Cálculo*, volume 1, de Hamilton Guidorizzi. Caso faça isso, não deixe de ler, também, o teorema de Cauchy, a seguir:

**Teorema de Cauchy**

*Se $f$ e $g$ são contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em $(a, b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$(f(b) - f(a))g'(c) \; = \; (g(b) - g(a))f'(c)$$

*ou, se $g(b) \neq g(a)$ e $g'(c) \neq 0$, então*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} \; = \; \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Note que o teorema de Cauchy é uma generalização do teorema do valor médio. Para ver isto, basta tomar $g(x) = x$, a função identidade.

O 'nó de Górgio', realmente, é demonstrar os teoremas de Weierstrass e do valor intermediário. As demonstrações destes teoremas fogem do escopo de um curso de Cálculo. Elas são, em geral, apresentadas nos cursos de Análise Matemática.

Para ilustrar o uso do teorema do valor médio, vamos provar o seguinte.

**Teorema**

*Seja $f$ uma função diferenciável definida num intervalo aberto $I$. Se $f'(x) \; = \; 0$ para todo $x \in I$, então $f(x) = c$, para todo $x \in I$.*

Veja que a hipótese 'definida num intervalo aberto $I$' é crucial. Por exemplo, considere $f(x) \; = \; \begin{cases} 1 & \text{se } \; x < 0 \\ -1 & \text{se } \; x > 0. \end{cases}$

Esta função tem derivada igual a zero em todos os pontos de seu domínio, mas não é constante, pois $f(-2) = 1$ e $f(1) = -1$. Note que $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R} - \{0\}$ não é um intervalo.

*Prova do teorema*

Suponhamos que existam dois pontos $x_1$ e $x_2 \in I$, tais que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Como $f$ está definida no intervalo $I$, o intervalo $[x_1, x_2] \subset I$ e podemos considerar $f$ restrita ao intervalo menor. Continuaremos a chamar de $f$ a função restrita ao intervalo $[x_1, x_2]$. (Aqui foi fundamental o fato de $f$ estar definida num intervalo.) Ora, $f$ é contínua em $[x_1, x_2]$ e diferenciável em $(x_1, x_2)$, pois já era isso tudo no intervalo maior $I$. Assim, podemos usar o teorema do valor médio que afirma existir um número $c \in (x_1, x_2)$, tal que $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Como $f(x_1) \neq f(x_2)$, temos $f'(c) \neq 0$, contrariando a hipótese de que $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$. Logo, a possibilidade $f(x_1) \neq f(x_2)$ deve ser descartada. Portanto, a função é constante em $I$.

Você pode usar o teorema que acabamos de mostrar para provar a seguinte proposição:

**Proposição**

*Sejam $f$ e $g$ funções diferencenciáveis definidas num intervalo aberto $I$, tais que $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in I$. Então, as funções $f$ e $g$ diferem por uma constante.*

Isto é, existe uma constante $C$, tal que $f(x) = g(x) + C$.

Veja que este resultado prova, por exemplo, a identidade trigonométrica fundamental, conforme vimos no início deste capítulo.

Os teoremas de Rolle e do valor médio desempenham papel fundamental na demonstração de fatos que usaremos nas próximas aulas. Por exemplo, se $f'(x) > 0$ em todos os pontos de um intervalo $I$, então $f$ é crescente neste intervalo. Outro exemplo: se $x_0$ é um ponto máximo local de $f$ e $f$ é diferenciável em $x_0$, então $f'(x_0) = 0$. Ou seja, os pontos máximos locais ocorrem nos pontos críticos quando $f$ é diferenciável. Por isso os pontos críticos são tão importantes.

Vamos terminar esta conversa sobre os teoremas com a seguinte aplicação: o quadrado é o retângulo de maior área que pode ser inscrito num círculo.

Temos de achar o máximo da função $A(x) = x\sqrt{1-x^2}$ no intervalo $[0,1]$. Já sabemos que ele existe, que $A(x) \geq 0$ e que, nos extremos do intervalo, 0 e 1, a função assume seu menor valor: zero.

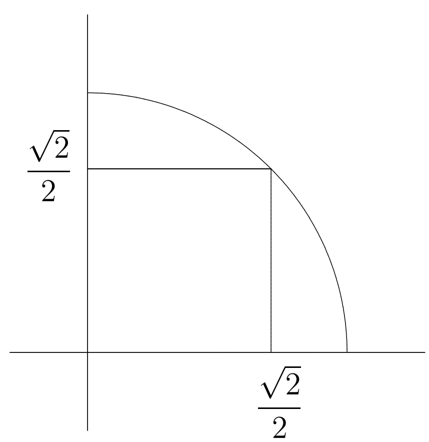
Concluímos que o máximo ocorre no interior do intervalo e, portanto, também é um máximo local. Como $A(x)$ é diferenciável em $(0,1)$, o ponto que procuramos se encontra entre os pontos críticos da função (os pontos críticos são os eternos suspeitos...).

Portanto, aos pontos críticos de $A(x)$. No entanto, no lugar de $A(x)$ vamos lidar com $f(x) = \big(A(x)\big)^2$. Veja, os pontos críticos de $A(x)$ também são pontos críticos de $f(x)$ (a Regra da Cadeia, minha gente...) e $f(x) = x^2\,(1-x^2)$ é uma função bem mais simples de derivar.

Então, vamos:

$$f'(x) = 2x\,(1-x^2) + x^2\,(-2x) = 2x\,(1-2x^2).$$

Para calcular os pontos críticos de $f$, temos de resolver a equação $f'(x) = 0$. Isso acontece se, e somente se, $x = 0$ ou $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. O único destes três números que pertence ao intervalo $(0,1)$ é o número $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto, o único suspeito é o ponto onde o maior valor ocorre. Como $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ corresponde ao sen $\pi/4$, o ângulo de $45^o$, confirmamos que a maior área ocorre quando a largura do retângulo é igual à sua altura.




**Exercício**

Calcule o cilindro de maior volume que pode ser inscrito numa esfera.

P.S.: Uma aproximação para a solução da equação $x + \ln x - \text{sen}\ 2x = 0$ é $0,9674809056$.

ISBN 85-89200-26-4

9 788589 200264

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
UERJ

Universidade Federal Fluminense
uff

UNIVERSIDADE DO BRASIL

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

UNIRIO

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL